



HAL
open science

Modélisation de la diffusion acoustique par un objet cylindrique

Pierre Millerat

► **To cite this version:**

Pierre Millerat. Modélisation de la diffusion acoustique par un objet cylindrique. Electronique. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 1994. Français. NNT: 1994VALE0025. tel-02945270

HAL Id: tel-02945270

<https://uphf.hal.science/tel-02945270v1>

Submitted on 22 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée à
L'UNIVERSITE DE VALENCIENNES
ET DU HAINAUT CAMBRESIS

pour obtenir le titre de
Docteur de l'université

Spécialité

Electronique

par

Pierre Millerat



Sujet de la thèse :

**MODELISATION DE LA DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR
UN OBJET CYLINDRIQUE : APPLICATION DE LA
THEORIE GEOMETRIQUE DE LA DIFFRACTION.**

Soutenu le Lundi 11 juillet 1994, devant la Commission d'Examen :

MM. R. Torguet	Président du Jury
J-M. Conoir	Rapporteur
P. Gatignol	Rapporteur
C. Bruneel	Directeur de Thèse
B. Delannoy	Examineur
A. Derem	Examineur
P. Pernod	Examineur
J-L. Rousselot	Examineur

Thèse présentée à
L'UNIVERSITE DE VALENCIENNES
ET DU HAINAUT CAMBRESIS

pour obtenir le titre de
Docteur de l'université

Spécialité

Electronique

par

Pierre Millerat

Sujet de la thèse :

**MODELISATION DE LA DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR
UN OBJET CYLINDRIQUE : APPLICATION DE LA
THEORIE GEOMETRIQUE DE LA DIFFRACTION.**

Soutenu le Lundi 11 juillet 1994, devant la Commission d'Examen :

MM. R. Torguet	Président du Jury
J-M. Conoir	Rapporteur
P. Gatignol	Rapporteur
C. Bruneel	Directeur de Thèse
B. Delannoy	Examineur
A. Derem	Examineur
P. Pernod	Examineur
J-L. Rousselot	Examineur

Cette étude a été effectuée au L.C.T.A.R. au sein du groupe d'acoustique sous-marine dirigée par Monsieur Rousselot. Je tiens à le remercier de m'avoir guidé tout au long de cette recherche ainsi que d'avoir accepté d'être membre de cette commission d'examen.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Torguet qui a accepté de présider cette commission d'examen. Je souhaite également remercier Monsieur Gatignol d'avoir accepté d'occuper la fonction de rapporteur.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur Conoir d'avoir accepté d'occuper la fonction de rapporteur. Ses réflexions ainsi que celles de Monsieur Derem m'ont été d'un grand secours. Je remercie également ce dernier d'avoir accepté d'être membre de cette commission d'examen.

J'exprime toute ma gratitude à Messieurs Bruneel et Pernod qui ont accepté de diriger mon travail malgré les conditions particulières de sa réalisation. Je remercie également Monsieur Delannoy d'avoir accepté de faire partie de cette commission d'examen.

Je souhaite également remercier Madame Lelaizant et Monsieur Poirée de m'avoir permis de réaliser ce travail dans le cadre de mon service national.

Je ne saurais oublier F. Lupé, J-L. Izbicki et M. Talman pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir certains mardi.

Sommaire

INTRODUCTION.....	8
Hypothèses et notations	16
1. Hypothèses.....	16
2. Notations.....	17
CHAPITRE 1	
EXPRESSION A HAUTE FREQUENCE DE LA PRESSION DUE AUX ONDES CIRCONFÉRENTIELLES.	21
I. Introduction de la transformation de Sommerfeld-Watson	24
I.1. Formulation intégrale de la pression diffusée par un objet cylindrique	24
I.2. Ondes circonférentielles - Expression analytique des pressions associées.....	32
II Comportement asymptotique des pressions dues aux ondes circonférentielles - transformation d'Imai.	34
II.1. Expression asymptotique de la pression due à une onde de type ℓ_1	36
II.2. Expression asymptotique de la pression due à une onde de type ℓ_2	39
II.3. Transformation d'Imai - Justification numérique.....	40
III. Interprétation géométrique des résultats obtenus	47
III.1. Trajets géométriques associés aux ondes de type ℓ_1	47
III.2. Trajets géométriques associés aux ondes de type ℓ_2	50
CHAPITRE 2	
ETUDE DE LA DIFFUSION PAR UN CYLINDRE FLUIDE.....	53
I Caractéristique du cylindre fluide	55
II Contribution des ondes géométriques - méthode du col.....	56
II.1. Calcul de l'intégrale sur le contour C_d	58
II.2. Calcul de l'intégrale sur le contour C_g	59
III. Interprétation géométrique - lois de Snell-Descartes	62
IV. Etude et interprétation des résultats numériques	67
IV.1. Evolution des cols associés aux ondes réfléchi et incidente.....	67
IV.2. Valeurs des pôles associés aux ondes de Wait et de Franz	69
IV.3. Limites de la notion d'ondes géométriques.....	75
IV.4. Etude numérique de la pression résultante.....	86
V. Indice de réflectivité	97
VI. Conclusion	104
CHAPITRE 3	
ETUDE DE LA DIFFUSION PAR UN CYLINDRE ELASTIQUE.....	105
I Etude lorsque l'onde incidente atteint le cylindre sous un angle inférieur aux deux angles critiques.....	108
I. 1. Développement en série de Debye de la fonction S	108
I.2. Expression des coefficients de réflexions et de transmissions cylindriques.	111
I.3. Comportement à haute fréquence des coefficients de réflexions et de transmissions.	115
II Etude lorsque l'onde incidente atteint le cylindre sous un angle compris entre les deux angles critiques	120

II. 1. Développement en série de Debye de la fonction S.....	120
II.2. Expression des coefficients de réflexions et de transmissions cylindriques.....	121
II.3. Comportement à haute fréquence des coefficients de réflexions et de transmissions.....	124
III Etude lorsque l'onde incidente atteint le cylindre sous un angle supérieur aux deux angles critiques.....	127
IV. Utilisations de la transformation de Sommerfeld-Watson.....	129
V. Résultats numériques.....	131
V.1. Lieux des pôles.....	131
V.1.1. L'onde de Rayleigh.....	133
V.1.2. Les ondes de Brekhovskikh.....	142
V.1.3. Les ondes de Franz et l'onde de Stoneley.....	147
V.2. Pression diffusée par le cylindre élastique.....	152
V.2.1. Contribution des ondes de type ℓ_2	153
V.2.2. Contribution des ondes de type ℓ_1	156
V.2.3. Pression diffusée par le cylindre élastique.....	160

CHAPITRE 4

ETUDE DE LA DIFFUSION PAR UN TUBE ELASTIQUE..... 171

I Application des règles de l'optique géométrique au calcul de la pression diffractée.....	174
I.1. Hypothèses.....	174
I.2. Définition des domaines angulaires.....	176
I.3. Etudes des rayons.....	178
I.3.1. Intervalle angulaire $I_1 = [0; \alpha_{s\ell}]$	179
a. Calcul de l'angle "Σ".....	180
b. Expression du temps de parcours dans le tube.....	181
I.3.2. Intervalle angulaire $I_2 = [\alpha_{s\ell}; \alpha_{\ell}^{(c)}]$	181
a. Expression de l'angle "Σ".....	182
b. Expression du temps de parcours dans le tube.....	183
I.3.3. Intervalle angulaire $I_3 = [\alpha_{\ell}^{(c)}; \alpha_{st}]$	183
I.3.4. Intervalle angulaire $I_4 = [\alpha_{st}; \alpha_t^{(c)}]$	184
I.3.5. Intervalle angulaire $I_5 = [\alpha_t^{(c)}; \frac{\pi}{2}]$	185
I.3.6. Conclusion.....	185
a. Relations liant l'angle "φ" et la durée "t(OP)" à l'angle "α".....	185
b. Remarques.....	187
I.4. Calcul du coefficient de dispersion géométrique.....	188
I.5. Expression des coefficients de réflexion-réfraction des rayons.....	190
I.5.1. Notations.....	191
I.5.2. domaine angulaire $I_5 = [\alpha_t^{(c)}; \frac{\pi}{2}]$	191

