



**HAL**  
open science

## Détermination des courbes de dispersion des ondes guidées dans des plaques constituées d'un matériau à gradient fonctionnel

Salah-Eddine Hebaz, Farouk Benmeddour, Emmanuel Moulin, Jamal Assaad

► **To cite this version:**

Salah-Eddine Hebaz, Farouk Benmeddour, Emmanuel Moulin, Jamal Assaad. Détermination des courbes de dispersion des ondes guidées dans des plaques constituées d'un matériau à gradient fonctionnel. Actes du 14ème Congrès Français d'Acoustique, CFA 2018, Apr 2018, Le Havre, France. hal-03590665

**HAL Id: hal-03590665**

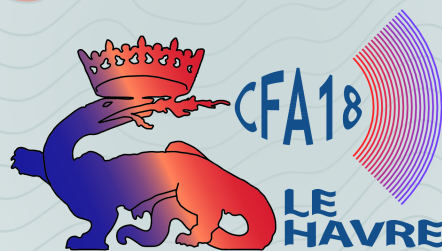
**<https://uphf.hal.science/hal-03590665v1>**

Submitted on 3 Oct 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018**  
**14<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique**



**Détermination des courbes de dispersion des ondes guidées dans des  
plaques constituées d'un matériau à gradient fonctionnel**

S.-E. Hebaz, F. Benmeddour, E. Moulin et J. Assaad

Univ. Valenciennes, CNRS, Univ. Lille, YNCREA, Centrale Lille, UMR 8520 - IEMN, DOAE, F-59313  
Valenciennes, France

salah-eddine.hebaz@univ-valenciennes.fr

Dans ce travail, la méthode de Galerkin discontinue combinée avec une approche analytique est développée. Celle-ci permet de réduire l'étude des guides d'ondes ultrasonores de deux à une dimension. La discrétisation de la structure aboutit à un problème aux valeurs propres quadratique. Après linéarisation, les modes propres des ondes guidées sont calculés. Dans un premier temps, les courbes de dispersion des nombres d'onde en fonction de la fréquence d'une plaque isotrope sont obtenus. Les résultats numériques sont comparés avec succès aux solutions analytiques. Ceci constitue une première validation de la méthode. Dans un deuxième temps, deux types de matériaux sont étudiés : les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) et les FGM multi-couches. Le premier type est une variation continue des propriétés à travers l'épaisseur. Tandis que le second est une évolution homogène par couche des propriétés du matériau. Celle-ci est exprimée par une fonction polynomiale continue. Les résultats numériques sont en bon accord avec ceux trouvés dans la littérature. Ceci représentent une deuxième validation de la méthode. Lors des calculs numériques, la méthode développée dans ce travail a montrées une stabilité numérique tant pour les petites que pour les grandes longueurs d'ondes. En plus de l'utilisation d'éléments finis d'ordre faible (1, 2), la formulation discontinue permet d'exploiter efficacement des éléments d'ordre élevé ( $\geq 3$ ). Enfin, la méthode a un potentiel encourageant notamment en gain de temps, en précision et en flexibilité de modélisation des matériaux hétérogènes et multi-couches.

## 1 Introduction

Au cours du dernier siècle, l'ingénierie structurelle a connu un développement incontestable sur tous les niveaux. Afin de répondre aux enjeux de résistance accrue, allègement de la structure et amélioration des performances, une nouvelle classe de matériaux a émergé. Depuis les années 90, les matériaux composites bio-inspirés présentant une variation progressive de propriétés physiques (thermique ou/et mécanique), ont attiré l'intérêt de nombreux chercheurs et ingénieurs. Ces matériaux dits à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials (FGM)) ont été employés dans plusieurs applications en ingénierie civile, biomédicale, automobile, aéronautique, aérospatiale, semi-conducteurs, nucléaire, etc. Des revues complètes des recherches sur la fabrication, la caractérisation, l'analyse et les applications des FGM peuvent être trouvées dans les articles [1, 2] et dans le livre [3].

