



**HAL**  
open science

## Surface canal, squelette et espace des sphères

Jean-Paul Becar, Sylvie Chambon, Bastien Durix, Lionel Garnier, Géraldine Morin, Céline Roudet

► **To cite this version:**

Jean-Paul Becar, Sylvie Chambon, Bastien Durix, Lionel Garnier, Géraldine Morin, et al.. Surface canal, squelette et espace des sphères. Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique (GTMG 2016), CNRS; AFIG : Association Française d'Informatique Graphique; Chapitre Français d'Eurographics, Mar 2016, Dijon, France. hal-02508286

**HAL Id: hal-02508286**

**<https://uphf.hal.science/hal-02508286>**

Submitted on 14 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Surface canal, squelette et espace des sphères

Jean-Paul BECAR<sup>1</sup>, Sylvie CHAMBON<sup>2</sup>, Bastien DURIX<sup>2</sup>, Lionel GARNIER<sup>3</sup>, Géraldine MORIN<sup>2</sup>, Céline ROUDET<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LAMAV-CGAO, CNRS 2956, Le Mont-Houy, 59313 Valenciennes cedex 9, jean-paul.becar@univ-valenciennes.fr

<sup>2</sup>Laboratoire IRIT, UMR CNRS 5505, Université Paul Sabatier, 31 000 Toulouse

sylvie.chambon@enseeiht.fr, bastien.durix@enseeiht.fr, Geraldine.Morin@irit.fr

<sup>3</sup>LE2i, UMR CNRS 6306, Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, France, <lionel.garnier,celine.roudet>@u-bourgogne.fr

---

## Résumé

*Une surface canal est l'enveloppe d'une famille à un paramètre de sphères orientées. Connaissant les fonctions de centre et de rayon associées à celle-ci, il est aisé d'obtenir une paramétrisation de la surface. Nous étudions dans cet article l'opération inverse, c'est-à-dire la recherche des sphères de la surface canal. En se donnant un point du contour et en utilisant l'espace des sphères, nous déterminons la sphère maximale passant par ce point ainsi que le second point de contact avec le contour. Nous déterminons de plus une seconde sphère permettant de construire le cercle caractéristique de la surface canal.*

*Notre article consiste donc en une nouvelle approche de l'opération de squelettisation d'un objet. En effet, un squelette est un modèle de représentation des formes, décrivant une structure centrée en une forme 2D ou 3D, dont chaque point représente le centre d'une sphère maximale de l'objet. La squelettisation est l'opération permettant d'extraire le squelette associé à une forme.*

*A canal surface is the envelope of a one-parameter family of oriented spheres. With the knowledge of center and radius functions associated to it, it is easy to compute a parametrisation of the surface. In this article, we study the inverse operation, which is the search for the spheres in the canal surface. By selecting a point on the boundary and using the sphere space, we estimate the maximal sphere tangent with this point and a second point on the boundary. Furthermore, we estimate a second sphere, which allows to build the characteristic circle of the canal surface.*

*So this article consists in a new approach of the skeletonization of an object. Indeed, a skeleton is a shape representation model, describing a structure centered in a 2D or 3D shape, whose each point represents the center of a maximal sphere in the object. The skeletonization is the operation to extract the skeleton associated to a shape.*

---

**Mots-clés :** Surface canal, squelette, espace des sphères.

## 1 Introduction

Une surface canal (non dégénérée)  $\Gamma$  est l'enveloppe d'une famille à un paramètre de sphères  $S_i$  telle qu'en chaque point de  $\Gamma$ , la surface canal est tangente à l'une des sphères de la famille le long d'un cercle appelé **cercle caractéristique**. Les centres de ces sphères sont situés sur une courbe centrale  $\gamma_0$ . Les surfaces canal sont engendrées par des cercles centrés sur  $\gamma_0$  contenus dans un plan normal à la tangente à  $\gamma_0$  et nous pouvons citer les cyclides de Dupin (tores, cylindres de révolution et cônes de révolution

compris). Toute famille à un paramètre de sphères ne définit pas une surface canal et nous pouvons citer les familles de sphères concentriques ou les faisceaux de sphères tangentes ou de Poncelet. Cependant, un critère simple, formule (1), permet de savoir si une famille à un paramètre de sphères de centres  $O(t)$  et de rayons  $r(t)$  définit une surface canal :

$$\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_3O(t)}\right)^2 > \left(\frac{d}{dt}r(t)\right)^2 \quad (1)$$

Par certains aspects, les surfaces canal se rapprochent des squelettes, introduits par Blum [Blu67]. Celui-ci est construit à partir de l'ensemble des sphères maximales à l'intérieur d'une forme : la donnée de l'ensemble des centres

définit l'axe médian de la forme, et l'ajout de la donnée des rayons définit le squelette. Il permettent de caractériser la forme, ce qui est utile notamment en reconnaissance de formes [SSDZ99, XWLB]. La surface canal se rapproche ici spécifiquement d'un squelette dit curviligne, dont l'ensemble des centres est situé sur une courbe.

L'estimation du squelette associé à une forme est appelée la squelettisation. Différentes approches ont été proposées pour faire cette opération, allant des méthodes de *grass-fire* [LL92], aux méthodes s'appuyant sur les diagrammes de Voronoï [AM97]. Dans cet article, nous proposons d'étudier la squelettisation d'une surface canal : il s'agira ainsi d'estimer les sphères maximales à l'intérieur d'une surface canal donnée. Ce travail est soumis à certaines hypothèses : nous supposons que le squelette de la surface canal est contenu dans un plan connu, et nous considérons que nous connaissons la courbe plane, intersection de la surface canal avec le plan. De plus, nous élaborons une approche basée sur l'espace des sphères, qui permet la linéarisation des calculs.

Plusieurs modèles de l'espace des sphères existent. Il en existe deux modèles projectifs : M. Berger [Ber78, BG92] utilise les formes quadratiques sur l'espace affine euclidien ; M. Paluszny [PB98] se sert de l'hypersphère de Moebius. Ces deux espaces ont le désavantage de ne pas prendre en compte l'orientation des sphères ce qui rend impossible la résolution de certains problèmes [LSD\*14]. Quant à nous, nous nous plaçons dans l'espace de Lorentz qui est une généralisation de l'espace-temps de Minkowski à  $\mathbb{R}^5$  [HJ03, Cec92, LO05, LO08, LW08]. Notons que si besoin, nous pouvons nous servir de la puissance des algèbres géométriques [DFGL14, DFM07]. Dans cet espace, une surface canal est une courbe sur la *pseudo*-sphère unité de  $\mathbb{R}^5$ , il existe un modèle isométrique à l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , une sphère peut être représentée soit par son centre et son rayon algébrique, soit par un point et la courbure de cette dernière et un vecteur normal unitaire idoine. C'est cette définition qui nous permet de déterminer les sphères maximales de la surface canal et de façon très simple puisque l'appartenance d'un point à une sphère se traduit par un *pseudo*-produit scalaire nul.

