



**HAL**  
open science

# Points massiques, cubiques Bézier rationnelles et leur points singuliers

Jean-Paul Becar, Karine Serier, Lionel Garnier, Laurent Fuchs

► **To cite this version:**

Jean-Paul Becar, Karine Serier, Lionel Garnier, Laurent Fuchs. Points massiques, cubiques Bézier rationnelles et leur points singuliers. CNRIUT 2018, 2018, AIX EN PROVENCE, France. hal-02508920

**HAL Id: hal-02508920**

**<https://uphf.hal.science/hal-02508920>**

Submitted on 16 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Points massiques, cubiques Bézier rationnelles et leur points singuliers

---

Jean-Paul BECAR<sup>1</sup> Karine SERIER<sup>2</sup>

Lionel GARNIER<sup>3</sup> Laurent Fuchs<sup>4</sup>

jpbecar@univ-valenciennes.fr karine.serier@u-bourgogne.fr

lionel.garnier@u-bourgogne.fr laurent.fuchs@univ-poitiers.fr

<sup>1</sup> LAMAV FR2956, EA 4015, Université de Valenciennes, IUT, 59313 Valenciennes Cedex 9

<sup>2</sup> Université de Bourgogne-Franche-Comté, IUT, B.P. 47870, 21078 Dijon Cedex

<sup>3</sup> LE2i, Université de Bourgogne-Franche-Comté, B.P. 47870, 21078 Dijon Cedex

<sup>4</sup> XLIM-SIC Université de Poitiers, France

**THÈMES** – *Mathématiques-Informatique*

**RÉSUMÉ** – *Cet article étend l'étude des points singuliers des courbes rationnelles cubiques. Elle porte sur les points d'inflexion, les points doubles et points de rebroussement. Les courbes cubiques rationnelles étudiées sont décrites au moyen de la technique des points massiques. Un point massique est soit un point pondéré soit un vecteur pur. Il prend le statut de point de contrôle pour une représentation paramétrique exploitable sur ordinateur dans le domaine de la géométrie de la Conception Assistée par Ordinateur. L'intérêt des points massiques est de pouvoir généraliser le tracé des courbes admettant des points doubles et de contrôler sans calcul supplémentaire l'ensemble des fonctions algébriques cubiques. Un exemple d'application est la réalisation de lettre à l'anglaise ou lettre manuscrite. Les courbes de Bézier permettent d'approcher des profils complexes, le travail présenté permet d'aborder de la même manière l'ensemble des courbes, ce que ne permettent pas les splines cubiques d'Hermite.*

**MOTS-CLÉS** – *Cubiques, courbes de Bézier, points massiques*

# 1 Introduction

Les courbes de la géométrie de la CAO sont décrites par des points de contrôle plutôt que par des équations. Les capacités croissantes de calcul et de mémoire des ordinateurs et l'usage de la commande numérique pour l'usinage ont favorisé le développement d'outils spécifiques dédiés à la conception de produits industriels. Les ingénieurs les plus célèbres comme P. Bézier chez Renault, P. De Casteljau chez Citroen, M.A. Sabin chez British Airways ou encore J.C. Fergusson chez Boeing ont largement contribué à faire connaître et appliquer leurs techniques. Les courbes de degré un et deux c'est-à-dire les droites et les coniques sont connues depuis l'antiquité. Elles jouent un rôle important en géométrie de la CAO pour raison de faible degré et d'une représentation rationnelle exploitable sur ordinateur.

Pour un degré de plus, si les cubiques rationnelles offrent de nouvelles perspectives en CAO, elles entraînent aussi des particularités au travers de leurs points singuliers qui n'existent pas pour les courbes de degré 2. Des études menées par Newton puis Plücker en ont proposé une classification générale. Deux familles de cubiques se distinguent, celle des courbes elliptiques et celle des cubiques rationnelles. Ces dernières sont représentées par des points massiques de contrôle généralisant les courbes Bézier classiques. Le modelleur géométrique a besoin de jouer sur les points de contrôle à l'aide de souris dynamiques telles les manettes à retour d'effort. Le contrôle des formes des cubiques et leur usage dans des systèmes à retour d'effort nécessitent de connaître la localisation des points caractéristiques de ces courbes.

Les travaux présentés ici sont issus d'un travail de mémoire de master [1] prolongeant les résultats de [2, 3]. Le mode de représentation des courbes exploite la technique des points massiques [4, 5]. Le papier illustre le cas particulier d'une cubique définie par deux points pondérés et 2 vecteurs purs. Il propose en outre une application à la modélisation de l'écriture manuscrite par des cubiques massiques.

