HAL
open science

Points massiques, courbes de Bézier quadratiques et coniques : un état de l'art

Jean-Paul Becar, Lionel Garnier

To cite this version:

Jean-Paul Becar, Lionel Garnier. Points massiques, courbes de Bézier quadratiques et coniques : un état de l'art. GTMG 2014, Mar 2014, LYON, France. hal-02516049

HAL Id: hal-02516049

https://uphf.hal.science/hal-02516049v1

Submitted on 23 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Points massiques, courbes de Bézier quadratiques et coniques : un état de l'art

Jean-Paul BÉCAR[1], Lionel GARNIER[2]

[1]LAMAV-CGAO, CNRS 2956, Le Mont-Houy, 59313 Valenciennes cedex 9, jean-paul.becar@univ-valenciennes.fr
[2] LE2i, UMR CNRS 6306, Université de Bourgogne, B.P. 47870 , 21 078 Dijon Cedex, France, lionel.garnier@u-bourgogne.fr

Résumé
Les courbes de Bézier quadratiques jouent un rôle fondamental pour la modélisation d'arc de coniques. L'utilisation de points massiques permet de modéliser des demi-coniques dans le plan affine euclidien. A partir d'une courbe de Bézier de degré 2 donnée, il est possible de déterminer la nature de la conique définie par cette courbe. De plus, il est possible de changer de forme quadratique afin de manipuler une conique propre à centre comme un cercle unitaire.
It is well known quadratic Bézier curves define conics. The use of massic points permits to define a semi-conic in the Euclidean plane. Moreover, from a given quadratic Bézier curve, we can determine the properties of the underlying conic. Moreover, the choice of an adequat non-degenerate indefinite quadratic form permits to see the non-degenerate central conic as an unitary circle.

Mots-clés : Points massiques, coniques, courbes de Bézier rationnelles quadratiques.

1 Introduction

Il est connu que les courbes de Bézier de degré 2 jouent un très grand rôle en modélisation géométrique puisqu'elles permettent de représenter des arcs de coniques [Béz86, Cas85, Gar07, Béc97]. Une telle courbe peut être vue comme le lieu de barycentres de points pondérés : le poids est le produit d'un nombre avec un polynôme de Bernstein. Cependant, la modélisation d'arcs de paraboles ou d'hyperboles pose problème puisque ces dernières ne sont pas bornées. Une solution élégante consiste à regrouper dans le même espace, celui des points massiques [FJ89], l'ensemble des points pondérés et des vecteurs que nous affectons d'un poids nul. Ainsi, nous pouvons généraliser la notion de courbes de Bézier. De plus, en se donnant une courbe de Bézier rationnelle quadratique, grâce à des représentations adéquates, nous pouvons déterminer les éléments caractéristiques de la conique définie par cette courbe de Bézier [Béc97].

L'article est composé comme suit : après un rappel sur les points massiques, nous donnons les conditions permettant d'obtenir des arcs de cercles. Dans le paragraphe suivant, nous déterminons les paramètres d'une conique modélisée par une telle courbe. Avant de conclure, nous montrons comment il est possible de représenter des demi-coniques à centres en les considérant comme des cercles non euclidiens.

Dans ce document, $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ désigne un repère orthonormé direct pour le plan euclidien orienté usuel.

2 Points massiques

L'ensemble des vecteurs du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et des points pondérés du plan affine $\mathcal{P}$ sont regroupés dans l'espace $\widetilde{\mathcal{P}}$ défini par :

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \left(\mathcal{P} \times \mathbb{R}^*\right) \cup \left(\overrightarrow{\mathcal{P}} \times \{0\}\right) \tag{1}$$

et il est possible d'identifier $\widetilde{\mathcal{P}}$ à $\overrightarrow{\mathcal{E}_2} = \overrightarrow{\mathcal{P}} \oplus \overrightarrow{\mathbb{R}}$. L'idée est de considérer le plan affine $\mathcal{P}$ comme un hyperplan de $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$ d'équation $\omega = 1$: la coordonnée supplémentaire représente le poids du point pondéré. Un point massique est soit un point pondéré du plan $\mathcal{P}$, soit un vecteur du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ à qui nous affectons un poids nul.

Ainsi le barycentre d'une famille de points pondérés $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$ dont la somme des poids est nul n'existe pas

et le vecteur :

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i \in I} \omega_i \, \overrightarrow{MA_i}$$

est indépendant du point M. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ représente alors le point massique de masse 0. Il est donc naturel de regrouper dans un même espace les points pondérés de $\mathcal{P}$ et les vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, identifié à l'hyperplan de $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$ d'équation $\omega = 0$. Cette notion est aussi connue sous le nom d'espace universel. Nous pouvons ainsi généraliser la notion de barycentre aux familles des points pondérés dont la somme des poids est nulle.

Cela revient à établir une bijection entre $\widetilde{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$ suivie d'une projection sur $\mathcal{P}$ ou $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ selon le cas. L'espace $\widetilde{\mathcal{P}}$ permet de garder notre structure euclidienne ou autre sur le plan affine $\mathcal{P}$ et sur le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Etant donné un point M du plan affine, tous les points de $\widetilde{P}$ situées sur la droite $\left(O_{\overrightarrow{\mathcal{E}_2}} M\right)$, privée de $O_{\overrightarrow{\mathcal{E}_2}}$, ont même projection sur le plan affine et sont donc notés avec la même lettre M. Si un point M a pour coordonnées $(x;y)$, et si α est un réel non nul, nous obtenons, dans le cadre de la théorie des points massiques, le point pondéré de coordonnées $(x;y;\alpha)$ tandis que les coordonnées homogènes de ce point seraient $(\alpha x;\alpha y;\alpha)$.

Afin de pouvoir manipuler les coordonnées des points ou des vecteurs, nous définissons, sur l'espace $\widetilde{\mathcal{P}}$, les additions, notées $\oplus$, de la façon suivante :

- $(M;\omega) \oplus (N;-\omega) = \left(\omega \ \overrightarrow{NM};0\right)$
- $\omega + \mu \neq 0 \Longrightarrow$
  $(M;\omega) \oplus (N;\mu) = \left(\texttt{bar}\left\{(M;\omega);(N;\mu)\right\};\omega+\mu\right)$
  où $\texttt{bar}\left\{(M;\omega);(N;\mu)\right\}$ est le barycentre des points $(M;\omega)$ et $(N;\mu)$;
- $(\overrightarrow{u};0) \oplus (\overrightarrow{v};0) = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v};0)$
- $\omega \neq 0 \Longrightarrow (M;\omega) \oplus (\overrightarrow{u};0) = \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega}\overrightarrow{u}}(M);\omega\right)$ où $\mathcal{T}_{\overrightarrow{w}}$ est la translation de $\mathcal{P}$ de vecteur $\overrightarrow{w}$.

De même, sur l'espace $\widetilde{\mathcal{P}}$, nous définissons la multiplication par un scalaire, notée $\odot$, de la façon suivante :

- $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \alpha \odot (M;\omega) = (M;\alpha\,\omega)$
- $\omega \neq 0 \Longrightarrow 0 \odot (M;\omega) = \left(\overrightarrow{0};0\right)$
- $\alpha \odot (\overrightarrow{u};0) = (\alpha\overrightarrow{u};0)$

La figure 1 donne une interprétation géométrique de la somme $\oplus$ et du produit $\odot$ dans l'hyperplan $\mathcal{H}_y$ d'équation $y = 0$ de $\widetilde{\mathcal{P}}$ et permet de retrouver l'associativité du barycentre. En effet, à partir de la relation :

$$(G_1;3) = (M;2) \oplus (N;1)$$

nous avons :

$$(G_1;3) \oplus (N;1) = (M;2) \oplus (N;2) = (G_2;4)$$

qui définit le point $G_2 \equiv (G_2;1)$ comme intersection de la droite passant par les points $O_{\overrightarrow{\mathcal{E}_2}}$ et $(G_2;4)$ avec le plan $\mathcal{P}$. $(G_2;1)$ est le milieu du segment défini par $N \equiv (N;1)$ d'une part et $M \equiv (M;1)$ d'autre part.

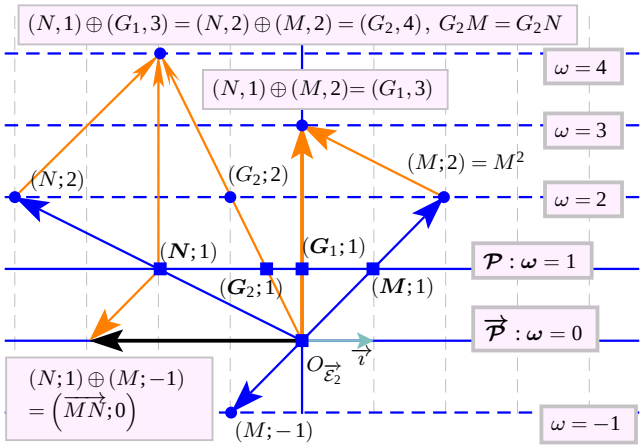


Figure 1: *Interprétation géométrique de la somme $\oplus$ et du produit $\odot$ dans l'hyperplan d'équation $y = 0$ de $\widetilde{\mathcal{P}}$.*

Toujours dans $\mathcal{H}_y$, $(M;2) \oplus \left(\overrightarrow{MN};0\right)$ se traduit, sur la droite d'équation $\omega = 2$, par :

$$\overrightarrow{M^2G_2^2} = \overrightarrow{MN}$$

tandis que sur la droite d'équation $\omega = 1$, nous avons :

$$\overrightarrow{MG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$$

Dans $\widetilde{\mathcal{P}}$, la somme $(M;\omega_0) \oplus (\overrightarrow{u};0)$ traduit une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ dans l'hyperplan d'équation $\omega = \omega_0$, qui via l'homothétie $\overrightarrow{\mathcal{H}_{\frac{1}{\omega_0}}}$ se traduit dans le plan affine $\mathcal{P}$ par une translation de vecteur $\dfrac{1}{\omega_0}\overrightarrow{u}$. De plus, nous avons :

$$\begin{aligned}(M;1) \oplus (N;1) &= (M;2) \oplus (M;-1) \oplus (N;1) \\ &= (M;2) \oplus \left(\overrightarrow{MN};0\right) \\ &= (G_2;2)\end{aligned}$$

et nous généralisons l'associativité du barycentre aux vecteurs. Pour des compléments sur cet espace, le lecteur peut consulter les ouvrages de messieurs Fiorot et Jeannin [FJ89, FJ92].