L'article est composé comme suit : après un rappel sur les surfaces canal et l'espace de Lorentz et avant de conclure et de donner quelques perspectives, nous donnons un algorithme permettant de construire les cercles caractéristiques d'une surface canal connaissant un squelette plan de cette dernière, puis nous testons sur quelques exemples l'approche proposée.

## 2 Rappels

Dans cet article, l'espace euclidien orienté usuel à trois dimensions  $\mathcal{E}_3$  est muni du repère orthonormé direct  $(O_3; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ .

### 2.1 Sphères orientées

A partir d'une sphère  $S$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$ , nous pouvons définir deux sphères orientées  $S^+$  et  $S^-$  de la façon suivante : en tout point  $M$  de  $S$ , la sphère orientée  $S^+$  (resp.  $S^-$ ), de rayon  $\rho = r$  (resp.  $\rho = -r$ ) est définie par le fait que le vecteur normal unitaire  $\vec{N}$  à la sphère  $S$  en  $M$  est sortant (resp. rentrant). Ainsi, nous avons :

$$\overrightarrow{\Omega M} = \rho \vec{N}. \quad (2)$$

### 2.2 Surface canal

Une surface canal est l'enveloppe d'une famille à un paramètre de sphères orientées  $S(t)$  de centre  $O(t)$  et de rayon  $r(t)$ . La contribution d'une sphère  $S(t_0)$  à la surface canal est un cercle, appelé cercle caractéristique, et le long de ce cercle, la surface canal et la sphère  $S(t_0)$  sont tangentes. Un critère permet de savoir si une famille à un paramètre de sphères orientées définit une surface canal [LS11] :

#### Proposition 1 :

Soit une famille à un paramètre de sphères de centre  $O(t)$  et de rayon  $r(t)$ .

Cette famille définit une surface canal si nous avons :

$$\left( \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_3 O(t)} \right)^2 > \left( \frac{d}{dt} r(t) \right)^2 \quad (3)$$

Comme surface canal célèbre, nous pouvons citer les cônes et sphères de révolution, les tores et les cyclides de Dupin.

### 2.3 Espace de Lorentz

Soit  $(\vec{e}_0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^5$ . Posons :

$$\vec{e}_o = \vec{e}_- - \vec{e}_+ \quad \text{et} \quad \vec{e}_\infty = \frac{1}{2}(\vec{e}_- + \vec{e}_+)$$

L'espace vectoriel de Lorentz est le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, noté  $\overrightarrow{L}_{4,1}$ , muni de la base  $(\vec{e}_o; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_\infty)$  sur lequel nous définissons la forme bilinéaire symétrique de Lorentz de la façon suivante :

$$\begin{cases} \vec{e}_o^2 = \vec{e}_\infty^2 = 0 \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_o = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_\infty = 0 \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \end{cases} \quad (4)$$

où  $(i, j) \in \{1; 2; 3\}^2$  et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Dans cet espace, la forme quadratique de Lorentz est de signature  $(4; 1)$  et s'appelle un (*pseudo*)<sup>†</sup>-produit scalaire.

L'espace affine d'origine  $O_5$  et d'espace vectoriel associé  $\overrightarrow{L}_{4,1}$  est noté  $L_{4,1}$  et nous avons une bijection qui à tout point  $M$  de  $L_{4,1}$  associe son vecteur position  $\overrightarrow{O_5 M}$ .

†. Dans la suite, le terme *pseudo* sera omis.

### 2.3.1 Cône de lumière ou pseudo-sphère de rayon nul

Etant donné que la forme quadratique de Lorentz n'est pas définie positive, nous pouvons considérer l'ensemble des vecteurs  $\vec{u}$  non nuls isotropes (i.e.  $Q_{4,1}(\vec{u}) = 0$ ), et l'ensemble des vecteurs positions isotropes engendre un cône, dit de lumière, figures 1 et 4 :

$$C_l = \left\{ M \in L_{4,1} \mid Q_{4,1}(\overrightarrow{O_5 M}) = 0 \right\} \quad (5)$$

qui est la sphère de centre  $O_5$  et de rayon nul pour la forme quadratique de Lorentz car tous les points  $M$  sont à une distance nulle de  $O_5$ . Nous pouvons distinguer trois types de vecteurs, voir tableau 1.

Type du vecteur ou du 2-plan	Vecteur $\vec{u}$
Espace	$Q_{4,1}(\vec{u}) > 0$
Temps	$Q_{4,1}(\vec{u}) < 0$
Lumière	$Q_{4,1}(\vec{u}) = 0$

**Table 1:** Définition des trois types de vecteurs de l'espace de Lorentz.

Soit  $\vec{u}(u_o; x_u; y_u; z_u; u_\infty)$  et  $\vec{v}(v_o; x_v; y_v; z_v; v_\infty)$  deux vecteurs de  $\overrightarrow{L_{4,1}}$ , nous avons :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v - u_o v_o - u_\infty v_\infty \quad (6)$$

L'équation du cône de lumière dans le repère  $(O_5; \vec{e}_o; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_\infty)$  est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_o x_\infty = 0 \quad (7)$$

### 2.3.2 Paraboloïde isométrique au plongement de $\mathcal{E}_3$ dans l'espace de Lorentz

Considérons le point  $O_3$  défini par  $\overrightarrow{O_5 O_3} = \vec{e}_o$  et l'hyperplan affine  $\mathcal{H}$  engendré par  $O_3$ , les vecteurs espace  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  et le vecteur lumière  $\vec{e}_\infty$ . La restriction de la forme quadratique  $Q_{4,1}$  à  $\mathcal{H}$  est dégénérée. Le paraboloïde  $\mathcal{P}$  est l'intersection entre le cône de lumière  $C_l$  et l'hyperplan affine  $\mathcal{H}$ , figure 1.

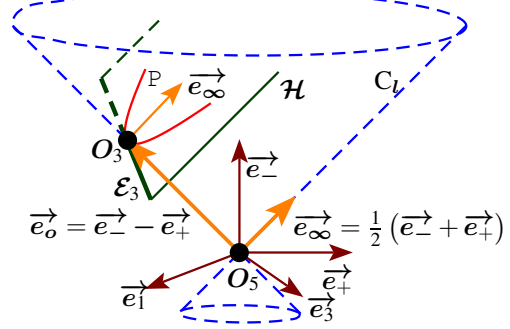
La figure 2 montre une vue « 3D (graphique) - 5D (espace de Lorentz) » du plongement de  $\mathcal{E}_3$  qui est identifié à  $\mathcal{E}_3 \simeq \{1\} \times \mathcal{E}_3 \times \{0\}$ , de repère  $O_3$  représentée par la pointe de la flèche rouge et les vecteurs deux à deux orthogonaux  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ .

