



HAL
open science

Sur les suites des descendants d'un polygone

Aziz El Kacimi Alaoui, Abdellatif Zeggar

► **To cite this version:**

Aziz El Kacimi Alaoui, Abdellatif Zeggar. Sur les suites des descendants d'un polygone. 2024. hal-04444952

HAL Id: hal-04444952

<https://uphf.hal.science/hal-04444952>

Preprint submitted on 7 Feb 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur les suites des descendants d'un polygone

par

AZIZ EL KACIMI ALAOU ET ABDELLATIF ZEGGAR

(Janvier 2024)

Résumé

Soient $\mathcal{P} = [A_1, \dots, A_n]$ un n -polygone (avec $n \geq 4$) du plan euclidien \mathbb{E} et λ un réel dans l'intervalle $]0, 1[$. On note $\mathcal{P}_1 = [A'_1, \dots, A'_n]$ le n -polygone dont les sommets A'_1, \dots, A'_n sont les λ -barycentres $A'_k = (1 - \lambda)A_k + \lambda A_{k+1}$, avec $1 \leq k \leq n$ et $A_{n+1} = A_1$; on dira que \mathcal{P}_1 est le *premier λ -descendant* de $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$. On itère ce processus; à l'étape $q \geq 1$ on obtient le $q^{\text{ème}}$ λ -descendant \mathcal{P}_q de \mathcal{P} . On définit ainsi une suite $\{\mathcal{P}_q\}$ de n -polygones qu'on appelle la suite des λ -descendant de \mathcal{P} .

Dans ce papier : (I) on donne une généralisation du théorème de Varignon à n'importe quel polygone pair et pondéré; (II) on montre que, pour tout n pair et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang q_ε tel que, pour tout $q \geq q_\varepsilon$, \mathcal{P}_q est ε -multiparallélogramme, c'est-à-dire ε -proche d'un *multiparallélogramme* (n -polygone pair ayant un centre de symétrie).

1 Polygones et Multiparallélogrammes

Dans tout ce qui suit \mathbb{E} sera le plan affine euclidien. Si A et B sont deux points de \mathbb{E} , $[A, B]$ sera le segment d'extrémités A et B donné par $[A, B] = \{(1 - t)A + tB : t \in [0, 1]\}$. Sa *longueur* AB est la norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ du vecteur \overrightarrow{AB} .

1.1 Définitions

Pour tout nombre entier $n \geq 3$, on appellera *n -polygone* (on dit aussi *n -gone* ou encore polygone d'ordre n) de \mathbb{E} , tout ensemble $\{[A_1, A_2], \dots, [A_n, A_1]\}$ (ligne brisée décrite dans cet ordre) constitué de segments $[A_1, A_2], \dots, [A_n, A_1]$ de \mathbb{E} . Ici les points A_1, \dots, A_n sont supposés distincts deux à deux.

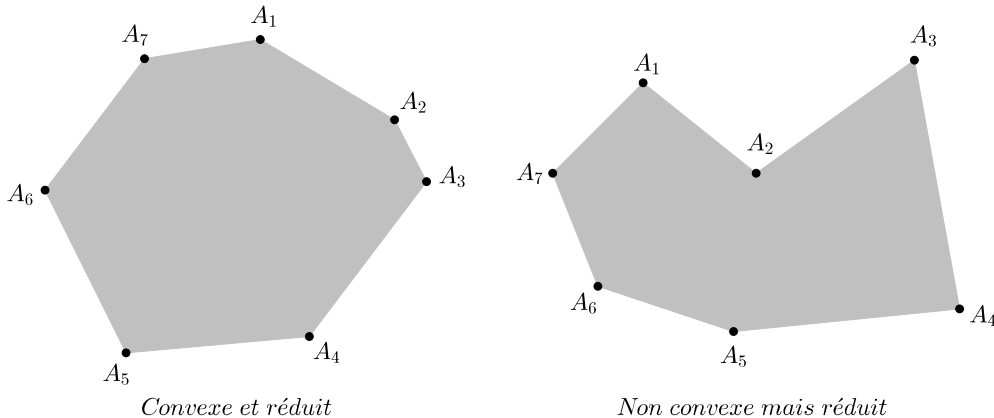
Un tel ensemble sera noté $[A_1, \dots, A_n]$. On dira que $[A_1, \dots, A_n]$ est *pair* (resp. *impair*) si n est pair (resp. impair).

1.1.1. Pour tout entier relatif p , on posera $A_p = A_k$ où k est le reste de la division euclidienne de p par n ($k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$). En particulier, $A_{n+1} = A_1$.

1.1.2. Il est bien connu qu'un 3-polygone, un 4-polygone, un 5-polygone, un 6-polygone... sont appelés respectivement *triangle*, *quadrilatère*, *pentagone*, *hexagone*...

