Points massiques, espace des sphères et " hyperbole "

Lionel Garnier, Lucie Druoton, Jean-Paul Becar

▶ **To cite this version:**

Lionel Garnier, Lucie Druoton, Jean-Paul Becar. Points massiques, espace des sphères et " hyperbole ". Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique 2015, 2015, POITIERS, France. hal-02513124

HAL Id: hal-02513124
https://uphf.hal.science/hal-02513124

Submitted on 20 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Points massiques, espace des sphères et « hyperbole »

Lionel GARNIER[1], Lucie DRUOTON[2], Jean-Paul BECAR[3]

[1] LE2i, UMR CNRS 6306, Université de Bourgogne, B.P. 47870 , 21 078 Dijon Cedex, France, lionel.garnier@u-bourgogne.fr
[2] IMB, UMR CNRS 5584, Université de Bourgogne, B.P. 47870 , 21 078 Dijon Cedex, France, lucie.druoton@u-bourgogne.fr
[3]LAMAV-CGAO, CNRS 2956, Le Mont-Houy, 59313 Valenciennes cedex 9, jean-paul.becar@univ-valenciennes.fr

Résumé
Les courbes de Bézier quadratiques à points pondérés de contrôle jouent un rôle fondamental pour la modélisation d'arcs bornés de coniques. L'utilisation de points massiques permet de modéliser aussi bien des arcs de coniques non bornés que des branches d'hyperboles dans le plan affine euclidien. Dans l'espace des sphères, un cône de révolution, un cylindre de révolution, un tore, une cyclide de Dupin ou faisceau de sphères est représentée par une conique. Dans le cas d'un faisceau de sphères à point limite ou dans le cas de cyclides de Dupin à croissant non nul, de cônes de révolution ou de tores croisés, nous obtenons un cercle qui se trace comme une hyperbole, les points (limites ou singuliers) sont obtenus en considérant les asymptotes de ce cercle. Dans cet article, l'utilisation des points massiques pour représenter des arcs de coniques dans l'espace des sphères permet de simplifier l'utilisation de ces faisceaux et de ces cyclides de Dupin.

The use of massic points permits to define a branch of a hyperbola in the Euclidean plane using a Rational Quadratic Bézier Curve. In the space of spheres, a circular cone, a circular cylinder, a torus, a pencil of spheres or a Dupin cyclide is represented by a conic. If the kind of the pencil is Poncelet or if the canal surface is a circular cone, a spindle torus, a spindle or a horned Dupin cyclide, the curve is a circle which is seen as a hyperbole. The limit points of the pencil or the singular points of the Dupin cyclide can be determined using the asymptotes of this circle. In this article, we show that the use of massic points simplifies the modelization of these pencils or these Dupin cyclides in the space of spheres.

Mots-clés : Hyperbole, points massiques, courbe de Bézier, cyclide de Dupin, faisceau de sphères, espace des sphères.

1 Introduction

Le tracé d'arc de conique est une préoccupation importante en C.A.O. et C.F.A.O. et l'utilisation de points de contrôle est très utile lorsque nous ne sommes pas dans le plan affine (i.e. dans un plan d'un espace de dimension au moins 3). Une solution courante est d'utilisée des courbes de Bézier (rationnelles ou polynomiales) quadratiques, inventées par Pierre Bézier [Béz86] chez Renault, ou l'algorithme inventé par Paul de Casteljau [Cas85] chez Citroën et qui permet des constructions itératives [Zaï98, Gol04, MWW01, BCR07, Gar10, GDL12]. Classiquement, une courbe de Bézier rationnelle quadratique, appelée **courbe BR**, est définie par les trois polynômes de Bernstein de degré 2 et trois points pondérés (P_0,ω_0), (P_1,ω_1) et (P_2,ω_2) de poids non nul (et le plus souvent de poids strictement positifs). D'un point de vue géométrique, un tel arc est le lieu de barycentres de points pondérés : le poids de ce barycentre est la somme des produits des poids avec le polynôme de Bernstein idoine. Cependant, la modélisation d'arcs de paraboles ou d'hyperboles pose problème puisque ces dernières ne sont pas bornées. Une solution élégante et efficace, pour pouvoir modéliser un arc de conique non borné par une courbe BR, consiste à regrouper dans le même espace, celui des points massiques [FJ89, Gol02], l'ensemble des points pondérés et des vecteurs que nous affectons d'un poids nul. De plus, en se donnant une courbe de Bézier rationnelle quadratique, grâce à des représentations adéquates, nous pouvons déterminer très facilement les éléments caractéristiques de la conique définie par cette courbe de Bézier [Béc97, BG14]. L'utilisation des coordonnées homogènes n'est pas possible puisque, d'une

part, la structure métrique (euclidienne ou non) du plan affine ne peut être considérée dans sa fermeture projective, et d'autre part, le choix d'un représentant ou d'un autre d'une classe d'équivalence change la nature de la courbe [Gar10]. En utilisant les coordonnées homogènes, si nous ne connaissons pas la droite de l'infini, nous ne pouvons pas distinguer une conique propre d'une autre conique propre [Ing11]. Le formalisme des courbes de Bézier à points massiques de contrôle s'étend à toute dimension et ne dépend pas de la forme quadratique considérée ce qui rend leur utilisation possible dans un espace qui nous intéresse : l'espace des sphères.

L'espace des sphères a été introduit de différentes façons. Par exemple, M. Berger [Ber78, BG92] se place dans l'espace projectif des formes quadratiques sur l'espace affine euclidien, M. Paluszny [PB98] travaille dans un espace projectif de dimension 4 utilisant l'hypersphère de Moebius alors que U. Hertrich-Jeromin [HJ03], T. Cecil [Cec92], R. Langevin, J. O'Hara [LO05, LO08] et P. Walczak [LW08] utilisent une quadrique de dimension 4 de l'espace de Lorentz de dimension 5. Nous reprenons la construction de ces derniers où nous pouvons distinguer l'intérieur de l'extérieur de la sphère en fonction de l'orientation de cette dernière. Nous utilisons ce dernier puisqu'il permet de résoudre des problèmes insoluble aussi bien dans $\mathbb{R}^3$ que dans les autres représentations de l'espace des sphères [LSD$^+$14]. De plus, cet espace nous permet d'utiliser, si besoin, la puissance des algèbres géométriques [DFGL14, DFM07].

Dans l'espace des sphères (orientées), une cyclide de Dupin, un cône ou un cylindre de révolution, un tore ou un faisceau de sphères est représenté par une courbe sur une sphère unité de dimension 5 plongé dans un espace de dimension 5 généralisant l'espace-temps de Minkowski. [DGL$^+$10, GDL12, DFGL14, LSD$^+$14, LW08, LO08]. Cet espace permet de simplifier la manipulation de surfaces puisque ces dernières sont « linéarisées » : elles sont obtenus comme intersection de la sphère unité par un plan (de dimension 2). Les points singuliers des cyclides de Dupin ou les points limites d'un faisceau de sphères sont représentés par des vecteurs isotropes (pour la forme quadratique de Lorentz) et il est naturel, si nous voulons utiliser des courbes de Bézier rationnelles quadratiques pour représenter des arcs de cercles dans l'espace des sphères de pouvoir inclure des vecteurs dans la courbe de Bézier. Nous pouvons modéliser très facilement un demi-cercle (euclidien ou non) ou une branche d'un cercle, qui se trace comme une hyperbole, en utilisant le formalisme des points massiques.

L'article est composé comme suit : après un rappel sur les courbes de Bézier rationnelles quadratiques ayant des points massiques de contrôle, la modélisation de branche d'hyperbole et l'espace des sphères, dans le paragraphe 3, nous montrons comment il est aisé de représenter un faisceau de sphères à points limite, une cyclide de Dupin ayant deux points singuliers, dont le cône de révolution qui possède un point à l'infini, par une courbe de Bézier rationnelle quadratique à points massiques de contrôle dans l'espace des sphères.

2 Rappels

Dans ce document, $\mathcal{E}_3$ désigne l'espace affine à trois dimensions, orienté, muni du repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$. L'ensemble $\mathcal{E}$ désigne un espace affine quelconque d'espace vectoriel attaché $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1 Points massiques

L'ensemble des vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et des points pondérés de $\mathcal{E}$ sont regroupés dans l'espace $\widetilde{\mathcal{E}}$ défini par :

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \left(\mathcal{E} \times \mathbb{R}^*\right) \cup \left(\overrightarrow{\mathcal{E}} \times \{0\}\right) \tag{1}$$

et il est possible d'identifier $\widetilde{\mathcal{E}}$ à $\overrightarrow{\mathcal{E}_n} = \overrightarrow{\mathcal{E}} \oplus \overrightarrow{\mathbb{R}}$ ($\overrightarrow{\mathcal{E}_n}$ est de dimension $n+1$, mais ce qui nous intéresse principalement est la dimension n de l'espace affine ce qui reste visible avec cette notation). L'idée est de considérer $\mathcal{E}$ comme un hyperplan de $\overrightarrow{\mathcal{E}_n}$ d'équation $\omega = 1$: la coordonnée supplémentaire ω représente le poids du point pondéré. Un point massique est soit un point pondéré de $\mathcal{E}$, soit un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ à qui nous affectons un poids nul [FJ89, GDL12, Béc97, BG14, Dru13b].