Nous avons le théorème fondamental suivant :

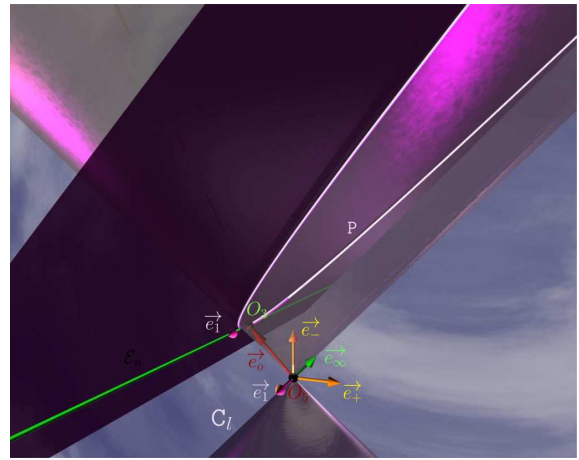
#### Théorème 1 :

Le paraboloïde  $\mathcal{P}$ , d'équation :

$$\begin{cases} x_o - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x_o x_\infty = 0 \end{cases} \quad (8)$$



**Figure 1:** Le cône de lumière  $C_l$ , l'hyperplan affine  $\mathcal{H}$  et le paraboloïde  $\mathcal{P}$  isométrique à  $\mathcal{E}_3$ .



**Figure 2:** Le cône de lumière  $C_l$ , l'hyperplan  $\mathcal{H}$  et le paraboloïde  $\mathcal{P}$  isométrique à  $\mathcal{E}_3$  ainsi que les deux repères utiles, le repère canonique  $(O_5; \vec{e}_o; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_\infty)$  et celui de l'algèbre géométrique conforme  $(O_5; \vec{e}_o; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_\infty)$ . Le vecteur  $\vec{e}_1$  en blanc ainsi que la droite verte schématisent les espaces  $\vec{E}_3$  et  $\mathcal{E}_3$ .

dans le repère  $(O_5; \vec{e}_o; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_\infty)$ , est isométrique au plongement de  $\mathcal{E}_3$  dans l'espace de Lorentz.

Démonstration : laissée au lecteur.

■

Notons que l'espace vectoriel orthogonal au vecteur  $\vec{e}_\infty$  est :

$$\vec{e}_\infty^\perp = \vec{\mathcal{H}}$$

puisque  $\vec{e}_\infty^2 = 0$  et que la restriction de la forme quadratique à l'hyperplan  $\vec{\mathcal{H}}$  est dégénérée et de signature  $(3;0)$ . En effet, si  $\vec{u}$  appartient à cet hyperplan, il existe un qua-

druplet  $(x; y; z; x_0)$  tel que :

$$\vec{u} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 + x_0 \vec{e}_\infty \quad \text{avec} \quad \vec{u}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

puisque les vecteurs sont deux à deux orthogonaux,  $\vec{e}_\infty$  et de type lumière et les trois vecteurs espaces  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  sont unitaires. Notons que nous obtenons la forme usuelle du produit scalaire euclidien pour les trois premières composantes.

Si  $\vec{m}$  est un vecteur position lumière, non colinéaire à  $\vec{e}_\infty$ , sa représentation sous forme d'un point dans  $\mathcal{E}_3$  est caractérisée par le point  $N_5$  défini par :

$$\{N_5\} = \text{Aff}(O_5; \vec{m}) \cap \mathcal{P}$$

qui est ensuite projeté sur l'espace affine de dimension 3 défini par le point  $O_3(1; 0; 0; 0)$  et les trois vecteurs espace  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  selon la direction du vecteur lumière  $\vec{e}_\infty$ . Réciproquement, soit  $M_5$  un point de  $\mathcal{E}_3$ . Considérons le point  $N_5$  défini par :

$$\{N_5\} = \text{Aff}(M_5; \vec{e}_\infty) \cap \mathcal{P}$$

qui définit le vecteur position  $\vec{n}_5 = \overrightarrow{O_5 N_5}$  de type lumière. Le triangle  $O_3 M_5 N_5$  est rectangle en  $M_5$  et, d'après le théorème de Pythagore, nous avons la relation fondamentale :

$$\overrightarrow{O_3 N_5}^2 = \overrightarrow{O_3 M_5}^2 + \underbrace{\overrightarrow{M_5 N_5}^2}_0 = \overrightarrow{O_3 M_5}^2 \quad (9)$$

D'après la démonstration du théorème précédent, soit  $P$  un point de  $\mathcal{E}_3$  et  $\vec{P} = \overrightarrow{O_3 P}$  de  $\vec{\mathcal{E}}_3$  son vecteur position, la représentation<sup>‡</sup> du point  $P$  dans l'espace de Lorentz est :

$$\vec{p} = \vec{e}_o + \vec{P} + \frac{1}{2} \|\vec{P}\|^2 \vec{e}_\infty \quad (10)$$

et le vecteur  $\vec{e}_o$  représente l'origine  $O_3$  de l'espace  $\mathcal{E}_3$  (i.e.  $\overrightarrow{O_5 O_3} = \vec{e}_o$ ) tandis que le vecteur  $\vec{e}_\infty$  représente le point à l'infini. Par construction, le vecteur position  $\vec{p}$  est un vecteur isotrope (i.e.  $\vec{p} \cdot \vec{p} = 0$ ). Remarquons que la détermination du point de  $\mathcal{E}_3$  à partir de sa représentation, formule (10) est triviale. De façon plus générale, si  $\vec{p}(x; x; y; z; x_o)$  est un vecteur lumière, deux cas sont à distinguer :