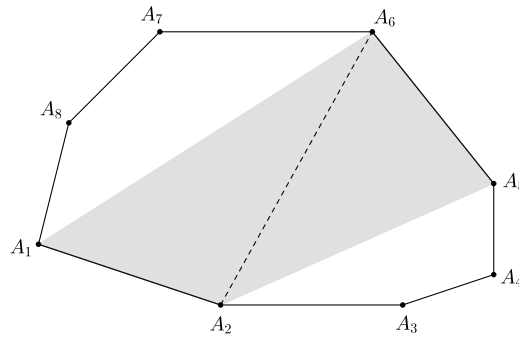
1.1.3. Les points A_k et les segments $[A_k, A_{k+1}]$ sont respectivement les *sommets* et les *côtés* (ou *arêtes*) du n -polygone $[A_1, \dots, A_n]$. Si A_i et A_j sont deux sommets non consécutifs (*i.e.* $|i - j| \neq 1$), on dit que le segment $[A_i, A_j]$ est une *diagonale* du polygone.

1.1.4. Le polygone $[A_1, \dots, A_n]$ sera dit *convexe* si, pour chaque côté $[A_k, A_{k+1}]$, l'un des deux demi-plans fermés de frontière la droite $(A_k A_{k+1})$ contient tous les sommets du polygone.



1.1.5. Soit $[A_1, \dots, A_n]$ un n -polygone pair avec $n = 2r$. Les deux sommets A_k et A_{k+r} seront dits *sommets opposés*. De même, les deux segments $[A_i, A_j]$ et $[A_{i+r}, A_{j+r}]$ seront appelés *segments*

opposés. Une diagonale du type $[A_k, A_{k+r}]$ sera appelée *diagonale principale*. Un quadrilatère du type $[A_k, A_{k+1}, A_{k+r}, A_{k+r+1}]$, avec $1 \leq k \leq r$, sera appelé *quadrilatère principal*.



Dans cet octogone A_2A_6 est une diagonale principale et $A_1A_2A_5A_6$ est un quadrilatère principal

Rappelons qu'un *parallélogramme* est un quadrilatère $[A, B, C, D]$ tel que les diagonales $[A, C]$ et $[B, D]$ ont le même milieu. Cette condition est équivalente à l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$.

1.1.6. On appellera *multipartallélogramme*, tout polygone pair dont tous les quadrilatères principaux sont des parallélogrammes. Par exemple tout polygone régulier pair est un multipartallélogramme.

1.2 Proposition

Un polygone $[A_1, \dots, A_{2r}]$ est un multipartallélogramme si, et seulement si, il existe une symétrie centrale qui envoie A_k sur A_{k+r} pour $k = 1, \dots, r$.

Preuve. Si $[A_1, \dots, A_{2r}]$ est un multipartallélogramme, pour tout indice $k \in \{1, \dots, r\}$ les diagonales principales $[A_k, A_{k+r}]$ ont le même milieu O . Donc pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, A_{k+r} est le symétrique de A_k par rapport au point O ; celui-ci est donc un centre (l'unique d'ailleurs) de symétrie de $[A_1, \dots, A_{2r}]$.

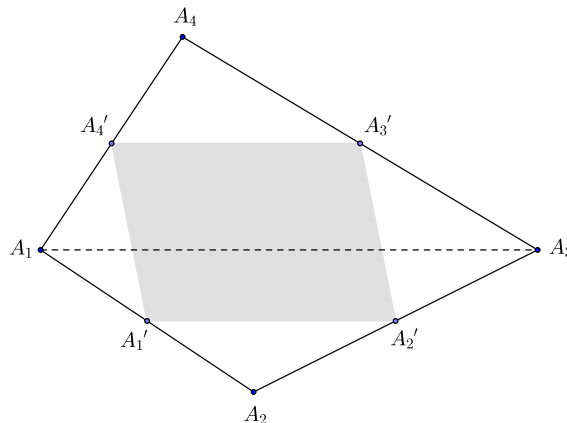
Réciproquement, si $[A_1, \dots, A_{2r}]$ a un centre de symétrie O , tel que les sommets A_{r+1}, \dots, A_{2r} sont respectivement les symétriques des sommets A_1, \dots, A_r , alors les diagonales principales $[A_k, A_{k+r}]$ ont le point O comme milieu commun et donc le polygone $[A_1, \dots, A_{2r}]$ est un multipartallélogramme. \square

1.3 Le théorème classique de Varignon

Soient $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ un quadrilatère quelconque et soient A'_1, A'_2, A'_3 et A'_4 les milieux respectifs des cotés $[A_1, A_2], [A_2, A_3], [A_3, A_4]$ et $[A_4, A_1]$. Alors $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$ est un parallélogramme.

La démonstration de ce théorème est presque immédiate comme on va le voir, mais ceci n'enlève rien à la beauté et à l'intérêt géométrique de ce dernier.

