



**HAL**  
open science

## Une introduction aux points massiques

Lionel Garnier, Jean-Paul Becar, Lucie Druoton

► **To cite this version:**

Lionel Garnier, Jean-Paul Becar, Lucie Druoton. Une introduction aux points massiques. CNRIUT 2017, IUT, May 2017, AUXERRE, France. hal-02476691

**HAL Id: hal-02476691**

**<https://uphf.hal.science/hal-02476691v1>**

Submitted on 12 Feb 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une introduction aux points massiques

Lionel GARNIER<sup>1</sup>, Jean-Paul BECAR<sup>2</sup>, Lucie DRUOTON<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LE2i, FRE CNRS 2005, Arts et Métiers, Université de Bourgogne Franche Comté, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, lionel.garnier@u-bourgogne.fr

<sup>2</sup>LAMAV, CNRS 2956, IUT Le Mont-Houy, 59313 Valenciennes cedex 9, jean-paul.becar@univ-valenciennes.fr

<sup>3</sup>IMB, UMR CNRS 5584, Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, lucie.druoton@u-bourgogne.fr

**THEMATIQUE** - Informatique - Robotique - Imagerie - Electronique

**RESUME:** L'article présente une série de résultats du domaine de la conception géométrique et fabrication assistée par ordinateur. Les courbes planes sont modélisées par des courbes Bézier rationnelles connues par la donnée de points massiques de contrôle. Le cas des coniques illustre ce mode de représentation. Une hyperbole peut ainsi être définie par un point pondéré et deux vecteurs purs. L'hyperbole est ensuite tracée sur un hyperboloïde à une nappe. La forme quadratique non dégénérée et non positive attachée à l'hyperboloïde permet de voir la quadrique comme une sphère unité. Ces travaux constituent un premier pas vers l'espace de Minkowski-Lorentz et l'espace des sphères sur lequel les surfaces canal sont définies comme en particulier les cyclides de Dupin. Ces objets trouvent leurs applications en géométrie de la CAO.

**Mots-clés :** Hyperbole, points massiques, courbes de Bézier,

## 1. INTRODUCTION

Deux personnes ont défini les mêmes outils afin de résoudre leurs problèmes de modélisation en CFAO dans leurs industries respectives, Pierre Bézier chez Renault et Paul de Casteljau chez Citroën. P. Bézier a laissé son nom aux courbes tandis que P. de Casteljau a donné son nom à un algorithme de construction [1]. Dans la famille des courbes, les courbes de Bézier de degré 2 rationnelles, occupent une grande place en modélisation géométrique [2,3]. Elles permettent de représenter des arcs de coniques à l'aide de points pondérés. Le formalisme des courbes de Bézier à points massiques de contrôle s'étend à toute dimension et ne dépend pas de la forme quadratique considérée [4,5]. Par exemple, une hyperbole peut être définie par un point pondéré et deux vecteurs purs. Des changements de paramétrisation serviront à déterminer ses éléments caractéristiques comme le foyer et la directrice. Des transformations massiques fourniront des résultats semblables. L'hyperbole tracée sur un hyperboloïde à une nappe, donne matière au traitement de surfaces canal. La forme quadratique définie et non positive attachée à l'hyperboloïde permet de voir la quadrique comme une sphère unité. C'est ce qui est examiné ici. Plus généralement, les coniques sous la forme de courbe

Bézier rationnelle quadratique à points massiques de contrôle sont plongées dans l'espace de Lorentz qui généralise l'espace temps de Minkowski. L'espace de Lorentz contient alors l'espace des sphères dont les enveloppes constituent des surfaces canal [6]. Les cyclides de Dupin constituent des exemples célèbres de surfaces canal [7]. Elles apparaissent dans des applications physiques comme les cristaux d'écran LCD ou bien des applications biologiques comme les liposomes. L'article est composé de la façon suivante. La section 2 est un rappel des principales définitions des points massiques et des courbes de Bézier rationnelles quadratiques. La section 3 décrit les coniques prises sur un hyperboloïde à une nappe vu comme une sphère unité. Elle sert d'introduction à la section 4 qui présente l'espace de Lorentz. La dernière section tire quelques conclusions et propose un certain nombre de perspectives pour la suite des travaux.