2.1 Courbes de Bézier quadratiques dans $\widetilde{\mathcal{P}}$

Rappelons que les polynômes de Bernstein de degré 2 sont définis sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$B_0(t) = (1-t)^2, \; B_1(t) = 2\,t\,(1-t), \; B_2(t) = t^2 \qquad (2)$$

Les points de contrôle P_0, P_1 et P_2 d'une courbe de Bézier sont des points massiques (i.e. des points pondérés de $\mathcal{P}$ ou des vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$) non alignés c'est-à-dire :

- si $\prod_{i=0}^{2} \omega_i \neq 0$, il s'agit de la notion usuelle ;
- si $\omega_i = 0$ et les deux autres poids sont non nuls, le vecteur $\overrightarrow{P_i}$ n'est pas un vecteur directeur de la droite engendrée par les deux autres points ;
- si $\omega_i = 0$ et $\omega_j = 0$, avec $i \neq j$, les vecteurs $\overrightarrow{P_i}$ et $\overrightarrow{P_j}$ ne sont pas colinéaires.

Définition 1 : Courbe BR dans $\widetilde{\mathcal{P}}$
Soit ω_0, ω_1 et ω_2 trois réels non nuls.
Soit $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$ trois éléments de $\widetilde{\mathcal{P}}$.
Soit I (resp. J) l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls (resp. nuls).
Soit la fonction ω_f définie sur $[0;1]$ par :

$$\omega_f(t) = \sum_{i\in I} \omega_i \times B_i(t) \tag{3}$$

Un point massique $(M;\omega)$ ou $(\overrightarrow{u};0)$ appartient à la courbe de Bézier quadratique de points massiques de contrôle $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$, s'il existe un réel t_0 de $[0;1]$ tel que :

- si $\omega_f(t_0) \neq 0$ alors, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} \overrightarrow{OM} = & \dfrac{1}{\omega_f(t_0)}\left(\sum_{i\in I} B_i(t_0)\,\omega_i\,\overrightarrow{OP_i}\right) \\ + & \dfrac{1}{\omega_f(t_0)}\left(\sum_{i\in J} B_i(t_0)\,\overrightarrow{P_i}\right) \\ \omega = & \omega_f(t_0) \end{array}\right. \tag{4}$$

- si $\omega_f(t_0) = 0$ alors, nous avons :

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i\in I} \omega_i B_i(t_0)\,\overrightarrow{OP_i} + \sum_{i\in J} B_i(t_0)\,\overrightarrow{P_i} \tag{5}$$

Si $J = \emptyset$, le discriminant réduit du dénominateur, formule (3), est :

$$\Delta' = \omega_1^2 - \omega_2\,\omega_0 \tag{6}$$

d'où le résultat suivant :

- ⋆ si $\omega_1^2 - \omega_2\,\omega_0 = 0$ alors le dénominateur s'annule une et une seule fois et la conique est une parabole ;
- ⋆ si $\omega_1^2 - \omega_2\,\omega_0 > 0$ alors le dénominateur s'annule deux fois et la conique est une hyperbole ;
- ⋆ si $\omega_1^2 - \omega_2\,\omega_0 < 0$ alors le dénominateur ne s'annule pas et la conique est une ellipse.

Le résultat ne change pas si $J \neq \emptyset$, le lecteur intéressé peut se reporter à la proposition 5.1.6 de [FJ89]. Introduisons la notation suivante :

Notation 1 :
La notation $BR\{(P_0;\omega_0);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}$ désigne une courbe BR de points massiques de contrôle $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$.
La notation $\overline{BR\{(P_0;\omega_0);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}}$ désigne la conique propre contenant l'arc de courbe définie par $BR\{(P_0;\omega_0);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}$.

La courbe BR étant définie à partir de vecteurs et de points pondérés dont la somme des poids vaut 1, elle ne dépend pas du point O choisi.

En utilisant les additions et multiplications définies dans le cadre du formalisme des points massiques, dans le cas où $(P;\omega)$ est un point de la courbe BR vérifiant $\omega \neq 0$, nous aurions la notation suivante :

$$\begin{array}{rcl} (P;1) & = & \dfrac{1}{\sum_{i\in I} \omega_i \times B_i(t_0)} \odot \left(\overset{\oplus}{\sum_{i\in I}} B_i(t_0) \odot (P_i;\omega_i)\right) \\ & \oplus & \dfrac{1}{\sum_{i\in I} \omega_i \times B_i(t_0)} \odot \left(\overset{\oplus}{\sum_{i\in J}} B_i(t_0) \odot \left(\overrightarrow{P_i};0\right)\right) \end{array} \tag{7}$$

où $\overset{\oplus}{\sum}$ désigne une somme de $\oplus$.

Le point massique $(\overrightarrow{u};0)$ s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} (\overrightarrow{u};0) & = & \overset{\oplus}{\sum_{i\in I}} B_i(t_0) \odot \left(\overrightarrow{\Omega P_i};0\right) \\ & \oplus & \left(\overset{\oplus}{\sum_{i\in J}} B_i(t_0) \odot \left(\overrightarrow{P_i};0\right)\right) \end{array} \tag{8}$$

Si $J = \emptyset$, il est connu que la courbe de Bézier ne change pas si tous les poids des points de contrôle sont multipliés par le même nombre non nul. Ce n'est plus le cas lorsque $J \neq \emptyset$ et nous pouvons énoncer :

Lemme 1 :
Soit $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$ trois éléments de $\widetilde{\mathcal{P}}$.
Soit I (resp. J) l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls (resp. nuls).
Soit λ un réel non nul. Alors, si $\sum_{i\in I} \omega_i \times B_i(t_0)$ est non nul, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} BR\left\{(P_i;\omega_i)_{i\in I};\left(\overrightarrow{P_j};0\right)_{j\in J}\right\} & = \\ BR\left\{(P_i;\lambda\,\omega_i)_{i\in I};\left(\lambda\,\overrightarrow{P_j};0\right)_{j\in J}\right\} \end{array} \tag{9}$$

Démonstration : Laissée au lecteurs. ■

Pour finir ce paragraphe, nous supposons $\omega_0 \times \omega_2 \neq 0$ et deux cas sont à distinguer :

- Si $\omega_1 \neq 0$, le point P_1 est à l'intersection des tangentes à la courbe en P_0 et P_2 ;
- Si $\omega_1 = 0$, la tangente à la courbe en P_0 (resp. P_2) est la droite, de vecteur directeur $\overrightarrow{P_1}$ passant par P_0 (resp. P_2). De plus, d'après la formule (4), le point $M(t)$ appartient à la courbe si et seulement si :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \frac{1}{\omega_0 B_0(t) + \omega_2 B_2(t)} \overrightarrow{u_0} \qquad (10)$$

où nous avons :

$$\overrightarrow{u_0} = \omega_0 B_0(t) \overrightarrow{OP_0} + \omega_2 B_2(t) \overrightarrow{OP_2} + B_1(t) \overrightarrow{P_1}$$

d'une part et la condition :

$$\omega_0 B_0(t) + \omega_2 B_2(t) \neq 0$$

d'autre part. Cette dernière est toujours vérifiée si ω_0 et ω_2 sont de même signe. Dans le cas contraire, en supposant $\omega_0 B_0(t) > 0$, le vecteur $\overrightarrow{u} = \omega_0 B_0(t) \overrightarrow{P_2P_0} + B_1(t) \overrightarrow{P_1}$ est un point massique de la courbe.

3 Modélisation d'arcs de cercles

L'utilisation des courbes de Bézier rationnelles quadratiques définies à partir de points massiques permet de tracer des demi-cercles.

Théorème 1 : Demi-cercle
Soit $\mathtt{C}$ le cercle de centre O_0 et de rayon R .
Soit P_0 et P_2 deux points diamétralement opposés de $\mathtt{C}$.
Soit ω_0 et ω_2 deux nombres réels non nuls et de même signe.

- Si P_0 et P_2 ne sont pas diamétralement opposés.
  Soit I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$. Soit le point P_1 donné par :

$$\overrightarrow{I_1P_1} = t_1 \overrightarrow{O_0I_1} \quad \text{avec} \quad t_1 = \frac{\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{I_1P_0}}{\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{O_0I_1}} \qquad (11)$$

  $BR\{(P_0;\omega_0);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}$ est un arc de cercle si et seulement si :

$$\omega_1^2 = \omega_0\, \omega_2\, \cos^2\left(\widehat{\overrightarrow{P_0P_1};\overrightarrow{P_0P_2}}\right) \qquad (12)$$

- Si P_0 et P_2 sont diamétralement opposés.
  Soit $\overrightarrow{P_1}$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{P_0P_2}$.
  $BR\left\{(P_0;\omega_0);\left(\overrightarrow{P_1};0\right);(P_2;\omega_2)\right\}$ est un demi-cercle de $\mathtt{C}$ si et seulement si :

$$\omega_0\, \omega_2\, \overrightarrow{P_0P_2}^2 = 4\, \overrightarrow{P_1}^2 \qquad (13)$$

Démonstration du théorème : voir [Gar07] pour la formule (11) et la proposition 5.4.2 de [FJ89] pour le reste. ■

Notons qu'à partir des formules (12) et (13), nous avons $\omega_1^2 < \omega_0\, \omega_2$.

Soit $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan affine euclidien $\widetilde{\mathcal{P}}$. Considérons les points $P_0 = (1;0)$ et $P_2 = (-1;0)$. La figure 2 montre γ_3, courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $(P_0;1)$, $(-\overrightarrow{\jmath};0)$ et $(P_2;1)$, modélisant le demi-cercle de centre O et de rayon 1 situé dans les deux derniers quadrants. Notons, en utilisant le lemme 1 que ce demi-cercle peut être modélisé par la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle $\left(P_0;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\jmath};0\right)$ et $\left(P_2;\frac{1}{2}\right)$.

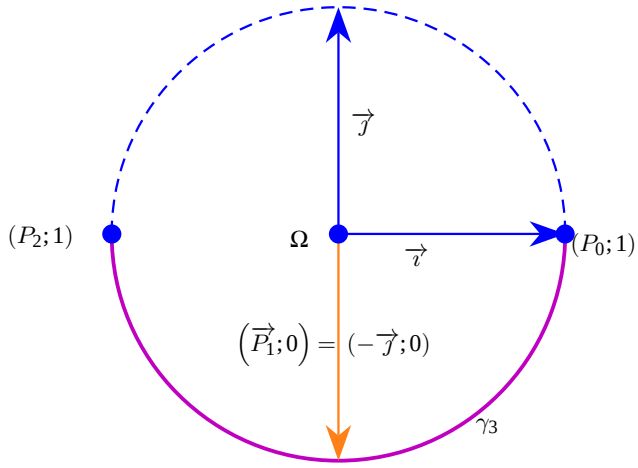


Figure 2: *Demi-cercle modélisé par une courbe de Bézier rationnelle quadratique γ_3 définie par les points massiques de contrôle $(P_0;1)$, $(-\overrightarrow{\jmath};0)$ et $(P_2;1)$.*

4 Détermination des paramètres des coniques

Dans ce paragraphe, à partir d'une courbe de Bézier quadratique à points massiques de contrôle, nous déterminons les paramètres de la conique sous-jacente à cette courbe. Pour ce faire, nous allons effectuer des changements de paramétrisations ce qui va induire une modification des points massiques de contrôle.