I.5.3. domaine angulaire $I_4 = \left[\alpha_{st} ; \alpha_t^{(c)} \right]$	192
I.5.4. domaine angulaire $I_3 = \left[\alpha_\ell^{(c)} ; \alpha_{st} \right]$	192
I.5.5 domaine angulaire $I_2 = \left[\alpha_{s\ell} ; \alpha_\ell^{(c)} \right]$	192
I.5.6 domaine angulaire $I_1 = \left[0 ; \alpha_{s\ell} \right]$	196
I.6. Valeurs numériques de la pression due aux ondes géométriques	199
I.7 Conclusion.....	202
II. Expressions numériques des pôles associés aux ondes circonférentielles	204
<i>II.1. Conditionnement initial de l'équation caractéristique des pôles.....</i>	<i>204</i>
<i>II.2. Méthode utilisée pour rechercher les pôles.....</i>	<i>211</i>
<i>II.3. Les ondes de type ℓ_1.....</i>	<i>215</i>
II.3.1. Evolution des pôles de type ℓ_1 lorsque le rayon interne croît.....	215
II.3.2. Comportement des pôles de type ℓ_1 en fonction de la fréquence réduite x_1	223
II.3.2.1. L'onde $\ell = 1$	223
II.3.2.2. Les ondes $\ell = 2$ et $\ell = 3$	224
II.3.2.3. Type de développements asymptotiques utilisés pour chacune de ces ondes	231
<i>II.4. Les ondes de type ℓ_2</i>	<i>235</i>
II.4.1. Evolution des pôles de type ℓ_2 lorsque le rayon interne croît	235
II.4.2. Comportement des pôles de type ℓ_2 en fonction de la fréquence réduite x_1	240
III. Pression diffusée par le tube élastique	246
<i>III.1. Contribution des ondes circonférentielles.....</i>	<i>246</i>
<i>III.2. Valeurs numériques de la pression diffusée</i>	<i>251</i>
IV. Conclusion.....	253

CHAPITRE 5	
TUBE ELASTIQUE : ETUDE DES ONDES AXIALES.....	255
I. Hypothèses et notations du chapitre	257
II. Détermination des ondes se propageant à la surface du tube.....	261
II.1. Equations traduisant la propagation des ondes dans les différents milieux	261
II.2. Equations de continuité	262
II.3. Expressions implicites des solutions traduisant la propagation des ondes de surface	264
III Recherche numérique des ondes axiales	267
III.1. Etude du premier mode de flexion	268
III.2. Etude du mode symétrique "n=0"	270
III.3. Evolution des ondes L01 et L02 lorsque l'épaisseur du tube varie.....	271
III.3.1. Evolution du comportement des ondes L01 et L02 en fonction de l'épaisseur et de la fréquence.....	271
III.3.2. Comparaison de l'évolution des ondes L01 et L02.....	273
III.3.3. Comportement de l'onde L02 lorsque le tube devient excessivement fin.....	274
IV. Ondes circonférentielles et les ondes axiales.....	277
V Conclusion	280

CONCLUSION	297
ANNEXE A :	
DENOMINATIONS DES ONDES CIRCONFÉRENTIELLES	305
Dénomination des différentes ondes suivant le type d'interface :	306
Modélisation géométrique de la propagation des ondes circonférentielles	307
ANNEXE B :	
METHODE DU COL	308
I Introduction	309
II Hypothèses	310
III. Eléments clés de la démonstration'	311
IV Calcul des premiers termes du développement en série de la fonction Φ	312
V. Expression asymptotique de l'intégrale $I(\zeta)$	314
ANNEXE C :	
ETUDE DU RESIDU β	315
I. Expression simplifiée du résidu β	316
II. Interprétation des résultats numériques.....	323
ANNEXE D :	
DETAILS DE CALCUL ASSOCIE AU CHAPITRE 4 SECTION 1	
Recherche de l'expression de $G_{n,m}(\alpha)$ dans l'intervalle angulaire I_2	334
a. lemme	335
b. Expression de $\sum_{n,p}^2$ avec $(A, B) \in \{L, T\}^2$	338
$A \mapsto B$	
b.1 Expression de $\sum_{n,p}^2$	340
$T \mapsto T$	
b.2 Expression de $\sum_{n,p}^2$	342
$T \mapsto L$	
b.3 Expression de $\sum_{n,p}^2$	343
$L \mapsto L$	
b.4 Expression de $\sum_{n,p}^2$	345
$L \mapsto T$	
c. Conclusion	346
BIBLIOGRAPHIE	347
TABLE DES FIGURES	354

Introduction

Les analogies existant entre la propagation des ondes électromagnétiques et la propagation des ondes sonores permettent d'introduire en acoustique la notion de réflexion et de transmission à l'interface entre deux milieux plans¹. L'extension de ces analogies à une interface cylindrique autorise l'établissement, en acoustique, de relations similaires aux lois de Descartes de l'optique géométrique. Ces dernières sont correctes lorsque la fréquence de l'onde incidente est élevée. Nous pouvons ainsi considérer le champ de pression entourant un objet cylindrique comme la superposition de la pression due à l'onde incidente et de celle due à un phénomène de diffraction par cet objet².

Mis en évidence dans certaines salles circulaires³, des phénomènes acoustiques ne semblent pas pouvoir s'expliquer par des réflexions multiples : il est possible de communiquer par *chuchotement* à plusieurs dizaines de mètres dès lors que les deux interlocuteurs se situent au voisinage de la paroi. Dans son ouvrage *Theory of Sound*, Rayleigh déclare que les ondes à l'origine de ce phénomène semblent *ramper* à la surface de la paroi⁴.

Depuis un siècle, de nombreux autres types d'ondes se propageant à la surface d'une paroi ont été mis en évidence de façon expérimentale et théorique. En 1968, Doolittle, Überall, Ugincius établissent

¹ L.M. Brekhovskikh, *Waves in Layered Media*, chapitre I, 1960.

² M. Fekikh, *thèse de troisième cycle*, Université de Paris VII, 1982.
M. Fekikh, G. Quentin, Présentation et interprétation des expériences de diffusion par les cylindres élastiques aux valeurs élevées de ka , *CETHEDEC*, pp. 91 - 101, 72, 1982.

³ Cathédrale Saint Paul de Londres, Palais de Charles Quint dans l'Alhambra de Grenade, ...

⁴ Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, p. 126, 2nd édition 1896.

une première synthèse dans le cas de l'interface cylindrique Fluide-Solide¹. Ils démontrent théoriquement la présence de deux types d'ondes : les ondes de type "Rayleigh" et les ondes de type "Franz". Derem dans son ouvrage manuscrit *Cylindre Elastique Solide, Ondes de surface internes*² réalise une synthèse complète sur l'ensemble des ondes connues pouvant se propager à l'interface cylindrique entre deux milieux. Nous appellerons *ondes circonférentielles* chacune de ces ondes³.

Ces ondes sont mises en évidence de façon théorique en utilisant la transformée de Sommerfeld-Watson. A partir du développement en série modale de la pression cette transformation mathématique permet de mettre en évidence un certain nombre de pôles complexes. Chacun de ces pôles est associé à la propagation d'une onde circonférentielle. Les développements asymptotiques issus de cette méthode établissent de façon théorique le *trajet géométrique* effectué par ces ondes d'où le nom de *Théorie Géométrique de la diffraction* (T.G.D.).

Il existe une seconde approche théorique permettant de décrire la propagation d'onde à la surface d'un cylindre : la *Resonance Scattering Theory* (R.S.T.)⁴. Cette théorie se fonde également sur l'expression sous forme d'une série modale du champ de pression. Pour chaque mode de propagation, elle permet d'identifier les fréquences propres de l'objet cylindrique plongé dans un fluide.

¹ R. D. Doolittle, H. Überall, P. Ugincius, Sound Scattering by Elastic Cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 1-14, **43**, 1968.

P. Ugincius, H. Überall, Creeping-Wave Analysis of Acoustic Scattering by Elastic Cylindrical Shells, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 1025-1035, **43**, 1968.

² A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., pp. 44-58, 1989-1993.

³ Annexe A : Dénomination des ondes circonférentielles.

⁴ L. Flax, L. R. Dragonette, H. Überall, Theory of elastic resonance excitation by sound scattering, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 723-731, **63**, 1978.

Des méthodes expérimentales complètent ces théories en confirmant ces prédictions. En 1979, Welton, de Billy, Hayman et Quentin confirme l'existence d'ondes géométriques se propageant dans un cylindre en interprétant la réponse acoustique du cylindre à une impulsion de $0.7 \mu\text{s}^1$. En 1985, de Billy développe une méthode impulsionnelle fondée sur l'utilisation de la transformée de Fourier. Elle permet d'établir la fonction de forme caractéristique d'un cylindre soumis à une onde acoustique pour des fréquences réduites inférieures à 20. De Billy retrouve ainsi un certain nombre d'ondes circonférentielles prédites par la théorie². Par la suite, des méthodes plus précises en fréquence permettent de prouver l'existence d'un grand nombre d'ondes circonférentielles : méthode M.I.I.R.³ (Méthode d'Isolement et d'Identification des Résonances), méthode P.R.I.M. (méthode impulsionnelle d'identification des résonances). Cette dernière méthode complétée d'un algorithme issu de l'intelligence artificielle permet d'isoler aux hautes fréquences les ondes géométriques et aux basses fréquences les ondes circonférentielles⁴.

Des études numériques ont été conduites pour comparer les fréquences de résonances obtenues par les méthodes issues de la R.S.T. aux

¹ P.J. Welton, M. De Billy, A. Hayman, G. Quentin, Backscattering of short ultrasonic pulses by solid elastic cylinders at large ka , *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 470-476, **67**, 1980.