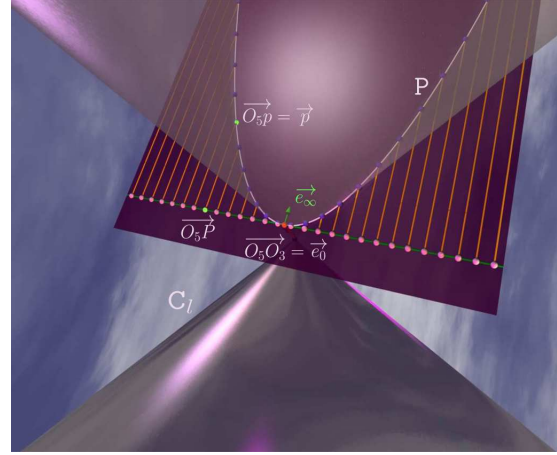
- $x_0 = 0$  implique que nous considérons le vecteur  $\vec{e}_\infty$  et nous obtenons le point à l'infini de  $\mathcal{E}_3$  ;
- $x_0 \neq 0$  implique que nous considérons le vecteur  $\frac{1}{x_o} \vec{p}$  et nous obtenons le point :

$$P \left( \frac{x}{x_o}; \frac{y}{x_o}; \frac{z}{x_o} \right)$$

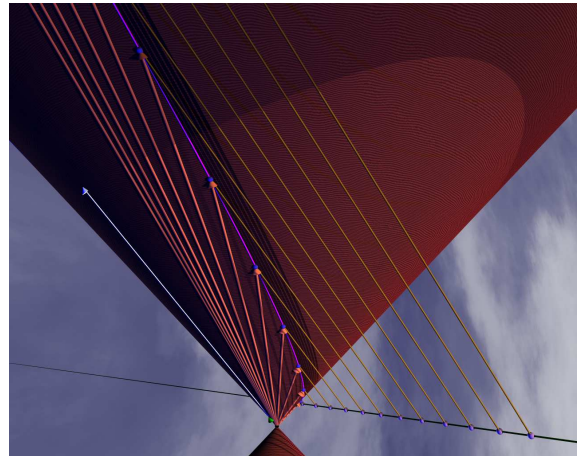
de  $\mathcal{E}_3$ .

La figure 3 synthétise et illustre le processus permettant de voir un point de  $\mathcal{E}_3$  comme un vecteur lumière de  $\overline{\mathcal{L}}_{4,1}$ . Dans la figure 3(b), le vecteur  $\vec{e}_\infty$  est en vert, celui en bleu

est un vecteur colinéaire à  $\vec{e}_\infty$  et ces deux vecteurs ont même longueur : 0.



(a)



**Figure 3:** Les points de  $\mathcal{E}_3$  (sont) des vecteurs lumière dans l'espace de Lorentz. (a) : les points de  $\mathcal{E}_3$  sont remontés sur le parabolöide  $\mathcal{P}$  selon la direction du vecteur  $\vec{e}_\infty$ . (b) : les points du parabolöide  $\mathcal{P}$  deviennent des vecteurs positions sur le cône de lumière.

Les figures 3(a) et 3(b) permettent une visualisation 3D d'une compactification de  $\mathbb{R}$  ce qui permet de comprendre le processus de la compactification de  $\mathcal{E}_3$  :

- Nous partons de l'origine  $O_5$  de l'espace de Lorentz pour arriver en  $O_3$  origine de  $\mathcal{E}_3$  grâce à la relation  $\overrightarrow{O_5 O_3} = \vec{e}_o$  ;
- Nous prenons le point  $P$  que nous voulons dans  $\mathcal{E}_3$  schématisé par l'un des points roses sur la droite verte dans la figure 3(a), ce qui nous conduit à la relation :  $\vec{p} = \vec{e}_o + \vec{P}$  ;

‡. Dans la suite, sauf mention contraire, un point de  $\mathcal{E}_3$  ou un vecteur de  $\vec{\mathcal{E}}_3$  est écrit en majuscule, sa représentation dans l'espace de Lorentz est écrite avec la même lettre en minuscule.

- A partir de ce point  $P$ , nous déterminons le point intersection entre le paraboloïde  $\mathbb{P}$  et la droite passant par  $P$  et de vecteur directeur  $\vec{e}_\infty$ ;
- Ce point d'intersection définit le vecteur position isotrope donné par la formule (10), figure 3.

## 2.4 Espace des sphères orientées $\Lambda^4$

Une sphère de  $\mathcal{E}_3$ , de centre  $\Omega$ , de rayon  $\rho$  est représentée par le point  $\sigma$  ou le vecteur position  $\vec{\sigma}$  défini par [DFM07] :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \overrightarrow{O_5\sigma} \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \vec{\omega} - \frac{1}{2}\rho^2 \vec{e}_\infty \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \vec{e}_o + \vec{\Omega} + \frac{1}{2} \left( \|\vec{\Omega}\|^2 - \rho^2 \right) \vec{e}_\infty \right) \end{aligned} \quad (11)$$

et nous imposons  $\vec{\sigma}^2 = 1$  afin de pouvoir considérer cet espace comme une sphère unité. L'orientation de la sphère  $\sigma$  est définie comme dans la section précédente : si  $M$  appartient à la sphère de centre  $\Omega$  et de rayon algébrique  $\rho$ , si  $\vec{N}$  est le vecteur normal unitaire à la sphère au point  $M$ , nous avons :

$$\vec{m} - \vec{\omega} = \vec{M} - \vec{\Omega} + \frac{1}{2} \left( \vec{M}^2 - \vec{\Omega}^2 \right) \vec{e}_\infty$$

et la relation  $\vec{M} - \vec{\Omega} = \overrightarrow{O_3M} - \overrightarrow{O_3\Omega} = \overrightarrow{\Omega M}$  implique :

$$\vec{m} - \vec{\omega} = \rho \vec{N} + \frac{1}{2} \left( \vec{M}^2 - \vec{\Omega}^2 \right) \vec{e}_\infty$$

et nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (\vec{m} - \vec{\omega}) \cdot \vec{n} \\ &= \left( \rho \vec{N} + \frac{1}{2} \left( \vec{M}^2 - \vec{\Omega}^2 \right) \vec{e}_\infty \right) \cdot \left( \vec{N} + \frac{1}{2} \vec{e}_\infty \right) \\ &= \rho \end{aligned} \quad (12)$$

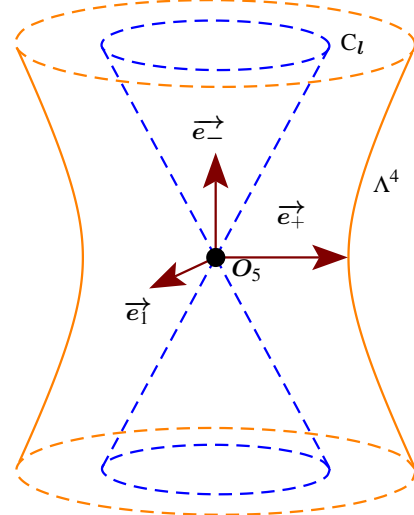
et nous retrouvons la formulation donnée par la formule (2). De manière analogue, un plan orienté  $\mathcal{P}$  défini par un point  $P$  et un vecteur normal unitaire  $\vec{N}$  est représenté par :

$$\vec{\pi} = \overrightarrow{O_5\pi} = \vec{N} + \left( \vec{N} \bullet \vec{P} \right) \vec{e}_\infty \quad (13)$$