Sur l'espace $\widetilde{\mathcal{E}}$, l'addition, notée $\oplus$, est définie de la façon suivante :

- $\omega + \mu = 0 \Longrightarrow$
  $(M;\omega) \oplus (N;\mu) = (M;\omega) \oplus (N;-\omega) = \left(\omega\overrightarrow{NM};0\right)$
- $\omega + \mu \neq 0 \Longrightarrow$
  $(M;\omega) \oplus (N;\mu) = \left(\texttt{bar}\left\{(M;\omega);(N;\mu)\right\};\omega+\mu\right)$
  où $\texttt{bar}\{(M;\omega);(N;\mu)\}$ désigne le barycentre des points pondérés $(M;\omega)$ et $(N;\mu)$
- $(\overrightarrow{u};0) \oplus (\overrightarrow{v};0) = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v};0)$
- $\omega \neq 0 \Longrightarrow (M;\omega) \oplus (\overrightarrow{u};0) = \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega}\overrightarrow{u}}(M);\omega\right)$ où $\mathcal{T}_{\overrightarrow{w}}$ est la translation de $\mathcal{E}$ de vecteur $\overrightarrow{w}$.

Sur l'espace $\widetilde{\mathcal{E}}$, la multiplication par un scalaire, notée $\odot$, est définie de la façon suivante :

- $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \alpha \odot (M;\omega) = (M;\alpha\,\omega)$
- $\omega \neq 0 \Longrightarrow 0 \odot (M;\omega) = \left(\overrightarrow{0};0\right)$
- $\alpha \odot (\overrightarrow{u};0) = (\alpha\overrightarrow{u};0)$

2.2 Courbes de Bézier rationnelles quadratiques, notées BRs, dans $\widetilde{\mathcal{E}}$

Rappelons les expressions des polynômes de Bernstein de degré 2 :

$$B_0(t) = (1-t)^2,\ B_1(t) = 2t(1-t),\ B_2(t) = t^2 \quad (2)$$

que nous considérons sur l'intervalle $[0;1]$.

Les points de contrôle d'une courbe de Bézier rationnelle quadratique sont des points massiques $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$ (i.e. des points pondérés de $\mathcal{E}$ ou des vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$) que nous supposons non alignés c'est-à-dire :

- si $\prod_{i=0}^{2}\omega_i \neq 0$, il s'agit de la notion usuelle ;
- si $\omega_i = 0$ et les deux autres poids sont non nuls, le vecteur $\overrightarrow{P_i}$ n'est pas un vecteur directeur de la droite engendrée par les deux autres points ;
- si $\omega_i = 0$ et $\omega_j = 0$, avec $i \neq j$, les vecteurs $\overrightarrow{P_i}$ et $\overrightarrow{P_j}$ ne sont pas colinéaires.

Définition 1 : courbe BR dans $\widetilde{\mathcal{E}}$
Soit ω_0, ω_1 et ω_2 trois réels non tous nuls. Soit $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$ trois points massiques de $\widetilde{\mathcal{E}}$.
Soit I (resp. J) l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls (resp. nuls).
Soit la fonction ω_f définie sur $[0;1]$ par :

$$\omega_f(t) = \sum_{i\in I}\omega_i B_i(t) \quad (3)$$

Un point massique $(M;\omega)$ ou $(\overrightarrow{u};0)$ appartient à la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$, notée :

$$BR\{(P_0;\omega_0);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}$$

s'il existe un réel t_0 de $[0;1]$ tel que :
- si $\omega_f(t_0) \neq 0$ alors, nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} &= \dfrac{1}{\omega_f(t_0)}\displaystyle\sum_{i\in I}\omega_i B_i(t_0)\overrightarrow{OP_i} \\ &+ \dfrac{1}{\omega_f(t_0)}\displaystyle\sum_{i\in J}B_i(t_0)\overrightarrow{P_i} \\ \omega &= \omega_f(t_0) \end{cases} \quad (4)$$

- si $\omega_f(t_0) = 0$ alors, nous avons :

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i\in I}\omega_i B_i(t_0)\overrightarrow{OP_i} + \sum_{i\in J}B_i(t_0)\overrightarrow{P_i} \quad (5)$$

2.3 Modélisation d'une branche d'une hyperbole

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le plan affine euclidien orienté usuel $\mathcal{P}$ et donnons un résultat fondamental pour cet article et que nous adapterons afin d'utiliser le résultat dans l'espace de Lorentz : la modélisation de toute une branche d'une hyperbole par une courbe BR, le premier ou le dernier point massique de contrôle est un vecteur directeur de l'une ou de l'autre des asymptotes de l'hyperbole.

Théorème 1 : Modélisation d'une branche d'une hyperbole
Soit $\overrightarrow{W_0}$ et $\overrightarrow{W_2}$ sont deux vecteurs non colinéaires de même norme i.e.

$$\left\|\overrightarrow{W_0}\right\| = \left\|\overrightarrow{W_2}\right\| > 0 : \quad (6)$$

Soit Q_1 un point de $\mathcal{P}$.
Posons :

$$\overrightarrow{\imath} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{W_0}+\overrightarrow{W_2}\right) \quad \text{avec} \quad a = \frac{\left\|\overrightarrow{W_0}+\overrightarrow{W_2}\right\|}{2} \quad (7)$$

et :

$$\overrightarrow{\jmath} = \frac{1}{b}\,\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{W_0}-\overrightarrow{W_2}\right) \quad \text{avec} \quad b = \frac{\left\|\overrightarrow{W_0}-\overrightarrow{W_2}\right\|}{2} \quad (8)$$

Alors, la courbe BR de points massiques de contrôle $\left(\overrightarrow{W_0};0\right)$, $(Q_1;1)$ et $\left(\overrightarrow{W_2};0\right)$ est une branche de l'hyperbole de centre Q_1, d'équation implicite suivante :

$$x \times y = \frac{\left\|\overrightarrow{W_0}\right\|^2}{4}$$

dans le repère orthonormé $\left(Q_1;\frac{1}{\left\|\overrightarrow{W_0}\right\|}\overrightarrow{W_0};\frac{1}{\left\|\overrightarrow{W_2}\right\|}\overrightarrow{W_2}\right)$, et d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

dans le repère orthonormé $(Q_1;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$.

Démonstration : Voir [Béc97].

■

Les deux asymptotes de l'hyperbole sont les droites passant par Q_1 et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{W_0}$ et $\overrightarrow{W_2}$.

2.4 Sphères orientées de $\mathcal{E}_3$

A partir d'une sphère S de centre Ω et de rayon r, nous pouvons définir deux sphères orientées S^+ et S^- de la façon suivante : en tout point M de S, la sphère orientée S^+ (resp. S^-), de rayon $\rho = r$ (resp. $\rho = -r$) est définie par le fait que le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$ à la sphère S en M est sortant (resp. rentrant). Ainsi, nous avons :

$$\overrightarrow{\Omega M} = \rho\overrightarrow{N}. \quad (9)$$

et, si le rayon est positif (resp. négatif), l'intérieur délimité par la sphère S^+ (resp. S^-) est la partie bornée (resp. non bornée) délimitée par S.

De façon analogue, nous considérons les plans orientés en tenant compte des vecteurs normaux. Nous pouvons définir la puissance d'un point par rapport à une sphère.

Définition 2 : Puissance d'un point par rapport à une sphère
Soit une sphère orientée S de centre Ω et de rayon ρ. Soit M un point de $\mathcal{E}_3$.
La puissance du point M par rapport à la sphère S est :

$$\chi_{\mathsf{S}}(M) = \Omega M^2 - \rho^2 \tag{10}$$

Les points de la sphère S sont les points M vérifiant $\chi_{\mathsf{S}}(M) = 0$. Les points de $\mathcal{E}_3$ contenus dans la partie bornée délimitée par la sphère S sont les points M vérifiant $\chi_{\mathsf{S}}(M) < 0$. Les autres points de $\mathcal{E}_3$ sont les points M vérifiant $\chi_{\mathsf{S}}(M) > 0$.