² M. De Billy, Determination of the resonance spectrum of elastic bodies via the use of short pulses and Fourier transform theory, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 219-221, **79**, 1986.
M. Talmant, G. Quentin, J-L. Rousselot, Acoustic resonances of thin cylindrical shells and the resonance scattering theory, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 681-688, **84**, 1988.

³ P. Pareige, P. Rembert, J-L. Izbicki, G. Maze, J. Ripoche, Excitation acoustique impulsionnelle d'une inclusion cylindrique liquide, *Colloque de physique C2*, pp. 390-393, **51**, 1990.

G. Maze, B. Taconet, J. Ripoche, Etude expérimentale des résonances de tubes cylindriques immergés dans l'eau, *CETHEDEC*, **72**, 1982.

⁴ A. Cand, G. Quentin, Identification des résonances et algorithme A* : application à l'identification d'un diffuseur élastique cylindrique immergé dans un fluide, *Colloque de physique C2*, pp. 387-390, **51**, 1990.

parties réelle et imaginaire des pôles issues de la transformée de Sommerfeld-Watson¹. Les résultats obtenus sont relativement semblables. Il est donc possible d'associer dans un même modèle les conclusions issues de l'une ou l'autre des méthodes.

Nous désirons étudier les variations de champ de pression induites par la présence d'un objet cylindrique de longueur infinie soumis à l'influence d'un champ sonore. Nous modélisons ce champ par une onde plane harmonique atteignant l'objet sous incidence normale.

La présence d'une interface entre deux milieux est-elle à l'origine de ces variations? En quoi les caractéristiques de l'objet étudié influencent-elles le calcul du champ de pression? L'influence des ondes géométriques² est-elle prépondérante devant celle des ondes circonférentielles?

Pour tenter de comprendre ce phénomène physique, nous allons construire un modèle dans lequel la réponse acoustique de l'objet cylindrique pourra être considérée comme la superposition d'une multitude de comportements élémentaires. Une interprétation géométrique de chaque comportement élémentaire permettra de comprendre relativement simplement le phénomène global.

La théorie que nous construisons se fonde sur l'utilisation de la transformation de Sommerfeld-Watson. Une autre transformation

¹ A. Gérard, J-L. Rousselot, J-L. Izbicki, G. Maze, J. Ripoché, Résonances d'ondes d'interface de coques cylindriques minces immergées : détermination et interprétation, *Revue Phys. Appl.*, pp. 289-299, **23**, 1988.

R. Burvingt, J-L. Rousselot, A. Derem, G. Maze, J. Ripoché, *Réponse résonnante de cylindres élastiques*, CETHEDC, pp. 73-93, **78**, 1984.

² Nous appelons *onde géométrique* chaque onde dont le comportement à l'interface obéit à des lois semblables aux lois de Descartes de l'optique géométrique : onde réfléchi par l'objet cylindrique, ondes se réfléchissant de nombreuses fois à l'intérieur de l'objet avant de traverser l'interface.

mathématique, la transformation d'Imai¹, nous permettra d'introduire les ondes géométriques.

L'objet cylindrique considéré est soit un cylindre soit un tube. Le matériau le constituant est soit un fluide parfait soit un solide élastique comme l'aluminium. Pour assurer une continuité dans les calculs numériques, nous supposons que la vitesse du son dans le fluide est celle des ondes longitudinales se propageant à travers le solide élastique. Les milieux externes à l'objet sont des fluides parfaits (air ou eau).

Dans le premier chapitre, nous mettons en place la théorie commune à tous les types de configurations étudiées par la suite : mise en place des transformations de Sommerfeld-Watson et d'Imai, interprétation géométrique des résultats obtenus. Comme nous introduisons la transformation d'Imai sans nous préoccuper de la nature des différents milieux, il ne nous est pas possible d'établir dans ce chapitre et de façon générale des lois analogues à celles de Descartes. Par contre, nous justifions numériquement la nécessité de cette transformation.

L'étude de la réponse acoustique d'un tube élastique est relativement complexe ; elle fait l'objet du quatrième chapitre. Afin de décomposer la difficulté nous étudions dans un premier temps un cylindre fluide entouré d'eau (second chapitre) puis un cylindre élastique entouré d'eau (troisième chapitre). Ces trois chapitres se fondent sur les résultats théoriques obtenus dans le premier chapitre. Ils sont bâtis sur un modèle commun : dans les premières sections² nous trouvons une étude théorique

¹ D. Brill, H. Überall, *Acoustic Waves Transmitted through Solid Elastic Cylinders*, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 921-939, 50, 1971.

² Cet ouvrage est formé de quatre chapitres. Chaque chapitre se décompose en sections, chaque section en paragraphes et sous-paragraphes.

des ondes géométriques (existence, construction, comportement). Dans les sections suivantes l'étude numérique du comportement des ondes circonférentielles et géométriques nous permet d'établir la réponse acoustique de l'objet cylindrique.

Ces quatre chapitres doivent être considérés comme un tout. Ainsi, les problèmes élucidés dans un chapitre ne sont pas repris dans les chapitres suivants dès lors qu'ils restent inchangés. Cette méthode nous permet de construire progressivement un modèle en dépassant peu à peu les difficultés théoriques et numériques qui apparaissent.

Dans les chapitres deux, trois et quatre, notre but est d'établir numériquement la valeur du champ de pression entourant l'objet cylindrique pour différentes fréquences en précisant les limites de la théorie exposée dans le premier chapitre ou dans les premières sections du chapitre en cours. Ainsi tout au long de ces chapitres nous accordons une importance particulière à la détermination du domaine de fréquence dans lequel la théorie est applicable.

Le cinquième chapitre est indépendant des quatre précédents.

Des études numériques ont déjà établi l'existence d'ondes se propageant suivant la direction de l'objet cylindrique en plus des ondes circonférentielles¹. Des ondes similaires ont également été mises en évidence dès 1958 sans qu'aucun lien n'ait été établi entre les différentes formulations².

¹ J-L. Izbicki, G. Maze, J. Ripoché, Influence of the free modes of vibration on the acoustic scattering of circular cylindrical shell, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 1215-1219, **80**, 1986.

² Denos C. Gazis, Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. I. Analytical Foundation, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 568-573, **31**, 1959.

Poursuivant une étude entreprise précédemment¹, nous cherchons dans le cinquième chapitre à étudier ces ondes axiales en s'inspirant de la démarche conduite par Gazis. Lorsque cela est possible, nous établissons les correspondances entre cette approche et celle issue de la R.S.T.. Nous recherchons également les liens existants entre ces ondes et les ondes circonférentielles. Cette étude nous permet également de comprendre l'évolution du comportement des ondes axiales lorsque le rayon extérieur du tube croît, ou lorsque l'épaisseur de ce tube devient négligeable.

¹ P. Millerat, *Etude des caractéristiques des ondes axiales de surface pour un cylindre et un tube élastique immergés*, Rapport de stage de DEA, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 1992.

HYPOTHESES ET NOTATIONS¹

1. Hypothèses

- l'objet cylindrique est de longueur infini. Il est constitué d'un matériau élastique linéaire homogène et isotrope,
- la propagation est harmonique,
- les milieux extérieurs sont homogènes et non visqueux,
- la pression diffusée est nulle à l'infini,
- l'origine des repères orthonormés est prise au centre d'une section droite du tube, en un point noté O^2 .

¹ Les hypothèses et notations propre au chapitre cinq ne sont pas exposées ici.

² Figure 1

2. Notations

Le point d'observation noté P a pour coordonnées $(r, \varphi, 0)$ dans un repère cylindrique centré en O. Dans les quatre premiers chapitres, nous n'étudions que des phénomènes intervenant dans le plan contenant O orthogonal à l'axe de l'objet cylindrique, les coordonnées de P sont donc notées (r, φ) .

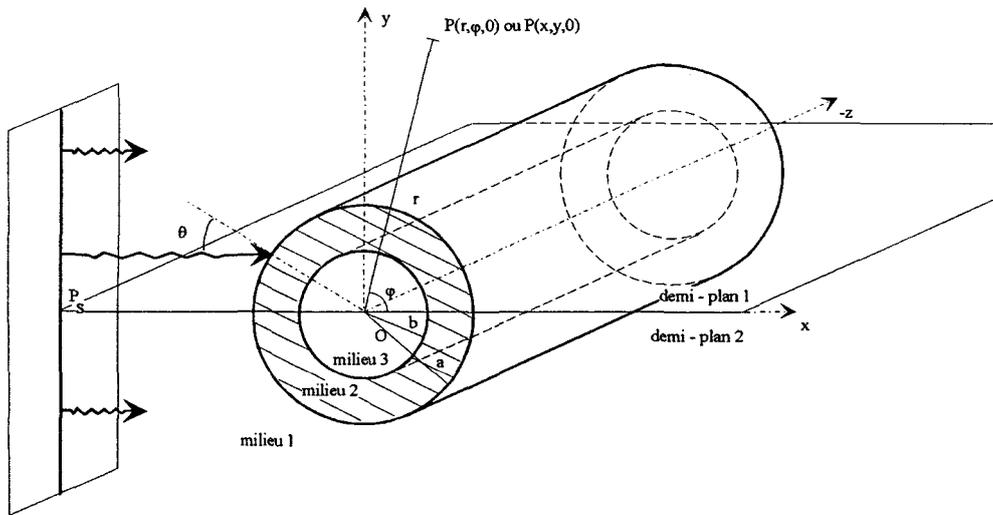


Figure 1: Repère et notations.

