



**HAL**  
open science

## Introduction à la modélisation de l'écriture manuscrite par des courbes Bézier Rationnelles massiques

L. Garnier, L Fuchs, Jean-Paul Becar

### ► To cite this version:

L. Garnier, L Fuchs, Jean-Paul Becar. Introduction à la modélisation de l'écriture manuscrite par des courbes Bézier Rationnelles massiques. Journées Françaises d'Informatique Graphique et de Réalité Virtuelle 2019, Aix Marseille Université, Nov 2019, Marseille, France. hal-02510444

**HAL Id: hal-02510444**

**<https://uphf.hal.science/hal-02510444v1>**

Submitted on 17 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Introduction à la modélisation de l'écriture manuscrite par des courbes Bézier Rationnelles massiques

L.Garnier<sup>1</sup>, L. Fuchs<sup>2</sup>, JP Bécar<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LIB, Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, France,  
lionel.garnier@u-bourgogne.fr

<sup>2</sup>XLIM-SIC, UMR CNRS 7252, Université de Poitiers, SP2MI, Bld M. et P. Curie, 86962 Futuroscope Chasseneuil,  
Laurent.Fuchs@univ-poitiers.fr

<sup>3</sup>LAMAV-CGAO, CNRS 2956, Le Mont-Houy, 59313 Valenciennes cedex 9,  
jean-paul.becar@univ-valenciennes.fr

---

## Résumé

*L'article est une introduction à la modélisation de l'écriture manuscrite. La représentation de l'écriture cursive interfère, selon l'approche hors ligne ou en ligne, sur la robustesse des algorithmes de reconnaissance des caractères manuscrits, de l'identification des auteurs et de leur signature. Les caractéristiques de base de l'écriture cursive que sont les traits et leur inclinaisons, les boucles, les pleins et déliés peuvent être modélisés par des courbes. Des méthodes existent. Elles reposent sur les B-splines et leur points de contrôle. Dans un premier temps, des traits, les auteurs proposent une modélisation, rebroussements, boucles, arrondis, pleins et déliés. Elle est basée sur les courbes à points massiques. Les modèles de tracé utilisent les courbes Bézier massiques de degré 2 ou 3 principalement. Ce modèle offre en outre la gestion des points à l'infini, collant au plus près la description de la formation des traits d'écriture cursive. La dynamique des signatures manuscrites pourra ainsi être modélisée par ce procédé.*

---

**Mots clés :** points massiques, écriture cursive, courbes Bézier massiques

## 1 Introduction

L'écriture est la manifestation physique d'un processus cognitif complexe. L'écriture n'est pas réductible à une simple technique mais constitue un outil culturel, une manière d'être au monde, une manière de penser et de se penser, une forme de culture.

L'usage des stylets et tablettes nécessite une reconnaissance dynamique de l'écriture manuscrite c'est à dire dépendante du temps. Ainsi la reconnaissance de l'écriture manuscrite repose sur la modélisation de l'écriture. La modélisation et la reconnaissance de l'écriture manuscrite trouvent de nombreuses applications :

- dans le domaine de la robotique où la compréhension des trajectoires et des gestes biomécaniques se destine à une implémentation sur les robots humanoïdes.
- pour comprendre la motricité humaine.
- dans la mise au point de méthodes d'enseignements de formation des traits d'écriture, de leur concaténation et de la formation des lettres et enfin des mots.
- pour comprendre les procédés de dégénérescence neuro musculaire et cognitive typiques des maladies d'Alzheimer et de Parkinson

— pour définir des algorithmes de vérification de signatures au travers de l'analyse des traits d'écriture et de leur infimes variations.

— pour mesurer le retour à la normale lors d'attaque cérébrale.

L'apprentissage de l'écriture cursive procède d'un effet de balancier entre ce qui est écrit ou en cours d'écriture et ce qui est reconnu ou en cours de reconnaissance. L'écriture manuscrite est la concaténation de traits d'écriture. L'apprentissage des tracés de base définit alors les éléments de l'écriture manuscrite. Les traits de base peuvent être modélisés par des points de contrôle et des B-Splines ou des courbes qui enregistrent les oscillations du tracé dans 2 directions différentes d'un plan. Le modèle d'Hollerbach fait exemple dans ce domaine. Il s'appuie sur le système masse-ressort d'un bras. [Hol81] D'autres auteurs ont proposé un modèle reposant sur 4 tracés fondamentaux que sont le crochet, la coupe, le gamma et l'ovale [SE87]. Ces traits de base sont modélisables à l'aide de courbes rationnelles décrites à l'aide de points pondérés de contrôle et appelées courbes Bézier rationnelles. Toutefois, ce mode de représentation est limité. Par exemple, la représentation de courbes de fractions rationnelles par des courbes de Bézier rationnelles usuelles ne donne pas la possibilité de modéliser les asymptotes à la courbe. Un élément de réponse, applicable ici au modèle d'écriture manuscrite, peut se faire par les