Dans la suite de ce document, sauf mention contraire, nous considérons un plan orienté comme une sphère orientée centrée à l'infini et de rayon infini. Donnons la définition d'un faisceau de sphères orientées :

Définition 3 : Faisceau de sphères orientées
Soit deux sphères orientées S_1 et S_2 non concentriques, de centres respectifs Ω_1 et Ω_2, de rayons respectifs ρ_1 et ρ_2. Soit λ_1 et λ_2 deux réels non tous deux nuls.
Le faisceau de sphères défini par S_1 et S_2 est l'ensemble des sphères, noté $\lambda_1\mathsf{S}_1 + \lambda_2\mathsf{S}_2$, définies par l'ensemble des points M vérifiant la relation :

$$\lambda_1 \chi_{\mathsf{S}_1}(M) + \lambda_2 \chi_{\mathsf{S}_2}(M) = 0 \tag{11}$$

Notons que si nous avons la relation : $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1\mathsf{S}_1 - \lambda_1\mathsf{S}_2$ est le plan orienté de vecteur normal unitaire :

$$\frac{1}{\Omega_1\Omega_2}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} \text{ ou } \frac{-1}{\Omega_1\Omega_2}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$$

passant par le I_0, point de la droite $(\Omega_1\Omega_2)$ vérifiant :

$$\overline{II_0} = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{2\,\overline{\Omega_1\Omega_2}}$$

où $\overline{AB}$ désigne la mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$. Nous admettons le théorème suivant :

Théorème 2 :
Soit deux sphères S_1 et S_2 non concentriques, de centres respectifs Ω_1 et Ω_2, de rayons respectifs ρ_1 et ρ_2. Soit λ_1 et λ_2 deux réels non tous deux nuls. Alors :
Si les sphères S_1 et S_2 sont disjointes alors il existe deux points M_1 et M_2 de $(\Omega_1\Omega_2)$ tels que, pour $\lambda_1 \neq -\lambda_2$, $\lambda_1\mathsf{S}_1 + \lambda_2\mathsf{S}_2$ soit centrée sur $(\Omega_1\Omega_2) -]M_1; M_2[$: le faisceau de sphères $\lambda_1\mathsf{S}_1 + \lambda_2\mathsf{S}_2$ s'appelle faisceau de sphères à points limite, et les boules délimitées par ces sphères sont contenues les unes dans les autres et tendent vers les deux points limite M_1 et M_2, figure 1.

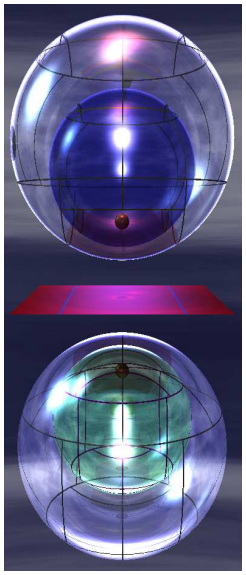

Figure 1: *Un faisceau de sphères à points limite.*

2.5 Espace des sphères Λ^4 et espace de Lorentz

2.5.1 Espace de Lorentz et cône de lumière

L'espace de Lorentz est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel, noté $\overrightarrow{\mathsf{L}_{4,1}}$, muni de la base canonique $(\overrightarrow{e_-}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_+})$, sur lequel nous définissons la forme quadratique de Lorentz $\mathcal{Q}_{4,1}$, de forme bilinéaire symétrique associée $\mathcal{L}_{4,1}$, de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{e_i}; \overrightarrow{e_j}) = 0 & (i;j) \in \{-,1,2,3,+\}^2,\ i \neq j \\ \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{e_-}) = -1 & \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{e_i}) = 1,\ i \in \{1,2,3,+\} \end{array} \tag{12}$$

Dans cet espace, la forme quadratique $\mathcal{L}_{4,1}$, de signature $(4;1)$, s'appelle un (*pseudo*) †-produit scalaire.

L'espace affine d'origine $O_5 = (0;0;0;0;0)$ et d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{\mathsf{L}_{4,1}}$ est noté $\mathsf{L}_{4,1}$ et nous avons une bijection qui à tout point M de $\mathsf{L}_{4,1}$ associe son vecteur position $\overrightarrow{O_5M}$.

Etant donné que la forme quadratique $\mathcal{Q}_{4,1}$ n'est pas définie positive, nous pouvons considérer l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ non nuls, isotropes (i.e. $\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{u}) = 0$), et l'ensemble des vecteurs positions isotropes engendre un cône, dit de lumière, figures 2 et 3 :

$$\mathsf{C}_l = \left\{ M \in \mathsf{L}_{4,1} \mid \mathcal{Q}_{4,1}\left(\overrightarrow{O_5M}\right) = 0 \right\} \tag{13}$$

qui est la sphère de centre O_5 et de rayon nul pour la forme quadratique $\mathcal{Q}_{4,1}$ car tous les points M de C_l sont à une distance nulle de O_5. Nous pouvons distinguer trois types de

†. Dans la suite, le terme *pseudo* sera omis.

Type du vecteur ou du 2-plan	Vecteur $\overrightarrow{u}$	2-plan
Espace	$\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{u}) > 0$	Tous les vecteurs de ce 2-plan sont de type espace
Temps	$\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{u}) < 0$	Au moins un vecteur de ce 2-plan est de type temps
Lumière	$\mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{u}) = 0$	Le plan est parallèle à un hyperplan tangent à C_l

Table 1: *Définition des trois types de vecteurs ou de plans de l'espace de Lorentz.*

vecteurs et de 2-plans ‡, voir tableau 1. Notons que dans un plan de type lumière, il n'y a qu'une seule direction lumière tandis que dans un plan de type temps, il existe deux directions lumière distinctes.

Par rapport aux anciens travaux [DGL+10, GDL12], afin de faciliter le plongement de $\mathcal{E}_3$ dans l'espace de Lorentz [DFGL14], dans cet espace, nous utilisons la base $(\overrightarrow{e_o}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_\infty})$ [DFM07] où :

$$\overrightarrow{e_o} = \overrightarrow{e_-} - \overrightarrow{e_+} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_\infty} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{e_-} + \overrightarrow{e_+})$$

et nous avons les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{e_o}) = \mathcal{Q}_{4,1}(\overrightarrow{e_\infty}) & = & 0 \\ \mathcal{L}_{4,1}(\overrightarrow{e_o}; \overrightarrow{e_\infty}) & = & -1 \end{array} \right. \tag{14}$$

Dans la suite, nous nous plaçons dans la base $(\overrightarrow{e_o}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_\infty})$. Etant donné deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathsf{L}_{4,1}}$, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sera noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ tandis que le carré scalaire sera noté $\overrightarrow{u}^2$.

2.5.2 Paraboloïde isométrique au plongement de $\mathcal{E}_3$ dans l'espace de Lorentz

Considérons le point O_3 défini par $\overrightarrow{O_5O_3} = \overrightarrow{e_o}$ et l'hyperplan affine $\mathcal{H}$ engendré par O_3, les vecteurs espace $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ et le vecteur lumière $\overrightarrow{e_\infty}$. La restriction de la forme quadratique $\mathcal{Q}_{4,1}$ à $\mathcal{H}$ est dégénérée. Le paraboloïde P, de dimension 3, est l'intersection entre le cône de lumière C_l et l'hyperplan affine $\mathcal{H}$, figure 2.

Nous avons le théorème fondamental suivant :

Théorème 3 : Le paraboloïde P est isométrique au plongement de $\mathcal{E}_3$ dans l'espace de Lorentz.

Démonstration :

Pour tout point $M(x;y;z)$ de $\mathcal{E}_3$, nous faisons correspondre un et un seul point M_5 défini par :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{O_5M_5} = & \overrightarrow{O_5O_3} + x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3} + 0\,\overrightarrow{e_\infty} \\ = & \overrightarrow{e_o} + x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3} \end{array}$$

‡. Un 2-plan est un plan à deux dimensions. Dans la suite, le terme 2 sera omis.

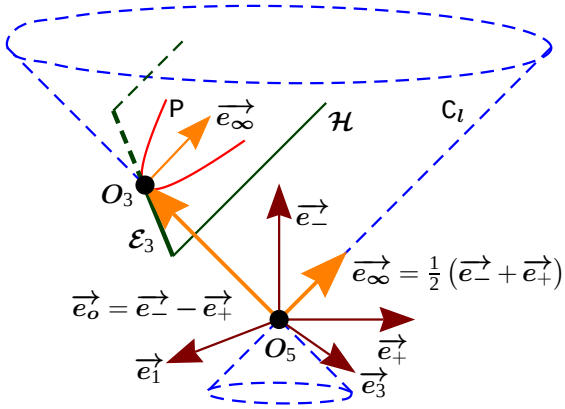

Figure 2: *Le cône de lumière C_l, de dimension 4, l'hyperplan affine $\mathcal{H}$, de dimension 4, et le paraboloïde P, de dimension 3, isométrique à $\mathcal{E}_3$.*

et nous avons :

$$\overrightarrow{O_5M_5}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

et nous identifions les points $M(x;y;z)$ de $\mathcal{E}_3$ et $M_5(1;x;y;z;0)$ de $\mathcal{H}$. Soit le point N_5 de $\mathcal{H}$ défini par :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{O_5N_5} = & \overrightarrow{O_5O_3} + x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3} + t\,\overrightarrow{e_\infty} \\ = & \overrightarrow{e_o} + x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3} + t\,\overrightarrow{e_\infty} \end{array} \tag{15}$$

Le point N_5 appartient au cône de lumière si et seulement si nous avons $\overrightarrow{O_5N_5}^2 = 0$. La relation $\overrightarrow{e_o} \cdot \overrightarrow{e_\infty} = -1$ conduit à :

$$\overrightarrow{O_5N_5}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2\,t = 0$$

qui est l'équation d'un (hyper)-paraboloïde de dimension 3. Après avoir déterminé la valeur de t que nous injectons dans la formule (15), nous obtenons :

$$\overrightarrow{O_5N_5} = \overrightarrow{O_5O_3} + x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3} + \frac{x^2+y^2+z^2}{2}\,\overrightarrow{e_\infty}$$

et le point M_5 de $\mathcal{E}_3$ est l'image du point N_5 par projection sur $\mathcal{E}_3$ dans la direction $\overrightarrow{e_\infty}$.