Nous appelons *onde circonférentielle* une onde se propageant à l'interface entre un objet cylindrique et un milieu externe. Nous appelons *onde géométrique* chaque onde arrivant en un point d'observation pour laquelle le comportement à l'interface obéit à des lois semblables aux lois de Descartes de l'optique géométrique : onde réfléchiée par l'objet cylindrique, onde se réfléchissant de nombreuses fois à l'intérieur de l'objet avant de traverser l'interface.

Pour distinguer les phénomènes, le terme *diffraction* est utilisé pour caractériser les variations de pression dues à l'ensemble des ondes géométriques. Le terme *diffusion* correspond à la réponse acoustique de l'objet cylindrique tenant compte des influences des ondes géométriques et des ondes circonférentielles.

Les trois milieux sont différenciés par les indices 1, 2 et 3, respectivement pour le milieu extérieur, l'objet cylindrique et pour le milieu intérieur (dans le cas du tube uniquement). Les autres notations utilisées sont les suivantes :

$(r, \varphi, 0)$ = coordonnées cylindriques du point d'observation P,

$(x, y, 0)$ = coordonnées cartésiennes du point d'observation P,

a = rayon externe de l'objet cylindrique,

b = rayon interne du tube,

c_i = célérité de l'onde dans le milieu fluide i , avec $i \in \{1, 2, 3\}$,

c_ℓ = vitesse longitudinale caractéristique du milieu élastique,

c_{ℓ_i} = vitesse de phase associée au pôle v_{ℓ_i} , avec $i \in \{1, 2\}$

$$(c_{\ell_i} = \frac{\omega a}{\tilde{v}_{\ell_i}})$$

c_t = vitesse transversale caractéristique du milieu élastique,

k_i = nombre d'onde réel associé à c_i avec $i \in \{1, 2, 3, t, \ell\}$,

i = nombre complexe tel que $i \times i = -1$,

$$n_\ell = \frac{c_\ell}{c_1},$$

$$n_t = \frac{c_t}{c_1},$$

$$n_3 = \frac{c_3}{c_1},$$

$x_i = k_i a$ avec $i \in \{1, 2, 3, t, \ell\}$,

$y_i = k_i b$ avec $i \in \{1, 2, 3, t, \ell\}$,

x_i et y_i sont des fréquences réduites appelées également *fréquence*.

Les ondes sont divisées en deux types : ℓ si la partie réelle du pôle associé est inférieure à x , ℓ_2 si non,

$A_{\ell_1}, A_{\ell_2}, A_{\ell_1}^L$ et $A_{\ell_2}^L$ fonctions responsables des

comportements asymptotiques des pressions

$P_{\ell_1}, P_{\ell_2}, P_{\ell_1}^L$ et $P_{\ell_2}^L$,

D_n et $D_n^{[1]}$ = déterminants caractéristiques des équations de continuités aux interfaces entre l'objet cylindrique et le (ou les) milieu(x) qui lui sont externes,

$F_n(x_1)$ ou $F(v, x_1)$ fonction caractéristique de la réponse acoustique de l'objet cylindrique (définie par les équations (6) et (7)),

$H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ sont les fonctions de Hankel de première et deuxième espèces, ces quatre fonctions sont également appelées fonctions cylindriques,

J_n et Y_n sont les fonctions de Bessel de première et deuxième espèces,

P_{C_1} = pression diffusée par l'ensemble des ondes dont les pôles se situent à l'intérieur de contour C_1

P_{C_2} = pression diffusée par l'ensemble des ondes dont les pôles se situent à l'intérieur de contour C_2 ,

P_{diff} = pression diffusée par l'objet cylindrique,

$P_{géo}$ = pression diffractée par l'objet cylindrique,

P_i = pression dans le milieu i avec $i \in \{1, 3\}$

P_{inc} = pression incidente,

P_{ℓ_1} = pression diffusée par une onde de type ℓ ,

$P_{\ell_1}^L$ = pression diffusée par une onde de type ℓ lorsque la transformation d'Imaï est utilisée,

P_{ℓ_2} = pression diffusée par une onde de type ℓ_2 ,

$P_{\ell_2}^L$ = pression diffusée par une onde de type ℓ_2 lorsque la transformation d'Imaï est utilisée,

P_{tot} = pression totale,

$$R = \frac{r}{a},$$

N = ensemble des entiers naturels,

\mathbf{P} = plan d'étude,

\mathbf{R} = ensemble des réels,

β = résidu associé à la détermination d'un pôle (défini par les équations (6), (7), (18) et (22)).

$$\eta = \frac{b}{a},$$

θ_ℓ = angle entre la direction d'une onde incidente de type ℓ et la normale au point de contact de cette onde.

v = variable complexe solution du déterminant caractéristique de la propagation des ondes.

$\tilde{v} = \text{Re}(v)$ = partie réelle du complexe v ,

$\tilde{\tilde{v}} = \text{Im}(v)$ = partie imaginaire du complexe v ,

v_{ℓ_1} = pôle à faible partie imaginaire et à partie réelle inférieure à x , appelé également pôle de type ℓ ,

v_{ℓ_2} = pôle à partie réelle supérieure à x et situé à proximité de la "ligne anti-Stokes" de la première fonction de Hankel,

v_{ray} = pôle associé à l'onde de Rayleigh cylindrique,

v_{F_i} = pôle associé à la $i^{\text{ème}}$ onde de Franz,

v_{B_i} = pôle associé à la $i^{\text{ème}}$ onde de Brekhovskikh,

v_{W_i} = pôle associé à la $i^{\text{ème}}$ onde de Wait,

ρ_i = masse volumique du milieu i , avec $i \in \{1, 2, 3\}$

ω = pulsation du régime harmonique,

Chapitre 1

Expression à haute fréquence de la pression diffusée par un objet cylindrique.

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir, en un point d'observation, l'expression à haute fréquence de la pression résultant de la diffusion par un objet cylindrique soumis à une onde plane monochromatique d'incidence normale. Les différences induites par la nature du cylindre (cylindre fluide, cylindre élastique ou tube élastique) ne sont pas exposées ici mais font l'objet de trois chapitres distincts.

A haute fréquence, nous pouvons développer une théorie fondée sur de simples lois géométriques : la *Théorie Géométrique de la Diffraction*¹. Développée en acoustique dès 1968 par Doolittle, Überall et Ugincius², cette théorie consiste à construire un modèle de diffusion³ fondé essentiellement sur le calcul géométrique de trajets effectués par des rayons. Elle permet de considérer la pression reçue en un point P comme la somme de pressions élémentaires. Chacune de ces pressions dépend du trajet effectué par un rayon géométrique autour, ou à travers l'objet cylindrique. L'établissement de ces relations liant une pression à un trajet géométrique facilite l'interprétation des phénomènes physiques de diffusion.

Pour bâtir cette théorie, nous utilisons deux outils mathématiques : les développements asymptotiques des fonctions cylindriques à variables complexes et la transformée de Sommerfeld-Watson. Cette dernière fondée sur la théorie des résidus nous permet d'établir une expression intégrale de la pression puis d'identifier chacune des ondes responsables de la diffusion

¹ Notée T.G.D. par la suite.

² R. D. Doolittle, H. Überall, P. Ugincius, Sound Scattering by Elastic Cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 1-14, 43, 1968.

³ Nous appelons diffusion la réponse acoustique de l'objet étudié comprenant à la fois la diffraction due aux ondes réfléchies et transmises et des phénomènes plus complexes comme la propagation d'ondes à la surface de l'objet. Le terme *diffraction* pris dans un sens général est cependant conservé dans l'expression *Théorie Géométrique de la Diffraction*.

acoustique. L'étude étant conduite à haute fréquence nous utilisons des développements asymptotiques pour traduire le comportement des ondes précédemment identifiées en lois géométriques.

Nous orientons notre étude principalement sur les variations des pressions en fonction du point d'observation et de la fréquence. Pour réaliser cela, l'exposé théorique se fonde sur les travaux effectués par A. Derem¹. Nous développons plus particulièrement les aspects nécessaires à une bonne compréhension des résultats numériques présentés dans les chapitres suivants.