où  $\bullet$  désigne le produit scalaire de  $\mathcal{E}_3$ . De plus, nous avons  $\vec{\pi}^2 = \vec{N}^2 = 1$ . Il est ainsi naturel d'introduire la sphère unité  $\Lambda^4$  de centre  $O_5$  de  $L_{4,1}$  :

$$\Lambda^4 = \left\{ \sigma \in L_{4,1} \mid \mathcal{Q}_{4,1} \left( \overrightarrow{O_5\sigma} \right) = \overrightarrow{O_5\sigma}^2 = 1 \right\} \quad (14)$$

qui représente les sphères orientées et les plans orientés de  $\mathcal{E}_3$ , figure 4. Nous admettons dans ce document que tout élément de  $\Lambda^4$  représente soit une sphère orientée, soit un plan orienté. Notons que les deux sphères orientées  $S^+$  et  $S^-$  de  $\mathcal{E}_3$  sont représentées par les deux vecteurs positions opposés  $\vec{\sigma}^+$  et  $\vec{\sigma}^-$  de  $\Lambda^4$ .



**Figure 4:** La sphère  $C_l$  de centre  $O_5$  et de rayon nul ainsi que la sphère unitaire  $\Lambda^4$  de centre  $O_5$ .

Donnons les conditions permettant de savoir si un point appartient à un plan ou à une sphère.

**Théorème 2 :** Position relative d'un point et d'une sphère ou d'un plan

Soit  $S$  une sphère de  $\mathcal{E}_3$ , de centre  $\Omega$ , de rayon  $\rho$  et de représentation  $\vec{\sigma}$  sur  $\Lambda^4$ .

Soit  $\mathcal{P}$  un plan passant par le point  $P_0$ , de vecteur normal unitaire  $\vec{N}$  et de représentation  $\vec{\pi}$  sur  $\Lambda^4$ .

Soit le vecteur  $\vec{p}$  représentant le point  $P$  de  $\mathcal{E}_3$ . Alors :

1. Nous avons :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = -\frac{1}{2\rho} \left( \Omega P^2 - \rho^2 \right) \quad (15)$$

et :

$$P \in S \iff \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = 0 \quad (16)$$

2. Nous avons :

$$\vec{\pi} \cdot \vec{p} = \vec{N} \bullet \overrightarrow{P_0P}$$

d'où :

$$P \in \mathcal{P} \iff \vec{\pi} \cdot \vec{p} = 0 \quad (17)$$

Démonstration : laissée au lecteur.

■

Notons que le critère permettant de savoir si un point de  $\mathcal{E}_3$  appartient à une sphère de  $\mathcal{E}_3$  devient linéaire dans l'espace de Lorentz alors qu'il est quadratique dans  $\mathcal{E}_3$ .

**Corollaire 1 :**

Soit  $S$  une sphère de  $\mathcal{E}_3$ , de centre  $\Omega$ , de rayon  $\rho$  et de représentation  $\vec{\sigma}$  sur  $\Lambda^4$ .

Soit  $\mathcal{P}$  un plan passant par le point  $P_0$ , de vecteur normal unitaire  $\vec{N}$  et de représentation  $\vec{\pi}$  sur  $\Lambda^4$ .

Soit le vecteur  $\vec{p}$  représentant le point  $P$  de  $\mathcal{E}_3$ . Alors :

1. La sphère  $S$  est l'intersection du parabolôïde  $\mathbb{P}$  avec l'hyperplan  $\mathcal{H}_{\sigma^\perp}$  passant par  $O_5$  et de vecteur normal  $\vec{\sigma}$ .
2. Le plan  $\mathcal{P}$  est l'intersection du parabolôïde  $\mathbb{P}$  avec l'hyperplan  $\mathcal{H}_{\pi^\perp}$  passant par  $O_5$  et de vecteur normal  $\vec{\pi}$ .

**Démonstration :**

D'après la formule (16), le point  $P$  appartient à  $S$  si et seulement si :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = 0$$

si et seulement si :

$$\overrightarrow{O_5\sigma} \cdot \overrightarrow{O_5P} = 0$$

où  $P_5$  est le point (du parabolôïde  $\mathbb{P}$ ) défini par :

$$\overrightarrow{O_5P_5} = \vec{p}$$

La démonstration concernant  $\vec{\pi}$  est analogue.

■

Nous venons de montrer, via le corollaire 1 que si  $\sigma$  représente une sphère  $S$  de  $\mathcal{E}_3$ , l'intersection entre l'hyperplan  $\mathcal{H}_{\sigma^\perp}$ , de vecteur normal  $\vec{\sigma}$  et passant par  $O_5$  et le parabolôïde  $\mathbb{P}$  est l'ensemble des points de la sphère  $S$ .

**2.5 Sphère, centre, vecteur normal unitaire, courbure**

Dans ce paragraphe, nous allons mélanger des tomates et des cendriers<sup>§</sup> en écrivant proprement l'idée suivante : une sphère est complètement déterminée par, son centre  $\Omega$ , un point  $M_0$ , le vecteur normal unitaire ¶  $\vec{N}_\rho = -\vec{N}$  au point  $M_0$  précédent et sa courbure  $k = \frac{1}{\rho}$ . Nous allons montrer, que dans l'espace de Lorentz, nous avons [LW08, Cec92] :

$$\overrightarrow{O_5\sigma} = \vec{\sigma} = \frac{1}{\rho}\vec{m}_0 + \vec{n} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{O_5m_0} + \vec{n} \quad (18)$$

où  $\vec{n}$  est le projeté orthogonal unitaire, sur le 3-plan tangent au parabolôïde en  $M_0$  de la représentation du vecteur  $\vec{N}_\rho$  dans l'espace de Lorentz.

§. Clin d'œil à la *multiplication* des Frères Ennemis.

¶. Si  $\vec{N}$  est sortant, la courbure est  $-\frac{1}{R}$  ce qui explique que nous prenons l'opposé du vecteur normal.

**2.6 Détermination des cercles caractéristiques d'une surface canal**

Commençons par donner une condition nécessaire sur l'existence d'une surface canal [LS11] :

**Théorème 3 :**

Soit  $\sigma(t)$ ,  $t$  appartenant à un intervalle  $I$ , une famille à un paramètre de sphères orientés. La condition nécessaire pour que la famille de sphères définisse une surface canal est la suivante :

$$\forall t \in I, \left( \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t) \right)^2 > 0$$

c'est-à-dire que la courbe doit être de type espace (le vecteur tangent est toujours de type espace).

Avant de donner une condition suffisante, nous avons besoin de la définition suivante :

**Définition 1 :** Vecteur courbure géodésique

Soit  $\gamma : [a; b] \rightarrow \Lambda^4$  une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne.