Ces dernières années, une grande attention a été accordée à l'étude de la propagation ondes guidées ultrasonores (OGU) dans les structures fabriquées avec de matériaux FGM pour une évaluation non-destructive de leur état de santé. Différentes techniques analytiques, numériques et hybrides ont été développées pour le calcul des propriétés dispersives des OGU dans une structure inhomogène où les propriétés varient continuellement selon l'épaisseur [4–8]. D'une part, les solutions analytiques n'ont été obtenues que dans certains cas particuliers et restent souvent inaccessibles dans les cas pratiques. D'autre part, la grande partie des méthodes numériques matricielles et hybrides reposent sur l'approximation de la variation continue par un modèle multicouche homogène de propriétés moyennées. Cette approche nécessite un grand nombre de couches/éléments afin de garantir une bonne convergence. En particulier, lorsque des gradients complexes et des hautes fréquences sont utilisés. Ceci entraîne une grande consommation de ressources informatique et/ou une erreur significative. En revanche, les techniques basées sur les méthodes matricielles présentent des problèmes de stabilité numérique.

Une idée prometteuse consiste en l'utilisation des formulations éléments finis d'ordre élevé pour atteindre des taux de convergence supérieurs. Entre autres, la méthode de Galerkin discontinue (DG-FEM) a été utilisée avec succès afin de simuler la propagation des ondes élastiques [9].

Elle présente des avantages intéressants par rapport aux formulations classiques. Premièrement, elle permet d'utiliser un degré polynomial et un taux d'échantillonnage faibles pour obtenir une précision élevée. Deuxièmement, il a été constaté que dans les applications où les paramètres changent à l'intérieur des éléments, elle fournit une plus grande précision. De plus, elle offre la possibilité de traiter des maillages d'éléments finis non-conformes pour modéliser des milieux hétérogènes. Ils peuvent s'adapter aux discontinuités non seulement des paramètres, mais aussi du champ d'onde.

Dans ce travail, une méthode semi-analytique élément fini de Galerkin discontinue (SADG-FE [10]), est utilisée afin de calculer les propriétés de dispersion des OGU dans des structures de type plaque constituées deux matériaux complexes : (1) Un matériau FGM binaire à deux phases, constitué de deux matériaux isotropes différents qui changent progressivement de l'un à l'autre. Le gradient effectif des propriétés est exprimée par une loi polynomiale continue en fonction de l'épaisseur; (2) Un matériau FGM multi-couches dont chacune d'elles est homogène. Enfin, les deux cas de distributions continue et multi-couche sont comparés et les résultats sont discutés.

Dans la première section, une description générale du problème est donnée et la méthode SADG-FE est présentée. La deuxième section est consacrée aux simulations numériques. Des comparaisons et des discussions des résultats sont données. Enfin, une conclusion résume cette étude et son intérêt pour les travaux futurs.

## 2 Méthode SADG-FE pour les plaques

### 2.1 Description générale du problème

Une plaque homogène d'épaisseur constante  $2d$ , de dimensions latérales infinies et libre de toute contrainte externe est étudiée. Le plan de déformations coïncide avec les axes  $(x_3, x_1)$  et la direction de propagation est suivant  $x_3$ , comme le montre la figure (1).

En l'absence de forces externes, les ondes élastiques dans la plaque sont gouvernées par l'équation générale du

mouvement :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

où  $u_i$  sont les composantes du champ de déplacement  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$  et  $T$  désigne la transposée.  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$  sont les composantes du tenseur des contraintes, avec  $C_{ijkl}$  est les coefficients élastiques du matériau et  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$  sont les composantes du tenseur de déformation.  $\rho$  est la masse volumique du matériau et  $t$  est le temps. La convention de sommation sur les indices répétés de Einstein est adoptée.

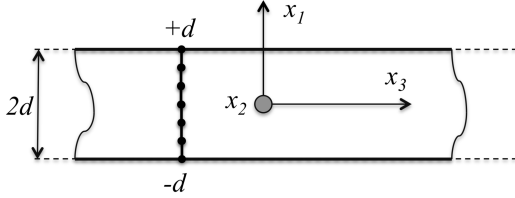


FIGURE 1 – Géométrie d'une plaque homogène d'épaisseur  $2d$  et de dimensions latérales infinies en coordonnées cartésiennes [10].