4.1 Changement de paramètre homographique

Théorème 2 : Changement de paramètre homographique
Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$ de support la conique $\mathtt{C}$. Soit les réels a, b, c et d vérifiant :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (14)$$

Soit h définie par :

$$h : \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ u & \longmapsto & \dfrac{a(1-u)+b\,u}{c(1-u)+d\,u} \end{array} \qquad (15)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(Q_0;\varpi_0)$, $(Q_1;\varpi_1)$ et $(Q_2;\varpi_2)$ de support la conique C avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (Q_0;\varpi_0) = & & (c-a)^2 \odot (P_0;\omega_0) \\ & \oplus & 2\,a\,(c-a) \odot (P_1;\omega_1) \\ & \oplus & a^2 \odot (P_2;\omega_2) \\ (Q_1;\varpi_1) = & & (c-a)\,(d-b) \odot (P_0;\omega_0) \\ & \oplus & (b\,c - 2\,a\,b + a\,d) \odot (P_1;\omega_1) \\ & \oplus & a\,b \odot (P_2;\omega_2) \\ (Q_2;\varpi_2) = & & (d-b)^2 \odot (P_0;\omega_0) \\ & \oplus & 2\,b\,(d-b) \odot (P_1;\omega_1) \\ & \oplus & b^2 \odot (P_2;\omega_2) \end{array}\right. \tag{16}$$

Démonstration : [Béc97] ■

Notons le cas particulier :

Corollaire 1 : invariance de 0 et 1

Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$ de support la conique C.
Soit b et c deux réels non nuls. Soit h définie par :

$$\begin{array}{rccc} h: & \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{b\,u}{c\,(1-u)+b\,u} \end{array} \tag{17}$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(P_0;\varpi_0)$, $(P_1;\varpi_1)$ et $(P_2;\varpi_2)$ de support C avec :

$$\left\{\begin{array}{l} (P_0;\varpi_0) = c^2 \odot (P_0;\omega_0) \underbrace{=}_{\text{si } \omega_0 \neq 0} \left(P_0; c^2\,\omega_0\right) \\ (P_1;\varpi_1) = b\,c \odot (P_1;\omega_1) \underbrace{=}_{\text{si } \omega_1 \neq 0} (P_1; b\,c\,\omega_1) \\ (P_2;\varpi_2) = b^2 \odot (P_2;\omega_2) \underbrace{=}_{\text{si } \omega_2 \neq 0} \left(P_2; b^2\omega_2\right) \end{array}\right. \tag{18}$$

Démonstration : [Béc97]

Nous avons $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$. Pour obtenir la formule (18), il suffit d'appliquer la formule (16) en remarquant que dans la formule (17), nous avons $a = 0$ et $b - d = 0$. ■

Si ω_0 et ω_2 sont deux réels strictement positifs, en prenant $c = \dfrac{1}{\sqrt{\omega_0}}$ et $b = \dfrac{1}{\sqrt{\omega_2}}$, en utilisant le corollaire 1, nous avons :

$$\begin{array}{l} \omega_1 \neq 0 \Rightarrow BR\{(P_0;\omega_0);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\} \\ \quad = BR\left\{(P_0;1);\left(P_1;\dfrac{\omega_1}{\sqrt{\omega_0\,\omega_2}}\right);(P_2;1)\right\} \end{array} \tag{19}$$

$$\begin{array}{l} \omega_1 = 0 \Rightarrow BR\left\{(P_0;\omega_0);\left(\overrightarrow{P_1};0\right);(P_2;\omega_2)\right\} \\ \quad = BR\left\{(P_0;1);\left(\dfrac{1}{\sqrt{\omega_0\,\omega_2}}\,\overrightarrow{P_1};0\right);(P_2;1)\right\} \end{array} \tag{20}$$

4.2 Cas de la parabole

En prenant $\omega_0 = 1$, $BR\{(P_0;1);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}$ est un arc de parabole si et seulement si nous avons :

$$\omega_2 = \omega_1^2$$

et nous pouvons énoncer :

Théorème 3 :
Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0;1)$, $(P_1;\omega)$ et $\left(P_2;\omega^2\right)$. Nous devons distinguer deux cas :

1. Si $\omega = 1$. Soit h définie par :

$$\begin{array}{rccc} h: & \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{u}{1-u} \end{array} \tag{21}$$

Alors :

$$\gamma \circ h = BR\left\{(P_0;1);\left(\overrightarrow{U_1};0\right);\left(\overrightarrow{U_2};0\right)\right\}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left(\overrightarrow{U_1};0\right) & = & \left(\overrightarrow{P_0P_1};0\right) \\ \left(\overrightarrow{U_2};0\right) & = & \left(\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2};0\right) \end{array}\right. \tag{22}$$

et nous avons :

$$\overline{BR\left\{(P_0;1);(P_1;\omega);\left(P_2;\omega^2\right)\right\}} = \overline{\gamma \circ h}$$

2. Si $\omega \notin \{0;1\}$. Soit h définie par :

$$\begin{array}{rccc} h: & \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{u}{1-\omega} \end{array} \tag{23}$$

Alors :

$$\gamma \circ h = BR\left\{(P_0;1);\left(\overrightarrow{U_1};0\right);\left(\overrightarrow{U_2};0\right)\right\}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\overrightarrow{U_1};0\right) = \left(\dfrac{\omega}{1-\omega}\ \overrightarrow{P_0P_1};0\right) \\ \left(\overrightarrow{U_2};0\right) = \left(\left(\dfrac{\omega}{1-\omega}\right)^2\left(\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2}\right);0\right) \end{array}\right. \tag{24}$$

et nous avons :

$$\overline{BR\left\{(P_0;1);(P_1;\omega);\left(P_2;\omega^2\right)\right\}} = \overline{\gamma \circ h}$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 2. ■

Les figures 3 et 4 illustre le théorème 3 avec $(P_0;1) = ((0.;6);1)$, $(P_1;\omega) = ((-13.;0);\omega)$ et $\left(P_2;\omega^2\right) = \left((-1;-1);\omega^2\right)$.

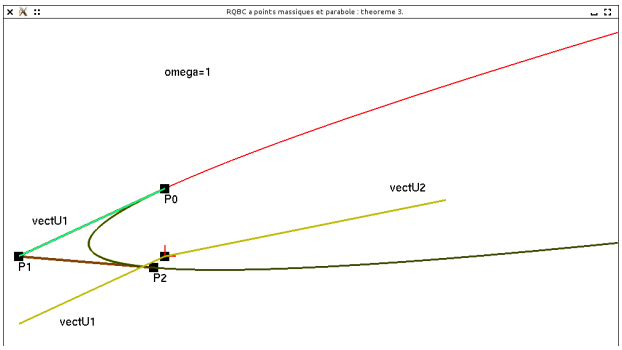
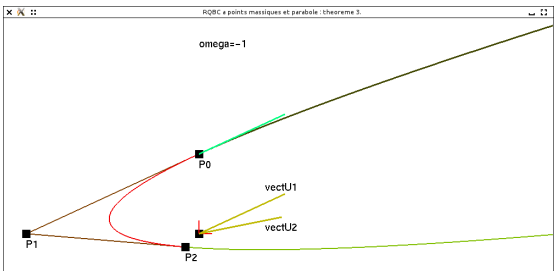
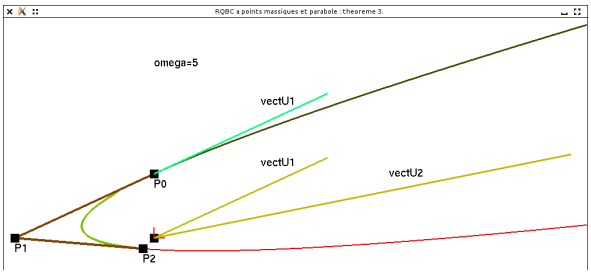


Figure 3: *Illustration du théorème 3 lorsque nous avons la condition* $\omega = 1$.



(a)



(b)

Figure 4: *Illustration du théorème 3. (a) :* $\omega = -1$. *(b) :* $\omega = 5$

Nous pouvons énoncer :

Théorème 4 :
Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(P_0;1)$, $\left(\overrightarrow{U_1};0\right)$ et $\left(\overrightarrow{U_2};0\right)$ telle que :

$$\overrightarrow{U_1} \bullet \overrightarrow{U_2} \neq 0$$

Soit r le réel défini par :

$$r = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{U_2}\right\|^2}\,\overrightarrow{U_1} \bullet \overrightarrow{U_2} \tag{25}$$

Soit h définie par :

$$h : \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ u & \longmapsto & \dfrac{r\,u}{(1-u)+r\,u} \end{array} \tag{26}$$

Alors :

$$\gamma \circ h = BR\left\{(P_0;1);\left(\overrightarrow{V_1};0\right);\left(\overrightarrow{V_2};0\right)\right\}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \left(\overrightarrow{V_1};0\right) & = & \left(r\,\overrightarrow{U_1};0\right) \\ \left(\overrightarrow{V_2};0\right) & = & \left(r^2\,\overrightarrow{U_2};0\right) \end{array}\right. \tag{27}$$

et nous avons :

$$\overline{BR\left\{(P_0;1);\left(\overrightarrow{U_1};0\right);\left(\overrightarrow{U_2};0\right)\right\}} = \overline{\gamma \circ h}$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le corollaire 1 avec : $b = r, \quad c = 1$. ■

La figure 5 illustre le théorème 4 avec $(P_0;1) = ((0.;6);1)$, $(P_1;1) = ((-13.;0);1)$ et $(P_2;1) = ((-1;-1);1)$.

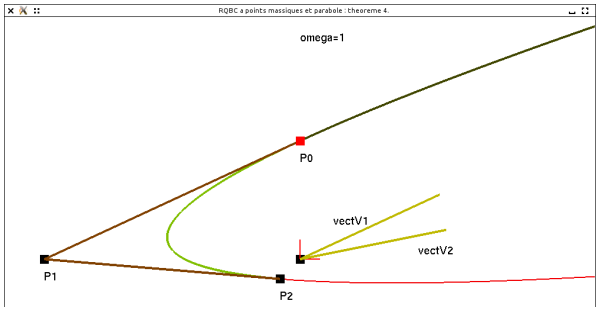


Figure 5: *Illustration du théorème 4 lorsque nous avons la condition* $\omega = 1$.