courbes à points massiques comme c'est le cas pour les boucles. La section 2 rappelle les éléments définissant l'espace des points massiques contrôlant les courbes Bézier Rationnelles [FJ89, GBD17, BFG18]. Les points massiques, en particulier les vecteurs purs, apparaissent naturellement lors de la transformation du paramètre d'un point de la courbe [GB16, GBD15, BG14]. Par exemple, il n'est pas possible de modéliser un demi-cercle par une courbe de Bézier rationnelle à points pondérés de contrôle [BFG18], et c'est un changement de paramètre homographique qui amène naturellement les deux points pondérés et le vecteur pur qui permettent de représenter un demi-cercle par une courbe de Bézier rationnelle [BFG18, SBGF18, GB17]. De la même manière, la boucle de la cubique rationnelle Folium de Descartes n'est pas modélisable par des points pondérés. Et c'est un changement de paramètre homographique qui fait apparaître deux points pondérés et deux vecteurs purs décrivant ainsi la boucle du Folium.

La section 3 propose une modélisation des traits d'écriture manuscrite à l'aide des points massiques et des courbes BR. Elle donne à travers d'exemples élémentaires, l'intérêt des points massiques est de décrire avec peu d'information, les éléments caractéristiques des traits, traits vifs et boucles de l'écriture manuscrite. La dernière section délivre des conclusions et suggère de nouvelles pistes d'investigation.

## 2 L'espace des points massiques

### 2.1 Points massiques d'un espace affine $\mathcal{E}$

L'ensemble des vecteurs de l'espace vectoriel  $\vec{\mathcal{E}}$ , de dimension  $n$ , et des points pondérés de l'espace affine  $\mathcal{E}$  sont regroupés dans l'espace  $\tilde{\mathcal{E}}$  défini par :

$$\tilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \times \mathbb{R}^*) \cup (\vec{\mathcal{E}} \times \{0\}) \quad (1)$$

et il est possible d'identifier  $\tilde{\mathcal{E}}$  à  $\vec{\mathcal{E}}_n = \vec{\mathcal{E}} \oplus \vec{\mathbb{R}}$ . L'idée est de considérer l'espace affine  $\mathcal{E}$  comme un hyperplan de  $\vec{\mathcal{E}}_n$  d'équation  $\omega = 1$  : la coordonnée supplémentaire  $\omega$  représente le poids du point pondéré. Un point massique est soit un point pondéré de l'espace affine  $\mathcal{E}$ , soit un vecteur de l'espace vectoriel  $\vec{\mathcal{E}}$  à qui nous affectons un poids nul.

Rappelons que le barycentre d'une famille de points pondérés  $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$  dont la somme des poids est nul n'est pas défini. Cependant, il existe un unique vecteur  $\vec{u}$  défini par :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i \overrightarrow{MA_i}, \quad (\text{avec } \sum_{i \in I} \omega_i = 0)$$

qui est indépendant du point  $M$ . Il est donc naturel de regrouper dans un même espace les points pondérés de  $\mathcal{E}$  et les vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$ , identifié à l'hyperplan de  $\vec{\mathcal{E}}_n$  d'équation  $\omega = 0$ . Nous pouvons ainsi généraliser la notion de barycentre aux familles des points pondérés dont la somme des poids est nulle. J.-C. Fioriot et al. [FJ89, Béc97] établissent une bijection entre  $\tilde{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{E}}_n$  suivie d'une projection sur  $\mathcal{E}$  ou  $\vec{\mathcal{E}}$  selon le cas. L'espace  $\tilde{\mathcal{E}}$  est aussi connu sous le nom d'espace universel.

Concrètement, nous choisissons une autre approche : toutes les sommes de points massiques sont définies en utilisant des transformations affines et nous masquons les projec-

tions sur l'hyperplan affine  $\mathcal{E}$  ou vectoriel  $\vec{\mathcal{E}}$ . Sur l'espace  $\tilde{\mathcal{E}}$ , l'addition, notée  $\oplus$ , est définie de la façon suivante :

- $\omega + \mu = 0 \implies (M; \omega) \oplus (N; \mu) = (M; \omega) \oplus (N; -\omega) = (\omega \overrightarrow{NM}; 0)$
- $\omega + \mu \neq 0 \implies (M; \omega) \oplus (N; \mu) = \left( \text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}; \omega + \mu \right)$  où  $\text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}$  désigne le barycentre des points pondérés  $(M; \omega)$  et  $(N; \mu)$
- $(\vec{u}; 0) \oplus (\vec{v}; 0) = (\vec{u} + \vec{v}; 0)$
- $\omega \neq 0 \implies (M; \omega) \oplus (\vec{u}; 0) = \left( \mathcal{T}_{\frac{1}{\omega} \vec{u}}(M); \omega \right)$  où  $\mathcal{T}_{\vec{u}}$  est la translation de  $\mathcal{E}$  de vecteur  $\vec{u}$ .

Sur l'espace  $\tilde{\mathcal{E}}$ , la multiplication par un scalaire, notée  $\odot$ , est définie de la façon suivante :

- $\alpha \neq 0 \implies \alpha \odot (M; \omega) = (M; \alpha \omega)$
- $\omega \neq 0 \implies 0 \odot (M; \omega) = (\vec{0}; 0)$
- $\alpha \odot (\vec{u}; 0) = (\alpha \vec{u}; 0)$

Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter à [FJ89, Béc97, GDB15].