Après avoir introduit la transformation de Sommerfeld-Watson, nous calculons la pression diffusée par l'objet cylindrique, au moyen de la théorie des résidus. Nous établissons ensuite son développement asymptotique. Pour rendre physiquement cohérente l'expression obtenue, nous introduisons la transformation d'Imai. Nous terminons ce chapitre par une interprétation géométrique des résultats dans laquelle nous justifions les notions d'ondes de circonférentielles, de zone d'ombre...

¹ A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson dans la Diffusion Acoustique, in N. Gespa, *La Diffusion Acoustique*, chap. 9, CEDOCAR., pp. 189-279, 1987.
A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., 1989-1993.

I. INTRODUCTION DE LA TRANSFORMATION DE SOMMERFELD-WATSON

I.1. Formulation intégrale de la pression diffusée par un objet cylindrique

Le calcul conduit ici est valable aussi bien pour le cylindre fluide ou élastique que pour le tube élastique. Appelons P_{inc} la pression due à l'onde incidente. Comme cette onde est plane et de comportement harmonique, nous pouvons écrire : $P_{inc} = P_0 e^{-i\omega t} e^{ik_1 x}$. En utilisant des coordonnées cylindriques, nous avons au point d'observation " $P(r, \varphi)$ "¹ : $P_{inc} = P_0 e^{-i\omega t} e^{ik_1 r \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})}$. En posant $u = e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}$, nous obtenons par développement en série de Laurent², autour du point $u = 0$:

$$(1) \quad e^{\frac{k_1 r}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right)} = J_0(k_1 r) + \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(k_1 r) \left[u^n + \frac{(-1)^n}{u^n} \right]$$

avec comme restriction sur la variable "u" : $\exists (\rho, R) \in \mathbf{R}^2 / 0 < \rho \leq u \leq R$. Ce résultat nous permet d'exprimer dans l'équation (2) la pression incidente sous forme d'une série modale, chaque mode étant caractérisé par le paramètre entier positif noté "n" :

$$(2) \quad P_{inc} = P_0 e^{-i\omega t} \left\{ J_0(k_1 r) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} i^n J_n(k_1 r) \cos n\varphi \right\}$$

La pression résultante de l'insonation du solide par l'onde plane incidente, noté " P_{tot} ", doit vérifier l'équation caractérisant la propagation d'une onde acoustique dans un milieu fluide de célérité c_1 :

$$(3) \quad \Delta P_{tot} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{tot} = 0$$

¹ Figure 1.

² A. Angot, *Compléments de Mathématiques*, p. 377, 1972.

Cette équation, linéaire vis à vis de l'opérande " P_{tot} ", est vérifiée par P_{inc} . La pression diffusée par le solide, notée " P_{diff} " est définie par $P_{tot} = P_{inc} + P_{diff}$. Son expression s'obtient donc en résolvant l'équation (3). La résolution de cette dernière en coordonnées cylindriques nous permet d'obtenir la forme générale des pressions¹ :

$$(4) \quad P_v(r, \varphi) = (a \cos v\varphi + b \sin v\varphi) \left(c H_v^{(1)}(k_1 r) + d H_v^{(2)}(k_1 r) \right) e^{-i\omega t},$$

La pression étant périodique vis-à-vis de l'angle φ , le paramètre v est un entier noté " n " par la suite. L'onde plane se propageant symétriquement par rapport à l'axe de l'objet cylindrique, $P_n(r, -\varphi) = P_n(r, \varphi)$, le paramètre " b " est nul. Nous supposons que la pression rayonnée à l'infini est nulle. Comme la seconde fonction de Hankel $H_v^{(2)}$ diverge à l'infini, le coefficient " d " de l'équation (4) est nul.

Les conditions correspondant aux phénomènes physiques étudiés apparaissent dans les équations de continuité aux interfaces entre l'objet cylindrique et le (ou les) milieu(x) qui lui sont externes². En résolvant ces équations, nous obtenons pour une fréquence donnée l'expression de la pression diffusée par le solide :

$$(5) \quad P_{diff} = P_0 e^{-i\omega t} \left\{ \frac{D_0^{[1]}(\omega, a)}{D_0(\omega, a)} H_0^{(1)}(k_1 r) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} i^n \frac{D_n^{[1]}(\omega, a)}{D_n(\omega, a)} H_n^{(1)}(k_1 r) \cos n\varphi \right\},$$

avec D_n et $D_n^{[1]}$ des déterminants d'ordre 2 pour le cylindre fluide, 3 pour le cylindre élastique et 6 pour le tube élastique. L'expression exacte de ces déterminants est donnée dans les chapitres présentant les différences de comportement induites par la nature du solide.

¹ P. Millerat, *Etude des caractéristiques des ondes axiales de surface pour un cylindre et un tube élastique immergés*, Rapport de stage de DEA, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, annexe A, 1992.

² J-M. Conoir, *Diffusion acoustique par un cylindre. Théorie modale et approximation de l'acoustique géométrique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, pp. 17-26, 1987.

Compte tenu de (2) et (5), la pression totale, exprimée au point d'observation "P", peut s'écrire :

$$(6) \quad P_{\text{tot}} = P_{\text{diff}} + P_{\text{inc}} = P_0 e^{-i\omega t} \left\{ F_0(x_1) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n F_n(x_1) \right\}$$

avec $x_1 = k_1 a$ et $F_n(x_1) = (-i)^n \left[J_n(k_1 r) + \frac{D_n^{[1]}(\omega, a)}{D_n(\omega, a)} H_n^{(1)}(k_1 r) \right] \cos n\varphi$.

En prenant un domaine ouvert D contenant le demi-axe $[0; +\infty[$ et pour toute fonction complexe G holomorphe dans D, la théorie des résidus nous permet d'établir la relation suivante :

$$(7) \quad \int_{C_i} G(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v} = \frac{2}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n G_n(x_1)$$

avec $\begin{cases} \bullet C_i \text{ contour fermé inclus dans D} \\ \bullet \forall n \in \mathbb{N}, G_n(x_1) = G(n, x_1). \end{cases}$

Afin de pouvoir utiliser ce théorème nous n'étudions que le cas où le prolongement analytique noté "F(v, x₁)" de la fonction F_n(x₁) est holomorphe dans le domaine D, voisinage du demi-axe des réels positifs¹.

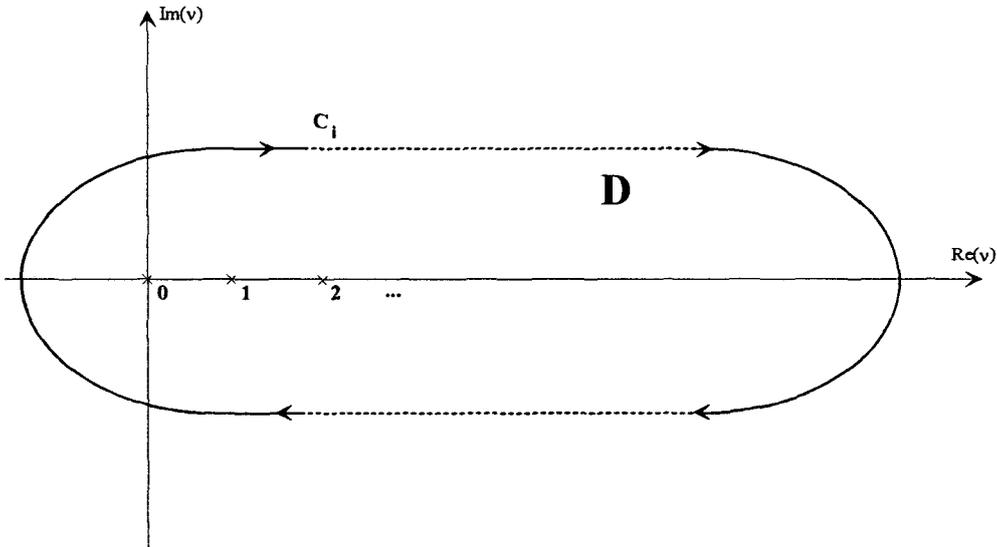


Figure 2 : Position du domaine D.

¹ Figure 2.

Ainsi connaissant par l'équation (6) l'expression modale de la pression totale, nous pouvons écrire :

$$(8) \quad P_{\text{tot}}(x_1) = P_0 e^{-i\omega t} \left\{ i \int_{C_i} F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v} - F_0(x_1) \right\}.$$

Pour obtenir une définition de P_{tot} sous la forme d'une unique intégrale de contour, nous déformons le contour initial. Pour cela nous décomposons C_i en trois contours $C(\delta)$, $\hat{C}(\delta)$ et $\check{C}(\delta)$ dépendant chacun du réel strictement positif δ^1 . Nous fixons ce réel de tel façon que les points A, B, C et D de la figure 3 soient situés dans un voisinage de l'origine.