Nous pouvons énoncer :

Théorème 5 :
Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(P_0;1)$, $\left(\overrightarrow{V_1};0\right)$ et $\left(\overrightarrow{V_2};0\right)$ telle que :

$$\overrightarrow{V_1} \bullet \overrightarrow{V_2} \neq 0$$

Soit h définie par :

$$h: \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ u & \longmapsto & \dfrac{-(1-u)+u}{u} \end{array} \tag{28}$$

Alors :

$$\gamma \circ h = BR\left\{(Q_0;1);\left(\overrightarrow{W_1};0\right);\left(\overrightarrow{V_2};0\right)\right\}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{ccc} (Q_0;1) & = & \left(\mathcal{T}_{\overrightarrow{V_2}-2\overrightarrow{V_1}}(P_0);1\right) \\ \left(\overrightarrow{W_1};0\right) & = & \left(\overrightarrow{V_1}-\overrightarrow{V_2};0\right) \end{array}\right. \tag{29}$$

et, nous avons :

$$\overline{BR\left\{(P_0;1);\left(\overrightarrow{V_1};0\right);\left(\overrightarrow{V_2};0\right)\right\}} = \overline{\gamma \circ h}$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 2 avec $a=-1, \quad b=1, \quad c=0, \quad d=1$. ■

La figure 6 illustre le théorème 5 avec $(P_0;1) = ((0.;6);1)$, $(P_1;1) = ((-13.;0);1)$ et $(P_2;1) = ((-1;-1);1)$.

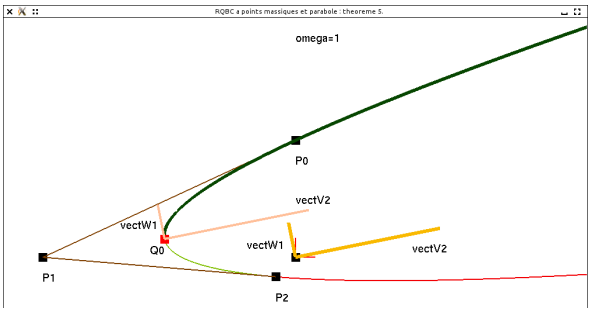


Figure 6: *Illustration du théorème 5 lorsque nous avons la condition* $\omega = 1$.

Nous pouvons remarquer :

Proposition 1 :
Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$.
Soit les courbes $BR\left\{(P_0;1);(P_1;\omega);\left(P_2;\omega^2\right)\right\}$ et $BR\left\{(Q_0;1);\left(\overrightarrow{W_1};0\right);\left(\overrightarrow{V_2};0\right)\right\}$, cette dernière courbe étant obtenue en utilisant les théorèmes 3, 4 puis 5.
Alors, nous avons :

$$\overrightarrow{W_1} \bullet \overrightarrow{V_2} = 0 \tag{30}$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{W_1} \bullet \overrightarrow{V_2} = \left(\overrightarrow{V_1}-\overrightarrow{V_2}\right) \bullet \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1} \bullet \overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_2}^2$$

$$= r^3\,\overrightarrow{U_1} \bullet \overrightarrow{U_2} - r^4\,\overrightarrow{U_2}^2 = r^3\left(\overrightarrow{U_1} \bullet \overrightarrow{U_2} - r\,\overrightarrow{U_2}^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\left\|\overrightarrow{U_2}\right\|^2}\,\overrightarrow{U_1} \bullet \overrightarrow{U_2}\right)^3 \left(\overrightarrow{U_1} \bullet \overrightarrow{U_2} - \frac{\overrightarrow{U_2}^2}{\left\|\overrightarrow{U_2}\right\|^2}\left(\overrightarrow{U_1} \bullet \overrightarrow{U_2}\right)\right)$$

$= 0$ (en utilisant la formule (25)) ■

Théorème 6 :
Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$.
Soit les courbes $BR\left\{(P_0;1);(P_1;\omega);\left(P_2;\omega^2\right)\right\}$ et $BR\left\{(Q_0;1);\left(\overrightarrow{W_1};0\right);\left(\overrightarrow{V_2};0\right)\right\}$, cette dernière courbe étant obtenue en utilisant les théorèmes 3, 4 puis 5.
Alors, $\overline{BR\left\{(P_0;1);(P_1;\omega);\left(P_2;\omega^2\right)\right\}}$ est la parabole P, de sommet Q_0, et d'équation $Y = \dfrac{\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2}{4\left\|\overrightarrow{W_1}\right\|}X^2$ dans le repère orthonormal $\left(Q_0;\dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{W_1}\right\|}\overrightarrow{W_1};\dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|}\overrightarrow{V_2}\right)$.

Démonstration : Voir [Béc97]. ■

Le vecteur $\overrightarrow{W_1}$ est un vecteur tangent à la parabole en Q_0 tandis que l'axe focal est défini par Q_0 et $\overrightarrow{V_2}$. La figure 7 montre deux arcs d'une parabole modélisée à l'aide de deux courbes BR de points de contrôle pondérés $(P_0;1)$, $(P_1;1)$ et $(P_2;1)$ d'une part et $(Q_0;1)$, $\left(\overrightarrow{W_1};0\right)$ et $\left(\overrightarrow{V_2};0\right)$ d'autre part. Cette dernière nous permet de déterminer les paramètres de la parabole en utilisant le théorème 6.

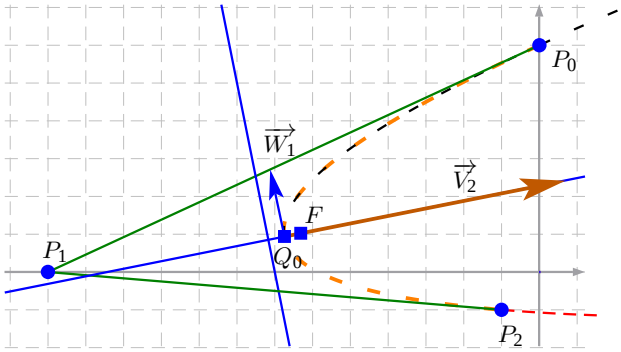


Figure 7: *Deux arcs d'une parabole modélisée à l'aide de deux courbes BR de points massiques de contrôle* $(P_0;1)$, $(P_1;1)$ *et* $(P_2;1)$ *d'une part et* $(Q_0;1)$, $\left(\overrightarrow{W_1};0\right)$ *et* $\left(\overrightarrow{V_2};0\right)$ *d'autre part.*

4.3 Cas de l'ellipse

Les poids vérifient la condition : $\omega_1^2 - \omega_2\,\omega_0 < 0$. Sans perte de généralités, nous nous plaçons dans le cas $\omega_0 = 1$ et $\omega_2 > 0$ et nous avons le lemme suivant :

Lemme 2 :
Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$ avec $\omega_1 \leq 0$.
Soit h définie par :

$$h: \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ u & \longmapsto & \dfrac{u}{-(1-u)+u} \end{array} \tag{31}$$

et nous devons distinguer deux cas.

- si $\omega_1 < 0$, alors :

$$\gamma \circ h = BR\{(P_0;1);(P_1;-\omega_1);(P_2;\omega_2)\}$$

et :

$$\overline{BR\{(P_0;1);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}} = \overline{\gamma \circ h}$$

- si $\omega_1 = 0$, alors :

$$\gamma \circ h = BR\left\{(P_0;1);\left(-\overrightarrow{P_1};0\right);(P_2;\omega_2)\right\}$$

et :

$$\overline{BR\left\{(P_0;1);\left(\overrightarrow{P_1};0\right);(P_2;\omega_2)\right\}} = \overline{\gamma \circ h}$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser le corollaire 1 avec $b=1, \quad c=-1$. ■

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 7 :
Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0;1)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$ avec $\omega_1 > 0$.
Soit r le réel défini par :

$$r = -\frac{1}{\omega_1}$$

Soit h définie par :

$$h: \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ u & \longmapsto & \dfrac{r\,u}{(1-u)+(1+r)\,u} \end{array} \tag{32}$$

Alors :

$$\gamma \circ h = BR\left\{(P_0;1);\left(\overrightarrow{U_1};0\right);(P_3;\varpi_3)\right\}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\overrightarrow{U_1};0\right) = \left(\overrightarrow{P_1P_0};0\right) \\ (P_3;\varpi_3) = \left(\texttt{bar}\left\{(P_0;1);(P_1;-2)\left(P_2;\frac{\omega_2}{\omega_1^2}\right)\right\};\alpha_1\right) \end{array} \right. \tag{33}$$

et :

$$\alpha_1 = -1 + \frac{\omega_2}{\omega_1^2}$$

et, nous avons :

$$\overline{BR\{(P_0;1);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}} = \overline{\gamma \circ h}$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser le théorème 2 avec $a=0, \quad b=r, \quad c=1, \quad d=1+r$. ■

La figure 8 illustre le théorème 7 avec $(P_0;1) = ((0.;6);1)$, $(P_1;1) = \left((-13.;0);\frac{1}{2}\right)$ et $(P_2;1) = ((-1;-1);1)$.

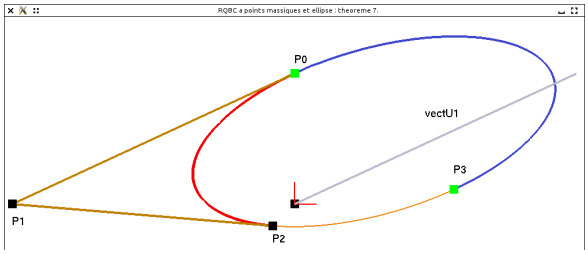


Figure 8: *Illustration du théorème 7.*

Nous pouvons énoncer :

Théorème 8 :
Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(P_0;1)$, $\left(\overrightarrow{U_1};0\right)$ et $(P_3;\omega_3)$ avec $\omega_3 > 0$.
Soit h définie par :

$$h: \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ u & \longmapsto & \dfrac{u}{\sqrt{\omega_3}(1-u)+u} \end{array} \tag{34}$$

alors, nous obtenons :

$$\overrightarrow{V_1} = \frac{1}{\sqrt{\omega_3}}\,\overrightarrow{U_1} \tag{35}$$

ce qui conduit à :

$$\overline{BR\{(P_0;\omega_0);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}} = \overline{BR\left\{(P_0;1);\left(\overrightarrow{V_1};0\right);(P_3;1)\right\}}$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser le corollaire 1 avec $b=1, \quad c=\sqrt{\omega_3}$ puis d'utiliser la formule (9), en prenant $\lambda = \frac{1}{\omega_3}$, $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(P_0;1)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\omega_3}}\overrightarrow{U_1};0\right)$ et $(P_3;1)$. ■

La figure 9 illustre le théorème 8 avec $(P_0;1) = ((0.;6);1)$, $(P_1;1) = \left((-13.;0);\frac{1}{2}\right)$ et $(P_2;1) = ((-1;-1);1)$.