### 2.2 Courbes BR dans $\tilde{\mathcal{E}}$

Le terme courbe BR définit toute courbe de Bézier rationnelle quadratique à points massiques de contrôle. Rappelons les expressions des polynômes de Bernstein de degré 2 :

$$B_0(t) = (1-t)^2, \quad B_1(t) = 2t(1-t), \quad B_2(t) = t^2 \quad (2)$$

lorsque le paramètre décrit  $t$  l'intervalle  $[0; 1]$ .

Les points de contrôle  $P_0, P_1$  et  $P_2$  d'une courbe de Bézier rationnelle quadratique sont des points massiques (i.e. des points pondérés de  $\mathcal{E}$  ou des vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$ ).

#### Définition 1 : courbe BR dans $\tilde{\mathcal{E}}$

Soit  $\omega_0, \omega_1$  et  $\omega_2$  trois réels non tous nuls. Soit  $(P_0; \omega_0), (P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$  trois points massiques de  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

Soit  $I$  (resp.  $J$ ) l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls (resp. nuls).

Soit la fonction  $\omega_f$  définie sur  $[0; 1]$  par :

$$\omega_f(t) = \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t) \quad (3)$$

Un point massique  $(M; \omega)$  ou  $(\vec{u}; 0)$  appartient à la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0), (P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$ , notée :

$$BR \{ (P_0; \omega_0), (P_1; \omega_1), (P_2; \omega_2) \}$$

s'il existe un réel  $t_0$  de  $[0; 1]$  tel que :

- si  $\omega_f(t_0) \neq 0$  alors, il vient

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} &= \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \overrightarrow{OP_i} \\ &+ \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in J} B_i(t_0) \vec{P}_i \\ \omega &= \omega_f(t_0) \end{cases} \quad (4)$$

- si  $\omega_f(t_0) = 0$  alors, il vient :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \vec{OP}_i + \sum_{i \in J} B_i(t_0) \vec{P}_i \quad (5)$$

Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter à [BG14, GDB15].

### 3 Modélisation de l'écriture

L'écriture manuscrite est la concaténation de traits d'écriture. L'apprentissage des tracés de base définit alors les éléments de l'écriture manuscrite. Si Edelman et Flash ont proposé un modèle reposant sur les 4 tracés fondamentaux, les auteurs du présent papier se sont limités aux boucles, rebroussements et directions asymptotiques (figure 1). Ces éléments géométriques étant modélisables par des courbes rationnelles de faible degré définies par des points massiques de contrôle. L'intérêt des points contrôlant les courbes rationnelles massiques réside ici dans la possibilité de modéliser ces éléments de base de l'écriture manuscrite au moyen de points pondérés et de vecteurs purs. Le rôle des vecteurs purs intervient dans la caractérisation des boucles, des rebroussements et des directions asymptotiques. Dans la suite, au travers d'exemples élémentaires les boucles et traits sont décrits par des points massiques.

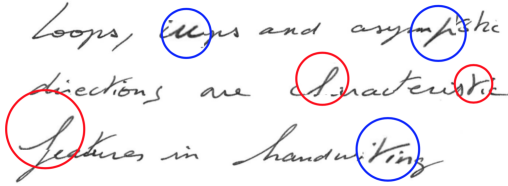


Figure 1: Tracés caractéristiques d'une écriture manuscrite

#### 3.1 Exemple de modélisation des tracés manuscrits à l'aide des courbes BR

Dans cette section, les courbes rationnelles de faible degré servent à modéliser des tracés manuscrits élémentaires. La figure 2 donne un exemple d'une parabole massique définie par 1 point pondéré et 2 vecteurs purs qui est le support de la lettre C.

Les tracés plus vifs tels ceux issus des signatures ou paragraphes peuvent également être modélisés par des courbes massiques avec des directions asymptotiques.

L'exemple de la figure 3 est issu des précédents travaux ([BFG19]) sur la représentation des directions asymptotiques des fractions rationnelles possédant des valeurs interdites multiples.

Etant donné :

- les poids  $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0$  et  $\omega_0 = \omega_1 = 1$  ;
- les vecteurs  $\vec{P}_2(0;0)$ ,  $\vec{P}_3(0;0)$ ,  $\vec{P}_4(0;1)$  ;
- les points affines  $P_0(0;1)$  et  $P_1(1;1)$ .