Sous hypothèse de déformations planes et d'invariance des propriétés géométriques et matérielles dans  $(x_2, x_3)$ , les solutions recherchées sont en régime harmonique et indépendantes de la variable  $x_2$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(x_1)e^{i(kx_3 - \omega t)} \quad (2)$$

où  $\omega$  est la fréquence angulaire et  $k$  est le nombre d'onde. Ainsi, la modélisation est réduite de deux dimensions à une dimension.

Les conditions aux limites associées aux surfaces (supérieure et inférieure) libres correspondent à la contrainte  $\sigma$  nulle en  $x_1 = \pm d$  :

$$\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_1 = 0. \quad (3)$$

En substituant l'équation (2) dans les équations (1) et (3) et après simplification et réarrangement, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( ik [\mathbf{M}_1] \mathbf{U} \right) \\ - \left( k^2 [\mathbf{M}_2] - \omega^2 [\mathbf{M}_3] \right) \mathbf{U} = 0, \\ [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1} (\pm d) + ik [\mathbf{M}_4] \mathbf{U} (\pm d) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

avec  $[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$  des matrices de dimensions  $3 \times 3$  contenant les coefficients élastiques du matériau.

Dans le cas isotrope, ce système présente un découplage entre les équations associées aux modes de Lamb (composantes  $(U_1, U_3)$ ) et celle correspondante aux modes SH (composante  $U_2$ ). Dans cette étude, uniquement les modes Lamb sont considérées. Par conséquent, les matrices  $[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$  sont réduites à une taille de  $2 \times 2$  et elles sont exprimées en utilisant uniquement les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , tel que :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_0] &= \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, & [\mathbf{M}_1] &= \begin{bmatrix} 0 & (\lambda + \mu) \\ (\lambda + \mu) & 0 \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{M}_2] &= \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) \end{bmatrix}, & [\mathbf{M}_3] &= \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{M}_4] &= \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{U} &= [U_1 \ U_3]^T. \end{aligned}$$

## 2.2 Formulation variationnelle discontinue

Le système (4) est défini sur une ligne de l'épaisseur de la plaque représentée par le domaine  $\mathcal{I} = [-d, +d]$  sur la figure (1). Par souci de clarté, notons  $x$  la variable  $x_1$  pour tout ce qui suit. Le domaine physique  $\mathcal{I}$  est approché par le domaine de calcul  $\mathcal{I}_h$ , un maillage composée de  $n$  éléments unidimensionnels  $E_j = [x_j, x_{j+1}]$ , où  $\{j = 0, \dots, n-1\}$  est l'index des éléments. Le maillage peut être non uniforme.

Les fonctions de pondération peuvent être choisies de sorte que la variable de champ, ou ses dérivées ou généralement les deux, sont considérées discontinues à travers les limites de l'élément, tandis que la continuité du domaine de calcul est maintenue. Soit  $\mathcal{D}_p$  l'espace des fonctions de test  $v(x)$  discontinues par morceaux sur  $\mathcal{I}_h = \cup_j^n E_j$  :

$$\mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h) = \{v : v|_{E_j} \in \mathbb{P}_p(E_j) \quad \forall j = 1, \dots, n\},$$

$\mathbb{P}_p(E_j)$  est l'espace des polynômes d'interpolation d'ordre inférieur ou égale à  $p$  sur  $E_j$ . En conséquence, nous définissons le saut  $[[\bullet]]$  et la moyenne  $\{\{\bullet\}\}$  à travers l'interface entre deux éléments adjacents ( $E_1$  et  $E_2$ ) :

$$\begin{aligned} [[\bullet]] &= (\bullet|_{E_1}) - (\bullet|_{E_2}), \\ \{\{\bullet\}\} &= \frac{1}{2}(\bullet|_{E_1}) + \frac{1}{2}(\bullet|_{E_2}). \end{aligned} \quad (5)$$

