



HAL
open science

Espace de Minkowski-Lorentz et des sphères : un état de l'art

Jean-Paul Becar, Lucie Druoton, Laurent Fuchs, Lionel Garnier, Rémi Langevin, Géraldine Morin

► **To cite this version:**

Jean-Paul Becar, Lucie Druoton, Laurent Fuchs, Lionel Garnier, Rémi Langevin, et al.. Espace de Minkowski-Lorentz et des sphères : un état de l'art. GTMG 2016, Mar 2016, DIJON, France. hal-02508285

HAL Id: hal-02508285

<https://uphf.hal.science/hal-02508285v1>

Submitted on 14 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Espace de Minkowski-Lorentz et des sphères : un état de l'art

Jean-Paul BECAR¹, Lucie DRUOTON², Laurent FUCHS³, Lionel GARNIER⁴, Rémi LANGEVIN², Géraldine MORIN⁵

¹LAMAV-CGAO, CNRS 2956, Le Mont-Houy, 59313 Valenciennes cedex 9, jean-paul.becar@univ-valenciennes.fr

²IMB, UMR CNRS 5584, Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, France, lucie.druoton@u-bourgogne.fr

³XLIM-SIC, UMR CNRS 7252, Université de Poitiers, SP2MI, Bld M. et P. Curie, 86962 Futuroscope Chasseneuil, Laurent.Fuchs@univ-poitiers.fr

⁴LE2i, UMR CNRS 6306, Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, France, lionel.garnier@u-bourgogne.fr

⁵Laboratoire IRIT, UMR CNRS 5505, Université Paul Sabatier, 31 000 Toulouse

Résumé

Dans cet article, nous faisons une présentation de l'espace de Minkowski-Lorentz généralisant, à \mathbb{R}^5 l'espace utilisé dans la théorie de la relativité. Cet espace de dimension 5 contient un paraboloïde de dimension 3 et isométrique à l'espace affine euclidien usuel \mathcal{E}_3 , l'ensembles des sphères et plans orientés de \mathcal{E}_3 regroupés sur une pseudo-sphère unité de dimension 4. Une premier avantage de cet espace est l'écriture intuitive d'une sphère qui est caractérisée par un point, un vecteur normal en ce point et une courbure. Un deuxième avantage est la manipulation de surfaces canal qui sont représentées par des courbes. Un troisième avantage concernant la simplification des calculs quadratique dans \mathcal{E}_3 qui deviennent linéaires et nous pouvons citer : l'appartenance d'un point à une sphère, les positions relatives de deux sphères.

Mots-clés : Espace de Minkowski-Lorentz, espace des sphères, enveloppes, faisceau.

Introduction

Plusieurs modèles de l'espace des sphères existent. Il en existe deux modèles projectifs : M. Berger [Ber78, BG92] utilise les formes quadratiques sur l'espace affine euclidien ; M. Paluszny [PB98] se sert de l'hypersphère de Moebius. Ces deux espaces ont le désavantage de ne pas prendre en compte l'orientation des sphères ce qui rend impossible la résolution de certains problèmes [LSD*14]. Quant à nous, nous nous plaçons dans l'espace de Lorentz qui est une généralisation de l'espace-temps de Minkowski à \mathbb{R}^5 [HJ03, Cec92, LO05, LO08, LW08, DLG13, DGL13, GD13b, GD13a, Dru13, GDB15].

L'espace-temps $\overrightarrow{\mathbb{L}}_{3,1}$ de la relativité restreinte est muni de la forme quadratique de signature (3;1) définie par :

$$\mathcal{Q}_M(\vec{u}) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

où $(x; y; z)$ sont les composantes spatiales de \vec{u} , t la composante temporelle de \vec{u} et c la célérité de la lumière c'est-à-dire la vitesse de propagation des photons constituant les ondes électromagnétiques. L'ensemble des vecteurs qui annulent cette forme quadratique sont appelés vecteurs iso-

tropes et définissent le cône de lumière C_l , de sommet O . Selon que l'autre point $M(x; y; z; t)$ est à l'intérieur (i.e. $\mathcal{Q}_M(\overrightarrow{OM}) < 0$) ou non du cône de lumière, nous aurons les distinctions suivantes :

- à l'intérieur du cône de lumière, l'observateur O peut influencer d'une façon ou d'une autre ce qui se passera dans le futur (si t est positif) en ce point M ou être influencé par une action passée (si t est négatif) ;
- sur le cône de lumière, l'observateur O peut influencer d'une façon ou d'une autre ce qui se passera dans le futur (si t est positif) en ce point M ou être influencé par une action passée (si t est négatif) à la condition que le signal se déplace à la vitesse de la lumière ;
- hors du cône de lumière, il ne peut y avoir aucune interaction entre l'observateur et le point considéré car cela impliquerait la possibilité pour une information de voyager à une vitesse supérieure à c .

Notons que si besoin, nous pouvons nous servir de la puissance des algèbres géométriques [DFGL14, DFM07].

L'article est composé comme suit : dans un premier temps nous présentons les notions de sphères orientées et de faisceaux de sphères dans l'espace affine euclidien usuel de dimension 3. Dans le second paragraphe, nous définissons les éléments fondamentaux de l'espace de Minkowski-Lorentz (cône de lumière, paraboloïde isométrique à \mathcal{E}_3 , espace des

sphères) ainsi que l'étude des potitions relatives de deux sphères, l'appartenance d'un point à une sphère. Dans la troisième section, nous donnons les équations des *pseudo-cercles* ou droites représentant les faisceaux de sphères. Avant de conclure, nous étudions dans le quatrième paragraphe la représentation de surfaces canal dans l'espace de Minkowski-Lorentz.

Dans cet article, l'espace affine euclidien orienté usuel \mathcal{E}_3 de dimension 3 est muni du repère orthonormé direct $(O_3; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

1 Sphères orientées et faisceau de sphères de \mathcal{E}_3

A partir d'une sphère S de centre Ω et de rayon r , nous pouvons définir deux sphères orientées S^+ et S^- de la façon suivante : en tout point M de S , la sphère orientée S^+ (resp. S^-), de rayon $\rho = r$ (resp. $\rho = -r$) est définie par le fait que le vecteur normal unitaire \vec{N} à la sphère S en M est sortant (resp. rentrant). Ainsi, nous avons :

$$\overrightarrow{\Omega M} = \rho \vec{N}. \quad (1)$$

Nous pouvons définir la puissance d'un point par rapport à une sphère.

Définition 1 : Puissance d'un point par rapport à une sphère
Soit une sphère orientée S de centre Ω et de rayon ρ . Soit M un point de \mathcal{E}_3 .

La puissance du point M par rapport à la sphère S est :

$$\chi_S(M) = \Omega M^2 - \rho^2 \quad (2)$$

Les points de la sphère S sont les points M vérifiant $\chi_S(M) = 0$. Les points de \mathcal{E}_3 contenus dans la partie bornée délimitée par la sphère S sont les points M vérifiant $\chi_S(M) < 0$. Les autres points de \mathcal{E}_3 sont les points M vérifiant $\chi_S(M) > 0$.

Définition 2 : Sphères orthogonales et puissance conjointe de deux sphères

Soit deux sphères orientées S_1 et S_2 de centres respectifs distincts Ω_1 et Ω_2 et de rayons respectifs ρ_1 et ρ_2 . La puissance conjointe des sphères S_1 et S_2 est :

$$\chi_{S_1, S_2} = \Omega_1 \Omega_2^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2$$

Les sphères S_1 et S_2 sont orthogonales si nous avons :

$$\chi_{S_1, S_2} = 0 \quad (3)$$

Définition 3 : Faisceau de sphères

Soit deux sphères S_1 et S_2 non concentriques, de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 , de rayons respectifs ρ_1 et ρ_2 . Soit λ_1 et λ_2 deux réels non tous deux nuls.

Le faisceau de sphères défini par S_1 et S_2 est l'ensemble des sphères, notées $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$, définies par l'ensemble des points M vérifiant la relation :

$$\lambda_1 \chi_{S_1}(M) + \lambda_2 \chi_{S_2}(M) = 0 \quad (4)$$

Notons le cas particulier où nous avons $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Dans ce cas, si M est un point de $\lambda_1 S_1 - \lambda_1 S_2$, l'équation (4) devient :

$$\Omega_1 M^2 - \rho_1^2 - \Omega_2 M^2 + \rho_2^2 = 0 \quad (5)$$

qui peut s'écrire :

$$\left(\overrightarrow{\Omega_1 M} - \overrightarrow{\Omega_2 M} \right) \bullet \left(\overrightarrow{\Omega_1 M} + \overrightarrow{\Omega_2 M} \right) = \rho_1^2 - \rho_2^2$$

qui se simplifie en :

$$\overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \bullet \overrightarrow{IM} = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{2} \quad (6)$$

où I est le milieu du segment $[\Omega_1 \Omega_2]$. Soit I_0 le point de la droite $(\Omega_1 \Omega_2)$ vérifiant :

$$\overrightarrow{II_0} = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{2 \Omega_1 \Omega_2} \quad (7)$$

où \overline{AB} désigne la mesure algébrique de \overrightarrow{AB} . Alors, $\lambda_1 S_1 - \lambda_1 S_2$ est le plan orienté de vecteur normal unitaire $\frac{1}{\Omega_1 \Omega_2} \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2}$ ou $\frac{-1}{\Omega_1 \Omega_2} \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2}$ passant par le point I_0 .

Si nous avons $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ et si M est un point de $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$, l'équation (4) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left(\overrightarrow{\Omega_1 \Omega_{12}} + \overrightarrow{\Omega_{12} M} \right)^2 + \lambda_2 \left(\overrightarrow{\Omega_2 \Omega_{12}} + \overrightarrow{\Omega_{12} M} \right)^2 \\ &= \lambda_1 \rho_1^2 + \lambda_2 \rho_2^2 \end{aligned} \quad (8)$$

où Ω_{12} est le barycentre des points pondérés (Ω_1, λ_1) et (Ω_2, λ_2) . La formule (8) se simplifie en :

$$\overrightarrow{\Omega_{12} M}^2 = - \frac{\lambda_1 \left(\Omega_1 \Omega_{12}^2 - \rho_1^2 \right) + \lambda_2 \left(\Omega_2 \Omega_{12}^2 - \rho_2^2 \right)}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (9)$$

ce qui montre, quand cela a un sens, que le centre de la sphère $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ est le point Ω_{12} tandis que le rayon de cette dernière est alors :

$$\rho_{12} = \varepsilon \sqrt{- \frac{\lambda_1 \left(\Omega_1 \Omega_{12}^2 - \rho_1^2 \right) + \lambda_2 \left(\Omega_2 \Omega_{12}^2 - \rho_2^2 \right)}{\lambda_1 + \lambda_2}} \quad (10)$$

où ε appartient à $\{-1; 1\}$. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 1 :

Soit deux sphères S_1 et S_2 non concentriques, de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 , de rayons respectifs ρ_1 et ρ_2 . Soit λ_1 et λ_2 deux réels non tous deux nuls. Alors :

1. Si les sphères S_1 et S_2 sont sécantes en un cercle C alors toutes les sphères du faisceau contiennent le cercle C : le faisceau de sphères $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ s'appelle un faisceau à base le cercle C , figure 1(a) ;
2. Si les sphères S_1 et S_2 sont tangentes alors toutes les sphères du faisceau sont tangentes à S_1 et S_2 : le faisceau de sphères $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ s'appelle un faisceau de sphères tangentes, figure 1(b) ;
3. Si les sphères S_1 et S_2 sont disjointes alors il existe deux points P_1 et P_2 de $(\Omega_1 \Omega_2)$ tels que, pour $\lambda_1 \neq -\lambda_2$, $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ soit centrée sur $(\Omega_1 \Omega_2) -]P_1; P_2[$: le faisceau de sphères $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ s'appelle à points limites, et les boules délimitées par ces sphères sont contenues les unes dans les autres et tendent vers les deux points limites P_1 et P_2 , figure 1(c).

Démonstration : Laissée au lecteur.

■

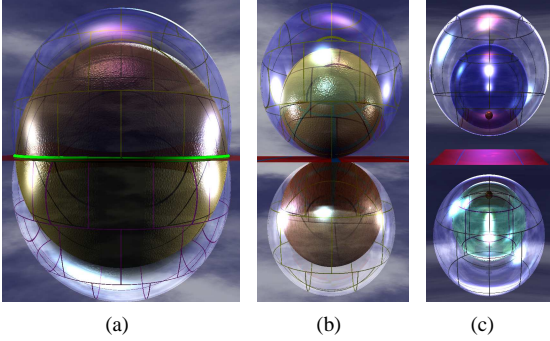


Figure 1: Les trois types de faisceaux de sphères dans \mathcal{E}_3 . (a) : Un faisceau de sphères à base cercle. (b) : Un faisceau de sphères tangentes. (c) : Un faisceau de sphères à points limites.