La réciproque est aussi vraie.

■

Rappelons que si une origine O_3 est choisie dans l'espace affine $\mathcal{E}_3$, il existe une bijection entre l'espace affine $\mathcal{E}_3$ et l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. Si P est un point de $\mathcal{E}_3$ alors le point P est complètement caractérisé par le vecteur position $\overrightarrow{O_3P}$. Réciproquement, tout vecteur position $\overrightarrow{O_3P}$ définit un et un seul point P de $\mathcal{E}_3$ et nous notons :

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{O_3P}$$

c'est-à-dire que si P est un point, son vecteur position est noté $\overrightarrow{P}$ et vice-versa.

D'après la démonstration du théorème précédent, la représentation [§] du point P dans l'espace de Lorentz est :

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{e_o} + \overrightarrow{P} + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P}\right\|^2 \overrightarrow{e_\infty} \tag{16}$$

et le vecteur $\overrightarrow{e_o}$ représente l'origine O_3 de l'espace $\mathcal{E}_3$ (i.e. $\overrightarrow{O_5O_3} = \overrightarrow{e_o}$) tandis que le vecteur $\overrightarrow{e_\infty}$ représente le point à l'infini. Par construction, le vecteur position $\overrightarrow{p}$ est un vecteur isotrope (i.e. $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} = 0$).

2.5.3 Espace des sphères orientées Λ^4

Une sphère de $\mathcal{E}_3$, de centre Ω, de rayon ρ est représentée par le point σ ou le vecteur position $\overrightarrow{\sigma}$ défini par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma} = \quad & \overrightarrow{O_5\sigma} = \frac{1}{\rho}\left(\overrightarrow{\omega} - \frac{1}{2}\rho^2\overrightarrow{e_\infty}\right) \\ = \quad & \frac{1}{\rho}\left(\overrightarrow{e_o} + \overrightarrow{\Omega} + \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{\Omega}\right\|^2 - \rho^2\right)\overrightarrow{e_\infty}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

et nous avons $\overrightarrow{\sigma}^2 = 1$ [DFGL14], tandis qu'un plan orienté $\mathcal{P}$ défini par un point P et un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$ est représenté par :

$$\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{O_5\pi} = \overrightarrow{N} + \left(\overrightarrow{N} \bullet \overrightarrow{P}\right)\overrightarrow{e_\infty} \tag{18}$$

où $\bullet$ désigne le produit scalaire de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. De plus, nous avons $\overrightarrow{\pi}^2 = \overrightarrow{N}^2 = 1$. Il est ainsi naturel d'introduire la sphère unité Λ^4 de centre O_5 de $\mathsf{L}_{4,1}$:

$$\Lambda^4 = \left\{\sigma \in \mathsf{L}_{4,1} \mid \mathcal{Q}_{4,1}\left(\overrightarrow{O_5\sigma}\right) = \overrightarrow{O_5\sigma}^2 = 1\right\} \tag{19}$$

qui représente les sphères orientées et les plans orientés de $\mathcal{E}_3$, figure 3. Notons que les deux sphères orientées S^+ et S^- de $\mathcal{E}_3$ sont représentées par les deux points σ^- et σ^+ de Λ^4 dont les vecteurs positions $\overrightarrow{\sigma}^+$ et $\overrightarrow{\sigma}^-$ sont opposés.

Pour finir ce paragraphe, faisons la remarque suivante :

Remarque 1 :
Les points de $\mathcal{E}_3$ sont des sphères de rayons nuls et les deux

§. Dans la suite, sauf mention contraire, un point de $\mathcal{E}_3$ ou un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ est écrit en majuscule, sa représentation dans l'espace de Lorentz est écrite avec la même lettre en minuscule.

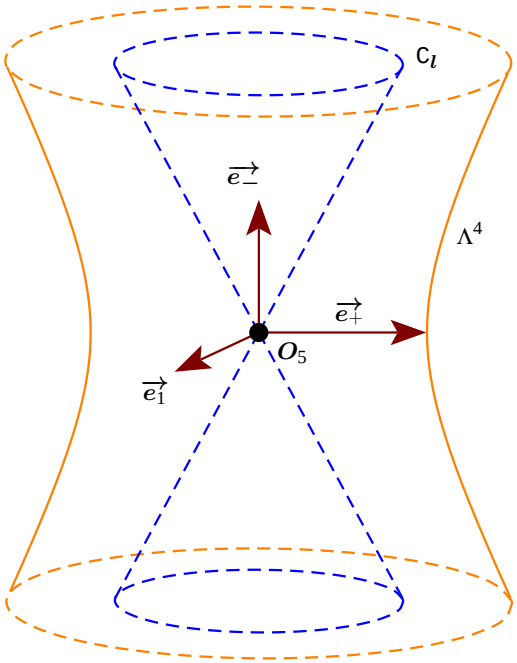

Figure 3: *La sphère de centre O_5 et de rayon nul C_l et la sphère unité Λ^4 de centre O_5.*

représentations, formules (16) et (17), conduisent à la même direction vectorielle car nous avons :

$$\lim_{\rho \longrightarrow 0} \rho\overrightarrow{\sigma} = \left(\overrightarrow{e_o} + \overrightarrow{\Omega} + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\Omega}\right\|^2 \overrightarrow{e_\infty}\right) = \overrightarrow{\omega}$$

et $\overrightarrow{\sigma}$ est le « point » à l'infini de la droite vectorielle définie par le point Ω.

2.6 Détermination des cercles caractéristiques

Une surface canal est un surface définie comme enveloppe d'une famille à un paramètre de sphères orientées. La contribution à la surface canal de chaque sphère et un cercle appelé cercle caractéristique. Ces cercles caractéristiques peuvent être déterminés par l'intersection de deux sphères particulières [LS11, Dru13a, GDL12]. Commençons par donner le définition de sphère dérivée :

Définition 4 : Sphère dérivée
Soit γ une courbe sur Λ^4 représentant une surface canal.
Soit $\sigma_0 = \gamma(t_0)$ un point de Λ^4 représentant la sphère S_0.
Soit $\overrightarrow{v_0}$ le vecteur tangent à γ en σ_0.
La sphère dérivée de σ_0, notée $\dot{\sigma_0}$, est l'intersection entre Λ^4 est la droite passant par O_5 et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_0}$, [LS11].

De la définition, nous avons directement :

$$\overrightarrow{O_5\sigma_0} \cdot \overrightarrow{O_5\overset{\bullet}{\sigma}_0} = 0$$

et, dans $\mathcal{E}_3$, les sphères S_0 et celle représentée par $\overset{\bullet}{\sigma}_0$ sont aussi orthogonales.

2.7 Faisceaux linéaires de sphères

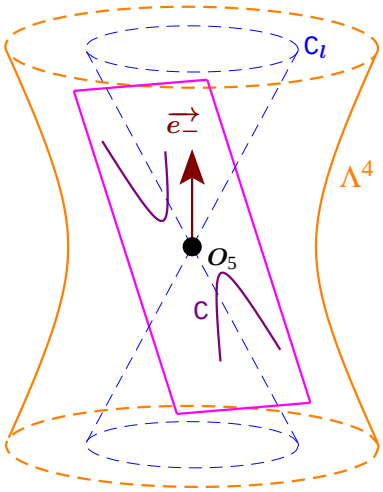

Figure 4: *Représentation d'un faisceau de sphères à points limite obtenu comme section de Λ^4 par un 2-plan affine, de type temps, passant par O_5 : la courbe est un cercle unitaire non connexe (qui se trace comme une hyperbole) contenu dans un 2-plan de type temps.*

Le résultat fondamental concernant la représentation d'un faisceau de cercles sur Λ^4 est :

Théorème 4 :
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathsf{L}_{4,1}$, de type temps, passant par O_5. La section de Λ^4 par $\mathcal{P}$ est un cercle unitaire, de centre O_5, qui représente un faisceau de sphères à points limite, figures 1, 5 et 4.