Figure 2: Représentation d'un trait par une parabole définie par 1 point pondéré et 2 vecteurs purs

Ces cinq points massiques de contrôle définissent une courbe de Bézier rationnelle quartique, figure 3, dont l'équation est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{4t}{3t+1} \\ y(t) = \frac{2t^4 - 8t^3 + 6t^2 - 1}{3t^4 - 8t^3 + 6t^2 - 1} \end{cases} \quad (6)$$

En posant :

$$x = \frac{3t+1}{4t}$$

ce qui donne :

$$t = \frac{-x}{3x-4}$$

est l'expression de la fraction rationnelle est :

$$f(x) = \frac{-x^4 + 256x^3 - 768x^2 + 768x - 256}{256(x-1)^3}$$

La multiplicité de la valeur interdite est associée aux

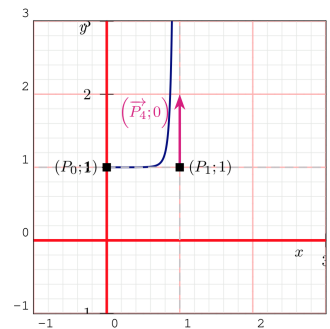


Figure 3: Quartique à points pondérés et vecteurs de contrôle

nombre de vecteurs purs nuls dans la description de la courbe Bézier.

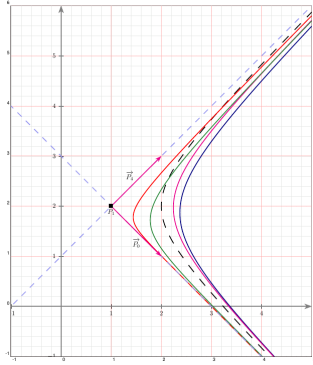


Figure 4: Influence des vecteurs de contrôle de singularité sur une courbe de Bézier rationnelle quartique ayant en commun les points de contrôle  $\vec{P}_0(1; -1)$ ,  $P_1(1; 2)$  de poids 1 et  $\vec{P}_4(1; 1)$ .

### 3.2 Exemple de modélisation des boucles à l'aide des courbes BR

Une première approche de modélisation des boucles est illustrée par le folium de Descartes. Le folium de Descartes est la cubique dont les équations paramétriques sont données par :

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

La courbe entière est obtenue pour le paramètre  $t$  décrivant l'intervalle  $[-\infty, +\infty]$ . La représentation de la courbe rationnelle en courbe Bézier rationnelle pour le paramètre  $t$  décrivant l'intervalle  $[0, 1]$  fournit les 4 points pondérés  $P_0 = (0, 0)$ ,  $P_1 = (0, 2)$ ,  $P_2 = (4, 2)$  et  $P_3 = (3, 3)$  avec les masses respectives  $\omega_0 = 1, \omega_1 = 1, \omega_2 = 1$  et  $\omega_3 = 2$  voir figure 5a.

Le changement de paramètre homographique  $u \mapsto \frac{u}{1-u}$  qui transforme l'intervalle  $[0, 1]$  en l'intervalle  $[0, +\infty]$  fournit les nouveaux points massiques de contrôle de la boucle du Folium soit 2 points pondérés -ici confondus- et 2 vecteurs purs  $Q_0 = (0, 0)$ ,  $\vec{Q}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{Q}_2 = (0, 1)$  et  $Q_3 = (0, 0)$  avec les masses respectives  $\varpi_0 = 1, \varpi_1 = 0, \varpi_2 = 0$  et  $\varpi_3 = 1$ . Voir figure 5b.

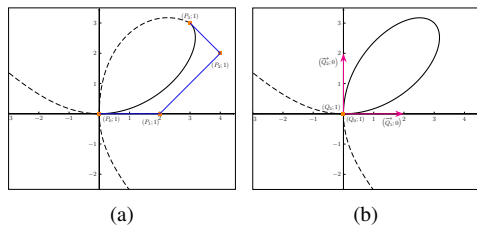


Figure 5: Représentation d'arcs du folium de Descartes à l'aide des points massiques : (a) Bézier rationnelle avec 4 points pondérés, (b) Bézier rationnelle avec 2 points pondérés et 2 vecteurs purs.

Ce premier arc de cubique est attaché à deux autres arcs de cubique qui définissent alors une lettre comme la lettre

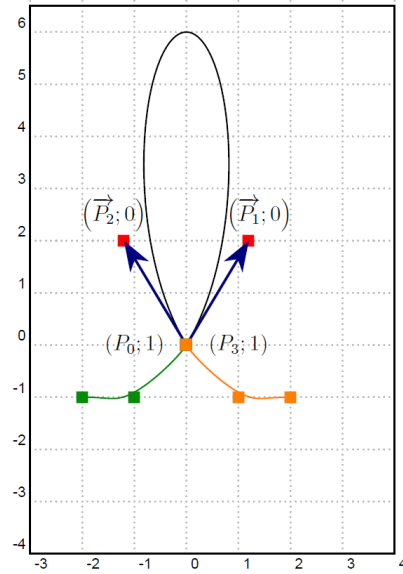


Figure 6: Lettre l en écriture cursive comme réunion de trois courbes BR.

l de la figure 6. La boucle est obtenue avec deux vecteurs purs  $\vec{P}_1$  et  $\vec{P}_2$  contrôlant la largeur de la boucle,  $P_0$  et  $P_3$  sont 2 points pondérés confondus. Les autres branches sont obtenues en respectant les contacts  $G1$ . Deux branches de courbes offrent un contact  $G1$  si elles disposent d'un point commun et de tangentes portées par la même droite. La branche gauche en vert est décrite par 3 points pondérés et un vecteur pur noté  $\vec{Q}_2$  colinéaire et de sens opposé à  $\vec{P}_1$ . Le choix de la norme intervient pour un rendu agréable à l'œil. Dans le cas présent le rapport est de 4 entre les deux normes de vecteurs. Ce ratio a été déterminé de manière subjective. Les points  $Q_0$  et  $Q_1$  symbolisés par des carrés verts forment le début de la lettre. La seconde partie en orange est réalisée avec deux points pondérés pour extrémités et deux vecteurs purs dirigeant chaque tangente aux points d'extrémité.