Un vecteur courbure géodésique au point  $\gamma(t_0)$  est la projection orthogonale du vecteur dérivé seconde  $\ddot{\gamma}(t_0)$  sur l'hyperplan  $\overrightarrow{\mathcal{T}_{\gamma(t_0)}\Lambda^4}$  à la courbe  $\gamma$ .

Il suffit de projeter l'image de  $\gamma(t_0)$  par la translation de vecteur  $\ddot{\gamma}(t_0)$  sur l'hyperplan  $\overrightarrow{\mathcal{T}_{\gamma(t_0)}\Lambda^4}$ . Nous pouvons énoncer [LS11] :

**Théorème 4 :**

Soit  $\gamma(s)$ ,  $s$  appartenant à un intervalle  $I$ , une famille à un paramètre de sphères orientés, paramétrée par l'abscisse curviligne, vérifiant :

$$\forall s \in I, \left( \frac{d\vec{\gamma}}{ds}(s) \right)^2 > 0$$

La surface canal, enveloppe de cette famille à un paramètre de sphères n'est pas dégénérée si le vecteur courbure géodésique est de type temps.

Les cercles caractéristiques d'une surface canal peuvent être déterminés par l'intersection de deux sphères particulières. Soit  $t \mapsto \sigma(t)$  une paramétrisation admissible de la courbe  $C_1$  représentant cette surface canal. Soit  $\sigma(t_0)$  un point de la conique  $C_1$  représentant la sphère  $S(t_0)$ . La sphère  $S(t_0)$  est déterminée par la donnée du vecteur tangent  $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0)$  au cercle au point  $\sigma(t_0)$  : elle est représentée

sur  $\Lambda^4$  par  $\dot{\sigma}(t_0)$  définie par :

$$\left\{ \dot{\sigma}(t_0) \right\} = \left[ O_5; \frac{d\dot{\sigma}}{dt}(t_0) \right] \cap \Lambda^4 \quad (19)$$

et nous introduisons la définition suivante :

**Définition 2** : sphère dérivée

Soit  $t \mapsto \sigma(t)$  une paramétrisation admissible de la courbe  $C_1$  représentant une surface canal.

La sphère dérivée de la sphère  $\sigma(t_0)$  (resp.  $S(t_0)$ ) est la sphère  $\dot{\sigma}(t_0)$  (resp.  $S(t_0)$ ) définie par la formule (19) (resp.  $\dot{\sigma}(t_0)$ ).

Le cercle caractéristique induit par  $S(t_0)$  est l'intersection des deux sphères orthogonales  $S(t_0)$  et  $S(t_0)$ . La relation :

$$\overrightarrow{O_5\sigma(t_0)}^2 = 1$$

induit, par dérivation, la relation :

$$\overrightarrow{O_5\sigma(t_0)} \cdot \overrightarrow{O_5\dot{\sigma}(t_0)} = 0$$

Si  $C_1$  est un cercle de centre  $\Omega_1$ , ce dernier est le projeté orthogonal de  $O_5$  sur le plan  $\mathbb{A}\mathbb{F}\mathbb{F}\{C_1\}$ , ainsi :

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\Omega_1\sigma(t_0)} \cdot \overrightarrow{O_5\dot{\sigma}(t_0)} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{O_5\Omega_1} \cdot \overrightarrow{O_5\dot{\sigma}(t_0)} + \overrightarrow{\Omega_1\sigma(t_0)} \cdot \overrightarrow{O_5\dot{\sigma}(t_0)}}_0 \\ &= \left( \overrightarrow{O_5\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_1\sigma(t_0)} \right) \cdot \overrightarrow{O_5\dot{\sigma}(t_0)} \\ &= \overrightarrow{O_5\sigma(t_0)} \cdot \overrightarrow{O_5\dot{\sigma}(t_0)} = 0 \end{aligned}$$

et la figure 5 illustre ce dernier cas.

La figure 6 montre un cercle caractéristique sur une CD4E obtenu comme intersection de deux sphères orthogonales  $S(t_0)$  et  $S(t_0)$ . Notons que la seconde sphère peut être un plan et dans ce cas, le cercle caractéristique obtenu sera un grand cercle sur la première sphère.

**3 Squelette filaire et surface canal**

Dans ce paragraphe, nous connaissons le contour plan d'une surface canal. Nous allons déterminer les sphères de cette surface canal ainsi que leurs cercles caractéristiques et l'axe médian du squelette filaire qui est le lieu des sphères précédentes.

L'algorithme 1 permet de déterminer un cercle caractéristique de la surface canal passant par un point donné. Connaissant le point  $\Gamma(t_0)$  du contour ainsi que le gradient  $\overrightarrow{\nabla_{\Gamma}^{\perp}(t_0)}$  au contour, il existe une famille à un paramètre de

**Algorithme 1** Détermination de la surface canal à partir de son contour.

**Entrée** : une courbe paramétrique  $t \mapsto \Gamma(t)$  fermée, simple, plane, de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$

1. Pour  $t$  appartenant à  $I$ , calcul des points  $\gamma(t)$  du paraboloïde représentant les points  $\Gamma(t)$
2. Calcul, dans le plan défini par le contour, d'un vecteur gradient  $\overrightarrow{\nabla_{\Gamma}(t)}$  au point  $\Gamma(t)$
3. Choix de  $t_0$  dans  $I$ , calcul du point  $\Gamma(t_0)$
4. Détermination du vecteur normal  $\overrightarrow{n(t_0)}$ , projeté orthogonal unitaire sur le 3-plan tangent au paraboloïde  $\Gamma(t_0)$  de la représentation du vecteur gradient  $\overrightarrow{\nabla_{\Gamma}(t_0)}$
5. Détermination de la représentation de la famille de sphères tangente à  $\Gamma$  en  $\Gamma(t_0)$  par :

$$\overrightarrow{\sigma_{t_0}}(u) = \frac{1}{\rho(u)} \overrightarrow{O_5\gamma(t_0)} + \overrightarrow{n(t_0)} \quad (20)$$

6. Détermination de  $\rho(u)$  afin que la sphère représentée par  $\overrightarrow{\sigma_{t_0}}(u)$  recoupe le contour par :

$$\rho(u) = - \frac{\overrightarrow{O_5\gamma(t_0)} \cdot \overrightarrow{O_5\gamma(u)}}{\overrightarrow{n(t_0)} \cdot \overrightarrow{O_5\gamma(u)}} \quad (21)$$