2 Espace de Minkowski-Lorentz

2.1 Cône de lumière ou *pseudo*-sphère de rayon nul

Soit $(\vec{e}_0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^5 . Posons :

$$\vec{e}_o = \vec{e}_0 - \vec{e}_4 \quad \text{et} \quad \vec{e}_\infty = \frac{1}{2}(\vec{e}_0 + \vec{e}_4)$$

L'espace vectoriel de Minkowski-Lorentz est le \mathbb{R} -espace vectoriel, noté $\overrightarrow{L}_{4,1}$, muni de la base $(\vec{e}_o; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_\infty)$ sur lequel nous définissons la forme bilinéaire symétrique de Lorentz de la façon suivante :

$$\begin{cases} \vec{e}_o^2 = \vec{e}_\infty^2 = 0 \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_o = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_\infty = 0 \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \end{cases} \quad (11)$$

où $(i; j) \in \{1; 2; 3\}^2$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Dans cet espace, la forme quadratique de Lorentz est de signature $(4; 1)$ et s'appelle un (*pseudo*)[†]-produit scalaire.

L'espace affine d'origine O_5 et d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{L}_{4,1}$ est noté $L_{4,1}$ et nous avons une bijection qui à tout point M de $L_{4,1}$ associe son vecteur position $\overrightarrow{O_5 M}$.

Etant donné que la forme quadratique de Lorentz n'est pas définie positive, nous pouvons considérer l'ensemble des vecteurs \vec{u} non nuls isotropes (i.e. $Q_{4,1}(\vec{u}) = 0$), et l'ensemble des vecteurs positions isotropes engendre un cône, dit de lumière, figures 2 et 5 :

$$C_l = \left\{ M \in L_{4,1} \mid Q_{4,1}(\overrightarrow{O_5 M}) = 0 \right\} \quad (12)$$

qui est la sphère de centre O_5 et de rayon nul pour la forme quadratique de Lorentz car tous les points M sont à une distance nulle de O_5 . Nous pouvons distinguer trois types de vecteurs et de 2-plans, voir tableau 1.

Soit $\vec{u}(u_o; x_u; y_u; z_u; u_\infty)$ et $\vec{v}(v_o; x_v; y_v; z_v; v_\infty)$ deux vecteurs de $\overrightarrow{L}_{4,1}$, nous avons :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v - u_o v_\infty - u_\infty v_o \quad (13)$$

L'équation du cône de lumière dans le repère $(O_5; \vec{e}_o; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_\infty)$ est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_o x_\infty = 0 \quad (14)$$

2.2 Paraboloïde isométrique au plongement de \mathcal{E}_3 dans l'espace de Minkowski-Lorentz

Considérons le point O_3 défini par $\overrightarrow{O_5 O_3} = \vec{e}_o$ et l'hyperplan affine \mathcal{H} engendré par O_3 , les vecteurs espace \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 et le vecteur lumière \vec{e}_∞ . La restriction de la forme quadratique $Q_{4,1}$ à \mathcal{H} est dégénérée. Le paraboloïde \mathcal{P} est l'intersection entre le cône de lumière C_l et l'hyperplan affine \mathcal{H} , figure 2.

La figure 3 montre une vue « 3D (graphique) - 5D (espace de Minkowski-Lorentz) » du plongement de \mathcal{E}_3 qui est identifié à $\mathcal{E}_3 \simeq \{1\} \times \mathcal{E}_3 \times \{0\}$, de repère O_3 représentée par la pointe de la flèche rouge et les vecteurs deux à deux orthogonaux \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 .

Nous avons le théorème fondamental suivant :

Théorème 2 :

Le paraboloïde \mathcal{P} , d'équation :

$$\begin{cases} x_o - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x_o x_\infty = 0 \end{cases} \quad (15)$$

dans le repère $(O_5; \vec{e}_o; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_\infty)$, est isométrique au plongement de \mathcal{E}_3 dans l'espace de Minkowski-Lorentz.

[†]. Dans la suite, le terme *pseudo* sera omis.

Type du vecteur ou du 2-plan	Vecteur \vec{u}	2-plan
Espace	$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) > 0$	Tous les vecteurs de ce 2-plan sont de type espace
Temps	$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) < 0$	Au moins un vecteur de ce 2-plan est de type temps
Lumière	$\mathcal{Q}_{4,1}(\vec{u}) = 0$	Le plan est parallèle à un hyperplan tangent à C_l

Table 1: Définition des trois types de vecteurs et de 2-plans de l'espace de Minkowski-Lorentz.

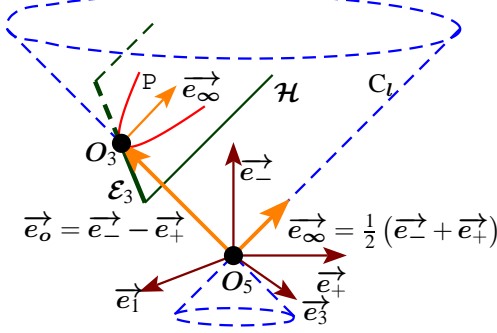


Figure 2: Le cône de lumière C_l , l'hyperplan affine \mathcal{H} et le paraboloïde \mathcal{P} isométrique à \mathcal{E}_3 .

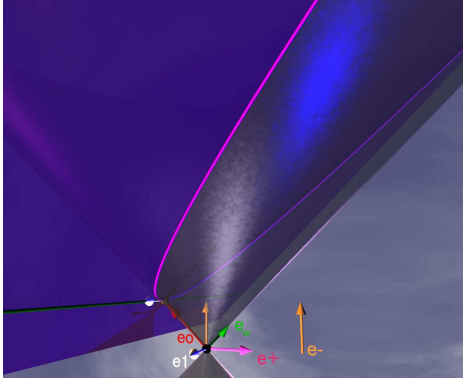


Figure 3: Le cône de lumière C_l , l'hyperplan \mathcal{H} et le paraboloïde \mathcal{P} isométrique à \mathcal{E}_3 ainsi que les deux repères utiles, le repère canonique $(O_5; \vec{e}_1^-, \vec{e}_2^-, \vec{e}_3^-, \vec{e}_+^-, \vec{e}_0^-)$ et celui de l'algèbre géométrique conforme $(O_5; \vec{e}_0^-, \vec{e}_1^-, \vec{e}_2^-, \vec{e}_3^-, \vec{e}_+^-, \vec{e}_0^+)$. Le vecteur \vec{e}_1^+ en blanc ainsi que la droite verte schématise les espaces \mathcal{E}_3 et \mathcal{E}_3 .

Démonstration : Pour tout point $M(x; y; z)$ de \mathcal{E}_3 , nous faisons correspondre un et un seul point M_5 défini par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_5 M_5} &= \overrightarrow{O_5 O_3} + x \vec{e}_1^+ + y \vec{e}_2^+ + z \vec{e}_3^+ + 0 \vec{e}_\infty^+ \\ &= \vec{e}_0^+ + x \vec{e}_1^+ + y \vec{e}_2^+ + z \vec{e}_3^+ \end{aligned}$$

et nous avons :

$$\overrightarrow{O_5 M_5}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

et nous identifions les points $M(x; y; z)$ de \mathcal{E}_3 et $M_5(1; x; y; z; 0)$ de \mathcal{H} . Soit le point N_5 de \mathcal{H} défini par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_5 N_5} &= \overrightarrow{O_5 O_3} + x \vec{e}_1^+ + y \vec{e}_2^+ + z \vec{e}_3^+ + t \vec{e}_\infty^+ \\ &= \vec{e}_0^+ + x \vec{e}_1^+ + y \vec{e}_2^+ + z \vec{e}_3^+ + t \vec{e}_\infty^+ \end{aligned}$$

Le point N_5 appartient au cône de lumière si et seulement si nous avons $\overrightarrow{O_5 N_5}^2 = 0$. La relation $\vec{e}_0^+ \cdot \vec{e}_\infty^+ = -1$ conduit à :

$$\overrightarrow{O_5 N_5}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2t = 0$$

et nous obtenons :

$$\overrightarrow{O_5 N_5} = \overrightarrow{O_5 O_3} + x \vec{e}_1^+ + y \vec{e}_2^+ + z \vec{e}_3^+ + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \vec{e}_\infty^+$$

et le point M_5 de \mathcal{E}_3 est l'image du point N_5 par la projection sur \mathcal{E}_3 dans la direction \vec{e}_∞^+ .

La réciproque est aussi vraie.

■

Notons que l'espace vectoriel orthogonal au vecteur \vec{e}_∞^+ est :

$$\vec{e}_\infty^+{}^\perp = \vec{\mathcal{H}}$$

puisque $\vec{e}_\infty^+{}^2 = 0$ et que la restriction de la forme quadratique à l'hyperplan $\vec{\mathcal{H}}$ est dégénérée et de signature $(3; 0)$. En effet, si \vec{u} appartient à cet hyperplan, il existe un quadruplet $(x; y; z; x_0)$ tel que :

$$\vec{u} = x \vec{e}_1^+ + y \vec{e}_2^+ + z \vec{e}_3^+ + x_0 \vec{e}_\infty^+ \quad \text{avec} \quad \vec{u}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

puisque les vecteurs sont deux à deux orthogonaux, \vec{e}_∞^+ et de type lumière et les trois vecteurs espaces \vec{e}_1^+ , \vec{e}_2^+ et \vec{e}_3^+ sont unitaires. Notons que nous obtenons la forme usuelle du produit scalaire euclidien pour les trois premières composantes.

Si \vec{m} est un vecteur position lumière, non colinéaire à \vec{e}_∞^+ , sa représentation sous forme d'un point dans \mathcal{E}_3 est caractérisée par le point N_5 défini par :

$$\{N_5\} = \text{Aff}(O_5; \vec{m}) \cap \mathcal{P}$$

qui est ensuite projeté sur l'espace affine de dimension 3 défini par le point $O_3(1; 0; 0; 0)$ et les trois vecteurs espace

\vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 selon la direction du vecteur lumière \vec{e}_∞ . Réciproquement, soit M_5 un point de \mathcal{E}_3 . Considérons le point N_5 défini par :

$$\{N_5\} = \text{Aff}(M_5; \vec{e}_\infty) \cap \mathcal{P}$$

qui définit le vecteur position $\vec{n}_5 = \overrightarrow{O_5 N_5}$ de type lumière. Le triangle $O_3 M_5 N_5$ est rectangle en M_5 et, d'après le théorème de Pythagore, nous avons la relation fondamentale :

$$\overrightarrow{O_3 N_5}^2 = \overrightarrow{O_3 M_5}^2 + \underbrace{\overrightarrow{M_5 N_5}^2}_0 = \overrightarrow{O_3 M_5}^2 \quad (16)$$

D'après la démonstration du théorème précédent, soit P un point de \mathcal{E}_3 et $\vec{P} = \overrightarrow{O_3 P}$ de \mathcal{E}_3 son vecteur position, la représentation \ddagger du point P dans l'espace de Lorentz est :

$$\vec{p} = \vec{e}_o + \vec{P} + \frac{1}{2} \|\vec{P}\|^2 \vec{e}_\infty \quad (17)$$

et le vecteur \vec{e}_o représente l'origine O_3 de l'espace \mathcal{E}_3 (i.e. $\overrightarrow{O_5 O_3} = \vec{e}_o$) tandis que le vecteur \vec{e}_∞ représente le point à l'infini. Par construction, le vecteur position \vec{p} est un vecteur isotrope (i.e. $\vec{p} \cdot \vec{p} = 0$). Remarquons que la détermination du point de \mathcal{E}_3 à partir de sa représentation, formule (17) est triviale. De façon plus générale, si $\vec{p}(x_o; x; y; z; x_\infty)$ est un vecteur lumière, deux cas sont à distinguer :

- $x_0 = 0$ implique que nous considérons le vecteur \vec{e}_∞ et nous obtenons le point à l'infini de \mathcal{E}_3 ;
- $x_0 \neq 0$ implique que nous considérons le vecteur $\frac{1}{x_o} \vec{p}$ et nous obtenons le point :

$$P \left(\frac{x}{x_o}; \frac{y}{x_o}; \frac{z}{x_o} \right)$$

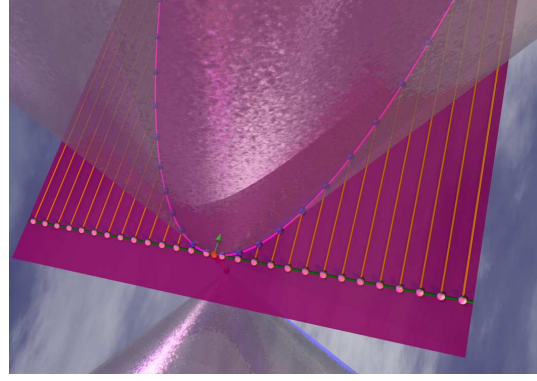
de \mathcal{E}_3 .

La figure 4 synthétise et illustre le processus permettant de voir un point de \mathcal{E}_3 comme un vecteur lumière de $\mathcal{L}_{4,1}$. Dans la figure 4(b), le vecteur \vec{e}_∞ est en vert, celui en bleu est un vecteur colinéaire à \vec{e}_∞ et ces deux vecteurs ont même longueur : 0.