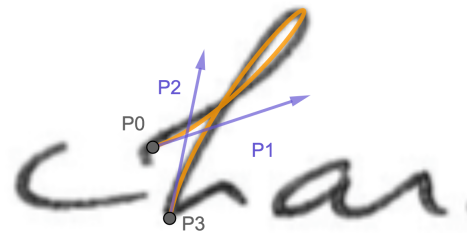


Figure 7: Représentation d'un tracé par une cubique massique à 2 points pondérés et 2 vecteurs purs

### 3.3 Modélisation des pleins et déliés à l'aide des courbes BR

Le trait d'écriture manuscrite à l'aide d'une plume ou d'un calame comme c'est le cas en calligraphie repose sur

2 trajectoires offset l'une de l'autre mais avec un pas variable. Les auteurs proposent ici de les reproduire à l'aide des courbes BR et d'un offset de la courbe à pas variable. La nouveauté ici tient dans le calcul du décalage qui se traite dans l'espace de Minkovski-Lorentz où la courbe est vue comme l'enveloppe d'une famille de cercles de rayon variable et où les calculs se réduisent à des résolutions de systèmes linéaires.

Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier rationnelle de degré 2 ou 3 à points massiques de contrôle. Soit  $C$  un cercle dont les centres sont sur  $\gamma(t)$  et les rayons sont définis par  $r : t \mapsto r(t)$ . L'enveloppe de ces cercles permettent de définir une partie d'une lettre de l'alphabet. Afin de simplifier la résolution du problème est simplifiée en se plaçant dans l'espace de Minkowski-Lorentz de dimension 4 dont la sphère unité  $\Lambda^3$  est appelée espace des cercles. L'algorithme suivant permet de construire une lettre avec une épaisseur variable. Cet algorithme repose sur la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues, formule (7), suivie de la résolution d'une équation du second degré, formule (8).

**Entrée :** une famille de cercles  $C(t)$  de rayon  $r(t)$  centrés sur une courbe  $\gamma$ .

1. Détermination de  $\sigma(t)$  représentant la famille de cercles  $C(t)$  sur  $\Lambda^3$ ;
2. Calcul de  $\dot{\sigma}(t)$ , sphère dérivée de  $\sigma(t)$ ;
3. Soit  $\vec{m}(t) = (1; x(t); y(t); z(t))$  un vecteur de l'hyperplan  $\vec{H}$ 
  - a. Détermination de deux des trois composantes  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  via la résolution du système :

$$\begin{cases} \vec{m}(t) \cdot \overrightarrow{O_4 \sigma(t)} = 0 \\ \vec{m}(t) \cdot \overrightarrow{O_4 \dot{\sigma}(t)} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

- b. Détermination de la troisième composante via :

$$\vec{m}(t)^2 = 0 \quad (8)$$

ce qui conduit à deux solutions  $\vec{m}_1(t)$  et  $\vec{m}_2(t)$ .

- c. Détermination des points  $M_1(t)$  et  $M_2(t)$  représentés par les vecteurs lumières  $\vec{m}_1(t)$  et  $\vec{m}_2(t)$ .

**Sortie :** deux familles à un paramètre de points qui définissent l'enveloppe de la famille de cercles  $C(t)$ .

La figure 8 montre une boucle de la lettre  $\ell$  en minuscule.

#### 4 Conclusion et perspectives

Cet article a montré la puissance des courbes de Bézier définies par des points massiques de contrôle. Elles semblent être un bon outil pour modéliser tous les éléments d'une écriture manuscrite. Ici, les courbes quadratiques, les cubiques à point double, les courbes des fractions rationnelles représentent les tracés, les boucles, les arrondis respectivement. L'article propose également une méthode de représentation des pleins et déliés typiques de l'écriture à l'aide d'une plume d'oie. Un offset de la courbe à pas variable

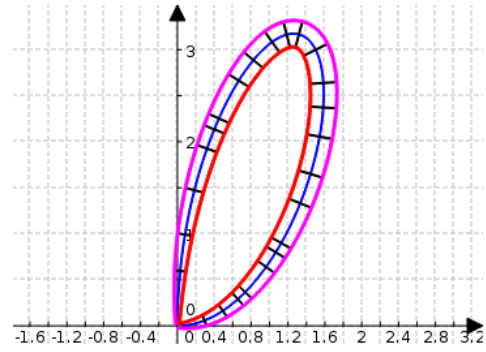


Figure 8: Boucle d'une lettre  $\ell$  avec pleins et déliés. \_\_\_\_\_

est traité et calculé dans l'espace des sphères de Minkowski Lorentz réduisant les calculs à des résolutions de systèmes linéaires. Les pleins et déliés ont déjà été traités sous la forme de courbes grasses en exploitant les B-splines cubiques. Les prochains développements concerneront la définition des courbes Bézier massiques grasses qui intégreront les traits vifs comme ceux des signatures.