Preuve. D'après le théorème de Thalès, le segment $[A'_1, A'_2]$ est parallèle au segment $[A_1, A_3]$ et sa longueur vaut la moitié de ce dernier. De façon analogue, il en est de même pour le segment $[A'_4, A'_3]$. On en déduit que $[A'_1, A'_2]$ et $[A'_4, A'_3]$ sont parallèles et égaux, c'est-à-dire $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$ est un parallélogramme. \square



Mais voici une deuxième preuve à l'aide des barycentres; nous la mimerons pour donner une généralisation de ce théorème au cas d'un polygone quelconque.

Pour prouver que le quadrilatère $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$ est un parallélogramme, nous nous servons de l'associativité des barycentres. En effet, si $O = \text{Bar}\{(A_1, 1), (A_2, 1), (A_3, 1), (A_4, 1)\}$ est l'isobarycentre des sommets A_1, A_2, A_3 et A_4 alors :

$$O = \text{Bar}\{(A'_1, 2), (A'_3, 2)\} = \text{Bar}\{(A'_1, 1), (A'_3, 1)\} \text{ et } O = \text{Bar}\{(A'_2, 2), (A'_4, 2)\} = \text{Bar}\{(A'_2, 1), (A'_4, 1)\}.$$

Les diagonales $[A'_1, A'_3]$ et $[A'_2, A'_4]$ ont donc le même milieu O . Ce qui prouve que $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$ est bien un parallélogramme. \square

Comme nous l'avons déjà annoncé, voici une généralisation du théorème de Varignon. Elle a la forme qui suit. Pour la preuve, nous utiliserons l'associativité des barycentres comme ce que nous avons fait dans le cas d'un quadrilatère.

2 Généralisation du théorème de Varignon

2.1 Le cas d'un quadrilatère

Soient $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ un quadrilatère quelconque et λ un nombre réel dans l'intervalle $]0, 1[$. On associe à chacun des deux côtés opposés $[A_1, A_2]$ et $[A_3, A_4]$ leurs λ -barycentres respectifs

$$A'_1 = (1 - \lambda)A_1 + \lambda A_2 \text{ et } A'_3 = (1 - \lambda)A_3 + \lambda A_4.$$

De même, On associe à chacun des deux autres côtés opposés $[A_2, A_3]$ et $[A_4, A_1]$ leurs $(1 - \lambda)$ -barycentres respectifs

$$A'_2 = \lambda A_2 + (1 - \lambda)A_3 \text{ et } A'_4 = \lambda A_4 + (1 - \lambda)A_1.$$

Le quadrilatère $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$ ainsi obtenu est un parallélogramme.

Preuve. Soit le barycentre $O = \text{Bar}\{(A_1, (1 - \lambda)), (A_2, \lambda), (A_3, (1 - \lambda)), (A_4, \lambda)\}$. Alors l'associativité des barycentres permet d'obtenir :

$$O = \text{Bar}\{(A'_1, 1), (A'_3, 1)\} \text{ et } O = \text{Bar}\{(A'_2, 1), (A'_4, 1)\}.$$

Le point O est donc le milieu commun des deux diagonales $[A'_1, A'_3]$ et $[A'_2, A'_4]$ du quadrilatère $[A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]$. Ce qui prouve que ce dernier est bien un parallélogramme. \square

Ce résultat généralise le théorème classique de Varignon rappelé dans la section précédente. Ce dernier correspond au cas où $\lambda = \frac{1}{2}$.

Comme nous l'avons déjà annoncé, voici une généralisation du théorème de Varignon à un polygone d'ordre pair plus grand ou égal à 4. Elle a la forme qui suit. Pour la preuve, nous utiliserons l'associativité des barycentres comme ce que nous avons fait dans le cas d'un quadrilatère.

2.2 Théorème principal I (Le cas général d'un polygone pair)

Soient $[A_1, \dots, A_{2r}]$ un polygone pair et $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ un r -uplet d'éléments de l'intervalle $]0, 1[$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1$. On pose $\lambda_{j+r} = \lambda_j$, pour $1 \leq j \leq r$, et on associe à chaque sommet A_k le barycentre $G_k = \text{Bar}\{(A_k, \lambda_k), \dots, (A_{k+r-1}, \lambda_{k+r-1})\}$. Alors le polygone $[G_1, \dots, G_{2r}]$ est un multiparallélogramme.

Preuve. On doit prouver que toutes les diagonales principales $[G_k, G_{k+r}]$ du polygone $[G_1, \dots, G_{2r}]$ ont le même milieu. Considérons le barycentre $G = \text{Bar}\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_{2r}, \lambda_{2r})\}$. Les deux ensembles de points pondérés (où on a posé $A_{k+2r-1} = A_{k-1}$) :

$$\Gamma_k = \{(A_k, \lambda_k), \dots, (A_{k+r-1}, \lambda_{k+r-1})\} \text{ et } \Gamma'_k = \{(A_{k+r}, \lambda_{k+r}), \dots, (A_{k+2r-1}, \lambda_{k+2r-1})\}.$$

forment une partition de l'ensemble des sommets pondérés $\Gamma = \{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_{2r}, \lambda_{2r})\}$. De plus, Γ_k , ayant un poids total égal à 1, a pour barycentre le point G_k et Γ'_k , ayant également un poids total égal

à 1, admet pour barycentre le point G_{k+r} . La règle d'associativité des barycentres permet donc d'avoir la relation :

$$G = \text{Bar}\{(G_k, 1), (G_{k+r}, 1)\}.$$

Toutes les diagonales principales $[G_k, G_{k+r}]$ ont donc le point G comme milieu commun. Ce qui prouve que le polygone $[G_1, \dots, G_{2r}]$ est bien un multiparallélogramme. \square

Le nombre de sommets est 2×3 .