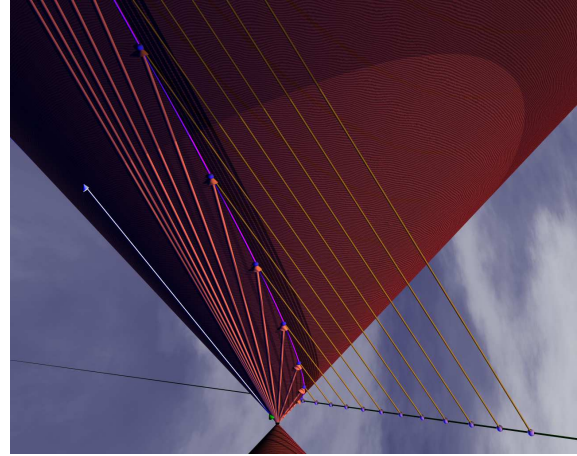
Les figures 4(a) et 4(b) permettent une visualisation 3D d'une compactification de \mathbb{R} ce qui permet de comprendre le processus de la compactification de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$:

- Nous partons de l'origine O_5 de l'espace de Lorentz pour arriver en O_3 origine de \mathcal{E}_3 grâce à la relation $\overrightarrow{O_5 O_3} = \vec{e}_o$;
- Nous prenons le point P que nous voulons dans \mathbb{R}^n schématisé par l'un des points roses sur la droite verte dans la figure 4(a), ce qui nous conduit à la relation : $\vec{p} = \vec{e}_o + \vec{P}$;

\ddagger . Dans la suite, sauf mention contraire, un point de \mathcal{E}_3 ou un vecteur de \mathcal{E}_3 est écrit en majuscule, sa représentation dans l'espace de Lorentz est écrite avec la même lettre en minuscule.



(a)



(b)

Figure 4: Les points de \mathcal{E}_3 sont des vecteurs lumière dans l'espace de Lorentz. (a) : les points de \mathcal{E}_3 sont remontés sur le paraboloid \mathcal{P} selon la direction du vecteur \vec{e}_∞ . (b) : les points du paraboloid \mathcal{P} deviennent des vecteurs positions sur le cône de lumière.

- A partir de ce point P , nous déterminons le point intersection entre le paraboloid \mathcal{P} et la droite passant par P et de vecteur directeur \vec{e}_∞ ;
- Ce point d'intersection définit le vecteur position isotrope donné par la formule (17), figure 4.

Notons que le signe du produit de deux vecteurs lumière, représentant chacun un point de \mathcal{E}_3 , est négatif :

Proposition 1 : Produit de deux vecteurs lumière

Soit \vec{m}_0 et \vec{m}_1 deux vecteurs lumière représentant les points M_0 et M_1 , distincts, de \mathcal{E}_3 .

Alors :

$$\vec{m}_0 \cdot \vec{m}_1 = -\frac{M_0 M_1^2}{2} < 0$$

et :

$$\vec{m}_0 \cdot \vec{e}_\infty = -1$$

Démonstration : Nous avons :

$$\begin{cases} \vec{m}_0 = \vec{e}_0 + \vec{M}_0 + \frac{M_0^2}{2} \vec{e}_\infty \\ \vec{m}_1 = \vec{e}_0 + \vec{M}_1 + \frac{M_1^2}{2} \vec{e}_\infty \end{cases}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} & \vec{m}_0 \cdot \vec{m}_1 \\ &= \overline{O_3 M_0} \bullet \overline{O_3 M_1} + \frac{1}{2} (\overline{O_3 M_0}^2 + \overline{O_3 M_1}^2) \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_\infty \\ &= -\frac{1}{2} (\overline{O_3 M_0}^2 + \overline{O_3 M_1}^2 - 2 \overline{O_3 M_0} \bullet \overline{O_3 M_1}) \\ &= -\frac{M_0 M_1^2}{2} \end{aligned}$$

et la seconde formule est triviale.

■

Notons qu'il est indispensable que les vecteurs lumière représentent exactement un point de \mathcal{E}_3 puisque nous avons :

$$(-\vec{m}_0) \cdot \vec{m}_1 > 0$$

2.3 Compactification d'Alexandrov de \mathbb{R}^3

Pour n entier naturel non nul, l'espace \mathbb{R}^3 , muni de la topologie euclidienne usuelle, n'est pas compact. L'usage est d'ajouter un point à \mathbb{R}^3 , noté ∞ , est d'identifier l'ensemble $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ à \mathcal{S}^3 , sphère unité de \mathbb{R}^4 et nous pouvons passer de \mathcal{S}^3 à \mathbb{R}^4 via une projection stéréographique.

En revanche, la construction du modèle confirme (généralisable à tout espace \mathbb{R}^3), figure 2, permet d'avoir un modèle de \mathcal{S}^3 , $\mathbb{P} \cup \{\vec{e}_\infty\}$, isométrique à l'espace euclidien usuel où \mathbb{P} est un parabolôïde de dimension 3, de sommet S et d'axe la droite passant par S et de vecteur directeur \vec{e}_∞ . Le pôle nord, identifié avec le point ∞ de \mathbb{R}^3 est remplacé par le vecteur lumière \vec{e}_∞ , ce qui permet en plus, dans cet espace, d'utiliser des CBRQ à points massiques ayant un point à l'infini : ce dernier est représenté par \vec{e}_∞ .

Soit A et B deux points de \mathbb{R}^3 . Les points qui leur correspondent sont A' et B' obtenus comme intersection entre la parabole \mathbb{P} et la droite de vecteur directeur \vec{e}_∞ et passant par le point idoine. Nous avons donc :

$$\overline{AA'}^2 = \overline{BB'}^2 = 0$$

et considérons le point B_1 défini par :

$$\overline{A'B_1} = \overline{AB}$$

Le triangle $A'B_1B'$ est rectangle en B_1 et en appliquant le théorème de Pythagore, nous avons :

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{A'B_1}^2 + 2 \underbrace{\overline{A'B_1} \cdot \overline{B_1B'}}_0 + \underbrace{\overline{B_1B'}^2}_0 = \overline{AB}^2 \quad (18)$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \overline{A'B'} \cdot \vec{e}_\infty &= (\overline{A'B_1} + \overline{B_1B'}) \cdot \vec{e}_\infty \\ &= \underbrace{\overline{A'B_1} \cdot \vec{e}_\infty}_0 + \underbrace{\overline{B_1B'} \cdot \vec{e}_\infty}_0 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

et tout vecteur de la forme $x\vec{AB} + y\vec{e}_\infty$ est orthogonal à \vec{e}_∞ .

2.4 Espace des sphères orientées Λ^4

Une sphère de \mathcal{E}_3 , de centre Ω , de rayon ρ est représentée par le point σ ou le vecteur position $\vec{\sigma}$ défini par [DFM07] :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \overline{O_5 \sigma} \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\vec{\omega} - \frac{1}{2} \rho^2 \vec{e}_\infty \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\vec{e}_0 + \vec{\Omega} + \frac{1}{2} (\|\vec{\Omega}\|^2 - \rho^2) \vec{e}_\infty \right) \end{aligned} \quad (20)$$

et nous imposons $\vec{\sigma}^2 = 1$ afin de pouvoir considérer cet espace comme une sphère unité. L'orientation de la sphère σ est définie comme dans la section précédente : si M appartient à la sphère de centre Ω et de rayon algébrique ρ , si \vec{N} est le vecteur normal unitaire à la sphère au point M , nous avons :

$$\vec{m} - \vec{\omega} = \vec{M} - \vec{\Omega} + \frac{1}{2} (\vec{M}^2 - \vec{\Omega}^2) \vec{e}_\infty$$

et la relation $\vec{M} - \vec{\Omega} = \overline{O_3 M} - \overline{O_3 \Omega} = \overline{\Omega M}$ implique :

$$\vec{m} - \vec{\omega} = \rho \vec{N} + \frac{1}{2} (\vec{M}^2 - \vec{\Omega}^2) \vec{e}_\infty$$

et nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (\vec{m} - \vec{\omega}) \cdot \vec{n} \\ &= \left(\rho \vec{N} + \frac{1}{2} (\vec{M}^2 - \vec{\Omega}^2) \vec{e}_\infty \right) \cdot \left(\vec{N} + \frac{1}{2} \vec{e}_\infty \right) \\ &= \rho \end{aligned} \quad (21)$$

et nous retrouvons la formulation donnée par la formule (1). De manière analogue, un plan orienté \mathcal{P} défini par un point P et un vecteur normal unitaire \vec{N} est représenté par :

$$\vec{\pi} = \overline{O_5 \pi} = \vec{N} + (\vec{N} \bullet \vec{P}) \vec{e}_\infty \quad (22)$$

où \bullet désigne le produit scalaire de \mathcal{E}_3 . De plus, nous avons $\vec{\pi}^2 = \vec{N}^2 = 1$. Il est ainsi naturel d'introduire la sphère unité Λ^4 de centre O_5 de $L_{4,1}$:

$$\Lambda^4 = \left\{ \sigma \in L_{4,1} \mid \overline{O_5 \sigma} = \overline{O_5 \sigma}^2 = 1 \right\} \quad (23)$$

qui représente les sphères orientées et les plans orientés de \mathcal{E}_3 , figure 5. Nous admettons dans ce document que tout élément de Λ^4 représente soit une sphère orientée, soit un plan orienté. Notons que les deux sphères orientées S^+ et S^- de \mathcal{E}_3 sont représentées par les deux vecteurs positions opposés $\vec{\sigma}^+$ et $\vec{\sigma}^-$ de Λ^4 .

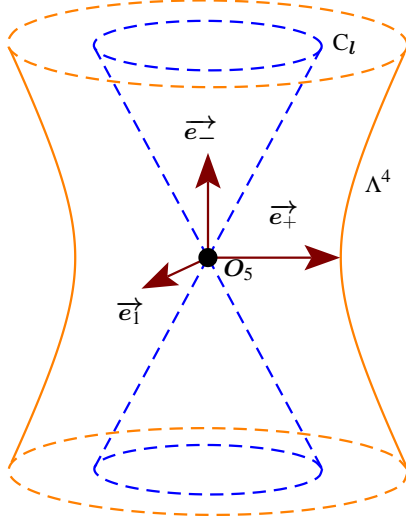


Figure 5: La sphère C_l de centre O_5 et de rayon nul ainsi que la sphère unitaire Λ^4 de centre O_5 .

Rappelons que, dans un \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$, muni de la forme quadratique définie \mathcal{Q} et S une surface définie implicitement par une fonction f de classe \mathcal{C}^1 . Soit $(x_1; \dots; x_n)$ les coordonnées d'un point régulier M_0 . Le gradient $\vec{\nabla} f(x_1; \dots; x_n)$ à la surface en M_0 est définie par la relation :

$$d_{(x_1; \dots; x_n)} f(h_1; \dots; h_n) = \mathcal{L}(\vec{\nabla} f(x_1; \dots; x_n), \vec{h})$$

où \vec{h} est le vecteur de composante $(h_1; \dots; h_n)$. Ainsi, dans le repère canonique de $L_{4,1}$, un point $\sigma(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$ de Λ^4 vérifie :

$$f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4) = -x_0^2 + \sum_{i=1}^4 x_i^2 - 1 = 0$$

et nous obtenons :

$$d_{(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)} f = \sum_{i=0}^4 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4) dx_i$$

d'où :

$$d_{(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)} f = -2x_0 dx_0 + \sum_{i=1}^4 2x_i dx_i$$

et :

$$d_{(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)} f(h_0; h_1; h_2; h_3; h_4) = -2x_0 h_0 + \sum_{i=1}^4 2x_i h_i$$

ce qui montre que le gradient à Λ^4 au point σ est :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4) &= \\ (2x_0; 2x_1; 2x_2; 2x_3; 2x_4) &= 2\vec{\sigma} \end{aligned} \quad (24)$$

et nous retrouvons la même formule de colinéarité que dans le cas d'une sphère dans l'espace euclidien usuel.

Donnons les conditions permettant de savoir si un point appartient à un plan ou à une sphère.

Théorème 3 : Position relative d'un point et d'une sphère ou d'un plan

Soit S une sphère de \mathcal{E}_3 , de centre Ω , de rayon ρ et de représentation $\vec{\sigma}$ sur Λ^4 .

Soit \mathcal{P} un plan passant par le point P_0 , de vecteur normal unitaire \vec{N} et de représentation $\vec{\pi}$ sur Λ^4 .