7. Détermination de  $u_0$ , en fonction de  $t_0$ , pour que  $|\rho(u_0)|$  soit minimal.
8. Calcul du vecteur  $\overrightarrow{\nabla_{\Gamma}^{\perp}(t_0)}$  orthogonal à  $\overrightarrow{\nabla_{\Gamma}(t_0)}$  dans le plan de construction.
9. Détermination du vecteur normal  $\overrightarrow{\dot{n}(t_0)}$ , projeté orthogonal unitaire sur le 3-plan tangent au paraboloïde  $\Gamma(t_0)$  de la représentation du vecteur gradient  $\overrightarrow{\nabla_{\Gamma}^{\perp}(t_0)}$
10. Détermination de la représentation de la famille de sphères dérivées de  $\sigma_{t_0}(u_0)$  par :

$$\overrightarrow{\dot{\sigma}_{t_0}}(u) = \frac{1}{\dot{\rho}(u)} \overrightarrow{O_5\gamma(t_0)} + \overrightarrow{\dot{n}(t_0)}$$

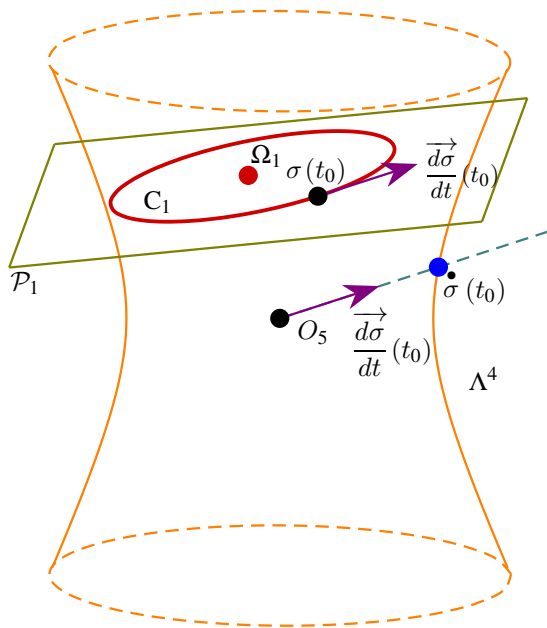
11. Détermination de  $u_1$ , en fonction de  $t_0$ , par :

$$\overrightarrow{\dot{\sigma}_{t_0}}(u_1) \cdot \overrightarrow{O_5\gamma(u_0)} = 0 \quad (22)$$

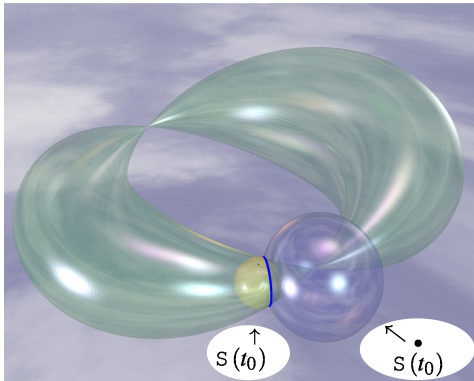
12. Calculs des sphères  $S_{t_0}$  et  $S_{t_0}$  représentées respectivement par  $\overrightarrow{\sigma_{t_0}}(u_0)$  et  $\overrightarrow{\dot{\sigma}_{t_0}}(u_1)$ .

**Sortie** : Un cercle caractéristique de la surface canal représenté par  $S_{t_0}$  et  $S_{t_0}$ .



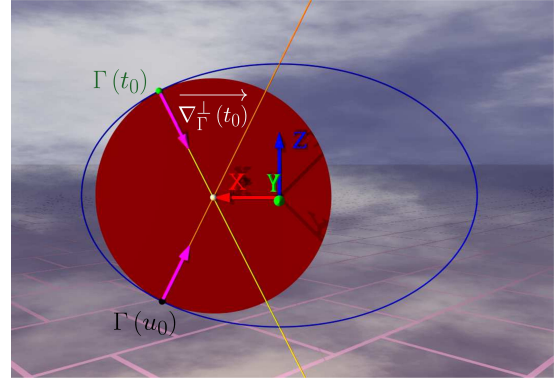


**Figure 5:** Sur  $\Lambda^4$ ,  $C_1$  est un cercle représentant une cyclide de Dupin. Considérons le point  $\sigma(t_0)$ . Le vecteur tangent à cette courbe en ce point est  $\frac{d\sigma}{dt}(t_0)$ . Le cercle caractéristique de la cyclide de Dupin est l'intersection entre les deux sphères  $S(t_0)$  et  $S(\dot{\sigma}(t_0))$ , représentées sur  $\Lambda^4$  par  $\sigma(t_0)$  et  $\dot{\sigma}(t_0)$  où cette dernière est l'intersection entre la demi-droite  $\left[O_5; \frac{d\sigma}{dt}(t_0)\right)$  et  $\Lambda^4$ .

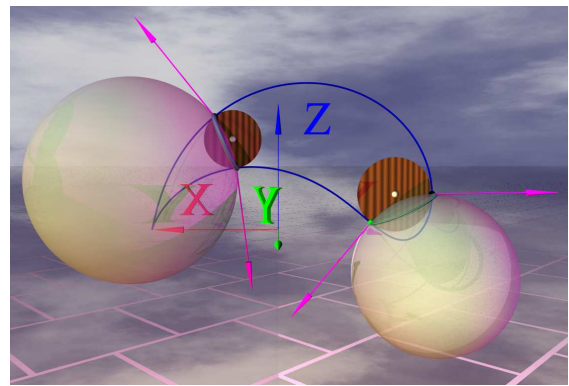


**Figure 6:** Construction, dans  $\mathcal{E}_3$ , d'un cercle caractéristique d'une cyclide de Dupin depuis l'espace des sphères, figure 5.

sphères passant par  $\Gamma(t_0)$  et ayant  $\overrightarrow{\nabla_{\Gamma}^{\perp}}(t_0)$  comme vecteur gradient : le degré de liberté est le rayon ou la courbure de la sphère. La formule (20) reprend la formule (18) et traduit la représentation sur  $\Lambda^4$  de cette famille à un paramètre de sphères. La formule (21) de l'algorithme 1 est une simplifi-



**Figure 7:** Détermination de la sphère de rayon (géométrique) minimal, représentée par une demi-boule de frontière le plan  $\mathcal{P}_y : y = 0$ , passant par un point.



**Figure 8:** Deux exemples de détermination de la sphère de rayon (géométrique) minimal passant par un point, de sa sphère dérivée et du cercle caractéristique.