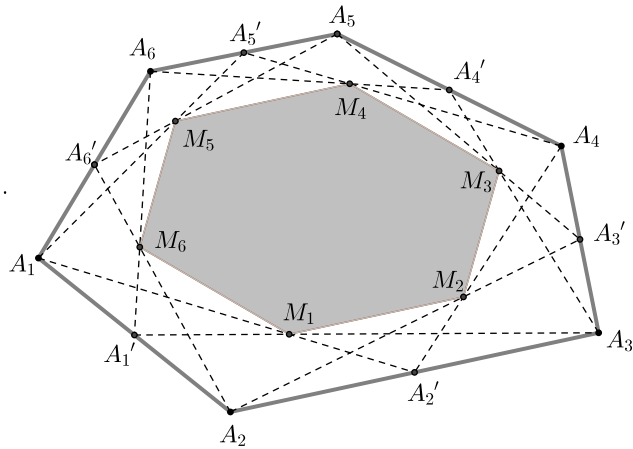
Pour $k = 1, \dots, 6$, A'_k est le milieu de $[A_k A_{k+1}]$.

Donc M_k est l'isobarycentre de A_k, A_{k+1}, A_{k+2} .

On obtient ainsi l'hexagone $[M_1, \dots, M_6]$

dont on voit clairement que c'est un

Multiparallélogramme.



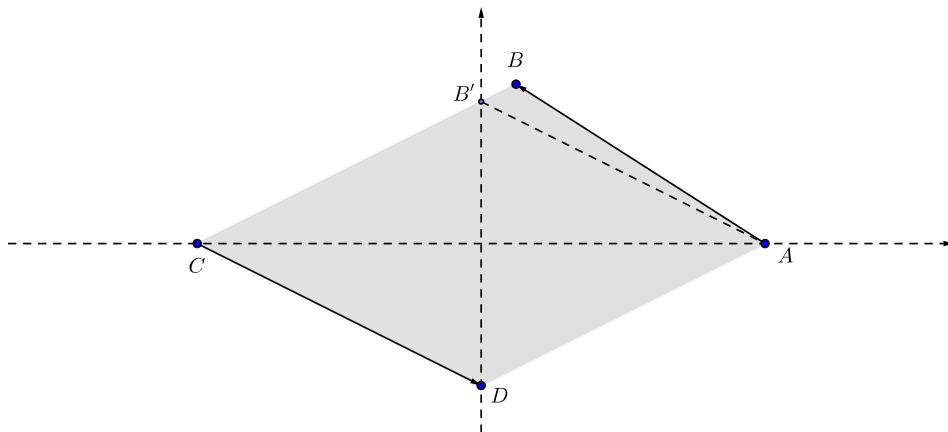
3 Les ε -multiparallélogrammes

3.1 Définitions

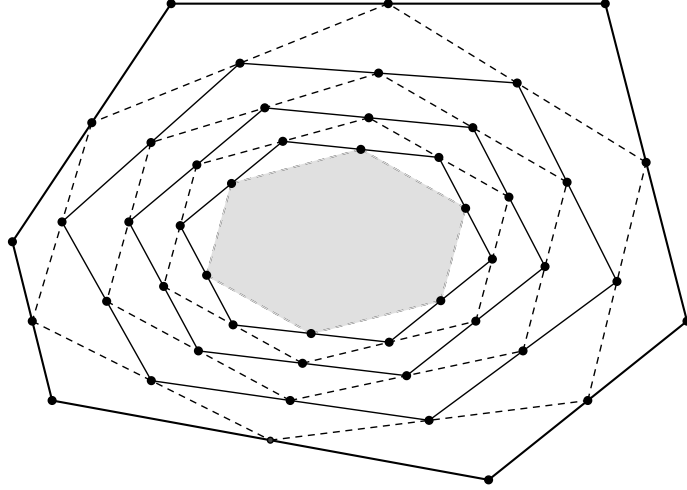
Soit ε un nombre réel strictement positif. Un quadrilatère $[A, B, C, D]$ sera appelé ε -parallélogramme si $\|\vec{AB} + \vec{CD}\| \leq \varepsilon$. De même, un polygone pair $[A_1, \dots, A_{2r}]$ sera appelé ε -multiparallélogramme si tous ses quadrilatères principaux $[A_k, A_{k+1}, A_{k+r}, A_{k+r+1}]$ ($1 \leq k \leq r$) sont des ε -parallélogrammes.