Soit le vecteur \vec{p} représentant le point P de \mathcal{E}_3 . Alors :

1. Nous avons :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \chi_S(P) = -\frac{1}{2\rho} (\Omega P^2 - \rho^2) \quad (25)$$

et :

$$P \in S \iff \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = 0 \quad (26)$$

2. Nous avons :

$$\vec{\pi} \cdot \vec{p} = \vec{N} \cdot \overrightarrow{P_0 P}$$

d'où :

$$P \in \mathcal{P} \iff \vec{\pi} \cdot \vec{p} = 0 \quad (27)$$

Démonstration :

1. Nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} &= \\ &= \left(\vec{e}_0 + \vec{P} + \frac{1}{2} \|\vec{P}\|^2 \vec{e}_\infty \right) \\ &\cdot \frac{1}{\rho} \left(\vec{e}_0 + \vec{\Omega} + \frac{1}{2} \left(\|\vec{\Omega}\|^2 - \rho^2 \right) \vec{e}_\infty \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\vec{P} \cdot \vec{\Omega} - \frac{1}{2} \|\vec{P}\|^2 - \frac{1}{2} \left(\|\vec{\Omega}\|^2 - \rho^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\rho} \left(-(\vec{P} - \vec{\Omega})^2 + \rho^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\rho} \left(-\vec{\Omega P}^2 + \rho^2 \right) = -\frac{1}{2\rho} \chi_S(P) \end{aligned}$$

ce qui permet de montrer l'équivalence entre le point P appartient à la sphère S et le résultat :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = 0$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\vec{p} \cdot \vec{\pi} &= \left(\vec{e}_0 + \vec{P} + \frac{1}{2} \|\vec{P}\|^2 \vec{e}_\infty \right) \\
&\cdot \left(\vec{N} + (\vec{N} \cdot \vec{P}_0) \vec{e}_\infty \right) \\
&= \left(\vec{P} \cdot \vec{N} - \vec{N} \cdot \vec{P}_0 \right) = \vec{N} \cdot \vec{O}_3 \vec{P} - \vec{N} \cdot \vec{O}_3 \vec{P}_0 \\
&= \vec{N} \cdot (\vec{O}_3 \vec{P} + \vec{P}_0 \vec{O}_3) = \vec{N} \cdot \vec{P}_0 \vec{P}
\end{aligned}$$

ce qui permet de montrer l'équivalence entre le point P appartient au plan \mathcal{P} et le résultat $\vec{\pi} \cdot \vec{p} = 0$ (puisque $P \in \mathcal{P} \iff \vec{N} \perp \vec{P}_0 \vec{P}$).

■

Notons que le critère permettant de savoir si un point de \mathcal{E}_3 appartient à une sphère de \mathcal{E}_3 devient linéaire dans l'espace de Lorentz alors qu'il est quadratique dans \mathcal{E}_3 .

Corollaire 1 :

Soit S une sphère de \mathcal{E}_3 , de centre Ω , de rayon ρ et de représentation $\vec{\sigma}$ sur Λ^4 .

Soit \mathcal{P} un plan passant par le point P_0 , de vecteur normal unitaire \vec{N} et de représentation $\vec{\pi}$ sur Λ^4 .

Soit le vecteur \vec{p} représentant le point P de \mathcal{E}_3 . Alors :

1. La sphère S est l'intersection du paraboloïde \mathbb{P} avec l'hyperplan $\mathcal{H}_{\sigma^\perp}$ passant par O_5 et de vecteur normal $\vec{\sigma}$.
2. Le plan \mathcal{P} est l'intersection du paraboloïde \mathbb{P} avec l'hyperplan \mathcal{H}_{π^\perp} passant par O_5 et de vecteur normal $\vec{\pi}$.

Démonstration :

D'après la formule (26), le point P appartient à S si et seulement si :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = 0$$

si et seulement si :

$$\vec{O}_5 \vec{\sigma} \cdot \vec{O}_5 \vec{P}_5 = 0$$

où P_5 est le point (du paraboloïde \mathbb{P}) défini par :

$$\vec{O}_5 \vec{P}_5 = \vec{p}$$

La démonstration concernant $\vec{\pi}$ est analogue.

■

Nous venons de montrer, via le corollaire 1 que si σ représente une sphère S de \mathcal{E}_3 , l'intersection entre l'hyperplan $\mathcal{H}_{\sigma^\perp}$, de vecteur normal $\vec{\sigma}$ et passant par O_5 et le paraboloïde \mathbb{P} est l'ensemble des points de la sphère S .

2.5 Sphère, centre, vecteur normal unitaire, courbure

Dans ce paragraphe, nous allons mélanger des tomates et des cendriers[§] en écrivant proprement l'idée suivante : une sphère est complètement déterminée par, sa courbure, un point M_0 , le vecteur normal unitaire ¶ $\vec{N}_\rho = -\vec{N}$ au point M_0 précédent et sa courbure $k = \frac{1}{\rho}$. Nous allons montrer, que dans l'espace de Lorentz, nous avons [LW08, Cec92] :

$$\vec{O}_5 \vec{\sigma} = \vec{\sigma} = \frac{1}{\rho} \vec{m}_0 + \vec{n} = \frac{1}{\rho} \vec{O}_5 \vec{m}_0 + \vec{n} \quad (28)$$

où \vec{n} est le projeté orthogonal unitaire, sur le 3-plan tangent au paraboloïde en M_0 de la représentation du vecteur \vec{N}_ρ dans l'espace de Lorentz.

Dans le repère $(O_5, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_\infty)$ de l'algèbre conforme, l'équation du paraboloïde est donnée par la formule (14) ce qui induit la définition des deux applications suivantes :

$$\begin{cases} f_1(x_o; x; y; z; x_\infty) &= x_o - 1 \\ f_2(x_o; x; y; z; x_\infty) &= x^2 + y^2 + z^2 - 2x_o x_\infty \end{cases}$$

Posons $M = (x_o; x; y; z; x_\infty)$ et $h = (h_o; x_h; y_h; z_h; h_\infty)$. Nous avons :

$$d_M f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_o}(M) dx_o = 1 dx_o$$

d'où :

$$d_M f_1(h) = h_o = -(-1_\infty) h_o = \overline{\nabla f_1(M)} \cdot \vec{h}$$

où $\vec{h} = (h_o; x_h; y_h; z_h; h_\infty)$ et $\overline{\nabla f_1(M)}$ est le vecteur gradient à l'hyperplan \mathcal{H} en M . Nous obtenons :

$$\overline{\nabla f_1(M)}(0; 0; 0; 0; -1)$$

De même, nous avons :

$$d_M f_2 = -2x_\infty dx_o + 2x dx + 2y dy + 2z dz - 2x_o dx_\infty$$

d'où :

$$\begin{aligned} d_M f_2(h) &= -2x_\infty h_o + 2x x_h + 2y y_h + 2z z_h - 2x_o h_\infty \\ &= \overline{\nabla f_2(M)} \cdot \vec{h} \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\overline{\nabla f_2(M)}(2x_o; 2x; 2y; 2z; 2x_\infty)$$

Prenons $\Omega_0(x_o; y_o; z_o)$ et $M_0(x_o; y_o; z_o; \rho)$ et $\vec{N}(0; 0; \text{sign}(\rho))$ et nous supposons ρ strictement positif. Nous avons :

$$\vec{m}_0 = \vec{e}_0 + \vec{M}_0 + \frac{1}{2} \vec{M}_0^2 \vec{e}_\infty$$

et le point du paraboloïde est m_0 défini par $\vec{O}_5 \vec{m}_0 = \vec{m}_0$.

§. Clin d'œil à la multiplication des Frères Ennemis.

¶. Si \vec{N} est sortant, la courbure est $-\frac{1}{R}$ ce qui explique que nous prenons l'opposé du vecteur normal.

Le vecteur \vec{n} cherché a pour composantes $(n_0; 0; 0; -1; n_\infty)$ et doit vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f_1(m_0)} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{\nabla f_2(m_0)} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

Commençons par résoudre la première équation :

$$\overrightarrow{\nabla f_1(m_0)} \cdot \vec{n} = 0 \iff -n_0 \times -1 = 0 \iff n_0 = 0$$

et nous obtenons $\vec{n}(0; 0; 0; -1; n_\infty)$. Pour la seconde équation, nous avons :

$$\overrightarrow{\nabla f_2(m_0)} \cdot \vec{n} = 0 \iff -2n_\infty - 2z_0 - 2\rho = 0 \iff n_\infty = -(z_0 + \rho)$$

d'où :

$$\overrightarrow{\nabla f_2(m_0)} \cdot \vec{n} = 0 \iff -2n_\infty - 2z_0 - 2\rho = 0 \iff n_\infty = -(z_0 + \rho)$$

et finalement, nous avons $\vec{n}(0; 0; 0; -1; -(z_0 + \rho))$ qui est bien unitaire et que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= -\vec{N} - (z_0 + \rho) \vec{e}_\infty \\ \vec{\sigma}_0 - \frac{1}{\rho} \vec{m}_0 &= \frac{1}{\rho} \left(\vec{e}_0 + \vec{\Omega}_0 + \frac{1}{2} \left(\|\vec{\Omega}_0\|^2 - \rho^2 \right) \vec{e}_\infty \right) \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left(\vec{e}_0 + \vec{M}_0 + \frac{1}{2} \vec{M}_0^2 \vec{e}_\infty \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\vec{\Omega}_0 - \vec{M}_0 \right) + \frac{1}{2\rho} \left(\left(\|\vec{\Omega}_0\|^2 - \rho^2 \right) - \vec{M}_0^2 \right) \vec{e}_\infty \\ &= -\vec{N} + \frac{1}{2\rho} \left(\vec{\Omega}_0^2 - \vec{M}_0^2 - \rho^2 \right) \vec{e}_\infty \\ &= -\vec{N} + \frac{1}{2\rho} \left(\vec{\Omega}_0^2 - \left(\vec{\Omega}_0 + \rho \vec{N} \right)^2 - \rho^2 \right) \vec{e}_\infty \\ &= -\vec{N} + \frac{1}{2\rho} \left(\vec{\Omega}_0^2 - \left(\vec{\Omega}_0^2 + 2\rho \vec{\Omega}_0 \cdot \vec{N} + \rho^2 \vec{N}^2 \right) - \rho^2 \right) \vec{e}_\infty \\ &= -\vec{N} + \frac{1}{2\rho} \left(-2\rho \vec{\Omega}_0 \cdot \vec{N} - \rho^2 - \rho^2 \right) \vec{e}_\infty \\ &= -\vec{N} + \frac{1}{2} \left(-2\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{N} - 2\rho \right) \vec{e}_\infty \\ &= -\vec{N} + (-z_0 - \rho) \vec{e}_\infty \end{aligned}$$

2.6 Position relative de deux sphères

Soit i appartenant à $\{1; 2\}$. Considérons le vecteur $\vec{\sigma}_i$ représentant la sphère S_i de \mathcal{E}_3 de centre Ω_i et de rayon ρ_i . Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 &= \frac{1}{\rho_1} \left(\vec{e}_0 + \vec{\Omega}_1 + \frac{1}{2} \left(\|\vec{\Omega}_1\|^2 - \rho_1^2 \right) \vec{e}_\infty \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\rho_2} \left(\vec{e}_0 + \vec{\Omega}_2 + \frac{1}{2} \left(\|\vec{\Omega}_2\|^2 - \rho_2^2 \right) \vec{e}_\infty \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \left(\vec{\Omega}_1 \cdot \vec{\Omega}_2 - \frac{1}{2} \left(\|\vec{\Omega}_1\|^2 - \rho_1^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\|\vec{\Omega}_2\|^2 - \rho_2^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\rho_1 \rho_2} \left(- \left(\vec{\Omega}_1 - \vec{\Omega}_2 \right)^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\rho_1 \rho_2} \left(-\vec{\Omega}_2 \vec{\Omega}_1^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = -\frac{1}{2\rho_1 \rho_2} \chi_{S_1, S_2} \quad (29)$$

χ_{S_1, S_2} désigne la puissance conjointe des sphères S_1 et S_2 . Nous pouvons énoncer :

Proposition 2 : position relative de deux sphères

Soit S_1 et S_2 deux sphères de \mathcal{E}_3 de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 , de rayons respectifs ρ_1 et ρ_2 et de représentations respectives $\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\sigma}_2$ sur \mathcal{L}^4 . Alors :

1. Les sphères S_1 et S_2 sont orthogonales si et seulement si $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = 0$;
2. Les sphères S_1 et S_2 sont tangentes si et seulement si $|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2| = 1$;
3. Les sphères S_1 et S_2 sont disjointes si et seulement si $|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2| > 1$;
4. Les sphères S_1 et S_2 sont sécantes si et seulement si $|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2| < 1$.