La taille du maillage est également définie

$$h_m(j) = \max(|E_{j-1}|, |E_j|).$$

Le schéma général de Galerkin discontinue correspondant à la discrétisation de (4) est obtenu [10] :

$$a_0(\mathbf{U}, v) + ik a_1(\mathbf{U}, v) + k^2 a_2(\mathbf{U}, v) - \omega^2 a_3(\mathbf{U}, v) = 0 \quad (6)$$

où les formes bilinéaires globales de chaque opérateur  $a_{i=0,1,2,3}(\cdot, \cdot)$  sont données par :

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{U}, v) &= \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \int_E [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx - \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \left\{ [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}(x_j)}{\partial x} \right\} \right\} [[v(x_j)]] \\ &+ \epsilon \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \left\{ [\mathbf{M}_0] \frac{\partial v(x_j)}{\partial x} \right\} \right\} [[\mathbf{U}(x_j)]] + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha}{h_m(j)} [[\mathbf{U}(x_j)]] [[v(x_j)]] \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma}{h_m(j)} \left\{ \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}(x_j)}{\partial x} \right\} \right\} \left\{ \left\{ \frac{\partial v(x_j)}{\partial x} \right\} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{U}, v) &= \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \int_E [\mathbf{M}_1] \mathbf{U} \frac{\partial v}{\partial x} dx - \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \left\{ [\mathbf{M}_1] \mathbf{U}(x_j) \right\} \right\} [[v(x_j)]] \\ &- \theta \sum_{j=1}^{n-1} [[\mathbf{U}(x_j)]] [[v(x_j)]] + \sum_{j=0, n} \left\{ \left\{ [\mathbf{M}_5] \mathbf{U}(x_j) \right\} \right\} [[v(x_j)]], \end{aligned}$$

$$a_{i=2,3}(\mathbf{U}, v) = \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \int_E [\mathbf{M}_{i=2,3}] \mathbf{U} v dx$$

avec :

$$[\mathbf{M}_5] = [\mathbf{M}_1] - [\mathbf{M}_4].$$

Rappelons que  $\epsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\theta$  sont des nombres réels. La dérivation dite symétrique est considérée :  $\epsilon = -1$  et  $\gamma = \theta = 0$ .

## 2.3 Discrétisation par éléments d'ordre supérieur

La discrétisation de la forme bilinéaire par approximation nodale permet de construire le système algébrique. Dans chaque cellule  $E_j$ , la solution est exprimée par :

$$U_{i=1,2,3}^{(j)}(x) = \sum_{l=0}^p P_l(x) U_{l=1,3}^{(j)} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{U}}_{i=1,2,3}^{(j)}, \quad (7)$$

appartenant au même espace  $\mathbb{P}_p(E_j)$  que la fonction test  $v = \mathbf{P}^T$ .  $\{P_l(x), l = 0, 1, \dots, p\}$  sont les polynômes d'interpolation d'ordre  $p$ .  $\tilde{\mathbf{U}}_{i=1,2,3}^{(j)}$  est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément  $j$  correspondant à la composante de champ  $U_{i=1,2,3}$ .

Dans ce travail, les polynômes de Lagrange ( $p \geq 3$ ) sont utilisés [9]. Pour une dimension, l'expression du polynôme au nœud  $l$  est donnée par :

$$P_l(x) = \frac{\prod_{l=0, l \neq i}^p (x - x_l)}{\prod_{l=0, l \neq i}^p (x_i - x_l)}. \quad (8)$$

En substituant  $\mathbf{U}$  dans l'équation (6) par son approximation (7) et en calculant pour tous les éléments, un problème aux valeurs propres quadratique (QEP) est obtenu :

$$\left[ ([\mathbf{A}_0] - \omega^2 [\mathbf{A}_3]) + ik [\mathbf{A}_1] + k^2 [\mathbf{A}_2] \right] \{\tilde{\mathbf{U}}\} = 0 \quad (9)$$

où  $\{\tilde{\mathbf{U}}\} = [\tilde{\mathbf{U}}_1 \tilde{\mathbf{U}}_2 \tilde{\mathbf{U}}_3]^T$  est le vecteur global des déplacements nodaux généralisés.  $[\mathbf{A}_{i=0,1,2,3}]$  sont les matrices de rigidité et de masse globales :