3.2 Exemple

Si on munit \mathbb{E} d'un repère cartésien orthonormé, les points $A(2, 0)$, $B\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$, $C(-2, 0)$ et $D(0, -1)$ sont tels que $\|\vec{AB} + \vec{CD}\| = \varepsilon$. Le quadrilatère $[A, B, C, D]$ est donc un ε -parallélogramme.



Considérons maintenant un polygone pair quelconque $\mathcal{P} = [A_1, \dots, A_{2r}]$. Pour un nombre réel λ fixé dans l'intervalle $]0, 1[$, on peut considérer le polygone $\mathcal{P}' = [A'_1, \dots, A'_{2r}]$ tel que pour chaque indice k , le sommet A'_k est le λ -barycentre $(1 - \lambda)A_k + \lambda A_{k+1}$; c'est le *premier λ -descendant* de \mathcal{P} . En itérant cette opération de passage aux λ -barycentres, on définit une suite de polygones $\mathcal{P}_q = [A_{q,1}, \dots, A_{q,2r}]$ par : $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{q+1} = \mathcal{P}'_q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. C'est la suite des λ -descendants de \mathcal{P} . En voici une image avec $\lambda = \frac{1}{2}$;



Le dessin suggère que lorsque q est suffisamment grand, le $q^{\text{ème}}$ λ -descendant de \mathcal{P} a l'aspect d'un multipartalléogramme. C'est effectivement le cas et ce qu'exprime le théorème qui suit.

3.3 Théorème principal II

Soit λ un nombre réel dans l'intervalle $]0, 1[$. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang q_ε tel que, pour tout $q \geq q_\varepsilon$, le $q^{\text{ème}}$ λ -descendant \mathcal{P}_q de \mathcal{P} est un ε -multipartalléogramme.

Preuve. Pour chaque rang $q \in \mathbb{N}$, on considère le r -uplet $\mathcal{V}_q = (v_{q,1}, \dots, v_{q,r})$ de \mathbb{E}^r défini par :

$$v_{q,k} = \overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}} \text{ pour } k \in \{1, \dots, r\}.$$

Autrement dit, les composantes de \mathcal{V}_q sont les vecteurs $\overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}}$ des quadrilatères principaux $[A_{q,k}, A_{q,k+1}, A_{q,k+r}, A_{q,k+r+1}]$ du polygone \mathcal{P}_q . Nous avons :

$$\sum_{k=1}^r v_{q,k} = \vec{0} \text{ pour tout } q \in \mathbb{N}.$$

En effet, pour chaque rang $q \in \mathbb{N}$, avec la relation de Chasles, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r v_{q,k} &= \sum_{k=1}^r \overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \sum_{k=1}^r \overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}} \\ &= \overrightarrow{A_{q,1}A_{q,r+1}} + \overrightarrow{A_{q,r+1}A_{q,1}} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1, \dots, r\}$, nous avons, par définition :

$$A'_{q,k} = (1 - \lambda)A_{q,k} + \lambda A_{q,k+1} \text{ ou encore } \overrightarrow{A_{q,k}A'_{q,k}} = \lambda \overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{q,k}A'_{q,k+1}} &= \overrightarrow{A'_{q,k}A_{q,k}} + \overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \overrightarrow{A_{q,k+1}A'_{q,k+1}} = (1 - \lambda)\overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \lambda \overrightarrow{A_{q,k+1}A_{q,k+2}}. \\ v_{q+1,k} &= \overrightarrow{A'_{q,k}A'_{q,k+1}} + \overrightarrow{A'_{q,k+r}A'_{q,k+r+1}} \\ &= (1 - \lambda)\overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \lambda \overrightarrow{A_{q,k+1}A_{q,k+2}} + (1 - \lambda)\overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}} + \lambda \overrightarrow{A_{q,k+r+1}A_{q,k+r+2}} \\ &= (1 - \lambda)\left[\overrightarrow{A_{q,k}A_{q,k+1}} + \overrightarrow{A_{q,k+r}A_{q,k+r+1}}\right] + \lambda\left[\overrightarrow{A_{q,k+1}A_{q,k+2}} + \overrightarrow{A_{q,k+r+1}A_{q,k+r+2}}\right] \\ &= (1 - \lambda)v_{q,k} + \lambda v_{q,k+1}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\mathcal{V}_{q+1} = \mathcal{L}(\mathcal{V}_q)$ où \mathcal{L} est l'endomorphisme $\mathcal{L} : \mathbb{E}^r \longrightarrow \mathbb{E}^r$ qui à $Z = (z_1, \dots, z_r)$ associe :

$$\mathcal{L}(Z) = ((1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2, (1 - \lambda)z_2 + \lambda z_3, \dots, (1 - \lambda)z_{r-1} + \lambda z_r, (1 - \lambda)z_r + \lambda z_1).$$