Si nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overrightarrow{P_0P_3} \bullet \overrightarrow{V_1} & = & 0 \\ P_0P_3^2 & = & 4\,\overrightarrow{V_1}^2 \end{array} \right.$$

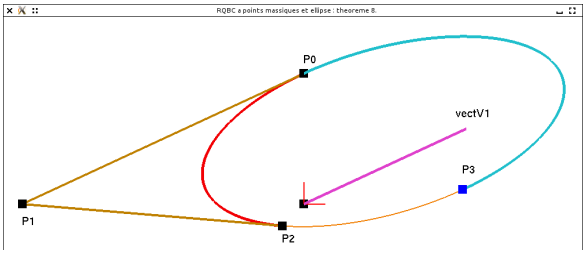


Figure 9: *Illustration du théorème 8.*

alors la courbe de Bézier de points massiques de contrôle $(P_0;1)$, $\left(\overrightarrow{V_1};0\right)$ et $(P_3;1)$ est un arc de cercle, théorème 1. Dans la suite de ce paragraphe, nous excluons ce cas particulier d'ellipses. Nous pouvons énoncer :

Théorème 9 :
Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $(P_0;1)$, $\left(\overrightarrow{V_1};0\right)$ et $(P_3;1)$.
Soit k_1 et k_2 les nombres définis par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} k_1 & = & \overrightarrow{P_0P_3}\bullet\overrightarrow{V_1} \\ k_2 & = & \overrightarrow{V_1}^2-\dfrac{1}{4}\,P_0P_3^2 \end{array}\right. \tag{36}$$

Si $k_2=0$, nous posons $\theta=\frac{\pi}{8}$, sinon, nous posons :

$$\theta=\frac{1}{4}\,\arctan\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$$

Soit $P_4=\texttt{bar}\left\{\left(P_0;\cos^2(\theta)\right);\left(P_3;\sin^2(\theta)\right)\right\}$.

Soit $P_5=\texttt{bar}\left\{\left(P_3;\cos^2(\theta)\right);\left(P_0;\sin^2(\theta)\right)\right\}$.

Soit h l'application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ dont l'expression est :

$$\frac{\sin(\theta)\,(1-u)+\cos(\theta)\,u}{(\cos(\theta)+\sin(\theta))\,(1-u)+(\cos(\theta)-\sin(\theta))\,u} \tag{37}$$

alors nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{lcl} (Q_0;1) & = & \left(\mathcal{T}_{\sin(2\theta)\,\overrightarrow{V_1}}(P_4);1\right) \\ \left(\overrightarrow{W_1};0\right) & = & \left(\dfrac{\sin(2\theta)}{2}\,\overrightarrow{P_0P_3}+\cos(2\theta)\,\overrightarrow{V_1};0\right) \\ (Q_2;1) & = & \left(\mathcal{T}_{-\sin(2\theta)\,\overrightarrow{V_1}}(P_5);1\right) \end{array}\right. \tag{38}$$

et nous avons :

$$\overline{BR\{(P_0;\omega_0);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}}=\overline{BR\left\{(Q_0;1);\left(\overrightarrow{W_1};0\right);(Q_2;1)\right\}}$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser le théorème 2 avec :

$$a=\sin(\theta),\quad b=\cos(\theta)\quad c=a+b,\quad d=b-a$$

■

Notons que la condition $k_2=0$ de la formule (36) est équivalente à :

$$\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|=\frac{1}{2}\,P_0P_3=O_0P_0=O_0P_3$$

où O_0, milieu du segment $[P_0P_3]$, est le centre de l'ellipse. De plus, si $k_2=0$ alors $k_1\neq 0$ puisque l'ellipse n'est pas un cercle. Enonçons le lemme :

Lemme 3 :
Considérons les courbes $BR\{(P_0;1);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}$ et $BR\left\{(Q_0;1);\left(\overrightarrow{W_1};0\right);(Q_2;1)\right\}$, cette dernière courbe étant obtenue en utilisant les théorèmes 7, 8 puis 9. Alors nous avons :

$$\overrightarrow{Q_0Q_2}\bullet\overrightarrow{W_1}=0$$

Démonstration : Une démonstration analytique en utilisant un logiciel de calcul formel est triviale. ■

Il reste à déterminer les éléments caractéristiques de l'ellipse et nous pouvons énoncer :

Théorème 10 : Eléments caractéristiques de l'ellipse
Considérons les courbes $BR\{(P_0;1);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}$ et $BR\left\{(Q_0;1);\left(\overrightarrow{W_1};0\right);(Q_2;1)\right\}$, cette dernière courbe étant obtenue en utilisant les théorèmes 7, 8 puis 9. Alors l'ellipse :

$$\overline{BR\left\{(Q_0;1);\left(\overrightarrow{W_1};0\right);(Q_2;1)\right\}}$$

vérifie les conditions :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} k_1 & = & \overrightarrow{Q_0Q_2}\bullet\overrightarrow{W_1} & = & 0 \\ k_2 & = & \overrightarrow{W_1}^2-\dfrac{1}{4}\,Q_0Q_2^2 & \neq & 0 \end{array}\right.$$

Distinguons deux cas :

- $k_2<0$. Nous posons :

$$\overrightarrow{\imath}=\frac{1}{a}\,\frac{1}{2}\,\overrightarrow{Q_0Q_2}\quad\text{avec}\quad a=\left\|\frac{1}{2}\,\overrightarrow{Q_0Q_2}\right\|$$
$$\overrightarrow{\jmath}=\frac{1}{b}\,\overrightarrow{W_1}\quad\text{avec}\quad b=\left\|\overrightarrow{W_1}\right\|$$

- $k_2>0$. Nous posons :

$$\overrightarrow{\imath}=\frac{1}{a}\,\overrightarrow{W_1}\quad\text{avec}\quad a=\left\|\overrightarrow{W_1}\right\|$$
$$\overrightarrow{\jmath}=\frac{1}{b}\,\frac{1}{2}\,\overrightarrow{Q_0Q_2}\quad\text{avec}\quad b=\left\|\frac{1}{2}\,\overrightarrow{Q_0Q_2}\right\|$$

Dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$, la courbe BR est un arc de l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Démonstration : Voir [Béc97]. ■

La figure 10 montre deux arcs d'une ellipse modélisée à l'aide de deux courbes BR de points de contrôle pondérés $(P_0;1)$, $\left(P_1;\frac{1}{2}\right)$ et $(P_2;1)$ d'une part et $(Q_0;1)$, $\left(\overrightarrow{W_1};0\right)$ et $(Q_2;1)$ d'autre part. Cette dernière nous permet de déterminer les paramètres de l'ellipse en utilisant le théorème 10.

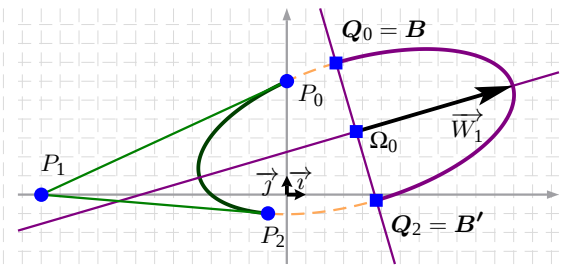


Figure 10: *Deux arcs d'une ellipse modélisée à l'aide de deux courbes BR de points massiques de contrôle* $(P_0;1)$, $\left(P_1;\frac{1}{2}\right)$ *et* $(P_2;1)$ *d'une part et* $(Q_0;1)$, $\left(\overrightarrow{W_1};0\right)$ *et* $(Q_2;1)$ *d'autre part.*

4.4 Cas de l'hyperbole

Nous supposons $\omega_0=1$. Les poids vérifient la condition : $\omega_1^2-\omega_2>0$. Nous pouvons énoncer :

Théorème 11 :
Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0;1)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$. Nous devons distinguer deux cas.

- Si $1-2\omega_1+\omega_2\neq 0$, l'équation (3) est de degré 2 et admet deux racines t_1 et t_2 définies par :

$$t_1=\frac{1-\omega_1+\sqrt{\omega_1^2-\omega_2}}{1-2\omega_1+\omega_2},\qquad t_2=\frac{1-\omega_1-\sqrt{\omega_1^2-\omega_2}}{1-2\omega_1+\omega_2}$$

Soit h définie par :

$$h:\begin{array}{ccc}\overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}\\ u & \longmapsto & t_1\,(1-u)+t_2\,u\end{array}\tag{39}$$

alors nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{U_0}=B_0\,(t_1)\,\overrightarrow{\Omega P_0}+\omega_1 B_1\,(t_1)\,\overrightarrow{\Omega P_1}+\omega_2 B_2\,(t_1)\,\overrightarrow{\Omega P_2}\\ (Q_1;\varpi_1)=(\texttt{bar}\,\{(P_0;\alpha_0);(P_1;\alpha_1);(P_2;\alpha_2)\};\alpha)\\ \overrightarrow{U_2}=B_0\,(t_2)\,\overrightarrow{\Omega P_0}+\omega_1 B_1\,(t_2)\,\overrightarrow{\Omega P_1}+\omega_2 B_2\,(t_2)\,\overrightarrow{\Omega P_2}\end{array}\right.\tag{40}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha_0=(1-t_1)\,(1-t_2)\\ \alpha_1=\omega_1\,(t_2-2\,t_1\,t_2+t_1)\\ \alpha_2=t_1\,t_2\,\omega_2\\ \alpha=\dfrac{2\left(\omega_2-\omega_1^2\right)}{(1-2\omega_1+\omega_2)}\end{array}\right.$$

et nous avons :

$$\overline{BR\{(P_0;\omega_0);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}}=\overline{BR\left\{\left(\overrightarrow{U_0};0\right);(Q_1;\varpi_1);\left(\overrightarrow{U_2};0\right)\right\}}$$

- Si $1-2\omega_1+\omega_2=0$, l'équation (3) est de degré 1 et admet une racine :

$$t_0=\frac{1}{2\,(1-\omega_1)}$$

Soit h définie par :

$$h:\begin{array}{ccc}\overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}\\ u & \longmapsto & \dfrac{t_0\,(1-u)+u}{(1-u)}\end{array}\tag{41}$$

alors nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{U_0}=B_0\,(t_0)\,\overrightarrow{\Omega P_0}+\omega_1 B_1\,(t_0)\,\overrightarrow{\Omega P_1}+\omega_2 B_2\,(t_0)\,\overrightarrow{\Omega P_2}\\ (Q_1;\varpi_1)=(\texttt{bar}\,\{(P_0;\alpha_0);(P_1;\alpha_1);(P_2;\alpha_2)\};\alpha)\\ \overrightarrow{U_2}=\overrightarrow{\Omega P_0}-2\,\omega_1\,\overrightarrow{\Omega P_1}+\omega_2\,\overrightarrow{\Omega P_2}\end{array}\right.\tag{42}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_0=t_0-1\\ \alpha_1=\omega_1\,(1-2\,t)\\ \alpha_2=t_0\,\omega_2\\ \alpha=\omega_1-1\end{array}\right.$$

et nous avons :

$$\overline{BR\{(P_0;\omega_0);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}}=\overline{BR\left\{\left(\overrightarrow{U_0};0\right);(Q_1;\varpi_1);\left(\overrightarrow{U_2};0\right)\right\}}$$