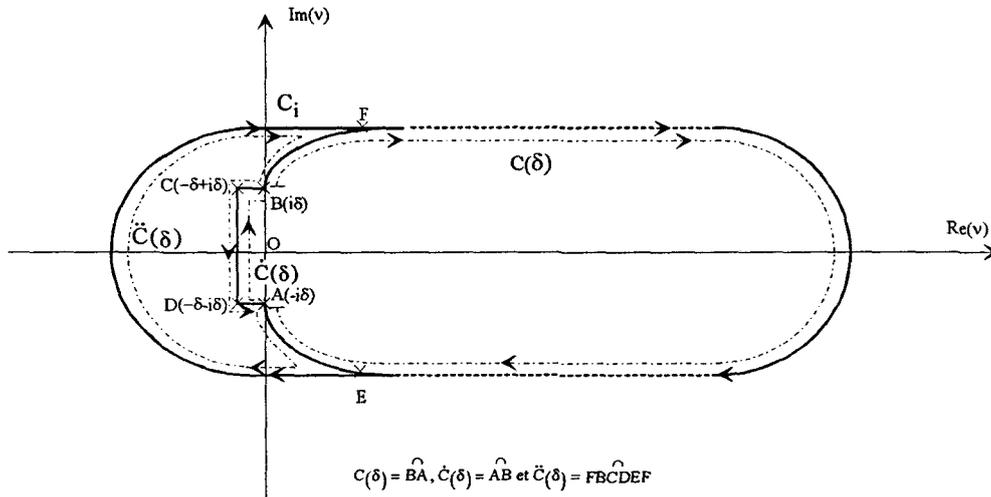


Figure 3 : Position du contour $C(\delta)$.

La fonction $F(v, x_1)$ étant holomorphe sur chacun des contours, nous pouvons écrire :

$$(9) \quad \int_{C_i} F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v} = \int_{C(\delta)} F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v} + \int_{\hat{C}(\delta)} F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v} + \int_{\check{C}(\delta)} F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v}$$

Pour tout δ , le domaine fermé par le contour $\check{C}(\delta)$ ne contient aucun pôle de $\frac{F(v, x_1)}{\sin \pi v}$; l'intégrale, calculée sur ce contour, est donc nulle. Comme

¹ Figure 3.

$F(v, x_1)$ ne possède aucun pôle dans le domaine D , le développement limité de $\frac{F(v, x_1)}{\sin \pi v}$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$(10) \quad \frac{F(v, x_1)}{\sin \pi v} = \frac{1}{\pi v} F(0, x_1) + o(1) = \frac{1}{\pi v} F_0(x_1) + o(1).$$

$o(1)$ est une fonction tendant vers 0 lorsque v tend vers 0, elle n'admet donc aucun pôle au voisinage de l'origine. Ainsi $\int_{\dot{C}(\delta)} o(1) dv = 0$.

Le développement limité donné par l'équation (10) est valable au voisinage de l'origine et donc sur toute la longueur du contour $\dot{C}(\delta)$. Dès lors, pour tout δ , l'équation (9) équivaut à :

$$(11) \quad \int_{C_i} F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v} = \int_{C(\delta)} F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v} + \int_{\dot{C}(\delta)} \frac{dv}{\pi v} F_0(x_1).$$

Pour calculer la seconde intégrale de cette équation nous revenons à la définition du contour $\dot{C}(\delta)$ union des trois segments $[A, D]$, $[D, C]$ et $[C, B]$.

L'intégrale s'écrit donc :

$$(12) \quad \int_{\dot{C}(\delta)} \frac{dv}{\pi v} F_0(x_1) = \frac{F_0(x_1)}{\pi} \left\{ \int_0^{-\delta} \frac{dx}{x - i\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{idv}{-\delta - \delta + iv} + \int_{-\delta}^0 \frac{dx}{x + i\delta} \right\} \\ = -iF_0(x_1).$$

Ce résultat est indépendant du réel δ . Dès lors, si nous posons $C = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} C(\delta)$, nous pouvons exprimer l'intégrale sur le contour initial en

fonction de l'intégrale calculée sur ce nouveau contour. Nous obtenons :

$$(13) \quad \int_{C_i} F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v} = \left\{ \int_C F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v} - i \right\} F_0(x_1).$$

Ainsi,

$$(14) \quad P_{\text{tot}}(x_1) = P_0 e^{-i\omega t} i \int_C F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v}.$$

Afin de pouvoir utiliser les propriétés de symétrie de la fonction $F(v, x_1)$, nous ouvrons le contour C à l'infini en introduisant le contour \tilde{C} défini par $\tilde{C} = C_\infty \cup C' \cup C_0 \cup \{-C\}$ ¹.

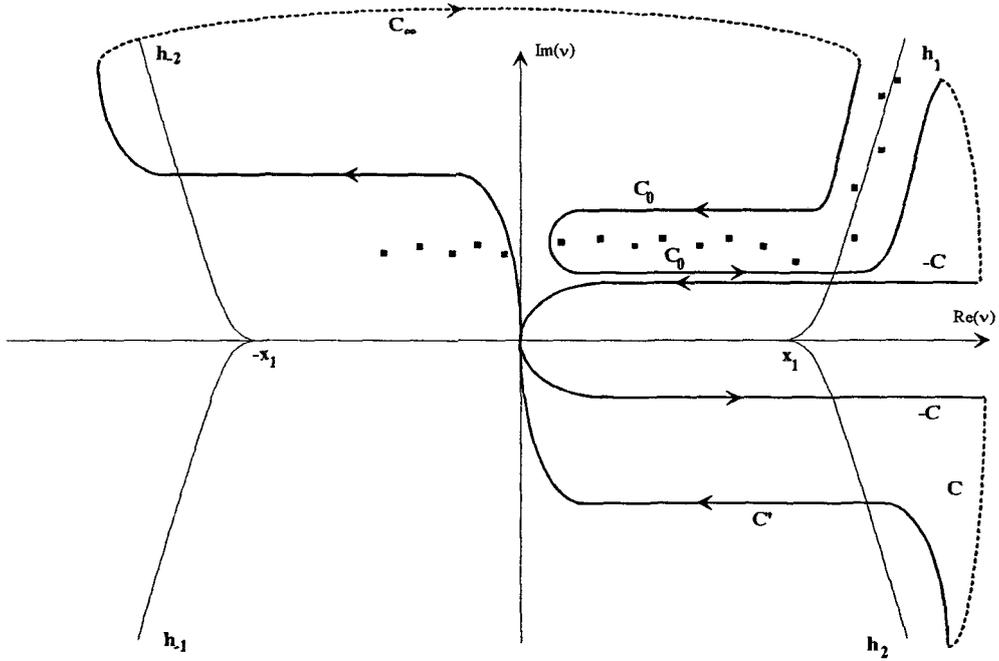


Figure 4 : Position du contour C .

¹ Figure 4.

L'intérieur d'un contour étant défini implicitement comme le domaine situé à sa droite, le domaine fermé par \tilde{C} ne contient aucun pôle¹. Le contour C_0 entoure les pôles de $F(v, x_1)$ situés dans le premier cadran du plan complexe plus précisément les pôles v_1 vérifiant $\text{Re}(v_1) \geq 0$ et $\text{Im}(v_1) > 0$. Le contour C' admet 0 pour centre de symétrie. Le "contour" C_∞ relie les trois autres à l'infini, l'union des quatre contours réalisant ainsi un contour fermé. Si nous admettons que le théorème de Cauchy est encore valable sur le contour \tilde{C} en dépit du problème à l'origine, nous établissons la relation :

$$(15) \quad P_{\text{tot}}(x_1) = P_{C'}(x_1) + P_{C_\infty}(x_1) + P_{C_0}(x_1),$$

$$\text{avec } P_{C'}(x_1) = P_0 e^{-i\omega t_1} \int_{C'} F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v},$$

$$P_{C_\infty}(x_1) = P_0 e^{-i\omega t_1} \int_{C_\infty} F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v},$$

$$\text{et } P_{C_0}(x_1) = P_0 e^{-i\omega t_1} \int_{C_0} F(v, x_1) \frac{dv}{\sin \pi v}.$$

On démontre que P_{C_∞} tend vers 0 lorsque v tend vers $+\infty^2$. On montre numériquement lorsque le cylindre est élastique et lorsque x_1 est voisin de 5 que l'intégrale de fond ou *background integral* $P_{C'}$ reste faible devant P_{C_0} ³. Bien que l'absence de démonstration ne nous permette pas d'établir dans tous les cas ce résultat, nous l'admettons.

Dès lors la pression totale s'écrit :

$$(16) \quad P_{\text{tot}} = P_{C_0}.$$

Cette formulation permet de mettre en évidence l'importance des pôles de $F(v, x_1)$.

A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson, in N. Gespa, p. 202.

² W. Franz, Theorie der Beugung Elektromagnetischer Wellen, Springer-Verlag, 1957. (D'après A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson, in N. Gespa).

R. D. Doolittle, H. Überall, P. Ugincius, Sound Scattering by Elastic Cylinders, J. Acoust. Soc. Am., pp. 1-14, 43, 1968.