Par récurrence, on obtient $\mathcal{V}_q = \mathcal{L}^q(\mathcal{V}_0)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

En identifiant \mathbb{E} au plan complexe \mathbb{C} , on peut considérer la matrice \mathcal{M} de l'endomorphisme \mathcal{L} dans la base canonique de l'espace vectoriel complexe \mathbb{C}^r . Cette matrice est donnée par :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 - \lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une matrice circulante de la forme :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{r-1} \\ a_{r-1} & a_0 & \cdots & a_{r-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Il est bien connu (cf. [2]) que le déterminant d'une telle matrice est le nombre complexe $\det(\mathcal{C})$ donné par :

$$\det(\mathcal{C}) = P(1)P(\omega)P(\omega^2) \cdots P(\omega^{r-1})$$

où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{r}}$ et P est le polynôme défini par : $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{r-1}X^{r-1}$.

On en déduit que si I_r est la matrice identité d'ordre r et μ un nombre complexe quelconque, nous avons :

$$\det(\mathcal{C} - \mu I_r) = P_\mu(1)P_\mu(\omega)P_\mu(\omega^2) \cdots P_\mu(\omega^{r-1}) \text{ où } P_\mu(X) = (a_0 - \mu) + a_1X + \cdots + a_{r-1}X^{r-1}.$$

Ce qui implique que les valeurs propres de \mathcal{C} sont les nombres complexes μ vérifiant la relation :

$$P_\mu(1)P_\mu(\omega)P_\mu(\omega^2) \cdots P_\mu(\omega^{r-1}) = 0$$

Dans le cas de la matrice circulante \mathcal{M} où $a_0 = 1 - \lambda$, $a_1 = \lambda$ et $a_j = 0$ pour $j \in \{2, \dots, r-1\}$, les valeurs propres sont les nombres complexes μ tels que $P_\mu(\omega^j) = (1 - \lambda - \mu) + \lambda\omega^j = 0$ pour $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ i.e. les nombres complexes $\mu_j = 1 - \lambda + \lambda\omega^j$ pour $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. Ces valeurs propres étant deux à deux distinctes, la matrice \mathcal{M} est diagonalisable sur \mathbb{C} et on peut donc la décomposer sous la forme :

$$\mathcal{M} = \mathcal{N}^{-1} \times \text{diag}(1, \mu_1, \dots, \mu_{r-1}) \times \mathcal{N} \text{ où } \mathcal{N} \in \text{GL}_r(\mathbb{C}).$$

Ce qui implique que

$$\forall q \in \mathbb{N}, \mathcal{M}^q = \mathcal{N}^{-1} \times \text{diag}(1, \mu_1^q, \dots, \mu_{r-1}^q) \times \mathcal{N} \text{ avec } |\mu_j| = \left| (1 - \lambda) + \lambda e^{\frac{2i\pi j}{r}} \right| < 1 \text{ pour } 1 \leq j \leq r-1$$

En effet :

$$\begin{aligned} |\mu_j|^2 &= \left[(1 - \lambda) + \lambda \cos \frac{2\pi j}{r} \right]^2 + \lambda^2 \left(\sin \frac{2\pi j}{r} \right)^2 \\ &= (1 - \lambda)^2 + 2(1 - \lambda)\lambda \cos \frac{2\pi j}{r} + \lambda^2 \\ &= 1 - 2(1 - \lambda)\lambda \left(1 - \cos \frac{2\pi j}{r} \right) \\ &< 1. \end{aligned}$$

La suite matricielle $(\mathcal{M}^q)_{q \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers la matrice $\mathcal{M}^* = \mathcal{N}^{-1} \times \text{diag}(1, 0, \dots, 0) \times \mathcal{N}$ et la suite vectorielle $(\mathcal{V}_q) = (\mathcal{M}^q(\mathcal{V}_0))$ converge vers $\mathcal{V}_* = \mathcal{M}^*(\mathcal{V}_0)$. D'autre part, par passage aux limites dans la relation de récurrence $\mathcal{M}(\mathcal{V}_q) = \mathcal{V}_{q+1}$, on obtient $\mathcal{M}(\mathcal{V}_*) = \mathcal{V}_*$. Ce qui implique que \mathcal{V}_* est un élément de la droite vectorielle $\text{Ker}(\mathcal{M} - I_r) = \text{Vect}\{(1, \dots, 1)\}$. Il existe donc un nombre complexe α tel que $\mathcal{V}_* = (\alpha, \dots, \alpha)$. De plus, si φ est la forme linéaire définie par :