Démonstration :

Posons $r_1 = |\rho_1|$ et $r_2 = |\rho_2|$. Il suffit d'utiliser la formule (29) qui se simplifie en :

$$|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2| = \frac{1}{2r_1 r_2} \left| \Omega_1 \Omega_2 - r_1^2 - r_2^2 \right| \quad (30)$$

1. Les sphères S_1 et S_2 sont orthogonales $\iff \chi_{S_1, S_2} = 0 \iff \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = 0$;
2. Les sphères S_1 et S_2 sont tangentes extérieurement (resp. intérieurement) \iff nous avons $\Omega_1 \Omega_2 = r_1 + r_2$ (resp. $\Omega_1 \Omega_2 = |r_1 - r_2|$) $\iff \Omega_1 \Omega_2^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2$ (resp. $\Omega_1 \Omega_2^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2$) $\iff |\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2| = 1$;
3. Les sphères S_1 et S_2 sont disjointes, nous devons distinguer deux cas.
 - ◀ $\Omega_1 \Omega_2 > r_1 + r_2 \iff \Omega_1 \Omega_2^2 > r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \iff |\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2| > 1$;
 - ◀ $\Omega_1 \Omega_2 < |r_1 - r_2| \iff \Omega_1 \Omega_2^2 < r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \iff |\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2| > 1$.
4. Les sphères S_1 et S_2 sont sécantes, nous avons :

$$\begin{aligned} &|r_1 - r_2| < \Omega_1 \Omega_2 < r_1 + r_2 \\ \iff &r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 < \Omega_1 \Omega_2^2 < r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \\ \iff &|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2| < 1 \end{aligned}$$

■

Considérons une sphère S_1 de centre Ω_1 et de rayon ρ_1 non nul de représentation $\vec{\sigma}_1$ sur Λ^4 et considérons un plan \mathcal{P}_1 passant par le point P_1 , de vecteur normal unitaire \vec{N}_1 et de représentation $\vec{\pi}_1$ sur Λ^4 . Nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\pi}_1 &= \frac{1}{\rho_1} \left(\vec{e}_o + \overrightarrow{O_3\Omega_1} + \frac{\|\overrightarrow{O_3\Omega_1}\|^2 - \rho_1^2}{2} \vec{e}_\infty \right) \\ &\quad \cdot \left(\vec{N}_1 + (\vec{N}_1 \bullet \overrightarrow{O_3P_1}) \vec{e}_\infty \right) \\ &= \frac{1}{\rho_1} \left(\overrightarrow{O_3\Omega_1} \bullet \vec{N}_1 + (\vec{N}_1 \bullet \overrightarrow{O_3P_1}) \underbrace{\vec{e}_o \cdot \vec{e}_\infty}_{=-1} \right) \\ &= \frac{1}{\rho_1} \left((\overrightarrow{O_3\Omega_1} - \overrightarrow{O_3P_1}) \bullet \vec{N}_1 \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\pi}_1 = \frac{1}{\rho_1} \overrightarrow{P_1\Omega_1} \bullet \vec{N}_1 \quad (31)$$

Nous pouvons énoncer :

Proposition 3 : position relative d'une sphère et d'un plan

Soit S_1 une sphère de \mathcal{E}_3 , de centre Ω_1 , de rayon ρ_1 et de représentation $\vec{\sigma}_1$ sur Λ^4 . Soit \mathcal{P}_1 un plan passant par le point P_1 , de vecteur normal unitaire \vec{N}_1 et de représentation $\vec{\pi}_1$ sur Λ^4 . Alors :

1. La sphère S_1 et le plan \mathcal{P}_1 sont orthogonaux si et seulement si $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\pi}_1 = 0$;
2. La sphère S_1 et le plan \mathcal{P}_1 sont tangents si et seulement si $|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\pi}_1| = 1$;
3. La sphère S_1 et le plan \mathcal{P}_1 sont disjoints si et seulement si $|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\pi}_1| > 1$;
4. La sphère S_1 et le plan \mathcal{P}_1 sont sécants si et seulement si $|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\pi}_1| < 1$.

Démonstration :

Il suffit de prendre pour P_1 le projeté orthogonal de Ω_1 sur \mathcal{P}_1 et la formule (31) devient :

$$|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\pi}_1| = \frac{P_1\Omega_1}{|\rho_1|} \quad (32)$$

1. La sphère S_1 et le plan \mathcal{P}_1 sont orthogonaux $\iff \Omega_1 = P_1 \iff \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\pi}_1 = 0$;
2. La sphère S_1 et le plan \mathcal{P}_1 sont tangents $\iff P_1\Omega_1 = |\rho_1| \iff |\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\pi}_1| = 1$;
3. La sphère S_1 et le plan \mathcal{P}_1 sont disjoints $\iff P_1\Omega_1 > |\rho_1| \iff |\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\pi}_1| > 1$;
4. La sphère S_1 et le plan \mathcal{P}_1 sont sécants $\iff P_1\Omega_1 < |\rho_1| \iff |\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\pi}_1| < 1$.

■

Considérons deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 passant respectivement par les points P_1 et P_2 , de vecteurs normaux unitaires respectifs \vec{N}_1 et \vec{N}_2 et de représentations respectives $\vec{\pi}_1$ et $\vec{\pi}_2$ sur Λ^4 . Nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{\pi}_1 \cdot \vec{\pi}_2 &= \left(\vec{N}_1 + (\vec{N}_1 \bullet \overrightarrow{O_3P_1}) \vec{e}_\infty \right) \\ &\quad \cdot \left(\vec{N}_2 + (\vec{N}_2 \bullet \overrightarrow{O_3P_2}) \vec{e}_\infty \right) \\ &= \vec{N}_1 \bullet \vec{N}_2 \end{aligned} \quad (33)$$

Nous pouvons énoncer :

Proposition 4 : position relative de deux plans

Soit deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 passant respectivement par les points P_1 et P_2 , de vecteurs normaux unitaires respectifs \vec{N}_1 et \vec{N}_2 et de représentations respectives $\vec{\pi}_1$ et $\vec{\pi}_2$ sur Λ^4 . Alors :

1. Les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont orthogonaux si et seulement si $\vec{\pi}_1 \cdot \vec{\pi}_2 = 0$;
2. Les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont parallèles si et seulement si $|\vec{\pi}_1 \cdot \vec{\pi}_2| = 1$;
3. Les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants si et seulement si $|\vec{\pi}_1 \cdot \vec{\pi}_2| < 1$.

Démonstration : Triviale à partir de la formule (33)

■

Comme un point est une sphère de rayon nul, faisons la remarque suivante :

Remarque 1 :

Les points de \mathcal{E}_3 sont des sphères de rayons nuls et les deux représentations, formules (17) et (20), conduisent à la même direction vectorielle car nous avons :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \vec{\sigma} = \left(\vec{e}_o + \vec{\Omega} + \frac{1}{2} \|\vec{\Omega}\|^2 \vec{e}_\infty \right) = \vec{\omega}$$

et $\vec{\sigma}$ est le « point » à l'infini de la droite vectorielle définie par le point Ω .

Notons que pour tout couple de sphères $(\vec{\sigma}_1; \vec{\sigma}_2)$, nous avons :

$$\overline{\sigma_1 \sigma_2^2} = \vec{\sigma}_1^2 - 2 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_2^2 = 2(1 - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad (34)$$

et que la position relative de deux sphères ne dépend pas de leur orientation. Soit $\vec{\sigma}_2 = -\vec{\sigma}_2$ représentant la sphère d'orientation inverse par rapport à $\vec{\sigma}_2$. D'après les propositions 2, 3 et 4, nous pouvons énoncer :

Proposition 5 :

Soit S_1 et S_2 deux sphères ou plans de \mathcal{E}_3 de représentation $\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\sigma}_2$ sur Λ^4 et $\vec{\sigma}_2 = -\vec{\sigma}_2$.

Les sphères S_1 et S_2 sont tangentes si et seulement si

$$\overrightarrow{\sigma_1 \sigma_2}^2 = 0 \text{ ou } \overrightarrow{\sigma_1 \sigma_2}^2 = 0$$

3 Faisceaux linéaires de sphères

Chaque sphère de \mathcal{E}_3 étant un point sur Λ^4 , un faisceau de sphères est représenté par une courbe sur Λ^4 . Comme il existe trois type de faisceaux (deux points limites, un point de tangence, aucune intervention de points), nous devons distinguer trois cas et interviennent, deux vecteurs lumière, un seul vecteur lumière, aucun vecteur lumière. Le résultat fondamental concernant la représentation d'un faisceau de cercles sur Λ^4 peut être énoncé :

Théorème 4 : Courbe représentant un faisceau de sphères

- La section de la quadrique Λ^4 par un plan \mathcal{P} de type espace est un cercle unitaire (qui se trace comme une ellipse) et correspond à un faisceau de sphères à base cercle, i.e. toutes les sphères du faisceau ont un cercle commun, figures 1(a) et 6(a).
- La section de la quadrique Λ^4 par un plan \mathcal{P} de type lumière est un cercle unitaire (qui se trace comme l'union de deux droites symétriques par rapport à O_5) et correspond à un faisceau de sphères tangentes en un point, figures 1(b) et 6(b). Notons que ce point est défini par la direction lumière de l'une des droites.
- La section de la quadrique Λ^4 par un plan \mathcal{P} de type temps est un cercle unitaire (qui se trace comme une hyperbole) et correspond à un faisceau de sphères à points limites, figures 1(c) et 6(c).

Démonstration :

Commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 1 :

La représentation d'un faisceau de sphères est obtenue comme section de Λ^4 par un plan passant par le point O_5 .

Démonstration :

Soit deux sphères S_1 et S_2 non concentriques, de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 , de rayons respectifs ρ_1 et ρ_2 . Soit $\overrightarrow{\sigma_1}$ (resp. $\overrightarrow{\sigma_2}$) la représentation de S_1 (resp. S_2) sur Λ^4 . Nous rappelons les expressions de $\overrightarrow{\sigma_1}$ et $\overrightarrow{\sigma_2}$:

$$\begin{cases} \rho_1 \overrightarrow{\sigma_1} = \vec{e}_o + \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + \frac{\|\overrightarrow{O_3 \Omega_1}\|^2 - \rho_1^2}{2} \vec{e}_\infty \\ \rho_2 \overrightarrow{\sigma_2} = \vec{e}_o + \overrightarrow{O_3 \Omega_2} + \frac{\|\overrightarrow{O_3 \Omega_2}\|^2 - \rho_2^2}{2} \vec{e}_\infty \end{cases}$$

1/ Cas où $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

Nous pouvons nous restreindre au cas $\lambda_1 = 1 = -\lambda_2$. Commençons par remarquer :

$$\begin{cases} \overrightarrow{O_3 \Omega_1}^2 = \overrightarrow{O_3 I_0}^2 + 2 \overrightarrow{O_3 I_0} \cdot \overrightarrow{I_0 \Omega_1} + \rho_1^2 \\ \overrightarrow{O_3 \Omega_2}^2 = \overrightarrow{O_3 I_0}^2 + 2 \overrightarrow{O_3 I_0} \cdot \overrightarrow{I_0 \Omega_2} + \rho_2^2 \end{cases}$$

Calculons :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{\Omega_2 \Omega_1} \overrightarrow{\sigma_1} - \frac{\rho_2}{\Omega_2 \Omega_1} \overrightarrow{\sigma_2} \\ &= \frac{1}{\Omega_2 \Omega_1} \left(\overrightarrow{O_3 \Omega_1} - \overrightarrow{O_3 \Omega_2} + \frac{\|\overrightarrow{O_3 \Omega_1}\|^2 - \rho_1^2 - \|\overrightarrow{O_3 \Omega_2}\|^2 + \rho_2^2}{2} \vec{e}_\infty \right) \\ &= \frac{1}{\Omega_2 \Omega_1} \overrightarrow{\Omega_2 \Omega_1} + \frac{2 \overrightarrow{O_3 I_0} \cdot (\overrightarrow{I_0 \Omega_1} - \overrightarrow{I_0 \Omega_2})}{2 \Omega_2 \Omega_1} \vec{e}_\infty \\ &= \frac{1}{\Omega_2 \Omega_1} \overrightarrow{\Omega_2 \Omega_1} + \left(\overrightarrow{O_3 I_0} \cdot \frac{1}{\Omega_2 \Omega_1} \overrightarrow{\Omega_2 \Omega_1} \right) \vec{e}_\infty = \vec{\pi}_1 \end{aligned}$$

et les représentations des plans orientés du faisceau de sphères sont coplanaires avec $\overrightarrow{\sigma_1}$ et $\overrightarrow{\sigma_2}$ ($\vec{\pi}_1$ est le plan passant par I_0 et de vecteur normal unitaire $\frac{1}{\Omega_2 \Omega_1} \overrightarrow{\Omega_2 \Omega_1}$).