Démonstration : annexe **??**

■

3 Application dans l'espace des sphères

3.1 Equation d'un faisceau de sphères à points limite

En utilisant le fait que deux points (deux sphères de rayon nul) appartiennent au faisceau de sphères à points limite, nous allons établir une paramétrisation de ce dernier sur Λ^4. Dans le premier cas, nous obtenons l'équation d'une hyperbole dans le repère défini pas ses asymptotes (i.e. $y = \frac{1}{x}$) tandis que dans le second cas, nous obtenons une équation par rapport aux demi-axes de l'hyperbole.

Proposition 1 :
Considérons M_1 et M_2 les deux points limite d'un faisceau de sphères $\mathsf{S}(t)$. Soit $\overrightarrow{m_1}$ et $\overrightarrow{m_2}$ la représentation des points M_1 et M_2 dans l'espace de Lorentz. Soit $\varepsilon \in \{-1;1\}$.
Un faisceau de sphères à points limite M_1 et M_2 admet deux équations paramétriques équivalentes :

$$\overrightarrow{\sigma}(t) = t\,\frac{1}{M_2M_1}\,\overrightarrow{m_1} - \frac{1}{t}\,\frac{1}{M_2M_1}\,\overrightarrow{m_2},\ t \in \mathbb{R}^* \qquad (20)$$

et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\sigma_{hyp}}(t) = &\quad \varepsilon\ \mathrm{ch}(t)\ \frac{1}{M_2M_1}\ (\overrightarrow{m_1} - \overrightarrow{m_2}) \\ &+\quad \mathrm{sh}(t)\ \frac{1}{M_2M_1}\ (\overrightarrow{m_1} + \overrightarrow{m_2}),\ t \in \mathbb{R}\end{aligned} \qquad (21)$$

Démonstration :

D'après le théorème 4, nous savons que toute sphère d'un faisceau peut s'écrire comme combinaison de deux éléments donnés de ce faisceau.

Nous avons :

$$\overrightarrow{m_1} = \overrightarrow{e_o} + \overrightarrow{M_1} + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{M_1}\right\|^2 \overrightarrow{e_\infty},\ \overrightarrow{m_1}^2 = 0$$

et :

$$\overrightarrow{m_2} = \overrightarrow{e_o} + \overrightarrow{M_2} + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{M_2}\right\|^2 \overrightarrow{e_\infty},\ \overrightarrow{m_2}^2 = 0$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{m_2} &= \left(\overrightarrow{e_o} + \overrightarrow{O_3M_1} + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{O_3M_1}\right\|^2 \overrightarrow{e_\infty}\right) \\ &\quad\cdot\ \left(\overrightarrow{e_o} + \overrightarrow{O_3M_2} + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{O_3M_2}\right\|^2 \overrightarrow{e_\infty}\right) \\ &= \overrightarrow{O_3M_1}\bullet\overrightarrow{O_3M_2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{O_3M_1}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{O_3M_2}^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{O_3M_1} - \overrightarrow{O_3M_2}\right)^2 = -\frac{1}{2}\overrightarrow{M_2M_1}^2\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $\overrightarrow{\sigma}(t)$ appartient bien à Λ^4.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\sigma}(t)^2 &= \left(t\,\frac{1}{M_2M_1}\,\overrightarrow{m_1} - \frac{1}{t}\,\frac{1}{M_2M_1}\,\overrightarrow{m_2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{M_2M_1^2}\left(t^2\,\overrightarrow{m_1}^2 - 2\,\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{m_2} + \frac{1}{t^2}\,\overrightarrow{m_2}^2\right) \\ &= \frac{-2}{M_2M_1^2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{M_2M_1}^2\right) = 1.\end{aligned}$$

□

Etablissons la seconde équation. Nous avons :

$$(\overrightarrow{m_1} + \overrightarrow{m_2})^2 = \overrightarrow{m_1}^2 + 2\,\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{m_2} + \overrightarrow{m_2}^2 = -\overrightarrow{M_2M_1}^2 \qquad (22)$$

et :

$$(\overrightarrow{m_1}-\overrightarrow{m_2})^2=\overrightarrow{m_1}^2-2\,\overrightarrow{m_1}\centerdot\overrightarrow{m_2}+\overrightarrow{m_2}^2=\overrightarrow{M_2M_1}^2 \quad (23)$$

Il suffit de montrer que $\overrightarrow{\sigma_{hyp}}(t)$ appartient bien à Λ^4.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\sigma_{hyp}}(t)^2\\
=&\left(\varepsilon\,\mathrm{ch}(t)\;\frac{1}{M_2M_1}\;(\overrightarrow{m_1}-\overrightarrow{m_2})+\mathrm{sh}(t)\;\frac{1}{M_2M_1}\;(\overrightarrow{m_1}+\overrightarrow{m_2})\right)^2\\
=&\frac{1}{M_2M_1^2}\left(\varepsilon^2\,\mathrm{ch}^2(t)\;\overrightarrow{M_2M_1}^2-\mathrm{sh}^2(t)\;\overrightarrow{M_2M_1}^2\right)\\
+&\frac{2\,\varepsilon\;\mathrm{ch}(t)\;\mathrm{sh}(t)}{M_2M_1^2}\left(\overrightarrow{m_1}^2-\overrightarrow{m_2}^2\right)\\
=&(\varepsilon\,\mathrm{ch}(t))^2-\mathrm{sh}^2(t)=1
\end{aligned}$$

■

Considérons deux points distincts M_0 et M_2 de représentations respectives par les deux vecteurs lumières $\overrightarrow{m_0}$ et $\overrightarrow{m_2}$.

Dans l'espace des sphères, nous représentons ce type de faisceau par la branche du cercle de centre O_5 à l'aide d'une courbe BR à points massiques de contrôle, de points de contrôle intermédiaire $(O_5;\omega_1)$ et d'extrémités $(\overrightarrow{m_0};0)$ et $(-\overrightarrow{m_2};0)$. Soit ω_1 le poids de O_5. Pour $t\in\,]0;1[$, un point de cette courbe de Bézier est définie par l'équation :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{O_5\sigma(t)}\\
=&\frac{1}{\omega_1\,B_1(t)}\left(B_0(t)\,\overrightarrow{m_0}-B_2(t)\,\overrightarrow{m_2}+\omega_1\,B_1(t)\,\overrightarrow{O_5O_5}\right)\\
=&\frac{1}{\omega_1\,B_1(t)}\left(B_0(t)\,\overrightarrow{m_0}-B_2(t)\,\overrightarrow{m_2}\right)
\end{aligned}$$

La détermination de ω_1 se fait par :

$$\overrightarrow{O_5\sigma(t)}^2=1 \quad (24)$$

qui est équivalente à :

$$\omega_1^2\,B_1^2(t)\;\overrightarrow{O_5\sigma(t)}^2=\left(B_0(t)\,\overrightarrow{m_0}-B_2(t)\,\overrightarrow{m_2}\right)^2$$

Développons et simplifions le membre de gauche.

$$\begin{aligned}
\left(B_0(t)\,\overrightarrow{m_0}-B_2(t)\,\overrightarrow{m_2}\right)^2&=-2\,B_0(t)\;B_2(t)\;\overrightarrow{m_0}\centerdot\overrightarrow{m_2}\\
&=-\frac{B_1^2(t)}{2}\,\overrightarrow{m_0}\centerdot\overrightarrow{m_2}
\end{aligned}$$

et la formule (24) est équivalente à :

$$\omega_1^2=-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{m_0}\centerdot\overrightarrow{m_2}=\frac{1}{4}\,\overrightarrow{M_2M_0}^2$$

Pour tout réel λ non nul, nous avons :

$$(\lambda\,\overrightarrow{m_0})^2=(\lambda\,\overrightarrow{m_2})^2=\overrightarrow{m_0}^2=\overrightarrow{m_2}^2=0$$

et la condition donnée par la formule (6) devient caduque et s'énonce ainsi :

Condition 1 :
Lorsqu'une courbe BR représente une branche d'un cercle qui se trace comme une hyperbole, les points massiques extrémaux sont deux vecteurs lumière $\overrightarrow{m_0}$ et $\overrightarrow{m_2}$ représentant deux points M_0 et M_2 : la première coordonnée de $\overrightarrow{m_0}$ et de $\overrightarrow{m_2}$ est 1.