## 2 COURBES BEZIER RATIONNELLES

### 2.1 Points massiques et opérations sur $\tilde{P}$

L'ensemble des vecteurs du plan vectoriel  $\vec{P}$  et des points pondérés du plan affine sont regroupés dans l'espace  $\tilde{P}$  défini par :

$$\tilde{P} = (P \times \mathbb{R}^*) \cup (\vec{P} \times \{0\})$$

et il est possible d'identifier  $\tilde{P}$  à  $\vec{\mathcal{E}}_2 = \vec{P} \oplus \mathbb{R}$ . L'idée est de considérer le plan affine  $\mathcal{P}$  comme un hyperplan de d'équation  $\omega = 1$ . La coordonnée supplémentaire  $\omega$  représente le poids du point pondéré. Un point massique est alors, soit un point pondéré du plan  $\mathcal{P}$  soit un vecteur du plan vectoriel  $\vec{P}$  affecté d'un poids nul. L'espace  $\tilde{P}$  est aussi connu sous le nom d'espace universel.

Opérations sur  $\tilde{P}$  : sur l'espace  $\tilde{P}$ , l'addition  $\oplus$  est définie par :

- $(M; \omega) \oplus (N; \mu) = (M; \omega) \oplus (N; -\omega) = (\overline{NM}; 0)$  si  $\omega + \mu = 0$
- $(M; \omega) \oplus (N; \mu) = (\text{bar}\{(M; \omega), (N; \mu)\}; \omega + \mu)$  si  $\omega + \mu \neq 0$  où  $\text{bar}\{(M; \omega), (N; \mu)\}$  désigne le barycentre de  $(M; \omega)$  et  $(N; \mu)$
- $(\vec{u}; 0) \oplus (\vec{v}; 0) = (\vec{u} + \vec{v}; 0)$

- $(M; \omega) \oplus (\vec{u}; 0) = (\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega} \vec{u}}(M); \omega)$  où  $\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega} \vec{u}}$  est la translation de  $\mathcal{P}$  de vecteur  $\vec{u}$ .

sur l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}$ , la multiplication par un scalaire est définie par :

- $\alpha \odot (M; \omega) = (M; \alpha \cdot \omega)$  si  $\alpha \neq 0$
- $0 \odot (M; \omega) = (\vec{0}; 0)$  si  $\alpha \neq 0$
- $\alpha \odot (\vec{u}; 0) = (\alpha \cdot \vec{u}; 0)$

Dans la suite, l'associativité de l'opérateur  $\oplus$  d'addition des points massiques, montre une autre manière de calculer et de caractériser le centre de gravité d'un triangle.

Soit  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ . Il vient

$$(G; 3) = (A; 1) \oplus (B; 1) \oplus (C; 1) = (A; 1) \oplus (A'; 2) \text{ où } A' \text{ est le milieu de } BC.$$

$$(G; 3) = (A; 1) \oplus (A'; -1) \oplus (A'; 3) = (\overrightarrow{AA'}; 0) \oplus (A'; 3)$$

d'où

$$(G; 3) = (\mathcal{T}_{\frac{1}{3} \overrightarrow{AA'}}(A'); 3)$$

ainsi  $G$  est situé au tiers de la médiane depuis  $A'$ .

Un autre calcul de  $G$  donne :

$$\begin{aligned} (G; 3) &= (A; 3) \oplus (A; -1) \oplus (B; 1) \oplus (A; -1) \oplus (C; 1) \\ &= (A; 3) \oplus (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}; 0) = (A; 3) \oplus (\overrightarrow{2AA'}; 0) \\ &= (\mathcal{T}_{\frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}}(A); 3) \end{aligned}$$

ce qui indique que  $G$  est au deux tiers de la médiane depuis le sommet  $A$ . Les calculs repris pour  $B$  et  $C$ , montrent la classique propriété de l'appartenance du centre de gravité aux trois médianes du triangle. L'associativité du barycentre est ainsi généralisée aux vecteurs.

Les opérations  $\oplus$  et  $\odot$  permettent de définir une courbe de Bézier rationnelle à points massiques de contrôle de la façon suivante. Soit  $i$  un entier de  $[0..n]$  et  $M_i$  les  $n+1$  points massiques de contrôle. La courbe Bézier rationnelle est l'ensemble des points  $M(t)$  tels que :

$$M(t) = \bigoplus_{i=0}^n B_i^n(t) \odot M_i$$

avec  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$  le  $i$ ème polynôme de Bernstein de degré  $n$ .

Lorsque  $n=2$ , les courbes définies par des points pondérés et/ou des vecteurs purs sont des coniques propres. Elles sont étudiées dans la suite.

### 2.2 Courbes Bézier rationnelle de degré 2 dans $\tilde{\mathcal{P}}$

Une conique BR est une courbe de Bézier rationnelle quadratique à points massiques de contrôle. Elle est définie à partir des polynômes de Bernstein suivants :

$$B_0^2(t) = (1-t)^2; B_1^2(t) = 2t(1-t); B_2^2(t) = t^2$$

et des points pondérés de contrôle  $(P_i; \omega_i \neq 0)$  avec  $i=0..2$ .