## 2 Les courbes Bézier rationnelles de degré 3

Les courbes rationnelles peuvent être décrites par des représentations paramétriques exploitables sur ordinateur. Elles prennent le nom de courbes de Bézier. Ces dernières sont décrites par des points de contrôle et il en faut 4 pour une cubique rationnelle. Les points de contrôle peuvent être dans certains cas des points pondérés ou des vecteurs purs appelés points massiques. Ils sont définis dans l'espace noté  $\tilde{\mathcal{P}}$

$$\tilde{\mathcal{P}} = (\mathcal{P} \times \mathbb{R}^*) \cup (\vec{\mathcal{P}} \times \{0\})$$

où  $\mathcal{P}$  est un espace affine réel et  $\vec{\mathcal{P}}$  l'espace vectoriel associé. Deux opérations  $\oplus$  et  $\odot$  lui donnent une structure d'espace vectoriel et permettent de définir, sur cet es-

pace, une courbe de Bézier rationnelle à points massiques de contrôle. Soit  $i$  un entier de  $[0..n]$  et  $M_i$ , les  $n+1$  points massiques de contrôle. La courbe Bézier rationnelle est

$$l'ensemble\ des\ points\ M(t)\ tels\ que : M(t) = \bigoplus_{i=0}^{i=n} B_i^n(t) \odot M_i$$

avec  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$  le  $i$ ème polynôme de Bernstein de degré  $n$ . La suite s'intéresse aux cubiques rationnelles écrites sous cette forme et leur raccord ou jointure  $G^1$ . Deux courbes se raccordent  $G^1$  si elles admettent un point commun et une même direction de tangentes en ce point.

### 2.1 Cubiques massiques

La figure 1 montre les jointures  $G^1$  entre un arc d'hyperbole modélisé par une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points de contrôle  $(P_0; 1), (P_1; 2), (P_2; 1)$  et un arc d'ellipse modélisé par une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points de contrôle  $(R_0; 1), (R_1; \frac{1}{2}), (R_2; 1)$  par une courbe de Bézier rationnelle cubique ayant comme points massiques de contrôle  $(Q_0; 1), (\vec{Q}_1; 0), (\vec{Q}_2; 0)$  et  $(Q_3; 1)$ . Ici  $Q_0 = P_2 = R_0$  et les vecteurs  $\vec{Q}_1$  et  $\vec{P}_1\vec{P}_2$  sont colinéaires et de même sens tandis que les vecteurs  $\vec{Q}_2$  et  $\vec{R}_0\vec{R}_1$  sont colinéaires et de sens contraires.

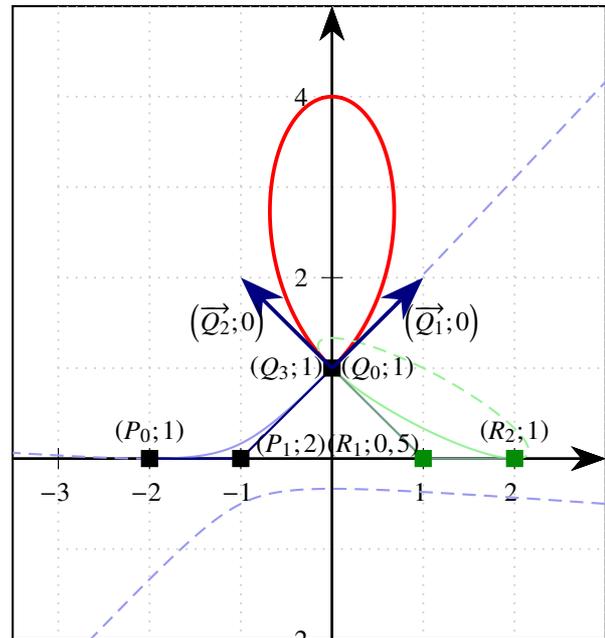


FIGURE 1 – Trois arcs de cubiques massiques raccordées de façon  $G^1$

Afin de contrôler les formes des cubiques et de pouvoir les utiliser dans des systèmes à retour d'effort, il est important de connaître la localisation des points caractéristiques de ces courbes.

## 2.2 Points singuliers des cubiques massiques

Notations : soit  $M(t)$  le point générique de la cubique rationnelle plane  $\Gamma = BR[(Q_0; w_0), (\vec{Q}_1; \vec{Q}_2), (Q_3; w_3)]$  définie par les points massiques de contrôle,  $\frac{dM}{dt}(t)$ , le vecteur dérivée première et les vecteurs  $\frac{dM}{dt}(0), \frac{dM}{dt}(1)$  notés  $\vec{u}, \vec{v}$  respectivement. Dans le repère  $(0, \vec{u}, \vec{v})$  le point  $S$  est défini par  $\vec{OS} = \frac{dM}{dt}(t) = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ . Le seul point singulier de  $\Gamma$  est un point double obtenu lorsque  $S$  appartient à la région  $\mathcal{L}$  de frontière, les axes  $\lambda = 0, \mu = 0$  et les courbes  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  de la figure 2. La démonstration de ce cas particulier et de sa