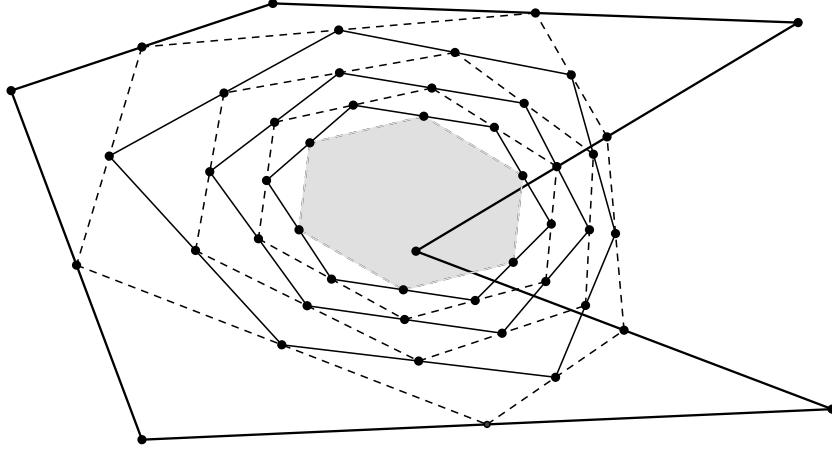
$$\varphi : \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}, Z = (z_1, \dots, z_r) \longmapsto \varphi(Z) = z_1 + \dots + z_r.$$

on a $\forall q \in \mathbb{N}, \varphi(\mathcal{V}_q) = 0$. Donc, en passant à la limite on obtient $\varphi(\mathcal{V}_*) = 0$ soit $r\alpha = 0$. D'où $\alpha = 0$ et $\mathcal{V}_* = (0, \dots, 0)$.

La suite (\mathcal{V}_q) étant convergente vers $\mathcal{V}_* = (0, \dots, 0)$, on en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang q_ε tel que $\|v_{q,k}\| < \varepsilon$ pour $q \geq q_\varepsilon$ et $k \in \{1, \dots, r\}$. Ce qui prouve que \mathcal{P}_q est un ε -multiparallélogramme dès que $q \geq q_\varepsilon$. \square

3.4 Remarque importante

Le dessin qui suit pourrait laisser penser que, partant d'un polygone non convexe, à partir d'un certain rang q les descendants sont convexes. Il n'en est pas toujours ainsi comme cela a été démontré dans [1].



4 Quelques autres propriétés

4.1 Proposition

Soit r un entier strictement positif. Nous avons les assertions suivantes :

(a) Si $\mathcal{P} = (A_1, \dots, A_{2r})$ est un $2r$ -gone qui est un multiparallélogramme, alors pour tout rang q , le polygone \mathcal{P}_q est encore multiparallélogramme.

(b) Si $\mathcal{P} = [A_1, \dots, A_{2r}]$ est un $2r$ -gone qui n'est pas un multiparallélogramme et si r est impair, alors il n'existe aucun rang q tel que \mathcal{P}_q soit un multiparallélogramme.

Preuve. Dire que \mathcal{P}_q est un multiparallélogramme signifie que $\mathcal{V}_q = \mathcal{M}^q(\mathcal{V}_0)$ est nul. Autrement dit, $\mathcal{V}_0 \in \text{Ker}(\mathcal{M}^q)$. On en déduit que :

(a) Si \mathcal{P} est un multiparallélogramme, alors $\mathcal{V}_0 = 0$ et pour tout rang q , $\mathcal{V}_q = \mathcal{M}^q(\mathcal{V}_0) = 0$. Le polygone \mathcal{P}_q est donc un multiparallélogramme pour tout rang q .

(b) Si \mathcal{P} n'est pas un multiparallélogramme et si r est impair, alors $\mathcal{V}_0 \neq 0$ et il n'existe donc aucun rang q tel que $\mathcal{V}_q = \mathcal{M}^q(\mathcal{V}_0)$ soit nul. En effet, lorsque r est impair toutes les valeurs propres $\mu_j = (1 - \lambda) + \lambda\omega^j$, avec $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$, sont non nulles. Il n'existe donc aucun rang q tel que \mathcal{P}_q soit un multiparallélogramme. \square

4.2 Proposition

Soit $\mathcal{P} = [A_1, \dots, A_{2r}]$ un $2r$ -gone qui n'est pas un multiparallélogramme. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) Pour tout rang non nul $q \in \mathbb{N}^*$, le polygone \mathcal{P}_q est un multiparallélogramme.
- (b) Il existe un rang non nul $q \in \mathbb{N}^*$ tel que le polygone \mathcal{P}_q soit un multiparallélogramme.
- (c) r est un entier pair et il existe un vecteur non nul $\vec{\alpha}$ dans \mathbb{E} tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, r\}, \overrightarrow{A_k A_{k+1}} + \overrightarrow{A_{k+r} A_{k+r+1}} = (-1)^k \vec{\alpha}$$

Preuve. Avec l'identification $\mathbb{E} \simeq \mathbb{C}$ et les notations de la preuve de la proposition précédente, nous allons prouver la suite d'implications (a) \implies (b) \implies (c) \implies (a).

(a) \implies (b) : est une implication triviale.