Pour une fréquence donnée, nous montrons dans les chapitres suivants que ces pôles sont séparables en deux groupes : ceux, notés " ν_{ℓ_1} ", à faible partie imaginaire et à partie réelle inférieure à x_1 et ceux, notés " ν_{ℓ_2} ", à partie réelle supérieure à x_1 et situés à proximité de la *ligne anti-Stokes*¹ de $H_v^{(1)}(x_1)$ (ligne notée " h_1 " sur la figure 4). Afin d'interpréter correctement en terme d'ondes circonférentielles ces deux types de pôles, nous transformons le contour C_0 au moyen des contours C_1 et C_2 : le contour C_1 entoure les pôles notés " ν_{ℓ_1} ", le contour C_2 ceux notés " ν_{ℓ_2} "².

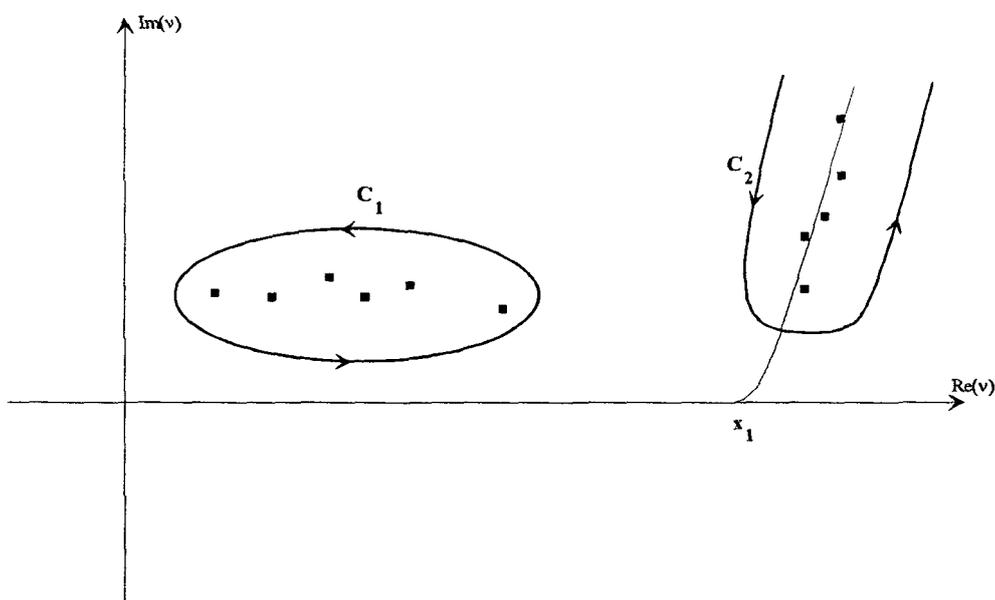


Figure 5 : Position des contours C_1 et C_2 .

Si nous notons P_{C_1} et P_{C_2} les pressions associées, l'équation (16) devient :

$$(17) \quad P_{\text{tot}} = P_{C_1} + P_{C_2}$$

avec $P_{C_1}(x_1) = P_0 e^{-i\omega t_1} \int_{C_1} F(\nu, x_1) \frac{d\nu}{\sin \pi \nu}$,

et $P_{C_2}(x_1) = P_0 e^{-i\omega t_1} \int_{C_2} F(\nu, x_1) \frac{d\nu}{\sin \pi \nu}$.

Nous ne vérifions pas mathématiquement que ces intégrales de contour sont définies pour toute valeur de la fréquence x_1 . Cette étude est réalisée a

¹ A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson, in N. Gespa, p. 213.

² Figure 5.

posteriori en évaluant les valeurs des pressions obtenues lorsque la fréquence croît. Une trop rapide croissance de ces valeurs est vraisemblablement due à une utilisation abusive du théorème des résidus. La transformation d'Imai, présentée dans la section II, permet d'éviter ce problème.

I.2. Ondes circonférentielles - Expression analytique des pressions associées

Lorsque le regroupement des pôles est possible, nous utilisons la théorie des résidus pour identifier la contribution de chacun des pôles. Le théorème des résidus nous permet ainsi d'écrire :

$$(18) \quad P_{C_1} = 2\pi i P_0 e^{-i\omega t} \sum_{\ell_1=1}^{N(x_1)} \mathcal{R} \left[i \frac{F(v_{\ell_1}, x_1)}{\sin \pi v_{\ell_1}} \right]$$

et

$$P_{C_2} = 2\pi i P_0 e^{-i\omega t} \sum_{\ell_2=1}^{+\infty} \mathcal{R} \left[i \frac{F(v_{\ell_2}, x_1)}{\sin \pi v_{\ell_2}} \right],$$

avec $\mathcal{R} \left[i \frac{F(v_{\ell_j}, x_1)}{\sin \pi v_{\ell_j}} \right]$ le résidu de la fonction $i \frac{F(v_{\ell_j}, x_1)}{\sin \pi v_{\ell_j}}$ calculé

au pôle v_{ℓ_j} , $j \in \{1, 2\}$ et $N(x_1)$ le nombre de pôles de type ℓ_1 situés dans le premier cadran du plan complexe.

Nous verrons numériquement que les résidus calculés aux pôles de types ℓ_2 décroissent très rapidement lorsque ℓ_2 croît ce qui nous permettra de ne conserver pour le calcul de P_{C_2} que les quelques premiers termes dominants de la série. Lorsque la fréquence x_1 croît les pôles passent progressivement du quatrième quadrant au premier, *les résonances émergent progressivement d'un fond non résonant*¹. Afin de fixer la valeur de l'entier $N(x_1)$, nous

¹ A. Derem, Diffusion des ondes acoustiques par des cylindres métalliques immergés : remarques concernant l'interprétation des phénomènes, *CETHEDEC.*, 72, 1982 .

supposons la fréquence x_1 connue. Le nombre de pôles intervenant dans le calcul des pressions est une constante ne dépendant que de la nature du solide et de la valeur de la fréquence x_1 .

D'après l'équation (6),

$$(19) \quad F(\nu, x_1) = (-i)^\nu \left[J_\nu(k_1 r) + \frac{D^{[1]}(\nu, x_1)}{D(\nu, x_1)} H_\nu^{(1)}(k_1 r) \right] \cos \nu \varphi.$$

avec $D(\nu, x_1)$ et $D^{[1]}(\nu, x_1)$ les prolongements analytiques respectifs de $D_n(\omega, a)$ et de $D_n^{[1]}(\omega, a)$.

Comme les pôles de $F(\nu, x_1)$ sont les zéros de $D(\nu, x_1)$, le résidu

$$\mathcal{R} \left[i \frac{F(\nu_{\ell_j}, x_1)}{\sin \pi \nu_{\ell_j}} \right], j \in \{1, 2\}, \text{ peut s'écrire :}$$

$$(20) \quad \mathcal{R} \left[i \frac{F(\nu_{\ell_j}, x_1)}{\sin \pi \nu_{\ell_j}} \right] = i e^{-i \frac{\pi}{2} \nu_{\ell_j}} \frac{\cos \nu_{\ell_j} \varphi}{\sin \pi \nu_{\ell_j}} H_{\nu_{\ell_j}}^{(1)}(k_1 r) \frac{D^{[1]}(\nu_{\ell_j}, x_1)}{\frac{\partial}{\partial \nu} D(\nu_{\ell_j}, x_1)} \Big|_{\nu = \nu_{\ell_j}}$$

Si nous posons $\beta(\nu_{\ell_j}, x_1) = \frac{D^{[1]}(\nu_{\ell_j}, x_1)}{\frac{\partial}{\partial \nu} D(\nu_{\ell_j}, x_1)} \Big|_{\nu = \nu_{\ell_j}}$, les pressions P_{C_1} et P_{C_2}

deviennent

$$(21) \quad \begin{aligned} P_{C_1}(x_1) &= \sum_{\ell_1=1}^{N(x_1)} P_{\ell_1} \\ &\text{et} \\ P_{C_2}(x_1) &= \sum_{\ell_2=1}^{+\infty} P_{\ell_2} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{avec} \\ P_{\ell_1} = -2\pi P_0 e^{-i\omega t} e^{-i \frac{\pi}{2} \nu_{\ell_1}} \frac{\cos \nu_{\ell_1} \varphi}{\sin \pi \nu_{\ell_1}} H_{\nu_{\ell_1}}^{(1)}(k_1 r) \beta(\nu_{\ell_1}, x_1) \\ \text{et} \\ P_{\ell_2} = -2\pi P_0 e^{-i\omega t} e^{-i \frac{\pi}{2} \nu_{\ell_2}} \frac{\cos \nu_{\ell_2} \varphi}{\sin \pi \nu_{\ell_2}} H_{\nu_{\ell_2}}^{(1)}(k_1 r) \beta(\nu_{\ell_2}, x_1). \end{array} \right.$$

II COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES PRESSIONS DUES AUX ONDES CIRCONFÉRENTIELLES - TRANSFORMATION D'IMAI.