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_0] &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \int_{E_j} \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial x} [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} dx + \mathbf{T}_j^0 \right), \\ [\mathbf{A}_1] &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \int_{E_j} \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial x} [\mathbf{M}_1] \mathbf{P} dx + \mathbf{T}_j^1 \right) + [\mathbf{M}_5] [\mathbf{B}], \\ [\mathbf{A}_2] &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} \mathbf{P}^T [\mathbf{M}_2] \mathbf{P} dx, \\ [\mathbf{A}_3] &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} \mathbf{P}^T [\mathbf{M}_3] \mathbf{P} dx. \end{aligned}$$

Avec  $\mathbf{T}_j^{0,1}$  sont les matrices de flux élémentaires.  $[\mathbf{B}]$  est la matrice de contribution des éléments de frontière ayant des valeurs nulles à l'exception des déplacements nodaux aux limites. Notez que  $[\mathbf{A}_{i=0,1,2,3}]$  sont des matrices carrées complexes partitionnées en blocs et de taille  $\{(2m \times 2m), m = n \times (p + 1)\}$ . Le système de  $2m$  équations quadratiques admet  $2 \times 2m$  solutions non-triviales ( $k_i, \{\tilde{\mathbf{U}}\}_i; i = 1, 2, \dots, 4m$ ).

## 2.4 Matériaux hétérogènes

### 2.4.1 Système multi-couches

Pour un matériau multi-couches, chaque couche est discrétisée en utilisant un ou plusieurs éléments comme montré dans la figure (2). Comme la formulation discontinue est locale, elle permet aux éléments de ne pas se chevaucher de sorte que chaque élément  $E_j$  constitue une couche d'un *Matériau*<sub>(j)</sub> avec ses propres coefficients et matrices  $[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$ . Les conditions de continuité entre les couches sont incluses directement dans la formulation du flux numérique.

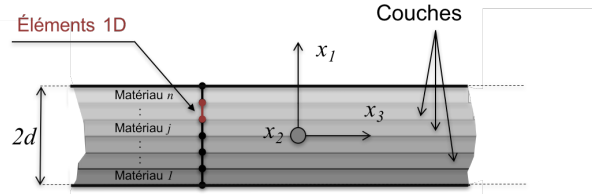


FIGURE 2 – Discrétisation de l'épaisseur d'une plaque multicouche.

### 2.4.2 Gradient fonctionnel de propriétés

Pour ce type de matériaux, un terme de gradient impliquant la fonction dérivée des coefficients est ajouté au système différentiel (4). Après simplification et réarrangement, le problème (9) est modifié tel que :

$$[\mathbf{A}_1^*] = [\mathbf{A}_1] + [\mathbf{A}'_1]$$

avec :

$$[\mathbf{A}'_1] = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} \mathbf{P}^T [\mathbf{M}'_1] \mathbf{P} dx.$$

Dans le cas d'un matériaux isotrope :

$$[\mathbf{M}'_1] = \begin{bmatrix} 0 & \mu' \\ \lambda' & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est à noter que ce terme disparaît automatiquement lorsque les coefficients sont constants.

## 3 Résultats numériques

### 3.1 Généralités

Dans ce qui suit, une plaque constituée d'un matériau à gradient fonctionnel de type Métal-à-Céramique est considéré [10]. Les propriétés des deux matériaux isotropes sont données dans le tableau (1). La surface inférieure ( $x = -d$ ) est considérée à 100% Chrome (Cr), tandis que le côté supérieur ( $x = +d$ ) est à 100% Céramique (Cer).