#### Remerciements

Les auteurs remercient les collègues curieux de ces travaux. Leurs remarques pertinentes ont permis de faire avancer la réflexion et dégager de nouvelles pistes ou d'alimenter la bibliographie de base.

## Références

- [Béc97] BÉCAR J. P. : *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.
- [BFG18] BÉCAR J.-P., FUCHS L., GARNIER L. : Modéliser un demi-cercle et autres questions de poids nuls. AFIG, (Ed.), Université de Poitiers.
- [BFG19] BÉCAR J.-P., FUCHS L., GARNIER L. : Courbe d'une fraction rationnelle et courbes de bézier à points massiques. GTMG, (Ed.), Université de Toulouse.
- [BG14] BÉCAR J. P., GARNIER L. : Points massiques, courbes de Bézier quadratiques et coniques : un état de l'art. In *G.T.M.G. 2014* (Lyon, 26 au 27 mars 2014).
- [FJ89] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes et surfaces rationnelles*, vol. RMA 12. Masson, 1989.
- [GB16] GARNIER L., BÉCAR J.-P. : Mass points, Bézier curves and conics : a survey. In *Eleventh International Workshop on Automated Deduction in Geometry* (Strasbourg, France, juin 2016), Proceedings of ADG 2016, pp. 97–116. <http://ufrsciencestech.u-bourgogne.fr/~garnier/publications/adg2016/>.
- [GB17] GARNIER L., BÉCAR J. P. : *Nouveaux modèles géométriques pour la C.A.O. et la synthèse d'images : courbes de Bézier, points massiques et surfaces canal*. Editions Universitaires Européennes, Saarbrücken, 2017. ISBN 978-3-639-54676-7.
- [GBD15] GARNIER L., BÉCAR J. P., DRUOTON L. : Subdivisions de courbes de Bézier quadratiques. AFIG, (Ed.), Université de Lyon, LIRIS.
- [GBD17] GARNIER L., BÉCAR J.-P., DRUOTON L. : Canal surfaces as Bézier curves using mass points. *Computer Aided Geometric Design. Vol. 54* (2017), 15–34.
- [GDB15] GARNIER L., DRUOTON L., BÉCAR J. P. : Points massiques, espace des sphères et « hyperbole ». In *G.T.M.G. 2015* (Poitiers, Avril 2015). [http://gtmg2015.conference.univ-poitiers.fr/programme\\_details](http://gtmg2015.conference.univ-poitiers.fr/programme_details).
- [Hol81] HOLLERBACH J. M. : An oscillation theory of handwriting. *Biological Cybernetics. Vol. 39* (1981), 139–156.
- [SBGF18] SÉRIER K., BÉCAR J. P., GARNIER L., FUCHS L. : Handwritten characters strokes with mass cubics and their singularities. In *Curves and Surfaces* (Archachon, France, June 28 - July 4 2018).
- [SE87] SHIMON EDELMAN T. F. : An oscillation theory of handwriting. *Biological Cybernetics. Vol. 57* (1987), 25–36.

### Annexe : Vecteurs de contrôle de multiplicité

Ce paragraphe étudie l'influence des vecteurs de contrôle de multiplicité ainsi que la contribution du vecteur  $\vec{0}$  via deux asymptotes et la courbe de Bézier est définie par le vecteur  $\vec{P}_0$ , le point pondéré  $P_1$  de poids non nul  $\omega_1$  et les vecteurs  $\vec{P}_2, \vec{P}_3$  et  $\vec{P}_4$  avec les conditions suivantes :

- les vecteurs  $\vec{P}_0$  et  $\vec{P}_4$  ne sont pas colinéaires (et sont donc non nuls);
- le vecteur  $\vec{P}_2$  est soit le vecteur nul  $\vec{0}$  soit un vecteur colinéaire à  $\vec{P}_4$ ;
- le vecteur  $\vec{P}_3$  est soit le vecteur nul  $\vec{0}$  soit un vecteur colinéaire à  $\vec{P}_4$ .

Les polynômes de Bernstein de degré 4 sont rappelés ci-dessous :

$$\begin{cases} B_{04}(t) = (1-t)^4 \\ B_{14}(t) = 4t(1-t)^3 \\ B_{24}(t) = 6t^2(1-t)^2 \\ B_{34}(t) = 4t^3(1-t) \\ B_{44}(t) = t^4 \end{cases}$$

La courbe de Bézier est définie par :

- la relation :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{\omega_1 B_{14}(t)} \left( B_{04}(t) \vec{P}_0 + \omega_1 B_{14}(t) \overrightarrow{OP}_1 + B_{24}(t) \vec{P}_2 + B_{34}(t) \vec{P}_3 + B_{44}(t) \vec{P}_4 \right) \quad (9)$$

pour  $t$  dans  $]0; 1[$ ;

- $\vec{P}_0$  pour  $t = 0$ ;
- $\vec{P}_4$  pour  $t = 1$ .