Démonstration : Voir [Béc97]. ■

La figure 11 illustre le premier cas du théorème 11 avec $(P_0;1)=\left(\left(\sqrt{2};1\right);1\right)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;1)=\left(\left(2;-\sqrt{3}\right);1\right)$ avec :

$$P_1=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ 1+\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\end{pmatrix}$$

et :

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}+2}}{2}$$

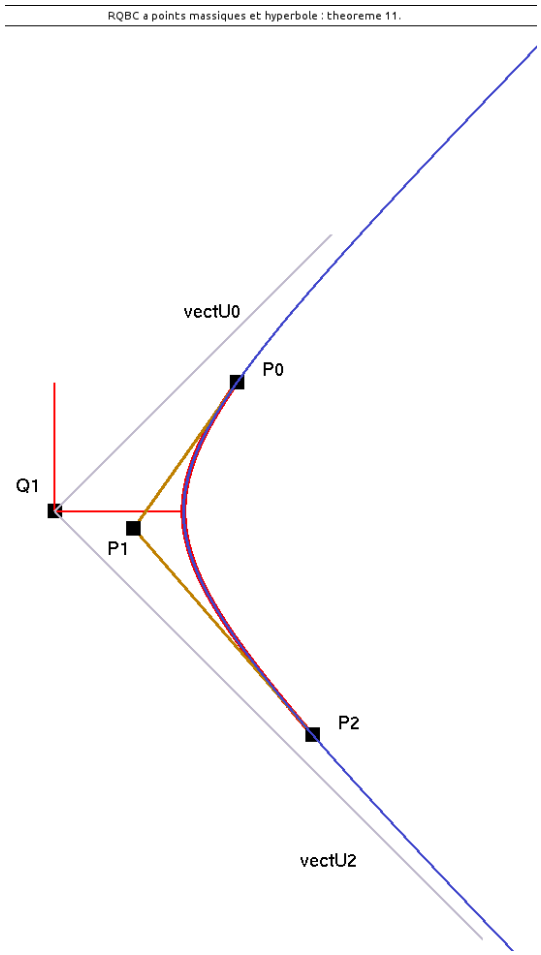


Figure 11: *Illustration du premier cas du théorème 11.*

La figure 12 illustre le second cas du théorème 11 en modifiant seulement le poids intermédiaire, par rapport à la figure 11, qui devient $\omega_1 = \frac{1}{15}$. Notons que l'un des vecteurs est induit par la racine du dénominateur tandis que l'autre est généré par le fait que le coefficient du monôme de degré 2 de ce dénominateur est nul.

Nous pouvons énoncer le théorème :

Théorème 12 :
Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0;1)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$. Nous devons distinguer deux cas.

- Si $1-2\omega_1+\omega_2 \neq 0$, alors nous posons :

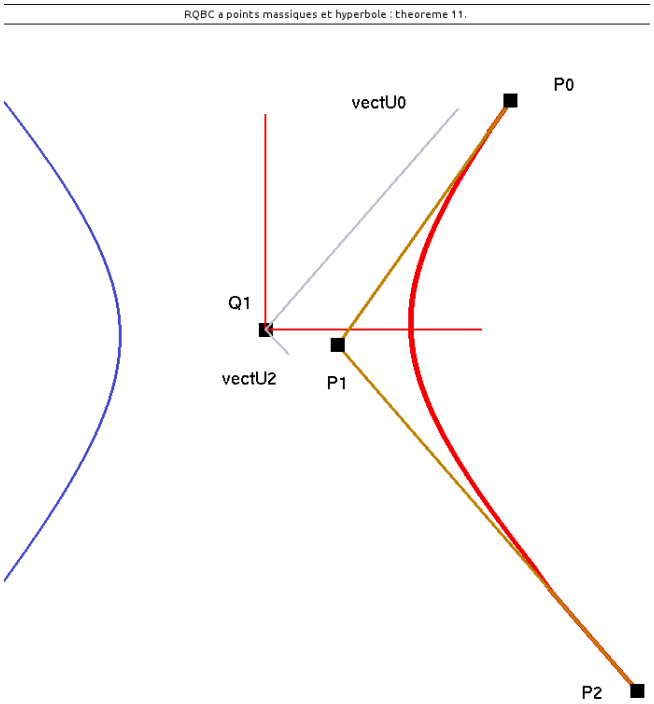


Figure 12: *Illustration du second cas du théorème 11.*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \left(\overrightarrow{V_0};0\right) & = & \left(\dfrac{1-2\omega_1+\omega_2}{2\left(\omega_2-\omega_1^2\right)}\overrightarrow{U_0};0\right) \\ \left(\overrightarrow{V_2};0\right) & = & \left(\dfrac{1-2\omega_1+\omega_2}{2\left(\omega_2-\omega_1^2\right)}\overrightarrow{U_2};0\right) \end{array}\right. \tag{43}$$

et nous avons :

$$\overline{BR\{(P_0;\omega_0);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}} = \overline{BR\left\{\left(\overrightarrow{V_0};0\right);(Q_1;1);\left(\overrightarrow{V_2};0\right)\right\}}$$

- Si $1-2\omega_1+\omega_2 = 0$, nous posons :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \left(\overrightarrow{V_0};0\right) & = & \left(\dfrac{1}{\omega_1-1}\overrightarrow{U_0};0\right) \\ \left(\overrightarrow{V_2};0\right) & = & \left(\dfrac{1}{\omega_1-1}\overrightarrow{U_2};0\right) \end{array}\right. \tag{44}$$

et nous avons :

$$\overline{BR\{(P_0;\omega_0);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}} = \overline{BR\left\{\left(\overrightarrow{V_0};0\right);(Q_1;1);\left(\overrightarrow{V_2};0\right)\right\}}$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la formule (9) du lemme 1 aux résultats obtenus dans le théorème 11. ■

La figure 13 (resp. 14) illustre le premier (resp. second) cas du théorème 12 à partir de l'exemple de la figure 11 (resp. 12).

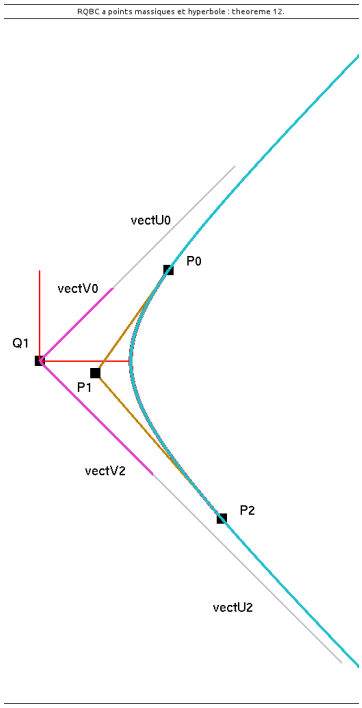


Figure 13: *Illustration du premier cas du théorème 12.*

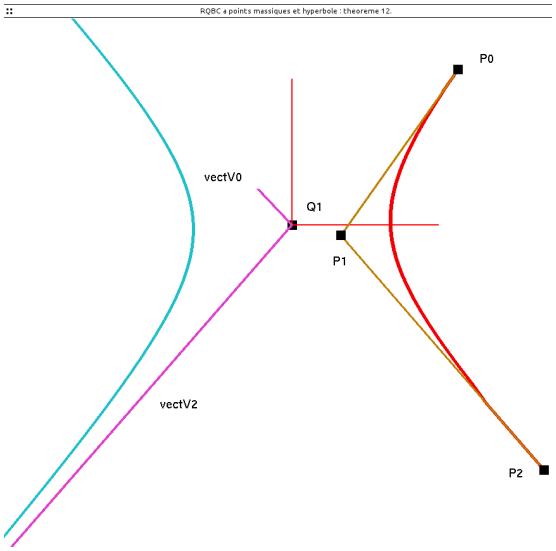


Figure 14: *Illustration du second cas du théorème 12.*

Nous pouvons énoncer :

Théorème 13 :
Soit une courbe de Bézier γ de points massiques de contrôle $\left(\overrightarrow{V_0};0\right)$, $(Q_1;1)$ et $\left(\overrightarrow{V_2};0\right)$.
Soit r défini par :

$$r = \sqrt[4]{\frac{\left\|\overrightarrow{V_0}\right\|}{\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|}}$$

Soit h définie par :

$$\begin{array}{rccc} h: & \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{r\,u}{\dfrac{1}{r}\,(1-u)+r\,u} \end{array} \tag{45}$$

Nous avons, d'une part, :

$$\left\{\begin{array}{lcl} (Q_0;\varpi_0)=\left(\overrightarrow{W_0};0\right) & = & \left(\sqrt{\dfrac{\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|}{\left\|\overrightarrow{V_0}\right\|}}\,\overrightarrow{V_0};0\right) \\ (Q_2;\varpi_0)=\left(\overrightarrow{W_2};0\right) & = & \left(\sqrt{\dfrac{\left\|\overrightarrow{V_0}\right\|}{\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|}}\,\overrightarrow{V_2};0\right) \end{array}\right. \tag{46}$$

avec la relation :

$$\left\|\overrightarrow{W_0}\right\| = \left\|\overrightarrow{W_2}\right\| \tag{47}$$

et d'autre part :

$$\overline{BR\left\{\left(\overrightarrow{V_0};0\right);(Q_1;1);\left(\overrightarrow{V_2};0\right)\right\}} = \overline{BR\left\{\left(\overrightarrow{W_0};0\right);(Q_1;1);\left(\overrightarrow{W_2};0\right)\right\}}$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser le corollaire 1 avec :

$$b=r, \quad c=\frac{1}{r}$$

■

La figure 15 (resp. 16) illustre le théorème 13 à partir de l'exemple de la figure 13 (resp. 14).

Il reste à déterminer les éléments caractéristiques de l'hyperbole et nous pouvons énoncer :

Théorème 14 : Eléments caractéristiques de l'Hyperbole
Considérons les deux courbes $BR\{(P_0;1);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}$ d'une part et $BR\left\{\left(\overrightarrow{W_0};0\right);(Q_1;1);\left(\overrightarrow{W_2};0\right)\right\}$ d'autre part, cette dernière courbe étant obtenue en utilisant les théorèmes 11, 12 puis 13 et nous avons la condition de la formule (47).