(b) \implies (c) : S'il existe un rang non nul $q \in \mathbb{N}^*$ tel que le polygone \mathcal{P}_q soit un multiparallélogramme, alors l'entier r est pair de la forme $r = 2s$, d'après la proposition 4.2, et le vecteur associé $\mathcal{V}_q = \mathcal{M}^q(\mathcal{V}_0)$ est nul. Ce qui implique que le vecteur non nul $\mathcal{V}_0 = (v_{0,1}, \dots, v_{0,r})$ est dans le noyau

$$\text{Ker}(\mathcal{M}^q) = \text{Ker}(\mathcal{M}) = \text{Vect}\left\{\underbrace{(-1, 1, \dots, -1, 1)}_{s \text{ fois}}\right\}$$

Il existe donc un scalaire complexe non nul α tel que $\mathcal{V}_0 = \alpha \underbrace{(-1, 1, \dots, -1, 1)}_{s \text{ fois}}$. Soit $v_{0,k} = (-1)^k \alpha$

pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$ ou encore $\overrightarrow{A_k A_{k+1}} + \overrightarrow{A_{k+r} A_{k+r+1}} = (-1)^k \vec{\alpha}$. Ce qui prouve l'assertion (c).

(c) \implies (a) : Si l'assertion (c) est vraie, alors pour tout rang non nul q , $\mathcal{V}_0 = \alpha \underbrace{(-1, 1, \dots, -1, 1)}_{s \text{ fois}}$ est dans $\text{Ker}(\mathcal{M}) = \text{Ker}(\mathcal{M}^q)$. Ce qui implique que $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{V}_q = 0$ et donc que le polygone \mathcal{P}_q est un multiparallélogramme pour tout rang non nul q . Ce qui prouve l'assertion (a). \square

Par exemple pour un quadrilatère (un 4-gone) $\mathcal{P} = [A_1, A_2, A_3, A_4]$ qui n'est pas un parallélogramme, nous avons :

- $\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_3 A_4} = (-1)^1 \vec{\alpha}$ avec $\vec{\alpha} = -(\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_3 A_4}) \neq \vec{0}$
- $\overrightarrow{A_2 A_3} + \overrightarrow{A_4 A_1} = \overrightarrow{A_2 A_4} + \overrightarrow{A_4 A_3} + \overrightarrow{A_4 A_1} = \overrightarrow{A_2 A_1} + \overrightarrow{A_4 A_3} = (-1)^2 \vec{\alpha}$

sachant que pour le quadrilatère \mathcal{P} , le quadrilatère des milieux \mathcal{P}_1 est un parallélogramme.

4.3 Proposition

Etant donné un $2r$ -gone $\mathcal{P} = [A_1, \dots, A_{2r}]$ de \mathbb{E} , si $\lambda = \frac{1}{2}$ et s'il existe un quadrilatère $[A_k, A_{k+2}, A_{k+r}, A_{k+2+r}]$ qui n'est pas un parallélogramme, alors pour tout rang $q \in \mathbb{N}$, le $\frac{1}{2}$ -descendant (polygone des milieux) \mathcal{P}_q n'est pas un multiparallélogramme.

Preuve. Supposons que $\lambda = \frac{1}{2}$ et qu'il existe un quadrilatère $[A_k, A_{k+2}, A_{k+r}, A_{k+2+r}]$ qui n'est pas un parallélogramme. Alors, dans les triangles (A_k, A_{k+1}, A_{k+2}) et $(A_{k+r}, A_{k+r+1}, A_{k+r+2})$, nous avons respectivement

$$\overrightarrow{A'_k A'_{k+1}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A_k A_{k+2}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'_{k+r} A'_{k+r+1}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A_{k+r} A_{k+r+2}}$$

Donc $\overrightarrow{A'_k A'_{k+1}} + \overrightarrow{A'_{k+r} A'_{k+r+1}} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{A_k A_{k+2}} + \overrightarrow{A_{k+r} A_{k+r+2}}) \neq \vec{0}$. Ce qui implique que le quadrilatère $[A'_k, A'_{k+1}, A'_{k+r}, A'_{k+r+1}]$ n'est pas un parallélogramme et donc que le polygone des milieux $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1$ n'est pas un multiparallélogramme. La proposition précédente permet de conclure que pour tout rang $q \in \mathbb{N}$, le polygone des milieux \mathcal{P}_q n'est pas un multiparallélogramme. \square

RÉFÉRENCES

- [1] Berlekamp E.R., Gilbert E.N, and F. W. Sinden F.W. *A Polygon Problem*. The American Mathematical Monthly 72, no. 3 (1965) : 233-241.
- [2] Fresnel J. et Matignon, M. *Algèbre et Géométrie - 81 thèmes pour l'agrégation de mathématiques*. Editions Ellipses (2017).

Université Polytechnique Hauts-de-France
DEMATHS-CERAMATHS
F-59313 Valenciennes Cedex 9
France

aziz.elkacimi@uphf.fr
abdellatif.zeggar@uphf.fr