2/ Cas où $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$

Soit λ_1 et λ_2 deux réels non tous deux nuls et non opposés. Notons $\overrightarrow{\sigma_{12}}$ la représentation sur Λ^4 de la sphère $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ du faisceau de sphères défini par les sphères S_1 et S_2 . Nous avons vu que nous pouvions nous restreindre au cas $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Le centre Ω_{12} de la sphère $\lambda_1 S_1 + (1 - \lambda_1) S_2$ est le barycentre des points pondérés (Ω_1, λ_1) et $(\Omega_2, 1 - \lambda_1)$ tandis que le rayon ρ_{12} est donné par :

$$\rho_{12} = \varepsilon \sqrt{-\lambda_1 (\Omega_1 \Omega_{12}^2 - \rho_1^2) - (1 - \lambda_1) (\Omega_2 \Omega_{12}^2 - \rho_2^2)} \quad (35)$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\sigma_{12}} \\ &= \frac{1}{\rho_{12}} \left(\vec{e}_o + \frac{\|\lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2}\|^2 - \rho_{12}^2}{2} \vec{e}_\infty \right) \quad (36) \\ &+ \frac{1}{\rho_{12}} \left(\lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right) \end{aligned}$$

puisque nous avons :

$$\begin{aligned} & \rho_{12}^2 \overrightarrow{\sigma_{12}}^2 \\ &= \left(\vec{e}_o + \lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right)^2 \\ &+ 2 \left(\vec{e}_o + \lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right) \\ &\cdot dy \frac{1}{2} \left(\|\lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2}\|^2 - \rho_{12}^2 \right) \vec{e}_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(dy \frac{1}{2} \left(\left\| \lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right\|^2 - \rho_{12}^2 \right) \overrightarrow{e_\infty} \right)^2 \\
& = \left\| \lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right\|^2 \\
& - 2 \frac{1}{2} \left(\left\| \lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right\|^2 - \rho_{12}^2 \right) \\
& = \rho_{12}^2
\end{aligned}$$

Montrons la relation :

$$\rho_{12} \overrightarrow{\sigma_{12}} = \lambda_1 \rho_1 \overrightarrow{\sigma_1} + (1 - \lambda_1) \rho_2 \overrightarrow{\sigma_2} \quad (37)$$

Comme nous avons $\overrightarrow{e_o} = \lambda_1 \overrightarrow{e_o} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{e_o}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \rho_1 \overrightarrow{\sigma_1} + (1 - \lambda_1) \rho_2 \overrightarrow{\sigma_2} \\
& = \overrightarrow{e_o} + \lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \quad (38) \\
& + \frac{\lambda_1 \left(\left\| \overrightarrow{O_3 \Omega_1} \right\|^2 - \rho_1^2 \right) + (1 - \lambda_1) \left(\left\| \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right\|^2 - \rho_2^2 \right)}{2} \overrightarrow{e_\infty}
\end{aligned}$$

et, en comparant les formules (36) et (38), la relation donnée dans la formule est vérifiée si et seulement si nous avons :

$$\begin{aligned}
& \left\| \lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right\|^2 - \rho_{12}^2 = \\
& \lambda_1 \left(\left\| \overrightarrow{O_3 \Omega_1} \right\|^2 - \rho_1^2 \right) + (1 - \lambda_1) \left(\left\| \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right\|^2 - \rho_2^2 \right) \quad (39)
\end{aligned}$$

Comme nous avons :

$$\begin{aligned}
& \left\| \lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right\|^2 \\
& = \lambda_1^2 \overrightarrow{O_3 \Omega_1}^2 + (1 - \lambda_1)^2 \overrightarrow{O_3 \Omega_2}^2 + 2\lambda_1(1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_1} \bullet \overrightarrow{O_3 \Omega_2}
\end{aligned}$$

il reste à calculer $-\rho_{12}^2$:

$$\begin{aligned}
& -\rho_{12}^2 \\
& = \lambda_1 \left(\left(\overrightarrow{\Omega_1 O_3} + \overrightarrow{O_3 \Omega_{12}} \right)^2 - \rho_1^2 \right) \\
& + (1 - \lambda_1) \left(\left(\overrightarrow{\Omega_2 O_3} + \overrightarrow{O_3 \Omega_{12}} \right)^2 - \rho_2^2 \right) \\
& = \lambda_1 \left(\overrightarrow{\Omega_1 O_3}^2 + \overrightarrow{O_3 \Omega_{12}}^2 + 2\overrightarrow{\Omega_1 O_3} \bullet \overrightarrow{O_3 \Omega_{12}} - \rho_1^2 \right) \\
& + (1 - \lambda_1) \left(\overrightarrow{\Omega_2 O_3}^2 + \overrightarrow{O_3 \Omega_{12}}^2 + 2\overrightarrow{\Omega_2 O_3} \bullet \overrightarrow{O_3 \Omega_{12}} - \rho_2^2 \right) \\
& = \lambda_1 \left(\overrightarrow{\Omega_1 O_3}^2 - \rho_1^2 \right) + (1 - \lambda_1) \left(\overrightarrow{\Omega_2 O_3}^2 - \rho_2^2 \right) + \overrightarrow{O_3 \Omega_{12}}^2 \\
& + 2 \left(\lambda_1 \overrightarrow{\Omega_1 O_3} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{\Omega_2 O_3} \right) \bullet \overrightarrow{O_3 \Omega_{12}}
\end{aligned}$$

et la condition donnée par la formule (39) devient :

$$\begin{aligned}
& \left\| \lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right\|^2 \\
& + \overrightarrow{O_3 \Omega_{12}}^2 - 2 \left(\lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right) \bullet \overrightarrow{O_3 \Omega_{12}} \\
& = 0
\end{aligned}$$

qui se simplifie en :

$$\begin{aligned}
& \left\| \lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right\|^2 \\
& - \left(\lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right) \bullet \overrightarrow{O_3 \Omega_{12}} \\
& = 0
\end{aligned}$$

puisque Ω_{12} est le barycentre des points pondérés (Ω_1, λ_1) et (Ω_2, λ_2) . Pour la même raison, l'équation précédente devient :

$$\left\| \lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right\|^2 = \left\| \lambda_1 \overrightarrow{O_3 \Omega_1} + (1 - \lambda_1) \overrightarrow{O_3 \Omega_2} \right\|^2$$

qui est toujours vérifiée : la relation (37) est donc toujours vérifiée.

3/ Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{\sigma_{12}}$, $\overrightarrow{\sigma_1}$ et $\overrightarrow{\sigma_2}$ sont donc coplanaires pour toutes valeurs de λ_1 et λ_2 . De plus, si σ est un point représentant une sphère du faisceau, $-\sigma$ en est aussi un, le plan contenant les représentations des sphères d'un faisceau contient donc le point O_5 .

□

Il reste à déterminer le type du plan. Pour ce faire, en utilisant la remarque 1, dénombrons le nombre de direction(s) lumière du plan :

1. Si nous avons un faisceau de sphères à base cercle, aucun point (i.e. sphère de rayon nul) n'appartient à ce faisceau : le plan est donc de type espace ;
2. Si nous avons un faisceau de sphères tangentes, un seul point (i.e. sphère de rayon nul) appartient à ce faisceau : le plan est donc de type lumière ;
3. Si nous avons un faisceau de sphères à points limites, deux points (i.e. sphères de rayon nul) appartiennent à ce faisceau : le plan est donc de type temps.

■

Notons que, dans les trois cas, un faisceau de sphères est représenté par un cercle unitaire de centre O_5 , puisque toutes les sphères S_i de ce faisceau sont dans un plan et vérifient $\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{O_5 \sigma_i}) = \overrightarrow{\sigma_i}^2 = 1$ où σ_i est la représentation de S_i sur Λ^4 .

3.1 Equation d'un faisceau à base cercle

Nous pouvons énoncer :

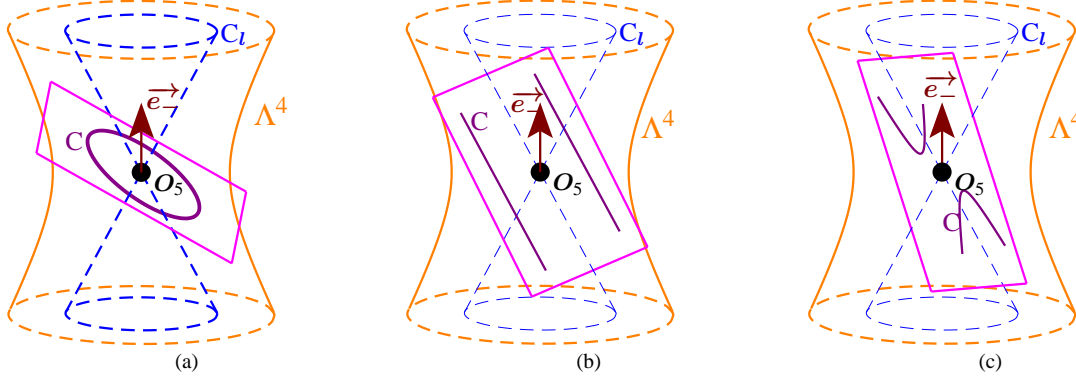


Figure 6: Représentation des trois types de faisceaux de sphères comme section de Λ^4 par un 2-plan affine passant par O_5 . (a) : Un faisceau de sphères à base cercle est représenté par un cercle connexe contenu dans un 2-plan de type espace. (b) : Un faisceau de sphères tangentes est représenté par deux droites de type lumière contenues dans un 2-plan de type lumière. (c) : Un faisceau de sphères à points limites est représenté par un cercle non connexe contenu dans un 2-plan de type temps.

Proposition 6 :

Soit C un cercle de \mathcal{E}_3 de centre Ω_1 et de rayon r_1 strictement positif. Soit S_1 une sphère orientée de centre Ω_1 et de rayon ρ_1 tel que $|\rho_1| = r_1$. Soit \mathcal{P}_1 un plan orienté tel que $C = \mathcal{P}_1 \cap S_1$ c'est-à-dire que \mathcal{P}_1 et S_1 sont orthogonaux.

La représentation de S_1 (resp. \mathcal{P}_1) sur Λ^4 est $\vec{\sigma}_1$ (resp. $\vec{\pi}_1$). L'équation paramétrique du faisceau de sphères à base le cercle C est :

$$\vec{\sigma}(t) = \cos(t) \vec{\sigma}_1 + \sin(t) \vec{\pi}_1, t \in \mathbb{R} \quad (40)$$

Démonstration :

D'après le théorème 4, nous savons que toute sphère d'un faisceau peut s'écrire comme combinaison de deux éléments donnés de ce faisceau. Il suffit de montrer que $\vec{\sigma}(t)$ appartient bien à Λ^4 .

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(t)^2 &= (\cos(t) \vec{\sigma}_1 + \sin(t) \vec{\pi}_1)^2 \\ &= \cos^2(t) \underbrace{\vec{\sigma}_1^2}_{=1} + \sin^2(t) \underbrace{\vec{\pi}_1^2}_{=1} \\ &\quad + 2 \cos(t) \sin(t) \underbrace{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\pi}_1}_{=0, \text{ proposition 3}} \\ &= \cos^2(t) + \sin^2(t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

A partir de la formule (40), nous avons $\vec{\sigma}(0) = \vec{\sigma}_1$ et $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(0) = \vec{\pi}_1$.

Considérons le cercle C de \mathcal{E}_3 , dans $\mathcal{P} : z = 0$, de centre O_3 et de rayon 2. Prenons la sphère orientée S^- de centre O_3 et de rayon -2 ainsi que le plan orienté \mathcal{P} de vecteur normal \vec{k} . La représentation de S^- est :

$$\begin{aligned} \vec{O}_5 \vec{\sigma} &= -\frac{1}{2} (\vec{e}_0 + \vec{O}_3 \vec{O}_3) + \frac{1}{2} (\vec{O}_3 \vec{O}_3 - (-2)^2) \vec{e}_\infty \\ &= -\frac{1}{2} (\vec{e}_0 - 2 \vec{e}_\infty) \end{aligned}$$

tandis que la représentation de \mathcal{P} est :

$$\vec{O}_5 \vec{\pi} = \vec{k} + (\vec{O}_3 \vec{O}_3 \bullet \vec{k}) \vec{e}_\infty = \vec{k}$$

et nous avons bien :

$$\vec{O}_5 \vec{\sigma} \cdot \vec{O}_5 \vec{\pi} = 0$$

ce qui est normal puisque la sphère S et le plan \mathcal{P} sont orthogonaux. Dans l'espace des sphères, nous représentons le faisceau par le demi-cercle de centre O_5 , d'extrémités σ et $-\sigma$ et de vecteurs tangents en ces points $\vec{O}_5 \vec{\pi}$ que nous pouvons modéliser à l'aide d'une courbe de Bézier rationnelle quadratique à points massiques de contrôle :

$$\begin{aligned} \vec{O}_5 \vec{\sigma}(t) &= \frac{1}{B_0(t) + B_2(t)} (B_0(t) \vec{O}_5 \vec{\sigma} - B_2(t) \vec{O}_5 \vec{\sigma} + B_1(t) \vec{O}_5 \vec{\pi}) \\ &= \frac{1}{1 - 2t + 2t^2} ((1 - 2t) \vec{O}_5 \vec{\sigma} + 2t(1 - t) \vec{O}_5 \vec{\pi}) \end{aligned}$$

dont l'expression de $\overrightarrow{O_3\sigma}(t)$ se simplifie en :

$$\frac{1}{1-2t+2t^2} \left(\frac{2t-1}{2} \vec{e}_0 + 2t(1-t) \vec{k} + (1-2t) \vec{e}_\infty \right)$$

et nous pouvons tracer quelques sphères directement depuis l'espace des sphères, tableau 2 et figure 7.