Matériau	$\lambda$ (GPa)	$\mu$ (GPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Chrome	74.2	102.5	7190
Céramique	138	118.11	3900

TABLEAU 1 – Propriétés des matériaux : Céramique et Chrome, utilisés pour la plaque FGM.

L'épaisseur de la plaque ( $2d = 12$  mm) est discrétisée en utilisant des éléments de Lagrange d'une même taille  $h_j = h$ . La forme bilinéaire globale est utilisée avec un facteur de pénalité  $\alpha = 30$  afin d'assurer la stabilité. Le problème (9) est résolu pour une gamme de fréquence  $f = [0 \ 3]$  MHz. Les quantités sont normalisées en utilisant les paramètres de Chrome. Pour des raisons de clarté, seuls les modes propagatifs ( $k$  réel positif adimensionnés) sont présentés.

### 3.2 Gradient de propriétés

Les caractéristiques du matériau FGM Chrome-Céramique varient en fonction de l'épaisseur selon une loi de la forme :

$$C^{FGM}(x) = (C^{Cer} - C^{Cr}) \left( \frac{x+d}{2d} \right)^{P_p} + C^{Cr}, \quad (10)$$

où  $C$  représente l'une des propriétés du matériau ( $\rho, \mu$  ou  $\lambda$ ).  $P_p$  est un nombre entier positif représentant le coefficient du gradient.

L'épaisseur est partitionnée en utilisant  $n = 90$  éléments linéaires ( $p = 1$ ). Afin d'effectuer une première validation pour le cas isotrope, une plaque de Chrome est considérée. Les courbes de dispersion de la vitesse de phase  $C_p$  en fonction du nombre d'onde adimensionné  $k2d$  résultantes sont comparées avec les solutions analytiques (figure 3). Un très bon accord obtenu.

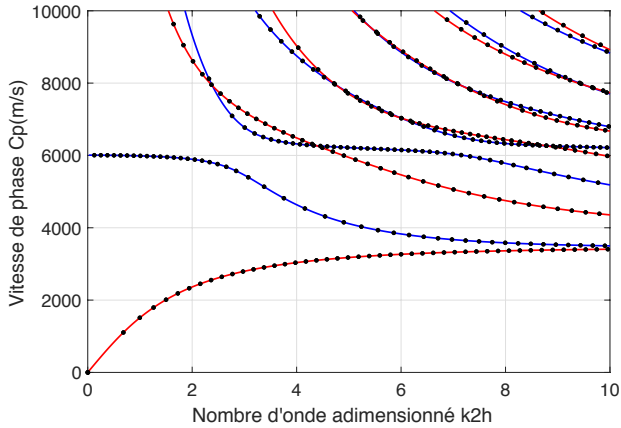


FIGURE 3 – Courbes de dispersion de la vitesse de phase  $C_p$  des modes Lamb dans une plaque de Chrome. Les résultats numériques du SADG-FE (points noirs) sont superposés aux résultats analytiques (traits pleins).

Ensuite, la distribution (10) est considérée comme une fonction linéaire avec  $P_p = 1$ . La figure (4) montre les courbes de dispersion de la vitesse de phase  $C_p$  en fonction du nombre d'onde adimensionné  $k2d$ . Une très bonne concordance entre les résultats est observée.

### 3.3 Modèle FGM multi-couches

Dans le cas d'une plaque FGM multi-couches, les coefficients sont considérés constants au niveau élémentaire. Par conséquent, pour la distribution discrète, les caractéristiques élémentaires  $C^{FGM}(E_j)$  sont prises comme la moyenne des valeurs nodales dans le cas continu. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de la figure (4). Pour éviter la redondance et étudier la convergence de