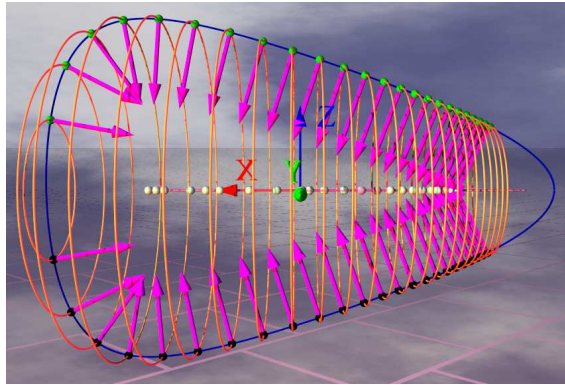
cation de la condition :

$$\overrightarrow{\sigma}_{t_0}(u) \cdot \overrightarrow{O_5 \gamma}(u) = \left( \frac{1}{\rho(u)} \overrightarrow{O_5 \gamma}(t_0) + \overrightarrow{n}(t_0) \right) \cdot \overrightarrow{O_5 \gamma}(u) = 0$$

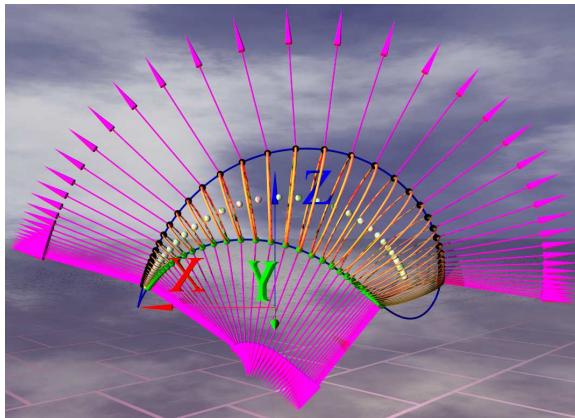
traduisant le fait que la sphère passe par un second point  $\gamma(u)$  du contour. Le point 7. de l'algorithme 1 permet de déterminer la sphère de cette famille ayant le rayon (géométrique) le plus petit, figure 7. En fait, cette sphère est une sphère maximale du squelette.

Notons que le centre de la sphère  $S_{t_0, u_0}$  est l'intersection des droites passant par  $\Gamma(t_0)$  et  $\Gamma(u_0)$  et de vecteurs directeurs respectifs  $\overrightarrow{\nabla_{\Gamma}^{\perp}}(t_0)$  et  $\overrightarrow{\nabla_{\Gamma}^{\perp}}(u_0)$ .

Pour deux valeurs de  $t_0$ , la figure 8 montre deux cercles caractéristiques obtenus comme intersection d'une sphère et de sa sphère dérivée, points 8. à 12. de l'algorithme 1.



(a)



(b)

**Figure 9:** Deux exemples de détermination de cercles caractéristiques d'une surface canal.

la figure 9 montre plusieurs cercles caractéristiques obtenus comme intersection d'une sphère et de sa sphère dérivée en utilisant plusieurs valeurs de  $t_0$  dans l'algorithme 1.

#### 4 Conclusion

Dans cet article, à partir d'une courbe fermée plane, nous avons déterminé l'axe médian et les cercles caractéristiques de la surface canal ayant comme bord la courbe précédente. L'espace des sphères permet de simplifier la résolution de ce problème, surtout grâce à la définition d'une sphère à partir de sa courbure, d'un point et du vecteur normal unitaire en ce point.

Cette approche peut être généralisée par la suite à la squelettisation sur une sphère : en effet, il est possible de construire la courbe fermée par intersection entre la surface canal et une sphère, sous l'hypothèse que le squelette est sur la sphère. Or, la squelettisation sur une sphère correspond à une squelettisation perspective [DMC\*15] : c'est pourquoi dans un futur proche, nous comptons déterminer une surface

canal ayant un contour 3D à partir de deux projections centrales.

#### Références

- [AM97] ATTALI D., MONTANVERT A. : Computing and simplifying 2d and 3d continuous skeletons. *Computer Vision and Image Understanding*. Vol. 67, Num. 3 (Sep 1997), 261–273.
- [Ber78] BERGER M. : *Géométrie 2*, 2ème ed., vol. 5. Cedic-Nathan, 1978.
- [BG92] BERGER M., GOSTIAUX B. : *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, 2ème ed. PUF, avril 1992.
- [Blu67] BLUM H. : A transformation for extracting new descriptors of shape. *Models for the Perception of Speech and Visual Form* (1967).
- [Cec92] CECIL T. : *Lie sphere geometry*. Universitext, 1992.
- [DFGL14] DRUOTON L., FUCHS L., GARNIER L., LANGEVIN R. : The non-degenerate Dupin cyclides in the space of spheres using geometric algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras*. Vol. 23, Num. 4 (2014), 787–990. ISSN 0188-7009.
- [DFM07] DORST L., FONTIJNE D., MANN S. : *Geometric Algebra for Computer Science : An Object Oriented Approach to Geometry*. Morgan Kaufmann Publishers, 2007.
- [DMC\*15] DURIX B., MORIN G., CHAMBON S., ROUDET C., GARNIER L. : Caractérisation de la projection du squelette d'une surface canal 3d : Application à la reconstruction 3d à partir de deux images, April 2015.
- [HJ03] HERTRICH-JEROMIN U. : Introduction to Möbius differential geometry. *London Mat. Soc. Lecture note, Cambridge University Press*. Vol. xii (2003), 300.
- [LL92] LEYMARIE F., LEVINE M. : Simulating the grassfire transform using an active contour model. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on* (1992).
- [LO05] LANGEVIN R., O'HARA J. : Conformally invariant energies of knots. *J. Institut Math. Jussieu*. Vol. 4 (2005), 219–280.
- [LO08] LANGEVIN R., O'HARA J. : Conformal arc-length via osculating circles. *Rapport de recherche IMB*. Vol. 531 (janv 2008).
- [LS11] LANGEVIN R., SOLANES G. : The geometry of canal surfaces and the length of curves in de sitter space. *Advances in Geometry*. Vol. 11, Num. 4 (November 2011), 585–601.
- [LSD\*14] LANGEVIN R., SIFRE J.-C., DRUOTON L., GARNIER L., PALUSZNY M. : Finding a cyclide given

three contact conditions. *Computational and Applied Mathematics* (2014), 1–18.

[LW08] LANGEVIN R., WALCZAK P. : Conformal geometry of foliations. *Geom Dedicata. Vol. 132*, Num. 5 (2008), 135–178.

[PB98] PALUSZNY M., BOEHM W. : General cyclides. *Computer Aided Geometric Design. Vol. 15*, Num. 7 (1998), 699–710.

[SSDZ99] SIDDIQI K., SHOKOUFANDEH A., DICKINSON S. J., ZUCKER S. W. : Shock graphs and shape matching. *IJCV. Vol. 35*, Num. 1 (1999), 13–32.

[XWLB] XU Y., WANG B., LIU W., BAI X. : Skeleton graph matching based on critical points using path similarity. In *ACCV 2009*. pp. 456–465.