La formule (9) peut s'écrire :

$$\overrightarrow{P_1M}(t) = \frac{1}{\omega_1 B_{14}(t)} \left( B_{04}(t) \vec{P}_0 + B_{24}(t) \vec{P}_2 + B_{34}(t) \vec{P}_3 + B_{44}(t) \vec{P}_4 \right) \quad (10)$$

et il vient , à partir de l'équation (10), l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t) - x_1 = \frac{(1-t)^4 x_0 + 6t^2(1-t)^2 x_2 + 4t^3(1-t) x_3 + t^4 x_4}{4\omega_1 t(1-t)^3} \\ y(t) - y_1 = \frac{(1-t)^4 y_0 + 6t^2(1-t)^2 y_2 + 4t^3(1-t) y_3 + t^4 y_4}{4\omega_1 t(1-t)^3} \end{cases} \quad (11)$$

dans le cas où  $\vec{P}_2 = \lambda_2 \vec{P}_4$  avec  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$  et  $\vec{P}_3 = \lambda_3 \vec{P}_4$  avec  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ , l'équation paramétrique (11) devient :

$$\begin{cases} x(t) - x_1 = \frac{(1-t)^4 x_0 + (6t^2(1-t)^2 \lambda_2 + 4t^3(1-t) \lambda_3 + t^4) x_4}{4\omega_1 t(1-t)^3} \\ y(t) - y_1 = \frac{(1-t)^4 y_0 + (6t^2(1-t)^2 \lambda_2 + 4t^3(1-t) \lambda_3 + t^4) y_4}{4\omega_1 t(1-t)^3} \end{cases} \quad (12)$$

et le cas  $x_0 y_0 x_4 y_4 \neq 0$  est illustré. A partir de l'équation (12), Un développement limité en  $t = 0$  à l'ordre 4 de :

$$\frac{y(t) - y_1}{x(t) - x_1} = \frac{(1-t)^4 y_0 + (6t^2(1-t)^2 \lambda_2 + 4t^3(1-t) \lambda_3 + t^4) y_4}{(1-t)^4 x_0 + (6t^2(1-t)^2 \lambda_2 + 4t^3(1-t) \lambda_3 + t^4) x_4} \quad (13)$$

a pour partie régulière :

$$\mathcal{P}_0(t) = \sum_{i=0}^4 a_i t^i$$



avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{y_0}{x_0} \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 6\lambda_2 \frac{x_0 y_4 - x_4 y_0}{x_0^2} = \frac{6\lambda_2}{x_0^2} \det(\vec{P}_0; \vec{P}_4) \\ a_3 = 4(3\lambda_2 + \lambda_3) \frac{y_4 x_0 - x_4 y_0}{x_0^2} = \frac{4(3\lambda_2 + \lambda_3)}{x_0^2} \det(\vec{P}_0; \vec{P}_4) \\ a_4 = \frac{36x_4 \lambda_2^2 - 18\lambda_2 x_0 - 12x_0 \lambda_3 - x_0}{x_0^3} \times (-y_4 x_0 + x_4 y_0) \\ = \frac{36x_4 \lambda_2^2 - 18\lambda_2 x_0 - 12x_0 \lambda_3 - x_0}{x_0^3} \det(\vec{P}_4; \vec{P}_0) \end{array} \right. \quad (14)$$

Il vient :

$$\vec{P}_2 = \vec{0} \iff \lambda_2 = 0 \iff a_2 = 0$$

et :

$$\vec{P}_2 = \vec{P}_3 = \vec{0} \iff \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \iff \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = \frac{\det(\vec{P}_0; \vec{P}_4)}{x_0^2} \neq 0 \end{cases}$$

Un développement limité en  $t = 1$  de l'équation (13) à l'ordre 4 admet pour partie régulière :

$$\mathcal{P}_1(t) = \frac{y_4}{x_4} + \frac{\det(\vec{P}_4; \vec{P}_0)}{x_4^2} t^4 \quad (15)$$

où  $\frac{\det(\vec{P}_4; \vec{P}_0)}{x_4^2}$  est toujours non nul.

La figure 9 montre quatre exemples de courbes de Bézier quartiques de points de contrôle communs  $\vec{P}_0(1; -1)$ ,  $P_1(1; 2)$  de poids 1 et  $\vec{P}_4(1; 1)$  : les vecteurs de contrôle  $\vec{P}_2$  et  $\vec{P}_3$  appartiennent à  $\{\vec{0}; \vec{P}_4\}$ . La courbe en pointillé noir est la courbe de Bézier quadratique de points de contrôle  $\vec{P}_0(0; -1)$ ,  $P_1(1; 2)$  de poids  $\omega_1 = 1$  et  $\vec{P}_4(1; 1)$  qui est une branche d'hyperbole. Il en résulte :

$$\det(\vec{P}_0; \vec{P}_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

et les parties régulières des développements limités en  $t = 0$  de l'équation (13) figurent dans le tableau 1.