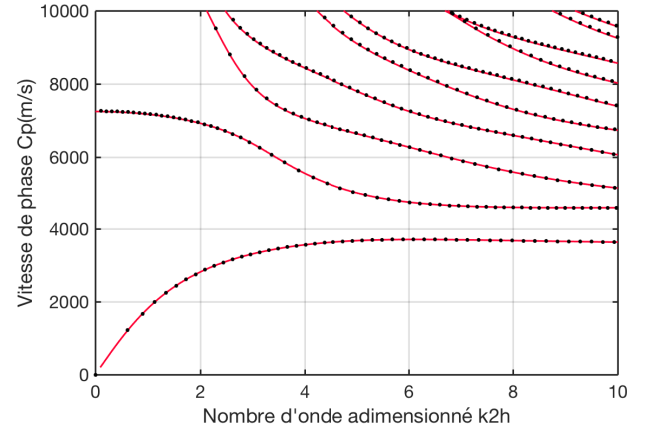


FIGURE 4 – Courbes de dispersion de la vitesse de phase  $C_p$  des modes Lamb dans une plaque en matériau à gradient fonctionnel libre en Chrome-Céramique : résultats numériques du SADG-FE (points noirs) comparés aux résultats de [11] (traits pleins).

l'approximation par rapport au nombre de couches utilisé, seule l'erreur est présentée.

L'erreur est calculée pour chacun des premiers modes  $m_{(i=1, \dots, 6)}$  présenté dans la figure (4), pour différents nombres d'éléments/couches  $n = 30$  à  $90$  avec un pas de 10. L'écart sur le nombre d'onde adimensionné  $k2d$  est calculé en utilisant l'erreur quadratique moyenne (RMSE) :

$$\bar{\mathcal{E}}_{k2d} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_w} (k2d_{cont} - k2d_{disc})^2}{n_w}}. \quad (11)$$

où  $n_w$  est le nombre de points de fréquence utilisé.

La figure (5) montre l'évolution en échelle semi-logarithmique de la différence entre les résultats des deux solutions en fonction du nombre d'éléments/couches du système. Les solutions de la distribution discontinue tendent vers le cas continu lorsque la taille des couches diminue.

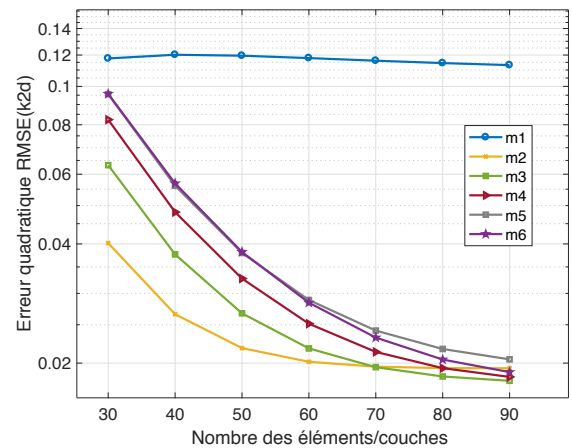


FIGURE 5 – Convergence des résultats de la distribution discontinue par rapport au nombre d'éléments/couches.

A travers l'exemple numérique montré dans cette section, la méthode proposée s'est avérée très pratique pour la modélisation des matériaux hétérogènes : FGM et FGM multi-couches. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la littérature. De plus, grâce à une résolution

via un problème aux valeurs propres, la méthode est stable et convergente pour les basses et les hautes fréquences.

### 3.3.1 Convergence des éléments d'ordres supérieurs

Dans ce qui suit, les polynômes d'ordres supérieurs sont considérés. Reprenons les cas de la plaque isotrope. Le problème (9) a maintenant une taille fixe  $N = 360$ , i.e. même nombre de points du maillage. La convergence est examinée pour les éléments de Lagrange d'ordres  $p = 2$  à 5 correspondant respectivement à  $n = 60, 45, 36, 30$ . La figure (6) montre l'erreur relative absolue en (%) pour le mode  $A_0$  en fonction du nombre d'onde exact  $kh$  en échelle logarithmique.