Considérons les deux points $M_0\,(-2;0;0)$ et $M_2\,(2;0;0)$. Nous choisissons $\omega_1=2$. Pour obtenir un poids de 1 pour O_5, il suffit de remplacer les deux vecteurs lumière $\overrightarrow{m_0}$ et $\overrightarrow{m_2}$ par les deux vecteurs lumière :

$$\overrightarrow{W_0}=\frac{1}{2}\overrightarrow{m_0}\qquad\text{et}\qquad\overrightarrow{W_2}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{m_2}$$

Puisque $\overrightarrow{O_3M_2}=-\overrightarrow{O_3M_0}$ et $O_3M_0=2$, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_5\sigma(t)}=&\frac{1}{2t\,(1-t)}\left(\frac{1-2t}{2}\overrightarrow{e_0}+(1-2t)\,\overrightarrow{e_\infty}\right)\\
+&\frac{1}{2t\,(1-t)}\,\frac{1-2t+2t^2}{2}\overrightarrow{O_3M_1}
\end{aligned}$$

et nous pouvons tracer quelques sphères, tableau 2 et figure 5. Rappelons, que pour $t=0$ (resp. $t=1$), nous obtenons le vecteur $\overrightarrow{W_0}$ (resp. $\overrightarrow{W_2}$) qui définit le point M_0 (resp. M_2).

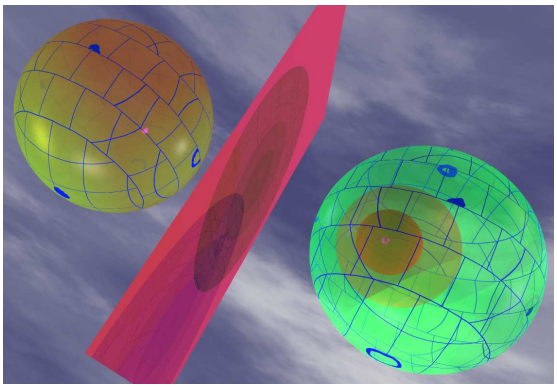

Figure 5: *Quelques sphères d'un faisceau de sphères à points limite modélisé par une branche connexe d'un cercle représenté par une courbe BR à points massiques de contrôle.*

3.2 Surface canal quadratique sur l'espace des sphères Λ^4

Les surfaces canal de degré 2 les plus connus sont les cylindres et les cônes de révolution. Ces deux surfaces sont des surfaces canal de deux manières : la première (resp. seconde) famille est constituée de sphères (resp. plans) orientés et leurs contributions à la surface enveloppe sont les cercles de courbure (resp. génératrices) de la quadrique. Notons que

Valeur	Point $\sigma(t)$	Sphère ou plan correspondant dans $\mathcal{E}_3$
$t=\frac{1}{10}$	$\left(\frac{20}{9};-\frac{41}{9};0;0;\frac{40}{9}\right)=\frac{1}{\frac{9}{20}}\left(1;-\frac{41}{20};0;0;2\right)$	Centre : $\left(-\frac{41}{20};0;0\right)$, rayon $\frac{9}{20}$
$t=\frac{1}{6}$	$\left(\frac{6}{5};-\frac{13}{5};0;0;\frac{12}{5}\right)=\frac{1}{\frac{5}{6}}\left(1;-\frac{13}{6};0;0;2\right)$	Centre : $\left(-\frac{13}{6};0;0\right)$, rayon $\frac{6}{5}$
$t=\frac{1}{4}$	$\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{3};0;0;\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{\frac{3}{2}}\left(1;-\frac{5}{2};0;0;2\right)$	Centre : $\left(-\frac{5}{2};0;0\right)$, rayon $\frac{3}{2}$
$t=\frac{1}{2}$	$(0;-1;0;0;0)$	Point $(0;0;0)$, vecteur normal $-\overrightarrow{e_1}$
$t=\frac{3}{4}$	$\left(-\frac{2}{3};-\frac{5}{3};0;0;-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{-\frac{3}{2}}\left(1;\frac{5}{2};0;0;2\right)$	Centre : $\left(\frac{5}{2};0;0\right)$, rayon $-\frac{3}{2}$

Table 2: *Sphères d'un faisceau de sphères à points limite, figure 5. Notons que nous avons préféré écrire $\frac{1}{\frac{9}{20}}$ plutôt que $\frac{20}{9}$ afin de faire aparaître explicitement le rayon $\frac{9}{20}$ de la sphère considérée.*

le sommet du cône (i.e. sphère de rayon nul) coupe le cône en deux demi-cônes : dans l'un, les rayons des sphères sont positifs tandis que dans l'autre, les rayons des sphères sont négatifs. Le tore est aussi enveloppe des sphères de deux manières : la contribution de la première (resp. seconde) famille de sphères à cette surface quartique est l'ensemble des méridiens (resp. parallèles).

Une cyclide de Dupin est définie comme image d'un tore, d'un cylindre de révolution ou d'une cône de révolution par une inversion. Ces trois dernières surfaces sont des cyclides de Dupin dégénérées [DMP93]. Toute cyclide de Dupin est une surface canal de deux manières i.e. est l'enveloppe de deux familles à un paramètre de sphères orientées.

Une cyclide de Dupin est déterminée par la section de Λ^4 par un 2-plan affine ne contenant pas O_5. Si ce plan est de type temps, la cyclide de Dupin a deux points singuliers et sa représentation sur Λ^4 est un cercle qui se trace comme une hyperbole [Dru13a, DGL+10].

3.2.1 Le cône de révolution

Un cône de révolution est une cyclide de Dupin dégénérée [DMP93] contenant deux points : son sommet S et le point à l'infini de $\mathcal{E}_3$. Ces points, dans l'espace de Lorentz, sont représentés respectivement par deux vecteurs lumière $\overrightarrow{m_S}$ et $\overrightarrow{e_\infty}$. Naturellement, le vecteur $\overrightarrow{e_\infty}$ est commun à toutes les représentations des cônes de révolution sur Λ^4. Ainsi, un cône de révolution est complètement déterminé par son sommet et une sphère et l'algorithme 1 permet de modéliser un cône de révolution par une courbe BR à points massiques de contrôle à partir de son sommet et d'une sphère.

La condition $\chi_{\mathsf{S}_1}(S)>0$ nous assure que le point S est en dehors de la boule bornée définie par la sphère S_1 (en fonction de l'orientation de S_1, cette partie bornée est soit l'intérieur, soit l'extérieur de S_1). Le centre Ω du cercle, section de Λ^4 par le $\mathcal{P}_1$ engendré par σ_1, $\overrightarrow{m_S}$ et $\overrightarrow{e_\infty}$, est défini par :

$$\overrightarrow{\sigma_1\Omega}=\alpha\overrightarrow{m_S}+\beta\overrightarrow{e_\infty}$$

Algorithme 1 Construction d'un cône de révolution à partir d'un point et d'une sphère.

Entrée : Un point S et une sphère S_1 tels que $\chi_{\mathsf{S}_1}(S)>0$

1. Détermination du vecteur lumière $\overrightarrow{m_S}$ représentant le sommet S
2. Détermination de σ_1, représentant la sphère S_1 sur Λ^4
3. Détermination de Ω, centre du cercle représentant le cône, par :
$$\overrightarrow{O_5\Omega}=\overrightarrow{O_5\sigma_1}-\frac{\overrightarrow{O_5\sigma_1}\cdot\overrightarrow{e_\infty}}{\overrightarrow{m_S}\cdot\overrightarrow{e_\infty}}\overrightarrow{m_S}-\frac{\overrightarrow{O_5\sigma_1}\cdot\overrightarrow{m_S}}{\overrightarrow{m_S}\cdot\overrightarrow{e_\infty}}\overrightarrow{e_\infty} \quad (25)$$
4. Détermination du poids ω_1, solution de :
$$\omega_1^2=\frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{m_S}\cdot\overrightarrow{e_\infty}}{1-\overrightarrow{O_5\Omega}^2} \quad (26)$$
5. Détermination de la courbe BR γ de points massiques de contrôle $(\overrightarrow{m_S};0)$, $(\Omega;\omega_1)$ et $(\overrightarrow{e_\infty};0)$ modélisant l'une des branches du cercle.

Sortie : Une famille à un paramètre de sphères modélisant un cône de révolution modélisée par une courbe BR à points massiques de contrôle $(\overrightarrow{m_S};0)$, $(\Omega;\omega_1)$ et $(\overrightarrow{e_\infty};0)$.

où α et β sont à déterminer. Le point $\mathbf{\Omega}$ est le projeté orthogonal ¶ de O_5 sur $\mathcal{P}_1$ ssi nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{O_5\mathbf{\Omega}}\centerdot\overrightarrow{m_S} & = & 0 \\ \overrightarrow{O_5\mathbf{\Omega}}\centerdot\overrightarrow{e_\infty} & = & 0 \end{array}\right. \tag{27}$$

Or, nous avons :

$$\overrightarrow{O_5\mathbf{\Omega}} = \overrightarrow{O_5\sigma_1} + \alpha\,\overrightarrow{m_S} + \beta\,\overrightarrow{e_\infty}$$

et le système (27) est équivalent au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{O_5\sigma_1}\centerdot\overrightarrow{m_S} + \beta\,\overrightarrow{e_\infty}\centerdot\overrightarrow{m_S} & = & 0 \\ \overrightarrow{O_5\sigma_1}\centerdot\overrightarrow{e_\infty} + \alpha\,\overrightarrow{m_S}\centerdot\overrightarrow{e_\infty} & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui permet de déterminer α et β et nous obtenons la formule (25).