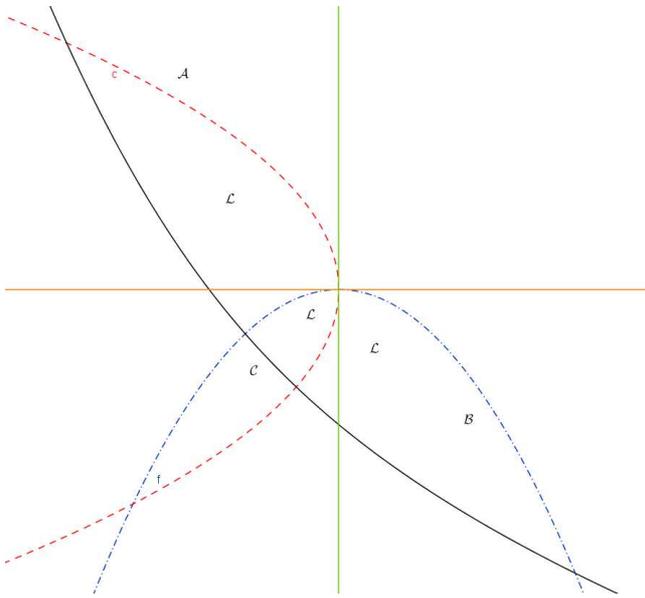


FIGURE 2 – Localisation des points singuliers de la cubique  $\Gamma$

généralisation se trouvent dans [1]. Les calculs, résolutions approchées de systèmes non linéaires et représentations ont été traités sous le logiciel Maple de Maplesoft™.

## 2.3 Une application

Dans la figure 1, la cubique rationnelle  $BR[(Q_0; 1)(\vec{Q}_1; 0), (\vec{Q}_2; 0), (Q_0; 1)]$  en rouge sur le dessin est définie par 2 points pondérés et 2 vecteurs purs. Ce mode de représentation permet ainsi de définir des boucles pour un paramètre parcourant l'intervalle  $[0, 1]$ . Cette étude est préalable à la modélisation de l'écriture manuscrite. Les points massiques points pondérés et vecteurs purs décrivant un ensemble d'arcs de cubique. Ces arcs une fois raccordés définissent un caractère de l'alphabet. C'est le mixage entre vecteurs et points pondérés qui facilitera la modélisation des caractères. Leur tracé est en effet très proche de l'écriture cursive traditionnelle. Le

mode de représentation pourrait s'adapter également à la reconnaissance de trajectoires planes ou spatiales.

## 3 Conclusion

L'article traite sommairement d'un mode de représentation des courbes rationnelles définies par des points massiques. Un point massique peut être soit un point pondéré soit un vecteur pur. Une cubique rationnelle décrite sous cette forme nécessite 4 points massiques pour pouvoir la définir et la contrôler. En particulier les boucles décrites avec ce modèle sont applicables à la représentation des caractères de l'écriture manuscrite. L'étude systématique des points singuliers des cubiques massiques complète le papier et laisse envisager de nouvelles applications comme un usage par des manettes à retour d'effort dans les logiciels de dessin assisté par ordinateur.

## Remerciements

Les auteurs remercient chaleureusement leurs laboratoires et instituts respectifs qui ont contribué à la faisabilité de ces travaux.

## Références

- [1] *Usage des points massiques et des courbes de Bézier pour la modélisation des cubiques*, Sérier K., mémoire de master MIGS, Université de Valenciennes, Septembre 2017.
- [2] *Inflection points and singularities on planar rational cubic curve segments*, Sakai, Manabu, Computer Aided Geometric Design, Volume 16, N 3, 1pp 49–156, 1999, Elsevier
- [3] *Géométrie des points d'inflexion et des singularités d'une cubique rationnelle*, Albrecht G., Bécar J.-P., Xiang X., Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique, publiée par l'Association Française d'Informatique Graphique, Volume 2, Numéro 1, pp.33-46, 2008.
- [4] *Une introduction aux points massiques*, Garnier L., Bécar J.-P., Druoton L., Congrès national de la recherche en IUT (cnriut'2017) : 4-5 mai 2017, Auxerre.
- [5] *Nouveaux modèles géométriques pour la C.A.O. et la synthèse d'images : courbes de Bézier, points massiques et surfaces canal*, Lionel Garnier, Jean-Paul Bécar, Editions Universitaires Européennes, ISBN 978-3-639-54676-7, Saarbrücken 2017.