C'est l'ensemble des points  $M(t)$  tels que :

$$M(t) = \bigoplus_{i=0}^2 B_i^2(t) \odot (P_i; \omega_i)$$

Elle est notée  $BR\{(P_0; \omega_0)(P_1; \omega_1)(P_2; \omega_2)\}$

Le plus souvent le réel  $t$  décrit l'intervalle  $[0,1]$ . Le dénominateur dans l'expression de  $M(t)$  est une expression du second degré. Son discriminant renseigne sur la nature de la conique. Il vaut  $\Delta = \omega_1^2 - \omega_0 \cdot \omega_2$ . Selon qu'il est positif, nul ou négatif, la conique est une hyperbole, une parabole ou une ellipse respectivement. Des changements de paramètre adéquats fourniront une description particulière de la conique donnant les invariants de la conique considérée. L'exemple de l'hyperbole est traité dans la suite.

### 2.3 Cas de l'hyperbole

Sur l'hyperbole  $BR\{(P_0; \omega_0)(P_1; \omega_1)(P_2; \omega_2)\}$  est appliqué un changement de paramètre homographique. Le changement de paramètre homographique modifie les points massiques de contrôle sans en augmenter le nombre. La nouvelle description de la courbe est donnée par  $BR\{(\vec{W}_0; 0)(Q_1; 1)(\vec{W}_2; 0)\}$  où les vecteurs sont de même norme et dirigent les asymptotes (voir figure 1). Le point pondéré est le centre de l'hyperbole. En choisissant pour repère orthonormé  $(Q_1, \vec{i}, \vec{j})$  l'équation de l'hyperbole est alors

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } a = \frac{\|\vec{W}_0 + \vec{W}_2\|}{2}, b = \frac{\|\vec{W}_0 - \vec{W}_2\|}{2}$$

### 3. CONIQUES ET DROITES SUR UN HYPERBOLOÏDE À UNE NAPPE VU COMME UNE SPHÈRE UNITÉ

Une conique est souvent définie comme section d'un cône de révolution par un plan. Le sommet du cône est alors un point singulier. Le choix d'une surface réglée comme l'hyperboloïde  $H$  à une nappe permet de s'affranchir du point singulier. Son équation est donnée par :

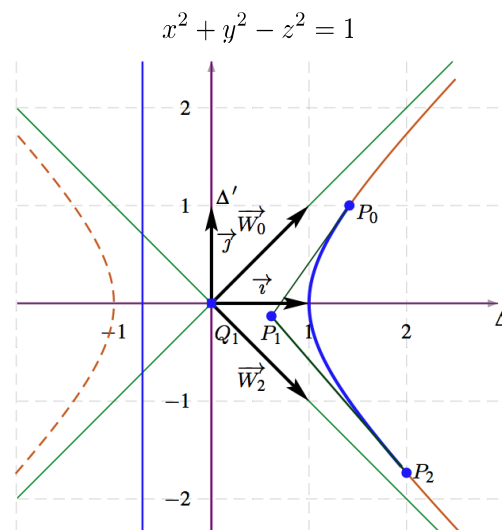


Figure 1. Arc d'hyperbole défini par deux jeux de points massiques

La forme quadratique induite par l'équation de  $H$  est définie par  $Q(\vec{u}) = x^2 + y^2 - z^2$  avec  $\vec{u}(x, y, z)$ . Le signe de  $Q(\vec{u})$  qualifie la nature du vecteur d'après la terminologie donnée par Minkowski. Selon que  $Q(\vec{u})$  est positif, nul ou négatif, le vecteur est qualifié de type-espace, type-lumière ou type-temps.

L'hyperboloïde est traité, pour la forme quadratique  $Q$ , comme une sphère unité. Un cercle de rayon non nul sur cette sphère est modélisé par une courbe  $BR\{(\vec{W}_0; 0)(O_0; 1)(\vec{W}_2; 0)\}$  ou  $BR\{(-\vec{W}_0; 0)(O_0; 1)(-\vec{W}_2; 0)\}$  voir figure 2 à gauche. Un cercle de rayon nul est vu comme la réunion de 2 droites voir figure 2 à droite.

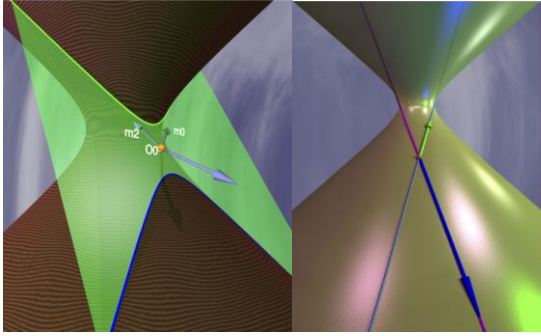


Figure 2. à gauche : Deux branches d'un cercle ; à droite : un cercle de rayon nul union de deux droites.