La courbe BR γ, de points massiques de contrôle $(\overrightarrow{m_0};0)$, $(\mathbf{\Omega};\omega_1)$ et $(\overrightarrow{m_2};0)$, est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{O_5\gamma(t)} = & \dfrac{1}{\omega_1 B_1(t)}\left(B_0(t)\,\overrightarrow{m_S} + B_2(t)\,\overrightarrow{e_\infty}\right) \\ + & \dfrac{1}{\omega_1 B_1(t)}\omega_1 B_1(t)\,\overrightarrow{O_5\mathbf{\Omega}} \end{array} \tag{28}$$

et pour $t=\frac{1}{2}$, nous obtenons :

$$\overrightarrow{O_5\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{\omega_1}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{m_S} + \frac{1}{2}\omega_1\overrightarrow{O_5\mathbf{\Omega}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{e_\infty}\right) \tag{29}$$

qui se simplifie en :

$$\overrightarrow{O_5\gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2\,\omega_1}\left(\overrightarrow{m_S} + 2\omega_1\overrightarrow{O_5\mathbf{\Omega}} + \overrightarrow{e_\infty}\right) \tag{30}$$

Le point $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est sur Λ^4 ssi :

$$\overrightarrow{O_5\gamma\left(\frac{1}{2}\right)}^2 = 1$$

ssi :

$$4\omega_1^2 = \left(\overrightarrow{m_S} + 2\omega_1\overrightarrow{O_5\mathbf{\Omega}} + \overrightarrow{e_\infty}\right)^2$$

qui est équivalent à :

$$4\omega_1^2 = 4\omega_1^2\overrightarrow{O_5\mathbf{\Omega}}^2 + 2\overrightarrow{m_S}\centerdot\overrightarrow{e_\infty}$$

ce qui montre que ω_1 est solution de l'équation (26) et chaque solution ω_1 nous donne un demi-cône de sommet S puisque $\overrightarrow{\gamma(0)} = \overrightarrow{m_S}$.

Les figures 6 et 7 montre un demi-cône de révolution défini par son sommet $S(5;-1;-1)$, son point à l'infini et la sphère initiale S_1, en vert, de centre $O_1(5;1;2)$ et de rayon 2. Dans l'espace de Lorentz, le sommet est représenté par le vecteur lumière $\overrightarrow{m_s}\left(1;-5;-1;-1;\frac{27}{2}\right)$ et nous rappelons qu'il est essentiel que la première coordonnée vaille 1. La sphère S_1 est représentée par le point $\sigma_1\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{2};1;\frac{13}{2}\right)$. Le centre du cercle représentant le cône est $\mathbf{\Omega}\left(0;5;1;\frac{3}{2};-\frac{55}{2}\right)$ et le poids est $\omega_1 = \frac{\sqrt{218}}{109}$.

¶. Pour la forme quadratique de Lorentz.

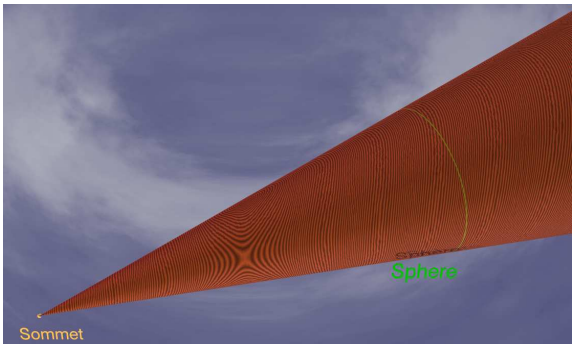

Figure 6: *Cône de révolution défini par son sommet S et la sphère initiale S_1, représenté, sur Λ^4, par une branche de cercle modélisé par une courbe BR à points massiques de contrôle.*

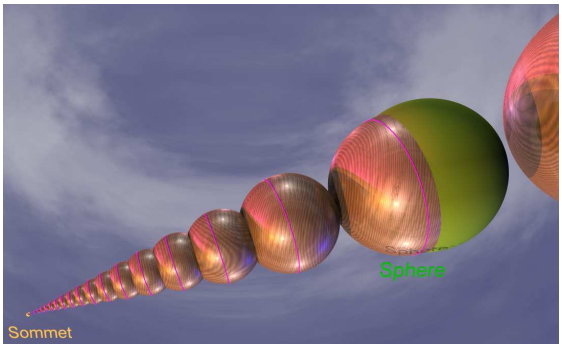

Figure 7: *Quelques sphères et cercles caractéristiques du cône de révolution de la figure 6, obtenus pour quelques valeurs de t de la courbe BR.*

3.2.2 Les cyclides de Dupin à croissant non nul

Une cyclide de Dupin à croissant non nul est l'image, par inversion, d'un tore croisé ou d'un cône de révolution [Gar07], si le pôle n'est pas sur la surface originelle, nous obtenons une cyclide de Dupin quartique, sinon, nous obtenons une cyclide de Dupin cubique. Dans tous les cas, une telle cyclide de Dupin est l'enveloppe de deux familles de sphères à un paramètre, nous pouvons la représenter dans l'espace des sphères par les courbes correspondantes à ces deux familles [Dru13a] : deux cercles qui se tracent l'un comme une ellipse et l'autre comme une hyperbole. Une cyclide de Dupin cubique n'est pas bornée, possède deux droites de courbure, nous allons illustrer la suite de l'article

en utilisant des cyclides de Dupin quartiques, qui sont bornées et les plus utilisées.

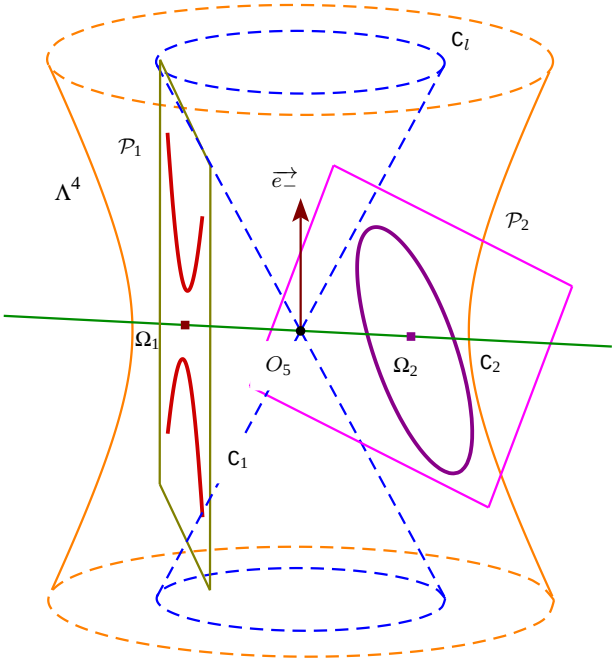

Figure 8: *Une cyclide de Dupin à deux points singuliers représentée sur Λ^4 par un cercle non connexe (qui se trace comme une hyperbole) et un cercle connexe (qui se trace comme une ellipse).*

La figure 9 montre des cercles caractéristiques d'une cyclide de Dupin à croissant externe non nul en changeant le vecteur lumière dans l'algorithme 1. Le point M_1 et la sphère sont ceux de la figure 6, le vecteur $\overrightarrow{e_\infty}$ a été remplacé par le vecteur $\overrightarrow{m_2}\,(1;-5;-5;10;75)$ qui représente le point $M_2\,(-5;-5;10)$. Nous avons $\omega_1 = 137\,\frac{\sqrt{109}}{1526}$.

La figure 10 montre toute la cyclide de Dupin à croissant externe non nul.