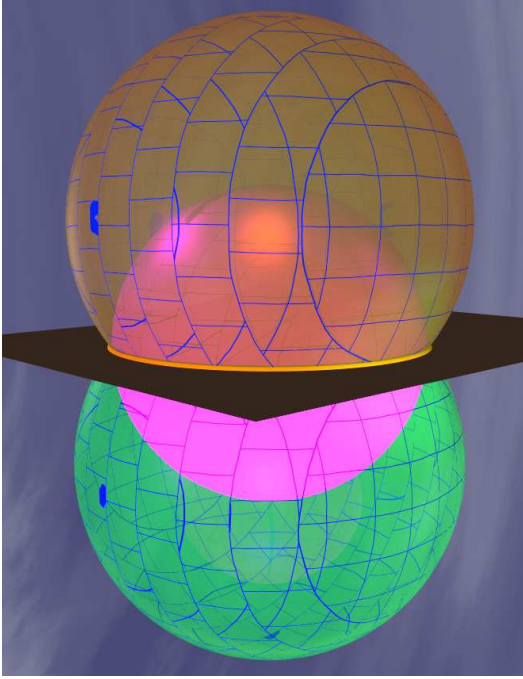


Figure 7: Quelques sphères d'un faisceau de sphères modélisé par un demi-cercle représenté par une courbe de Bézier rationnelle quadratique à points massiques de contrôle. —

Notons, par exemple, pour $t = \frac{1}{4}$, nous avons $\frac{1}{2} \left(\left(-\frac{3}{2} \right)^2 - \left(-\frac{5}{2} \right)^2 \right) = -2$. Le rayon de la sphère est :

$$\frac{1}{1-2t+2t^2} \times \frac{2t-1}{2} = \frac{1}{(1-t)^2+t^2} \times \frac{2t-1}{2}$$

est le changement d'orientation des sphères s'effectuent lors du passage par un plan orienté.

3.2 Equation d'un faisceau à points limites

De la même manière que dans le paragraphe précédent, nous allons établir une paramétrisation d'un faisceau de sphères à points limites sur Λ^4 .

Proposition 7 :

Considérons M_1 et M_2 les deux points limites d'un faisceau de sphères $S(t)$. Soit \vec{m}_1 et \vec{m}_2 la représentation des points M_1 et M_2 dans l'espace de Lorentz.

Un faisceau de sphères à points limites M_1 et M_2 admet deux équations paramétriques :

$$\vec{\sigma}(t) = t \frac{1}{M_2 M_1} \vec{m}_1 - \frac{1}{t} \frac{1}{M_2 M_1} \vec{m}_2, \quad t \in \mathbb{R}^* \quad (41)$$

et :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma_{hyp}}(t) = & \varepsilon \operatorname{ch}(t) \frac{1}{M_2 M_1} (\vec{m}_1 - \vec{m}_2) \\ & + \operatorname{sh}(t) \frac{1}{M_2 M_1} (\vec{m}_1 + \vec{m}_2) \end{aligned} \quad (42)$$

où $(t; \varepsilon)$ appartient à $\mathbb{R} \times \{-1; 1\}$.

Démonstration :

D'après le théorème 4, nous savons que toute sphère d'un faisceau peut s'écrire comme combinaison de deux éléments donnés de ce faisceau.

Nous avons :

$$\vec{m}_1 = \vec{e}_o + \vec{M}_1 + \frac{1}{2} \left\| \vec{M}_1 \right\|^2 \vec{e}_\infty$$

et :

$$\vec{m}_2 = \vec{e}_o + \vec{M}_2 + \frac{1}{2} \left\| \vec{M}_2 \right\|^2 \vec{e}_\infty$$

De plus, nous avons $\vec{m}_1^2 = \vec{m}_2^2 = 0$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 &= \left(\vec{e}_o + \vec{O}_3 \vec{M}_1 + \frac{1}{2} \left\| \vec{O}_3 \vec{M}_1 \right\|^2 \vec{e}_\infty \right) \\ & \cdot \left(\vec{e}_o + \vec{O}_3 \vec{M}_2 + \frac{1}{2} \left\| \vec{O}_3 \vec{M}_2 \right\|^2 \vec{e}_\infty \right) \\ &= \vec{O}_3 \vec{M}_1 \cdot \vec{O}_3 \vec{M}_2 - \frac{1}{2} \vec{O}_3 \vec{M}_1^2 - \frac{1}{2} \vec{O}_3 \vec{M}_2^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\vec{O}_3 \vec{M}_1 - \vec{O}_3 \vec{M}_2 \right)^2 = -\frac{1}{2} \vec{M}_2 \vec{M}_1^2 \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $\vec{\sigma}(t)$ appartient bien à Λ^4 .

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(t)^2 &= \left(t \frac{1}{M_2 M_1} \vec{m}_1 - \frac{1}{t} \frac{1}{M_2 M_1} \vec{m}_2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{M_2 M_1^2} \left(t^2 \vec{m}_1^2 - 2 \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 + \frac{1}{t^2} \vec{m}_2^2 \right) \\ &= \frac{-2}{M_2 M_1^2} \left(-\frac{1}{2} \vec{M}_2 \vec{M}_1^2 \right) = 1. \end{aligned}$$

□

Etablissons la seconde équation. Nous avons :

$$(\vec{m}_1 + \vec{m}_2)^2 = \vec{m}_1^2 + 2 \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 + \vec{m}_2^2 = -\vec{M}_2 \vec{M}_1^2 \quad (43)$$

et :

$$(\vec{m}_1 - \vec{m}_2)^2 = \vec{m}_1^2 - 2 \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 + \vec{m}_2^2 = \vec{M}_2 \vec{M}_1^2 \quad (44)$$

Il suffit de montrer que $\overrightarrow{\sigma_{hyp}}(t)$ appartient bien à Λ^4 .

Valeur	Point $\sigma(t)$	Sphère correspondante dans \mathcal{E}_3
$t = 0$	$\left(-\frac{1}{2}; 0; 0; 0; 1\right) = -\frac{1}{2} \left(1; 0; 0; 0; \frac{1}{2}(-(-2)^2)\right)$	Centre : $(0; 0; 0)$, rayon -2
$t = \frac{1}{4}$	$\left(-\frac{2}{5}; 0; 0; -\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{-\frac{5}{2}} \left(1; 0; 0; -\frac{3}{2}; -2\right)$	Centre : $\left(0; 0; -\frac{3}{2}\right)$, rayon $-\frac{5}{2}$
$t = \frac{1}{2}$	$(0; 0; 0; 1; 0)$	Point $(0; 0; 0)$, vecteur normal \vec{k}
$t = \frac{3}{4}$	$\left(\frac{2}{5}; 0; 0; \frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{\frac{5}{2}} \left(1; 0; 0; \frac{3}{2}; -2\right)$	Centre : $\left(0; 0; \frac{3}{2}\right)$, rayon $\frac{5}{2}$
$t = 1$	$\left(\frac{1}{2}; 0; 0; 0; 1\right) = \frac{1}{2} \left(1; 0; 0; 0; \frac{1}{2}(-(-2)^2)\right)$	Centre : $(0; 0; 0)$, rayon 2

Table 2: Sphères d'un faisceau de sphère à base cercle.

$$\begin{aligned}
 & \overline{\sigma}_{hyp}(t)^2 \\
 &= \left(\varepsilon \operatorname{ch}(t) \frac{1}{M_2 M_1} (\vec{m}_1 - \vec{m}_2) + \operatorname{sh}(t) \frac{1}{M_2 M_1} (\vec{m}_1 + \vec{m}_2) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{M_2 M_1^2} \left(\varepsilon^2 \operatorname{ch}^2(t) \overline{M_2 M_1}^2 - \operatorname{sh}^2(t) \overline{M_2 M_1}^2 \right) \\
 &+ \frac{2}{M_2 M_1^2} \varepsilon \operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}(t) (\vec{m}_1^2 - \vec{m}_2^2) \\
 &= \operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1
 \end{aligned}$$

■

Considérons deux points distincts M_0 et M_2 de représentations respectives par les deux vecteurs lumière :

$$\vec{m}_0 = \vec{e}_0 + \overline{O_3 M_0} + \frac{\overline{M_0}^2}{2} \vec{e}_\infty$$

et :

$$\vec{m}_2 = \vec{e}_0 + \overline{O_3 M_2} + \frac{\overline{M_2}^2}{2} \vec{e}_\infty$$

Dans l'espace des sphères, nous représentons le faisceau par la branche du cercle représentant le faisceau de centre O_5 à l'aide d'une courbe de Bézier rationnelle quadratique à points massiques de contrôle, de points de contrôle intermédiaire $(O_5; \omega_1)$ et d'extrémités $(\vec{m}_0; 0)$ et $(-\vec{m}_2; 0)$. Soit ω_1 le poids de O_5 . Pour $t \in]0; 1[$, un point de cette courbe de Bézier est définie par :

$$\begin{aligned}
 & \overline{O_5 \sigma}(t) \\
 &= \frac{1}{\omega_1 B_1(t)} \left(B_0(t) \vec{m}_0 - B_2(t) \vec{m}_2 + \omega_1 B_1(t) \overline{O_5 O_5} \right) \\
 &= \frac{1}{\omega_1 B_1(t)} (B_0(t) \vec{m}_0 - B_2(t) \vec{m}_2)
 \end{aligned}$$

La détermination de ω_1 se fait par :

$$\overline{O_5 \sigma}(t)^2 = 1 \quad (45)$$

qui est équivalente à :

$$\omega_1^2 B_1^2(t) \overline{O_5 \sigma}(t)^2 = (B_0(t) \vec{m}_0 - B_2(t) \vec{m}_2)^2$$

Développons et simplifions le membre de gauche :

$$\begin{aligned}
 (B_0(t) \vec{m}_0 - B_2(t) \vec{m}_2)^2 &= -2 B_0(t) B_2(t) \vec{m}_0 \cdot \vec{m}_2 \\
 &= -\frac{B_1^2(t)}{2} \vec{m}_0 \cdot \vec{m}_2
 \end{aligned}$$

et la formule (45) est équivalente à :

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{2} \vec{m}_0 \cdot \vec{m}_2 = \frac{1}{4} \overline{M_2 M_0}^2$$

Pour tout réel λ non nul, nous avons :

$$(\lambda \vec{m}_0)^2 = (\lambda \vec{m}_2)^2 = \vec{m}_0^2 = \vec{m}_2^2 = 0$$

et la condition donnée par la formule (??) devient caduque et s'énonce ainsi :

Condition 1 :

Lorsqu'une courbe de Bézier rationnelles quadratiques représente une branche d'un cercle qui se trace comme une hyperbole, les points massiques extrémaux sont deux vecteurs lumière soit \vec{m}_0 et \vec{m}_2 représentant deux points M_0 et M_2 , soit \vec{m}_0 et \vec{e}_∞ représentant un point M_0 et le point à l'infini de \mathcal{E}_3 . Rappelons que la première coordonnée de \vec{m}_0 et \vec{m}_2 est 1.

Finalement, nous obtenons :

$$\overline{O_5 \sigma}(t) = \frac{B_0(t)}{\omega_1 B_1(t)} \left(\vec{e}_0 + \overline{O_3 M_0} + \frac{\overline{M_0}^2}{2} \vec{e}_\infty \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{B_2(t)}{\omega_1 B_1(t)} \left(\vec{e}_0 + O_3 \vec{M}_2 + \frac{\vec{M}_2^2}{2} \vec{e}_\infty \right) \\
& = \frac{B_0(t) - B_2(t)}{\omega_1 B_1(t)} \vec{e}_0 \\
& + \frac{1}{\omega_1 B_1(t)} \left(B_0(t) \frac{\vec{M}_0^2}{2} - B_2(t) \frac{\vec{M}_2^2}{2} \right) \vec{e}_\infty \\
& + \frac{1}{\omega_1 B_1(t)} \left(B_0(t) \vec{O}_3 \vec{M}_0 - B_2(t) \vec{O}_3 \vec{M}_2 \right)
\end{aligned}$$

Considérons les deux points $M_0(-2;0;0)$ et $M_2(2;0;0)$. Nous choisissons $\omega_1 = 2$.

Puisque $\vec{O}_3 \vec{M}_2 = -\vec{O}_3 \vec{M}_0$ et $O_3 M_0 = 2$, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned}
\vec{O}_5 \sigma(t) & = \frac{1-2t}{4t(1-t)} (\vec{e}_0 + 2\vec{e}_\infty) \\
& + \frac{1-2t+2t^2}{4t(1-t)} \vec{O}_3 \vec{M}_0
\end{aligned}$$

et nous pouvons tracer quelques sphères directement depuis l'espace des sphères, tableau 3. Rappelons, que pour $t = 0$ (resp. $t = 1$), nous obtenons le vecteur \vec{W}_0 (resp. \vec{W}_2) qui définit le point M_0 (resp. M_2), figure 8.

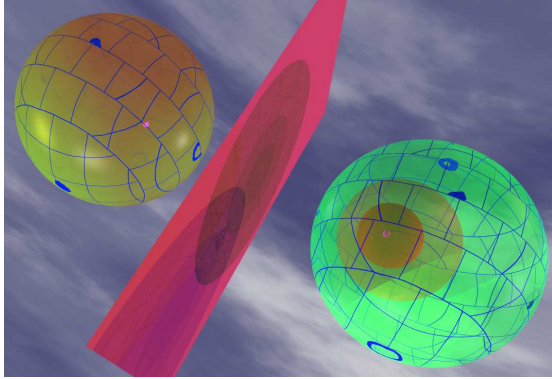


Figure 8 : Quelques sphères d'un faisceau de sphères à points limites modélisé par une branche connexe d'un cercle représenté par une courbe de Bézier rationnelle quadratique à points massiques de contrôle.