L'exemple précédent est une introduction à l'espace de Lorentz. Cet espace est caractérisé par une forme quadratique. Cette dernière définit l'espace des sphères orientées et des plans orientés. Les courbes de Bézier rationnelles quadratiques sont plongées dans cet espace, facilitant la gestion des surfaces canal et cyclides de Dupin pour de nouvelles applications en CAO.

#### 4 ESPACE DE LORENTZ

La forme quadratique de Lorentz est définie sur  $\mathbb{R}^5$  à partir de la base canonique  $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_\infty)$  par

$$Q(\vec{u}) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0.x_\infty$$

où  $\vec{u}(x_0, x, y, z, x_\infty)$ . Les termes vecteurs de type temps, lumière et espace s'appliquent ici. Dans l'espace de Lorentz, deux objets jouent un rôle essentiel. Il s'agit du cône  $C_l$  dit cône de lumière et de l'espace des sphères orientées et des plans orientés noté  $\Lambda^4$  appelé hyper-sphère unité. Une sphère orientée de  $\mathbb{R}^3$  est ainsi représentée par un point de  $\mathbb{R}^5$ . Le cône de lumière admet pour équation :

$$Q(\vec{O}_5 \vec{M}) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0.x_\infty = 0$$

où  $M(x_0, x, y, z, x_\infty)$  dans le repère  $(O_5, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_\infty)$  et l'hyper-sphère unité  $\Lambda^4$  a pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0.x_\infty = 1$$

Il est alors possible de plonger  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^5$  par l'emploi du paraboloidé d'équation (voir figure 3) :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x_\infty = 0 \end{cases}$$

Il est obtenu en coupant le cône de lumière  $C_l$  par le plan d'équation  $(x_0 = 1)$ . Un tel paraboloidé est alors isométrique à  $\mathbb{R}^3$  (figure 3). Sur  $\mathbb{R}^5$  la forme quadratique  $Q$  restreinte à  $\mathbb{R}^3$  est exactement celle associée au produit scalaire euclidien usuel sur  $\mathbb{R}^3$ . Les sphères de  $\mathbb{R}^3$  seront des points de  $\Lambda^4$  (figure 4). Plus généralement, modéliser une famille à un paramètre de sphères orientées comme un faisceau de sphères ou une surface canal revient à tracer une courbe sur l'hyper-sphère unité  $\Lambda^4$ . Cette courbe est une conique dans le cas des faisceaux de sphères ou de cyclides de Dupin.

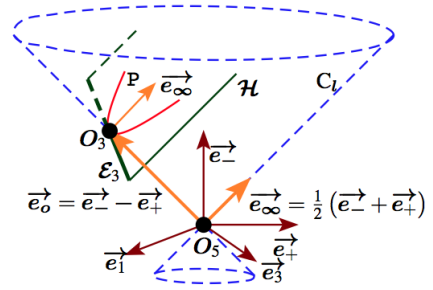


Figure 3. Le cône de lumière  $C_l$ , l'hyperplan affine  $H$  et le paraboloidé  $P$  isométrique à  $\mathbb{R}^3$ .