4 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons utilisé des courbes de Bézier rationnelles quadratiques, à points massiques de contrôle, pour représenter, dans l'espace des sphères orientées, des familles à un paramètre de sphères orientées dont deux sont des points. Dans les trois cas (faisceau de sphères à point limites, cône de révolution et cyclide de Dupin à croissant non nul), nous obtenons sur l'espace des sphères un cercle qui se trace comme une hyperbole et les points de ces familles sont déterminés directement par les asymptotes à ce cercle. Ces représentations permettent de faciliter la détermination des sphères principales d'une cyclide de Dupin ou la construction d'un cône de révolution à partir d'une sphère

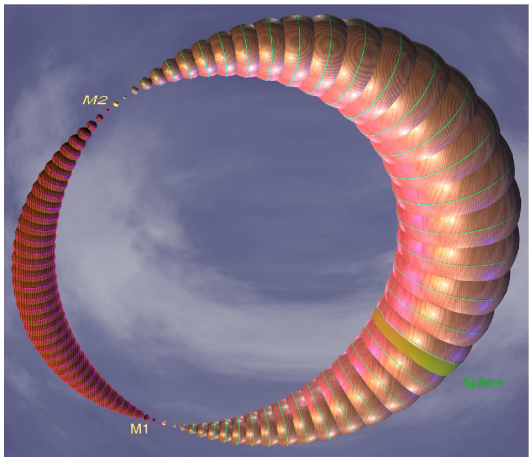

Figure 9: *Des cercles caractéristiques d'une cyclide de Dupin à croissant externe non nul en remplaçant le vecteur lumière $\overrightarrow{e_\infty}$ dans l'algorithme 1 par une autre vecteur lumière $\overrightarrow{m_2}$ représentant un point M_2 de $\mathcal{E}_3$.*

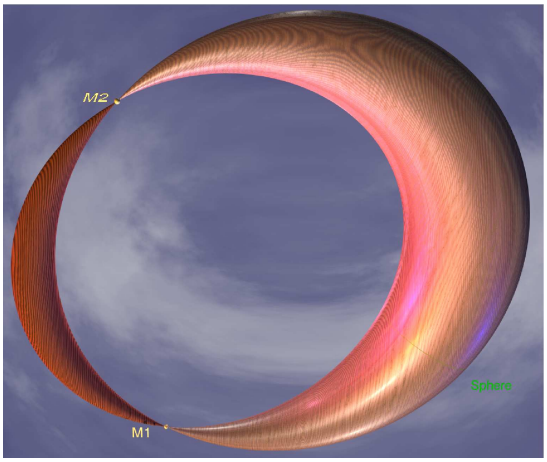

Figure 10: *Cyclide de Dupin à croissant externe non nul en remplaçant le vecteur lumière $\overrightarrow{e_\infty}$ dans l'algorithme 1 par une autre vecteur lumière $\overrightarrow{m_2}$ représentant un point M_2 de $\mathcal{E}_3$*

et du sommet (le point à l'infini appartient à tous les cônes de révolution) ou de cyclides de Dupin à croissant non nul.

Nous comptons obtenir des représentations analogues dans l'espace des sphères, en utilisant des courbes de Bézier à points massiques de contrôle, pour représenter des cylindres de révolution et des cyclides de Dupin à croissant nul.

Par la suite, nous envisageons d'utiliser une inversion idoine afin de transformer l'espace des sphères Λ^4 en hyperplan, tracer une courbe de Bézier dans cet hyperplan, puis

par cette même inversion, obtenir une courbe de Bézier sur l'espace des sphères représentant une surface canal i.e. une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ sur Λ^4 telle que tous les vecteurs dérivés soient de type espace et tel que tous les vecteurs géodésiques soient de type temps [LS11]. Nous devons nous attelé à ce dernier problème c'est-à-dire quelles sont les conditions sur la courbe de l'hyperplan, pour que la courbe obtenue sur l'espace des sphères vérifient bien ces deux conditions. Nous envisageons aussi de prolonger ce travail aux surfaces à squelette curviligne. Ainsi, à partir d'un nombre fini de sphères, nous pouvons obtenir un squelette continu par interpolation de points dans l'espace des sphères ce qui simplifie le problème : la manipulation d'une courbe est plus aisée que la manipulation d'une surface.

Références

[BCR07] C. Beccari, G. Casciola, and L. Romani. A non-stationary uniform tension controlled interpolating 4-point scheme reproducing conics. *Comput. Aided Geom. Des.*, 24(1) :1–9, 2007.

[Ber78] M. Berger. *Géométrie 2*, volume 5. Cedic-Nathan, 2ème edition, 1978.

[BG92] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. PUF, 2ème edition, avril 1992.

[BG14] J. P. Bécar and L. Garnier. Points massiques, courbes de bézier quadratiques et coniques : un état de l'art. In *G.T.M.G. 2014*, Lyon, 26 - 27 mars 2014. LIRIS. http ://liris.cnrs.fr/ gtmg2014/actes_gtmg.tar.gz.

[Béc97] J. P. Bécar. *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.

[Béz86] P. Bézier. *Courbe et surface*, volume 4. Hermès, Paris, 2ème edition, Octobre 1986.

[Cas85] P. De Casteljau. *Mathématiques et CAO. Volume 2 : formes à pôles*. Hermes, 1985.

[Cec92] T.E. Cecil. *Lie sphere geometry*. Universitext, 1992.

[DFGL14] L. Druoton, L. Fuchs, L. Garnier, and R. Langevin. The Non-Degenerate Dupin Cyclides in the Space of Spheres Using Geometric Algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24(2) :515–532, June 2014.

[DFM07] Leo Dorst, Daniel Fontijne, and Stephen Mann. *Geometric Algebra for Computer Science : An Object-Oriented Approach to Geometry*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 2007.

[DGL+10] L. Druoton, L. Garnier, R. Langevin, F. Sulpice, and R. Besnard. Les cyclides de dupin et l'espace des sphères. *AFIG 2010*, pages 147–155, 2010.

[DGL13] L. Druoton, L. Garnier, and R. Langevin. Iterative construction of Dupin cyclide characteristic circles using non-stationary Iterated Function Systems (IFS). *Computer-Aided Design*, 45(2) :568–573, February 2013. Solid and Physical Modeling 2012, Dijon.

[DMP93] D. Dutta, R. R. Martin, and M. J. Pratt. Cyclides in surface and solid modeling. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(1) :53–59, January 1993.

[Dru13a] L. Druoton. *Recollements de morceaux de cyclides de Dupin pour la modélisation et la reconstruction 3D : étude dans l'espace des sphères*. PhD thesis, Université de Bourgogne, Dijon, France, Avril 2013.

[Dru13b] L. Garnier & L. Druoton. Inversion de coniques à centre vue comme des cercles. In *Actes of the* 26^{emes} *journées AFIG*, page Session Géométrie, Limoges, France, Novembre 2013.

[FJ89] J. C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes et surfaces rationnelles*, volume RMA 12. Masson, 1989.

[Gar07] L. Garnier. *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*. Ellipses, 2007. ISBN : 978-2-7298-3412-8.

[Gar10] L. Garnier. Constructions euclidiennes, dans le plan affine, d'arcs de coniques propres par des I.F.S. affines non stationnaires. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*, 4(1) :21–56, 2010.

[GDL12] L. Garnier, L. Druoton, and R. Langevin. Subdivisions itératives d'arcs d'ellipses et d'hyperboles et application à la visualisation de cyclides de Dupin. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*, 6(2) :1–36, 2012.

[Gol02] Ron Goldman. On the algebraic and geometric foundations of computer graphics. *ACM Trans. Graph.*, 21(1) :52–86, January 2002.

[Gol04] R. Goldman. The Fractal Nature of Bézier Curves. *Geometric Modeling and Processing*, 0 :3, 2004.

[HJ03] U. Hertrich-Jeromin. Introduction to Möbius differential geometry. *London Mat. Soc. Lecture note, Cambridge University Press*, xii :300, 2003.

[Ing11] B. Ingrao. *Coniques projectives, affines et métriques*. Calvage et Mounet, avril 2011. ISBN-13 : 978-2916352121.

[LO05] R. Langevin and J. O'Hara. Conformally invariant energies of knots. *J. Institut Math. Jussieu*, 4 :219–280, 2005.

[LO08] R. Langevin and J. O'Hara. Conformal arc-length via osculating circles. *Rapport de recherche IMB*, 531, janv 2008.

[LS11] R. Langevin and G. Solanes. The geometry of canal surfaces and the length of curves in de sitter space. *Advances in Geometry*, 11(4) :585–601, November 2011.

[LSD+14] R. Langevin, J. C. Sifre, L. Druoton, L. Garnier, and M.Paluzsny. Finding a cyclide given three contact

conditions. *Computational and Applied Mathematics*, 2014. ISSN : 0101-8205.

[LW08] R. Langevin and P.G. Walczak. Conformal geometry of foliations. *Geom Dedicata*, 132(5) :135–178, 2008.

[MWW01] G. Morin, J. D. Warren, and H. Weimer. A subdivision scheme for surfaces of revolution. *Computer Aided Geometric Design*, 18(5) :483–502, 2001.

[PB98] M. Paluszny and W. Boehm. General cyclides. *Computer Aided Geometric Design*, 15(7) :699–710, 1998.

[Pra90] M. J. Pratt. Cyclides in computer aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design*, 7(1-4) :221–242, 1990.

[Zaï98] C. E. Zaïr. *Formes fractales à pôles basées sur une généralisation des I.F.S.* PhD thesis, Université Claude Bernard - LYON - 1, 1998.