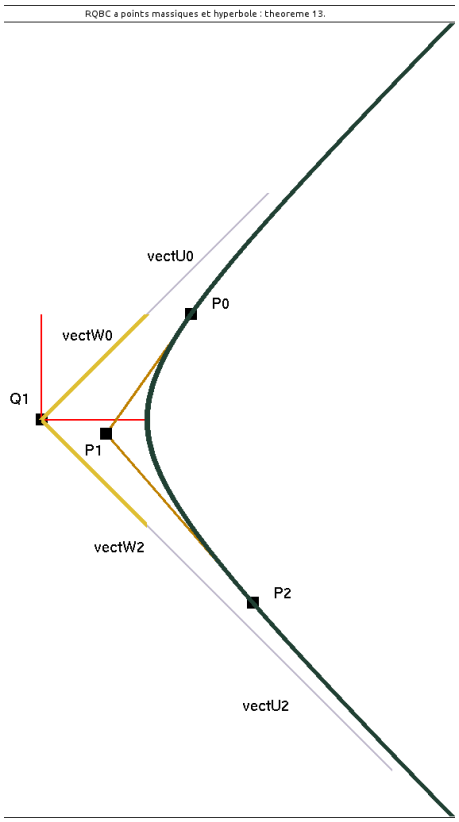


Figure 15: *Illustration du théorème 13 à partir des figures 11 et 13.*

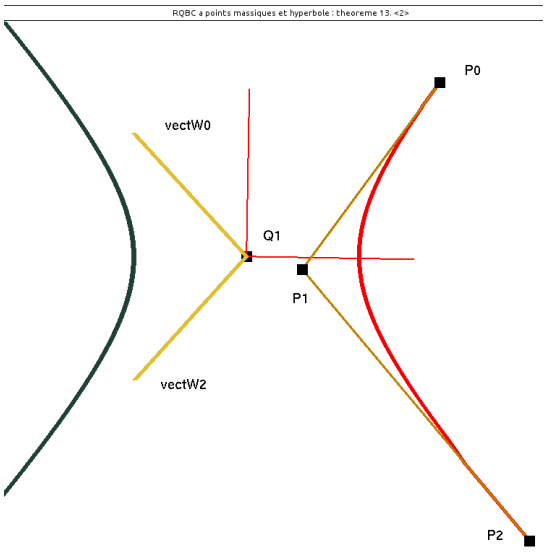


Figure 16: *Illustration du théorème 13 à partir des figures 12 et 14.*

Posons :

$$\overrightarrow{\imath} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{W_0}+\overrightarrow{W_2}\right) \quad \text{avec} \quad a = \frac{\left\|\overrightarrow{W_0}+\overrightarrow{W_2}\right\|}{2} \tag{48}$$

et :

$$\overrightarrow{\jmath} = \frac{1}{b}\,\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{W_0}-\overrightarrow{W_2}\right) \quad \text{avec} \quad b = \frac{\left\|\overrightarrow{W_0}-\overrightarrow{W_2}\right\|}{2} \tag{49}$$

Alors :

$$\overline{BR\{(P_0;1);(P_1;\omega_1);(P_2;\omega_2)\}} = \overline{BR\left\{\left(\overrightarrow{W_0};0\right);(Q_1;1);\left(\overrightarrow{W_2};0\right)\right\}}$$

est l'hyperbole de centre Q_1, d'équation implicite suivante :

$$x \times y = \frac{\left\|\overrightarrow{W_0}\right\|^2}{4}$$

dans le repère orthonormé $\left(Q_1;\frac{1}{\left\|\overrightarrow{W_0}\right\|}\overrightarrow{W_0};\frac{1}{\left\|\overrightarrow{W_2}\right\|}\overrightarrow{W_2}\right)$, et d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dans le repère orthonormé $(Q_1;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$.

Démonstration : Voir [Béc97]. ■

La figure 17, montre deux arcs d'une hyperbole modélisée à l'aide de deux courbes BR de points de contrôle pondérés $(P_0;1)$, $\left(P_1;\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}+2}}{2}\right)$ et $(P_2;1)$ d'une part et $\left(\overrightarrow{W_0};0\right)$, $(Q_1;1)$ et $\left(\overrightarrow{W_2};0\right)$ d'autre part. Cette dernière nous permet de déterminer les paramètres de l'hyperbole en utilisant le théorème 14 tandis que les points de contrôle pondérés sont ceux de la figure 11.

En prenant l'exemple des figures 11 et 15, la figure 18 montre les courbes $BR\left\{\left(\overrightarrow{W_0};0\right);(Q_1;1);\left(\overrightarrow{W_2};0\right)\right\}$ et $BR\left\{\left(-\overrightarrow{W_0};0\right);(Q_1;1);\left(-\overrightarrow{W_2};0\right)\right\}$ en vert ainsi que la courbe $\overline{BR\left\{\left(-2\,\overrightarrow{W_0};0\right);(Q_1;1);\left(-2\,\overrightarrow{W_2};0\right)\right\}}$ en rouge. Plus la norme des vecteurs $\overrightarrow{W_0}$ et $\overrightarrow{W_2}$ est grande, plus les sommets de l'hyperbole sont éloignés du centre Q_1.

5 Coniques à centres vues comme des cercles

Dans ce paragraphe, nous choisissons la métrique idoine permettant de manipuler une ellipse non circulaire ou une hyperbole comme un cercle unitaire. L'avantage de cet approche est de conserver la très grande majorité des propriétés des cercles usuels. Ainsi, commençons par rappeler la définition d'un cercle :

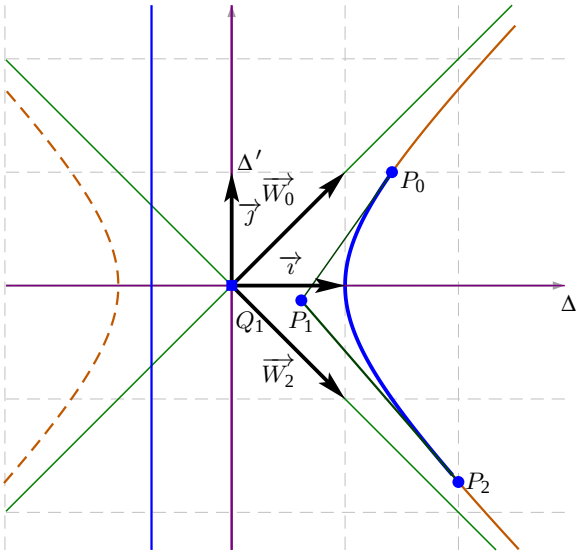


Figure 17: *Deux arcs d'une hyperbole modélisée à l'aide de deux courbes BR de points massiques de contrôle* $(P_0;1)$, $\left(P_1;\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}+2}}{2}\right)$ *et* $(P_2;1)$ *d'une part et* $\left(\overrightarrow{W_0};0\right)$, $(Q_1;1)$ *et* $\left(\overrightarrow{W_2};0\right)$ *d'autre part.*

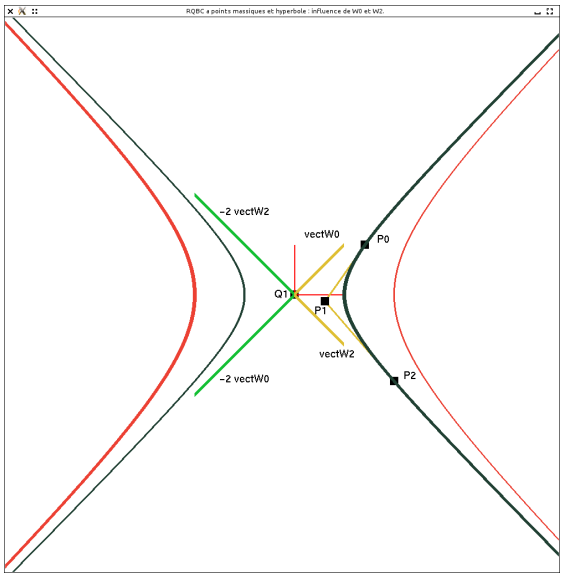


Figure 18: *Illustration de l'influence des vecteurs directeurs des asymptotes.*

Définition 2 : Cercle
Soit $\mathcal{Q}$ une forme quadratique définie du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et Ω un point du plan affine $\mathcal{P}$.

C est un cercle de centre Ω s'il existe un réel k tel que :

$$\mathsf{C}=\left\{M\in\mathcal{P}\quad|\quad\mathcal{Q}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)=k\right\}\qquad(50)$$

Naturellement, si k est négatif, le rayon du cercle est un nombre imaginaire pur, sinon, le rayon est $\sqrt{k}$.

Considérons l'ellipse E et l'hyperbole H d'équations respectives :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\qquad(51)\qquad\qquad\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\qquad(52)$$

5.1 Choix de la forme quadratique

Soit $\overrightarrow{u}\,(x;y)$ un vecteur du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$. Dans le cas de l'ellipse (resp. hyperbole) dont l'équation est donnée par la formule (51) (resp. (52)), nous allons munir $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ de la forme quadratique $\mathcal{Q}_{\mathsf{E}}$ (resp. $\mathcal{Q}_{\mathsf{H}}$) afin d'obtenir l'équation du cercle unitaire de centre O. Nous avons ainsi :

$$\mathcal{Q}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{u}\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\quad(53)\qquad\qquad\mathcal{Q}_{\mathsf{H}}\left(\overrightarrow{u}\right)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\quad(54)$$

La signature de la forme quadratique définie $\mathcal{Q}_{\mathsf{E}}$ (resp. $\mathcal{Q}_{\mathsf{H}}$) est $(2;0)$ (resp. $(1;1)$). Remarquons que nous avons :

$$\mathcal{L}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)=\mathcal{L}_{\mathsf{H}}\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)=0$$

et la base $(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ est orthogonale pour la forme quadratique considérée. Nous avons :

$$\mathcal{Q}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{\imath}\right)>0\qquad\text{et}\qquad\mathcal{Q}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{\jmath}\right)>0$$

et :

$$\mathcal{Q}_{\mathsf{H}}\left(\overrightarrow{\imath}\right)>0,\quad\mathcal{Q}_{\mathsf{H}}\left(\overrightarrow{\jmath}\right)<0$$
$$\text{et}\quad\mathcal{Q}_{\mathsf{H}}\left(a\,\overrightarrow{\imath}+b\,\overrightarrow{\jmath}\right)=0$$

5.2 Cas d'un cercle connexe

En utilisant la forme quadratique de la formule (53), la courbe définie par l'équation de la formule (51) est le cercle unitaire E de centre O. Nous pouvons énoncer :

Théorème 15 :
Soit deux points $P_0\left(a\cos(t_0);b\sin(t_0)\right)$ et $P_2\left(-a\cos(t_0);-b\sin(t_0)\right)$ diamétralement opposés de E.
Soit $\overrightarrow{P_1}\left(-a\sin(t_0);b\cos(t_0)\right)$.
Alors, $BR\left\{(P_0;1);\left(\overrightarrow{P_1};0\right);(P_2;1)\right\}$ est un demi-cercle de E et nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases}\mathcal{L}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{P_0P_2};\overrightarrow{P_1}\right) & = & 0\\ 1\times1\times\mathcal{Q}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{P_0P_2}\right) & = & 4\times\mathcal{Q}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{P_1}\right)\end{cases}$$

Démonstration :

Nous avons bien $\omega_1^2 - \omega_0\,\omega_2 = -1 < 0$.