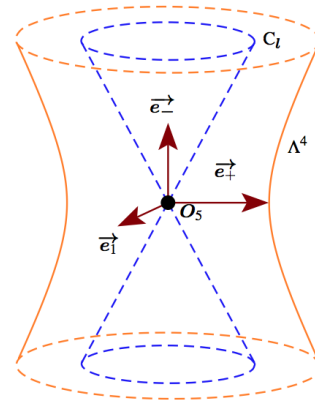


Figure 4. L'hyper-sphère unité  $\Lambda^4$

#### 5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cet article, nous avons généralisé la notion de barycentre et regroupé dans le même ensemble, celui des points massiques, les points pondérés de poids non nul du plan affine et les vecteurs du plan vectoriel muni d'un poids nul. Dans cet espace, nous avons ensuite généralisé les courbes de Bézier rationnelles quadratiques et, en partant de la définition classique représentant un arc connexe d'hyperbole, nous avons effectué quelques reparamétrisations afin de représenter une branche de cette même hyperbole : les premier et dernier points massiques de contrôle de la courbe de Bézier sont deux vecteurs, de même norme et directeurs de chacune des asymptotes de cette hyperbole. Nous avons aussi pu déterminer les paramètres de cette hyperbole à partir de cette représentation. Dans un second temps nous avons proposé une application qui n'est ni possible avec la représentation classique, ni en utilisant les coordonnées homogènes. Nous avons choisi une surface doublement réglée, un hyperboloïde de révolution à une nappe, ainsi qu'une forme quadratique de signature (2,1) afin de manipuler cette quadrique comme une sphère unité. En utilisant cette même forme quadratique, nous avons pu tracer sur la sphère unité des branches de cercles (de rayon non nul) qui se tracent comme des hyperboles et des branches de cercles de rayon nul qui sont l'union de deux droites. Le choix de cet exemple a été motivé par d'autres applications dans l'espace des sphères orientées de l'espace de Lorentz.

L'espace de Lorentz est  $\mathbb{R}^5$  muni d'une forme quadratique de signature (4,1). Dans cet espace, nous avons un modèle isométrique à  $\mathbb{R}^3$  où les points sont modélisés par des vecteurs

de type lumière. De plus, la sphère unité  $\Lambda^4$  de dimension 4 appelée espace des sphères, de l'espace de Lorentz représente les sphères et plans orientés de  $\mathbb{R}^3$ . Les surfaces canal de  $\mathbb{R}^3$  deviennent des courbes sur  $\Lambda^4$ . Sur cette sphère unité, les cercles qui se tracent comme des hyperboles sont soit des faisceaux de sphères de Poncelet ou à points limite, soit des cyclides de Dupin (cônes de révolution compris) ayant deux points singuliers (i.e. des sphères de rayon nul) et l'utilisation des courbes de Bézier rationnelles quadratiques à points massiques de contrôle permet de représenter ces courbes très simplement [8].

Les figures et images ont été tracées à l'aide de deux logiciels libres. Le premier POV-Ray (Persistence of Vision Raytracer) est un logiciel de lancer de rayon fonctionnant sur toute plateforme ([www.povray.org](http://www.povray.org)). Le second est plus exactement une bibliothèque Latex dédiée au tracé de courbes (<http://www.ctan.org/pkg/pstricks-add>).

## 6 REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient vivement leurs structures respectives à savoir l'Université de Bourgogne, l'Université de Valenciennes et son IUT qui leur ont permis de pouvoir échanger par le biais du réseau Renater.

Un grand hommage est à rendre à Manuel Luque qui a offert en libre accès et très récemment les outils logiciels de représentation des courbes Bézier rationnelles ([http://pstricks.blogspot.fr/2016/09/les-courbes-de-bezier-rationnelles\\_7.html](http://pstricks.blogspot.fr/2016/09/les-courbes-de-bezier-rationnelles_7.html))

## 7 REFERENCES

- [1] Des courbes et surfaces Bézier, une histoire de géométrie polaire brûlante d'actualité, Jean-Paul Bécar, Jean Vareille, Actes du 17ème Colloque National de la Recherche en IUT, Cherbourg-Octeville, France, 8-10 Juin 2011.
- [2] L. Garnier. Constructions euclidiennes, dans le plan affine, d'arcs de coniques propres par des I.F.S. affines non stationnaires. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*, 4(1) :21–56, 2010.
- [3] E.T.Y. Lee. The rational Bézier representation for conics. In G. Farin (ed.), editor, *In Geometric Modeling, Algorithms and New Trends*, SIAM, pages 3–19, Philadelphia, 1985
- [4] J. P. Bécar and L. Garnier. Points massiques, courbes de Bézier quadratiques et coniques : un état de l'art. In G.T.M.G. 2014, Lyon, 26 - 27 mars 2014. LIRIS. [http://liris.cnrs.fr/gtmg2014/actes/\\_gtmg.tar.gz](http://liris.cnrs.fr/gtmg2014/actes/_gtmg.tar.gz).
- [5] J. C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes et surfaces rationnelles*, volume RMA 12. Masson, 1989.
- [6] L. Garnier, L. Druoton, J.P. Bécar: surfaces canal et courbes de Bézier rationnelles quadratiques. In G.T.M.G. 2016 (Dijon, Mars 2016).
- [7] L. Garnier, L. Druoton, J.P. Bécar. Points massiques, espace des sphères et hyperbole. In G.T.M.G. 2015 (Poitiers, Avril 2015). <http://gtmg2015.conference.univ-poitiers.fr/>
- [8] L. Garnier, J.P. Bécar, *Nouveaux modèles géométriques pour la C.A.O. et la synthèse d'images : courbes de Bézier, points massiques et surfaces canal*, Editions Universitaires Européennes, ISBN 978-3-639-54676-7, Saarbrücken 2017.