Couleur	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\mathcal{E}_x$
Bleu	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_4$	$\mathcal{P}_0(t) = -1 + 12t^2 + 32t^3 - 10t^4$
Magenta	$\vec{P}_4$	$\vec{0}$	$\mathcal{P}_0(t) = -1 + 12t^2 + 24t^3 - 34t^4$
Vert	$\vec{0}$	$\vec{P}_4$	$\mathcal{P}_0(t) = -1 + 8t^3 + 26t^4$
Rouge	$\vec{0}$	$\vec{0}$	$\mathcal{P}_0(t) = -1 + 2t^4$

Table 1: Courbes de Bézier quadratiques de la figure 9 et approximation à l'ordre 4 de la formule (13).

La partie régulière du développement limité en  $t = 1$  à l'ordre 4 de l'équation (13) vaut :

$$\mathcal{P}_1(t) = 1 - 2t^4$$

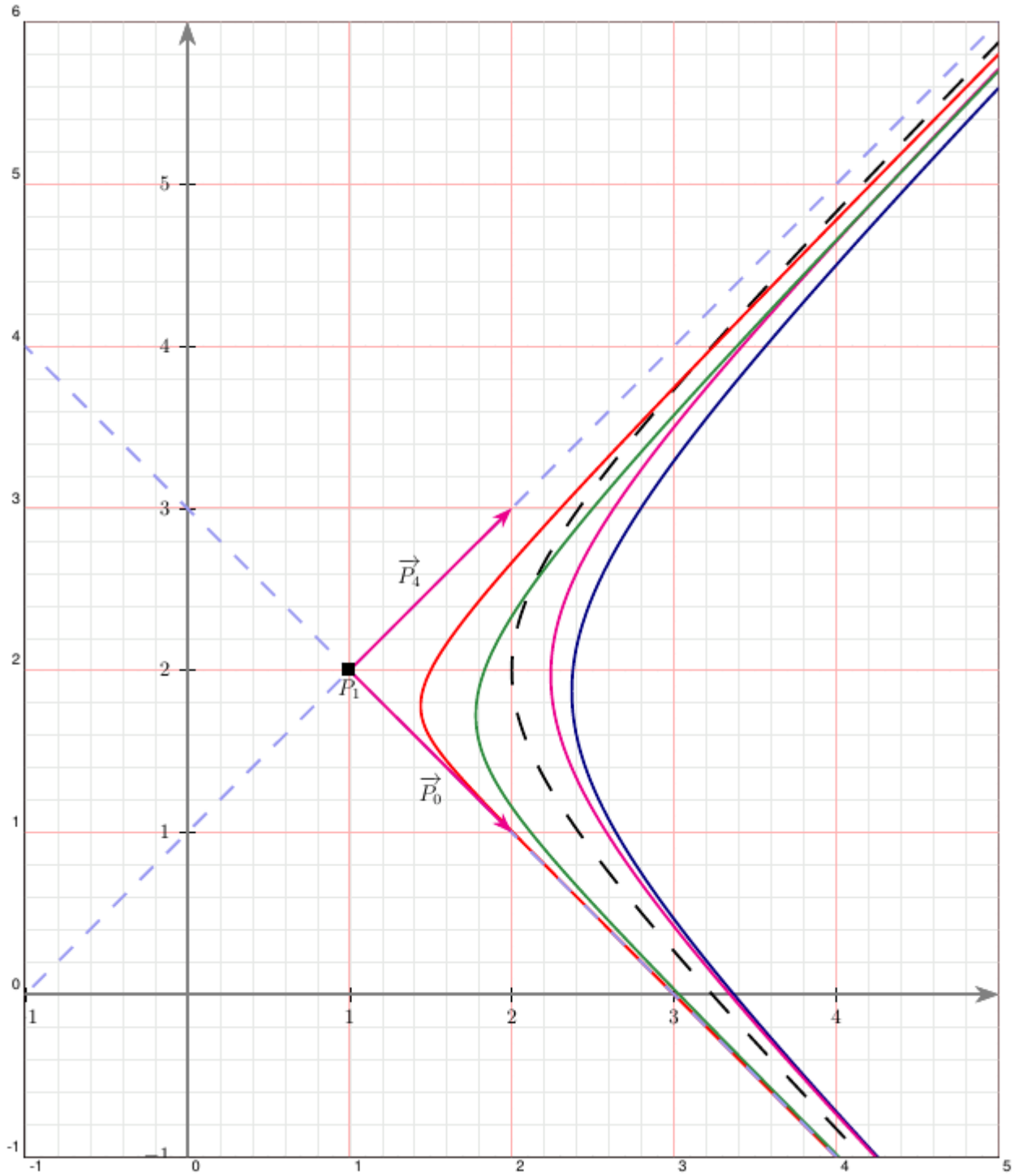


Figure 9: Influences des vecteurs de contrôle de singularité sur une courbe de Bézier rationnelle quartique ayant en commun les points de contrôle  $\vec{P}_0(1; -1)$ ,  $P_1(1; 2)$  de poids 1 et  $\vec{P}_4(1; 1)$ .