3.3 Equation d'un faisceau de sphères tangentes

Soit une sphère S_1 de centre Ω_1 et de rayon ρ_1 non nul et $\vec{\sigma}_1$ sa représentation sur Λ^4 . Soit M_1 un point de S_1 et \vec{m}_1 la représentation de M_1 dans l'espace de Lorentz. Trivialement, l'équation paramétrique du faisceau de sphères tangentes à S_1 en M_1 est :

$$\vec{\sigma}(t) = \varepsilon \vec{\sigma}_1 + t \vec{m}_1, t \in \mathbb{R} \quad (46)$$

où ε appartient à $\{-1; 1\}$.

4 Surface canal

4.1 Définition

Commençons par donner une condition nécessaire sur l'existence d'une surface canal [LS11] :

Théorème 5 :

Soit $\sigma(t)$, t appartenant à un intervalle I , une famille à un paramètre de sphères orientés. La condition nécessaire pour que la famille de sphères définisse une surface canal est la suivante :

$$\forall t \in I, \left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t) \right)^2 > 0$$

c'est-à-dire que la courbe doit être de type espace (le vecteur tangent est toujours de type espace).

Avant de donner une condition suffisante, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 4 : Vecteur courbure géodésique

Soit $\gamma : [a; b] \rightarrow \Lambda^4$ une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne.

Un vecteur courbure géodésique au point $\gamma(t_0)$ est la projection $\mathcal{L}_{4,1}$ -orthogonale du vecteur dérivé seconde $\ddot{\gamma}(t_0)$ sur l'hyperplan $\vec{\mathcal{T}}_{\gamma(t_0)} \Lambda^4$ à la courbe γ .

Il suffit de projeter l'image de $\gamma(t_0)$ par la translation de vecteur $\ddot{\gamma}(t_0)$ sur l'hyperplan $\vec{\mathcal{T}}_{\gamma(t_0)} \Lambda^4$. Nous pouvons énoncer [LS11] :

Théorème 6 :

Soit $\gamma(t)$, t appartenant à un intervalle I , une famille à un paramètre de sphères orientés, paramétrée par l'abscisse curviligne, vérifiant :

$$\forall t \in I, \left(\frac{d\vec{\gamma}}{dt}(t) \right)^2 > 0$$

La surface canal, enveloppe de cette famille à un paramètre de sphères n'est pas dégénérée si le vecteur courbure géodésique est de type temps.

4.2 Détermination des cercles caractéristiques

Les cercles caractéristiques d'une surface canal peuvent être déterminés par l'intersection de deux sphères particulières. Soit $t \mapsto \sigma(t)$ une paramétrisation admissible de la courbe C_1 représentant cette surface canal. Soit $\sigma(t_0)$ un point de la conique C_1 représentant la sphère $S(t_0)$. La

Valeur	Point $\sigma(t)$	Sphère correspondante dans \mathcal{E}_3
$t = \frac{1}{10}$	$\left(\frac{20}{9}; -\frac{41}{9}; 0; 0; \frac{40}{9}\right) = \frac{1}{\frac{9}{20}} \left(1; -\frac{41}{20}; 0; 0; 2\right)$	Centre : $\left(-\frac{41}{20}; 0; 0\right)$, rayon $\frac{9}{20}$
$t = \frac{1}{6}$	$\left(\frac{6}{5}; -\frac{13}{5}; 0; 0; \frac{12}{5}\right) = \frac{1}{\frac{5}{6}} \left(1; -\frac{13}{6}; 0; 0; 2\right)$	Centre : $\left(-\frac{13}{6}; 0; 0\right)$, rayon $\frac{5}{6}$
$t = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}; 0; 0; \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}} \left(1; -\frac{5}{2}; 0; 0; 2\right)$	Centre : $\left(-\frac{5}{2}; 0; 0\right)$, rayon $\frac{3}{2}$
$t = \frac{1}{2}$	$(0; -1; 0; 0; 0)$	Point $(0; 0; 0)$, vecteur normal $-\vec{v}$
$t = \frac{3}{4}$	$\left(-\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}; 0; 0; -\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{-\frac{3}{2}} \left(1; \frac{5}{2}; 0; 0; 2\right)$	Centre : $\left(\frac{5}{2}; 0; 0\right)$, rayon $-\frac{3}{2}$

Table 3: Sphères d'un faisceau de sphère à points limites.

sphère $\overset{\bullet}{S}(t_0)$ est déterminée par la donnée du vecteur tangent $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0)$ au cercle au point $\sigma(t_0)$: elle est représentée sur Λ^4 par $\overset{\bullet}{\sigma}(t_0)$ définie par :

$$\left\{ \overset{\bullet}{\sigma}(t_0) \right\} = \left[O_5; \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0) \right] \cap \Lambda^4 \quad (47)$$

et nous introduisons la définition suivante :

Définition 5 : sphère dérivée

Soit $t \mapsto \sigma(t)$ une paramétrisation admissible de la courbe C_1 représentant une surface canal.

La sphère dérivée de la sphère $\sigma(t_0)$ (resp. $S(t_0)$) est la sphère $\overset{\bullet}{\sigma}(t_0)$ (resp. $\overset{\bullet}{S}(t_0)$) définie par la formule (47) (resp. $\overset{\bullet}{\sigma}(t_0)$).

Le cercle caractéristique induit par $S(t_0)$ est l'intersection des deux sphères orthogonales $S(t_0)$ et $\overset{\bullet}{S}(t_0)$. La relation :

$$\overrightarrow{O_5\sigma(t_0)}^2 = 1$$

induit, par dérivation, la relation :

$$\overrightarrow{O_5\sigma(t_0)} \cdot \overrightarrow{O_5\overset{\bullet}{\sigma}(t_0)} = 0$$

Si C_1 est un cercle de centre Ω_1 , ce dernier est le projeté orthogonal de O_5 sur le plan $\text{Aff}\{C_1\}$, ainsi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega_1\sigma(t_0)} \cdot \overrightarrow{O_5\overset{\bullet}{\sigma}(t_0)} &= \underbrace{\overrightarrow{O_5\Omega_1} \cdot \overrightarrow{O_5\overset{\bullet}{\sigma}(t_0)}}_0 + \overrightarrow{\Omega_1\sigma(t_0)} \cdot \overrightarrow{O_5\overset{\bullet}{\sigma}(t_0)} \\ &= \left(\overrightarrow{O_5\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_1\sigma(t_0)} \right) \cdot \overrightarrow{O_5\overset{\bullet}{\sigma}(t_0)} \\ &= \overrightarrow{O_5\sigma(t_0)} \cdot \overrightarrow{O_5\overset{\bullet}{\sigma}(t_0)} = 0 \end{aligned}$$

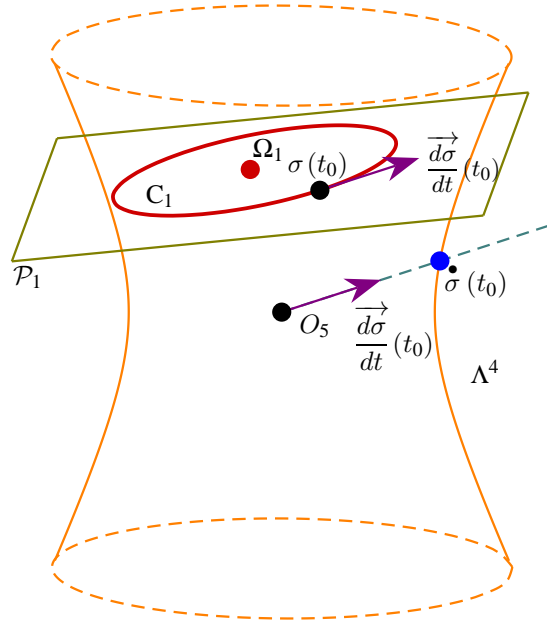


Figure 9: Sur Λ^4 , C_1 est un cercle représentant une cyclide de Dupin. Considérons le point $\sigma(t_0)$. Le vecteur tangent à cette courbe en ce point est $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0)$. Le cercle caractéristique de la cyclide de Dupin est l'intersection entre les deux sphères $S(t_0)$ et $\overset{\bullet}{S}(t_0)$, représentées sur Λ^4 par $\sigma(t_0)$ et $\overset{\bullet}{\sigma}(t_0)$ où cette dernière est l'intersection entre la demi-droite $\left[O_5; \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0) \right)$ et Λ^4 .

et la figure 9 illustre ce dernier cas.

La figure 10 montre un cercle caractéristique sur une CD4E obtenu comme intersection de deux sphères orthogonales $S(t_0)$ et $S(\dot{t}_0)$. Notons que la seconde sphère peut être un plan et dans ce cas, le cercle caractéristique obtenu sera un grand cercle sur la première sphère.

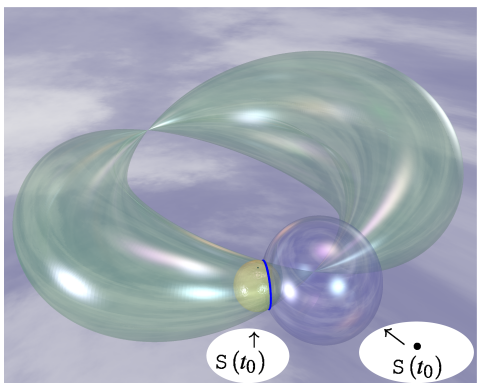


Figure 10: Construction, dans \mathcal{E}_3 , d'un cercle caractéristique d'une cyclide de Dupin depuis l'espace des sphères, figure 9.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons fait un tour d'horizon de l'espace de Minkowski-Lorentz et avons montré qu'une famille à un paramètre de sphères orientées était représentée simplement par une courbe de degré au plus 2 et que les problèmes quadratiques concernant les sphères deviennent linéaires dans cet espace.

Références

- [Ber78] BERGER M. : *Géométrie 2*, 2ème ed., vol. 5. Cedic-Nathan, 1978.
- [BG92] BERGER M., GOSTIAUX B. : *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, 2ème ed. PUF, avril 1992.
- [Cec92] CECIL T. : *Lie sphere geometry*. Universitext, 1992.
- [DFGL14] DRUOTON L., FUCHS L., GARNIER L., LANGEVIN R. : The non-degenerate Dupin cyclides in the space of spheres using geometric algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras*. Vol. 23, Num. 4 (2014), 787–990. ISSN 0188-7009.
- [DFM07] DORST L., FONTIJNE D., MANN S. : *Geometric Algebra for Computer Science : An Object Oriented Approach to Geometry*. Morgan Kaufmann Publishers, 2007.
- [DGL13] DRUOTON L., GARNIER L., LANGEVIN R. : Iterative construction of Dupin cyclide characteristic circles using non-stationary Iterated Function Systems (IFS). *Computer-Aided Design*. Vol. 45, Num. 2 (February 2013), 568–573. Solid and Physical Modeling 2012, Dijon.
- [DLG13] DRUOTON L., LANGEVIN R., GARNIER L. : Blending canal surfaces along given circles using Dupin cyclides. *International Journal of Computer Mathematics* (2013), 1–20.
- [Dru13] DRUOTON L. : *Recollements de morceaux de cyclides de Dupin pour la modélisation et la reconstruction 3D*. PhD thesis, Université de Bourgogne, Institut de Mathématiques de Bourgogne, avril 2013.
- [GD13a] GARNIER L., DRUOTON L. : Constructions, dans l'espace des sphères, de carreaux de cyclides de Dupin à bords circulaires. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*. Vol. 7, Num. 1 (2013), 17–40.
- [GD13b] GARNIER L., DRUOTON L. : Constructions of principal patches of Dupin cyclides defined by constraints : four vertices on a given circle and two perpendicular tangents at a vertex. In *XIV Mathematics of Surfaces* (Birmingham, Royaume-Uni, 11-13 september 2013), pp. 237–276.
- [GDB15] GARNIER L., DRUOTON L., BÉCAR J. P. : Points massiques, espace des sphères et "hyperbole". In *G.T.M.G. 2015* (Poitiers, Avril 2015). http://gtmg2015.conference.univ-poitiers.fr/programme_details.
- [HJ03] HERTRICH-JEROMIN U. : Introduction to Möbius differential geometry. *London Mat. Soc. Lecture note, Cambridge University Press*. Vol. xii (2003), 300.
- [LO05] LANGEVIN R., O'HARA J. : Conformally invariant energies of knots. *J. Institut Math. Jussieu*. Vol. 4 (2005), 219–280.
- [LO08] LANGEVIN R., O'HARA J. : Conformal arc-length via osculating circles. *Rapport de recherche IMB*. Vol. 531 (janv 2008).
- [LS11] LANGEVIN R., SOLANES G. : The geometry of canal surfaces and the length of curves in de sitter space. *Advances in Geometry*. Vol. 11, Num. 4 (November 2011), 585–601.
- [LSD*14] LANGEVIN R., SIFRE J.-C., DRUOTON L., GARNIER L., PALUSZNY M. : Finding a cyclide given three contact conditions. *Computational and Applied Mathematics* (2014), 1–18.
- [LW08] LANGEVIN R., WALCZAK P. : Conformal geometry of foliations. *Geom Dedicata*. Vol. 132, Num. 5 (2008), 135–178.
- [PB98] PALUSZNY M., BOEHM W. : General cyclides. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 15, Num. 7 (1998), 699–710.