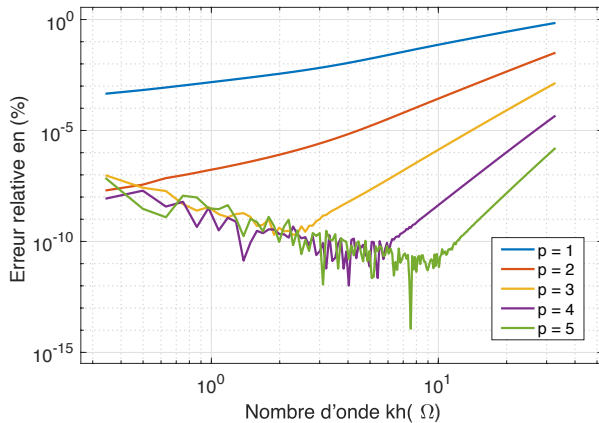


FIGURE 6 – Évolution de l'erreur relative absolue en (%) sur les nombres d'onde du mode  $A_0$  ( $\mathcal{E}_k = 100 \frac{|kh_{ex} - kh_{num}|}{kh_{ex}}$ ) en échelle logarithmique pour les éléments d'ordres  $p = 1 - 5$ .

Les résultats obtenus montrent une réduction importante de l'erreur en fonction de l'ordre  $p$ . L'erreur décroît pour atteindre une précision d'environ dix chiffres significatifs pour les éléments d'ordre ( $p \geq 3$ ).

## 4 Conclusion

Les résultats numériques présentés dans ce travail constituent une validation de la méthode proposée. En outre, la méthode SADG-FE s'est montré très efficace pour modéliser des matériaux hétérogènes. La gestion naturelle de la discontinuité de l'interface et des conditions aux limites libres permet des résolutions très précises des caractéristiques dispersives des ondes guidées. En outre, l'utilisation de polynômes d'ordre supérieur offre un avantage intéressant par rapport à la méthode standard. La précision peut être améliorée en utilisant des éléments d'ordres supérieurs sur des maillages relativement grands. Ainsi, elle permet d'optimiser les coûts de calculs (opérations d'assemblage des matrices de rigidité et résolution du problème aux valeurs propres) tout en obtenant une excellente précision.

## Remerciement

Ce travail de recherche est soutenu par le Ministre de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation de France et effectué à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis.

## Références

- [1] A. J. Markworth, K. S. Ramesh, and W. P. Parks. Modelling studies applied to functionally graded materials. *Journal of Materials Science*, 30(9) :2183–2193, May 1995.
- [2] M. Naebe and K. Shirvanimoghaddam. Functionally graded materials : A review of fabrication and properties. *Applied Materials Today*, 5 :223–245, December 2016.
- [3] Y. Miyamoto. *Functionally graded materials : design, processing, and applications*. 1999.
- [4] G. R. Liu, X. Han, and K. Y. Lam. Material Characterization of FGM Plates Using Elastic Waves and an Inverse Procedure. *Journal of Composite Materials*, 35(11) :954–971, June 2001.
- [5] J.E. Lefebvre, V. Zhang, J. Gzalet, T. Gryba, and V. Sadaune. Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates : an extension of the Legendre polynomial approach. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 48(5) :1332–1340, September 2001.
- [6] X. Han, G. R. Liu, Z. C. Xi, and K. Y. Lam. Characteristics of waves in a functionally graded cylinder. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(3) :653–676, January 2002.
- [7] W.Q. Chen, H.M. Wang, and R.H. Bao. On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate. *Composite Structures*, 81(2) :233–242, November 2007.
- [8] X. Cao, F. Jin, and I. Jeon. Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique. *NDT & E International*, 44(1) :84–92, January 2011.
- [9] Jonás D. De Basabe, Mrinal K. Sen, and Mary F. Wheeler. The interior penalty discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation : grid dispersion. *Geophysical Journal International*, 175(1) :83–93, October 2008.
- [10] S.E. Hebaz, F. Benmeddour, E. Moulin, and J. Assaad. Semi-analytical discontinuous Galerkin finite element method for the calculation of dispersion properties of guided waves in plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 143(1) :460–469, January 2018.
- [11] F. Benmeddour, E. Moulin, and J. Assaad. Numerical investigation of the functionally graded materials by the interaction of the plate guided waves with discontinuities and cracks. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(5) :3446–3446, May 2013.