Trivialement, le point O est le milieu de $[P_0 P_2]$ et :

$$\mathcal{Q}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{OP_0}\right) = \mathcal{Q}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{OP_2}\right) = 1$$

De plus, nous avons :

$$\mathcal{L}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{OP_0};\overrightarrow{P_1}\right) = -\frac{a^2\cos(t_0)\sin(t_0)}{a^2} + \frac{b^2\sin(t_0)\cos(t_0)}{b^2} = 0$$

et :

$$\mathcal{Q}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{P_1}\right) = \frac{a^2\sin^2(t_0)}{a^2} + \frac{b^2\cos^2(t_0)(t_0)}{b^2} = 1$$

De plus :

$$1\times 1\times \mathcal{Q}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{P_0P_2}\right) = 4\times\mathcal{Q}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{OP_0}\right) = 4\times\mathcal{Q}_{\mathsf{E}}\left(\overrightarrow{P_1}\right)$$

■

La figure 19 illustre le théorème 15 dans le cas où nous avons $\omega_0 = \omega_2 = 1$.

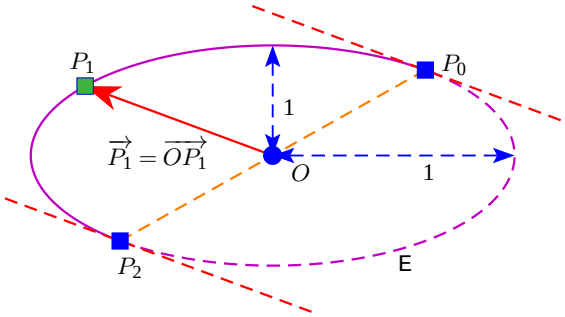


Figure 19: *Un demi-cercle modélisé par une courbe de Bézier rationnelle quadratique définie par les points massiques de contrôle* $(P_0;1)$, $\left(\overrightarrow{OP_1};0\right)$ *et* $(P_2;1)$.

5.3 Cas d'un cercle non connexe

Soit le cercle H, unitaire pour la forme quadratique $\mathcal{Q}_{\mathsf{H}}$, de centre O dont l'équation est donnée par la formule (52). Nous pouvons énoncer :

Théorème 16 : Demi-cercle de H
Pour $t_0 \in [-\pi;\pi] - \left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$, considérons les deux points $P_0 = \left(\frac{a}{\cos(t_0)};b\tan(t_0)\right)$ et $P_2 = \left(-\frac{a}{\cos(t_0)};-b\tan(t_0)\right)$ de H ainsi que le vecteur $\overrightarrow{P_1} = \left(a\tan(t_0);\frac{b}{\cos(t_0)}\right)$. Alors :

- le vecteur tangent $\overrightarrow{P_1}$, en P_0 et P_2, est orthogonal à $\overrightarrow{P_0P_2}$;
- $BR\left\{(P_0;1);\left(\overrightarrow{P_1};0\right);(P_2;-1)\right\}$ est un demi-cercle de H.

Démonstration : Voir [GD13].■

La figure 20 montre un demi-cercle unitaire H modélisé par une courbe de Bézier rationnelle quadratique définie par les points massiques de contrôle $(P_0;1)$, $\left(\overrightarrow{P_1};0\right)$ et $(P_2;-1)$ (les points P_0 et P_2 sont symétriques par rapport au point O). Le vecteur directeur, de l'asymptote, appartenant à la courbe de Bézier est $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_1}\right)$ et est obtenu pour la valeur $t = \frac{1}{2}$ et nous avons :

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}} (P_0;B_0(t)) \oplus \left(B_1(t)\ \overrightarrow{P_1};0\right) \oplus (P_2;-B_2(t)) = (\overrightarrow{u};0)$$

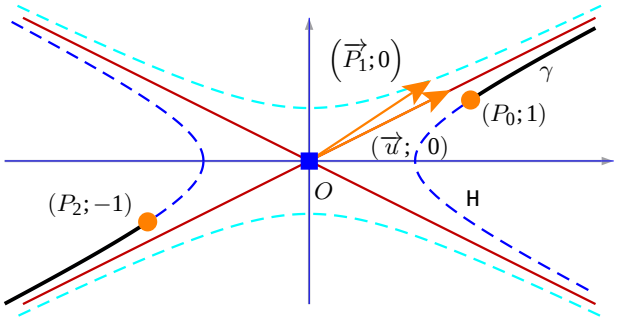


Figure 20: *Un demi-cercle du cercle unitaire* H *modélisé par une courbe de Bézier rationnelle quadratique définie par les points massiques de contrôle* $(P_0;1)$, $\left(\overrightarrow{P_1};0\right)$ *et* $(P_2;-1)$.

Notons que la formule (13) et toujours valide puisque nous avons :

$$1\times -1\times \mathcal{Q}_{\mathsf{H}}\left(\overrightarrow{P_0P_2}\right) = -4 = 4\times\mathcal{Q}_{\mathsf{H}}\left(\overrightarrow{P_1}\right)$$

mais, contrairement au paragraphe précédent, le point P_1 défini par $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1}$ n'est pas un point du cercle H. Finissons par énoncer le théorème 17 illustré par la figure 21.

Théorème 17 :
Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0;1)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;1)$, avec $\omega_1 > 1$, définissant un arc du cercle (connexe) non connexe H. Soit $\varepsilon \in \{-1;1\}$.
Soit h définie par :

$$\begin{array}{rccl} h: & \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\omega_1^2-1}}u}{1-u+\varepsilon\dfrac{1-\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2-1}}} \end{array} \tag{55}$$

Alors, $BR\left\{(P_0;1);\left(\overrightarrow{Q_1};0\right);(Q_2;-1)\right\}$ est un demi-cercle de H où :

$$\left(\overrightarrow{Q_1};0\right) = \left(\frac{\varepsilon\,\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2-1}}\ \overrightarrow{P_0P_1};0\right)$$

et Q_2 est le barycentre de $\left(P_0; \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2-1}\right)$, $\left(P_1; \frac{-2\,\omega_1^2}{\omega_1^2-1}\right)$ et $\left(P_2; \frac{1}{\omega_1^2-1}\right)$ affecté du poids $\varpi_1 = -1$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 2 avec :

$$a = 0, \quad b = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega^2-1}}, \quad c = 1 \quad \text{et} \quad d = \varepsilon\frac{1-\omega}{\sqrt{\omega^2-1}}$$

■

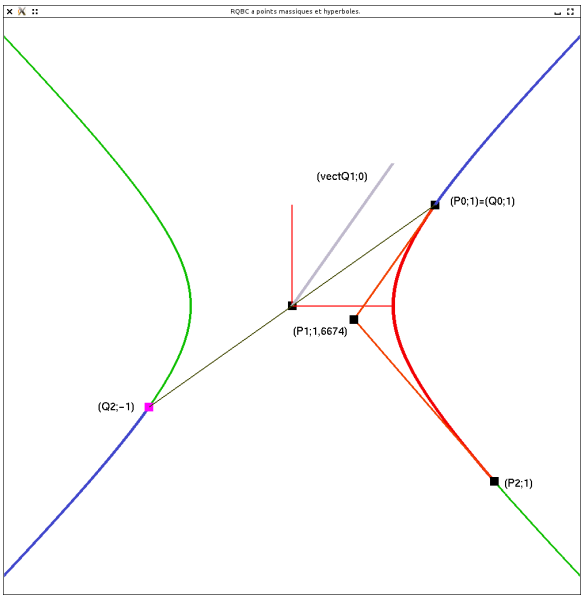


Figure 21: *Reparamétrisation d'un cercle H pour obtenir un demi-cercle.*

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons exposé un état de l'art sur les points massiques qui permettent de regrouper dans un même ensemble les points pondérés, de poids non nul, d'un espace affine et les vecteurs de l'espace vectoriel attaché à cet espace affine. Nous avons ensuite, à partir de trois points massiques définissant une courbe de Bézier de degré 2, déterminer la nature de la conique engendrée par cette courbe. De plus, les propriétés des points massiques étant affines, nous avons pu choisir une forme quadratique adéquate afin qu'un hyperbole ou une ellipse soit manipulable comme un cercle. Pour compléter son information, le lecteur pourra consulter [ABFH08] qui fournit une application moderne des coniques dans l'approximation de courbes ainsi qu'un application à visualisation des cercles caractéristiques d'une cylcide de Dupin [DGL13].

Références

[ABFH08] ALBRECHT G., BÉCAR J.-P., FARIN G. E., HANSFORD D. : On the approximation order of tangent estimators. *Computer Aided Geometric Design. Vol. 25*, Num. 2 (2008), 80–95.

[Béc97] BÉCAR J. P. : *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.

[Béz86] BÉZIER P. : *Courbe et surface*, 2ème ed., vol. 4. Hermès, Paris, Octobre 1986.

[Cas85] CASTELJAU P. D. : *Mathématiques et CAO. Volume 2 : formes à pôles*. Hermes, 1985.

[DGL13] DRUOTON L., GARNIER L., LANGEVIN R. : Iterative construction of Dupin cyclide characteristic circles using non-stationary Iterated Function Systems (IFS). *Computer-Aided Design. Vol. 45*, Num. 2 (February 2013), 568–573. Solid and Physical Modeling 2012, Dijon.

[FJ89] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes et surfaces rationnelles*, vol. RMA 12. Masson, 1989.

[FJ92] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes splines rationnelles, applications à la CAO*, vol. RMA 24. Masson, 1992.

[Gar07] GARNIER L. : *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*. Ellipses, 2007. ISBN : 978-2-7298-3412-8.

[GD13] GARNIER L., DRUOTON L. : Inversions de coniques à centres vues comme des cercles. In *Actes of the* 26emes *journées A.F.I.G.* (Limoges, Novembre 2013).