Le comportement asymptotique des pressions P_{ℓ_1} et P_{ℓ_2} est principalement dû à l'évolution à haute fréquence des fonctions cylindriques¹. Pour établir les expressions asymptotiques de ces fonctions calculées pour une variable "x", nous divisons le plan complexe en 5 zones, à chacune d'entre-elles correspond un développement asymptotique différent². Nous employons, pour cela, la dénomination et les expressions utilisées par A. Derem.³ Il distingue principalement deux types de développements : celui d'Airy dans la zone notée 2 et celui de Debye dans les zones notées 7, 8, 9 et 10.

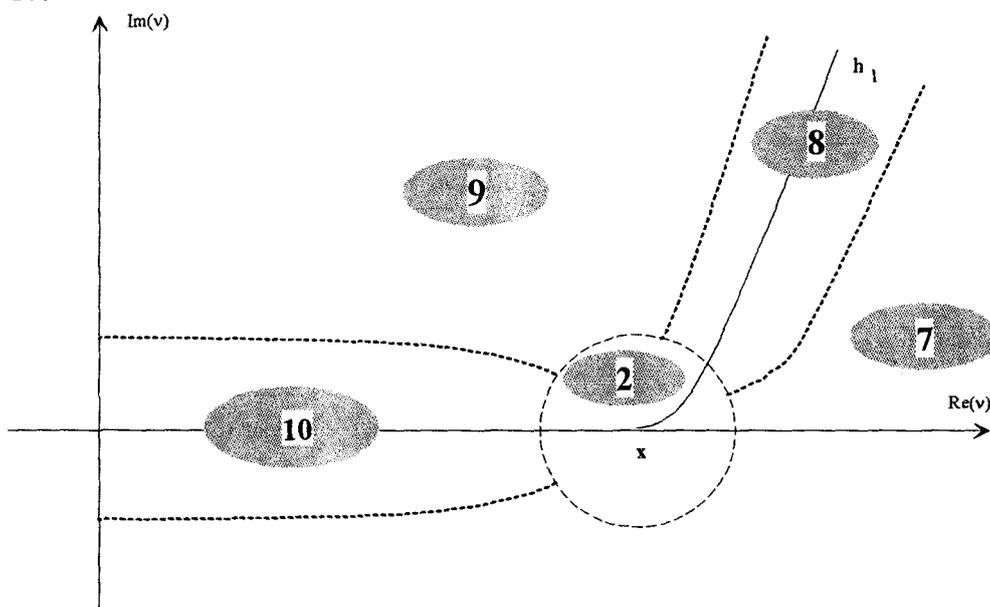


Figure 6 : Lieu des développements asymptotiques des fonctions cylindriques.

Afin de simplifier l'écriture des expressions asymptotiques de P_{ℓ_1} et P_{ℓ_2} , nous posons $P_{\ell_1} = C_{\ell_1} A_{\ell_1}$ et $P_{\ell_2} = C_{\ell_2} A_{\ell_2}$ avec A_{ℓ_1} et A_{ℓ_2} les

¹ Le nom générique de fonctions cylindriques englobe les fonctions de Bessel, de Neuman et de Hankel.

² Figure 6.

³ A. Derem, *Formulaire pour les développements asymptotiques des fonctions cylindriques d'indice complexe*, Rapport LCT., PL. 806 618 (diffusion interne), 1980.

fonctions responsables du comportement asymptotique des pressions P_{ℓ_1} et P_{ℓ_2} . Pour cela, nous sommes également conduit à écrire le coefficient β sous la forme :

$$(22) \quad \beta(v, x_1) = \frac{1}{2} x_1 \frac{H_v^{(2)}(x_1)}{H_v^{(1)}(x_1)} E^{(c)}(v, x_1).$$

Le coefficient $E^{(c)}(v, x_1)$ est le coefficient d'excitation de l'onde correspondant au pôle v lorsque la source incidente est de type cylindrique¹. Nous utilisons ce coefficient plutôt que son équivalent pour une onde incidente plane. En effet, il nous permet d'obtenir une expression du résidu β plus facilement développable en série pour les grandes valeurs de v et x . L'examen des déterminants intervenant dans le calcul de ce coefficient nous conduit à supposer qu'il n'intervient pas dans le comportement asymptotique de la pression diffusée dès lors que la variable v n'est pas située dans la zone d'Airy de l'une des fréquences réduites x , x_t ou x_ℓ . Lorsque cette condition n'est pas respectée, il est difficile d'estimer le comportement asymptotique de ce coefficient. Ainsi, lorsque dans les chapitres suivants nous rencontrons des pôles situés dans l'une des zones d'Airy des fréquences réduites nous supposons que la T.G.D. n'est pas en toute rigueur applicable.

¹ A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., p. 161, 1989-1993.

II.1. Expression asymptotique de la pression due à une onde de type ℓ_1

Nous supposons, a priori, que les développements asymptotiques des différentes fonctions cylindriques sont effectués dans certaines zones du plan complexe. Ces hypothèses seront vérifiées dans chacun des chapitres précisant les différents types d'objets étudiés. Ainsi, pour obtenir l'expression asymptotique du coefficient A_{ℓ_1} , nous supposons que les racines v_{ℓ_1} du déterminant $D(v, x_1)$ sont situées dans la zone 10 vis à vis de x_1 et de $k_1 r$.

Dès lors, nous pouvons écrire¹ :

$$(23) \quad H_{v_{\ell_1}}^{(1)}(k_1 r) \approx e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp\left(-iv_{\ell_1} \cos^{-1} \frac{v_{\ell_1}}{k_1 r} + i\sqrt{(k_1 r)^2 - v_{\ell_1}^2}\right)}{\left((k_1 r)^2 - v_{\ell_1}^2\right)^{\frac{1}{4}}}$$

et

$$(24) \quad \frac{H_{v_{\ell_1}}^{(2)}(x_1)}{H_{v_{\ell_1}}^{(1)}(x_1)} \approx i \exp\left(2iv_{\ell_1} \cos^{-1} \frac{v_{\ell_1}}{x_1} - 2i\sqrt{x_1^2 - v_{\ell_1}^2}\right).$$

En remarquant que $\frac{1}{\sin x} = -2ie^{ix} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{2imx}$ tant que $\text{Im}(x) > 0$,

nous pouvons exprimer le rapport $\frac{\cos \varphi v_{\ell_1}}{\sin \pi v_{\ell_1}}$ sous la forme :

$$(25) \quad \frac{\cos \varphi v_{\ell_1}}{\sin \pi v_{\ell_1}} = i \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp\left[iv_{\ell_1}(\varphi + 2\pi m + \pi)\right] + \exp\left[iv_{\ell_1}(-\varphi + 2\pi m + \pi)\right] \right\}.$$

Afin de simplifier les équations (23) à (25), nous faisons apparaître la partie réelle, notée \tilde{v}_{ℓ_1} , et la partie imaginaire, notée $\tilde{\tilde{v}}_{\ell_1}$, du complexe v_{ℓ_1} . Nous montrerons dans les chapitres suivants que $\tilde{\tilde{v}}_{\ell_1} \ll \tilde{v}_{\ell_1}$.

¹ A. Derem, *Formulaire pour les développements asymptotiques des fonctions cylindriques d'indice complexe*, Rapport LCT., PL. 806 618 (diffusion interne), pp.36 et 43, 1980.

Ainsi, en réalisant un développement limité au premier ordre en $\frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{\tilde{v}_{\ell_1}}$ des arguments de la fonction exponentielle présente dans les équations (23) à (25), nous obtenons :

$$(26) \quad H_{\tilde{v}_{\ell_1}}^{(1)}(k_{1r}) \approx e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left((k_{1r})^2 - \tilde{v}_{\ell_1}^2 \right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-i\tilde{v}_{\ell_1} \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{k_{1r}} + i\sqrt{(k_{1r})^2 - \tilde{v}_{\ell_1}^2} \right) \exp\left(\tilde{v}_{\ell_1} \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{k_{1r}} \right),$$

$$(27) \quad \frac{H_{\tilde{v}_{\ell_1}}^{(2)}(x_1)}{H_{\tilde{v}_{\ell_1}}^{(1)}(x_1)} \approx i \exp\left(2i\tilde{v}_{\ell_1} \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{x_1} - 2i\sqrt{x_1^2 - \tilde{v}_{\ell_1}^2} \right) \exp\left(-2\tilde{v}_{\ell_1} \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{x_1} \right),$$

et

$$(28) \quad \frac{\cos \varphi \tilde{v}_{\ell_1}}{\sin \pi \tilde{v}_{\ell_1}} e^{-i\frac{\pi}{2} \tilde{v}_{\ell_1}} \approx -i \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp\left[i\tilde{v}_{\ell_1} \left(\varepsilon \varphi + 2\pi m + \frac{\pi}{2} \right) \right] \exp\left[-\tilde{v}_{\ell_1} \left(\varepsilon \varphi + 2\pi m + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}.$$

Le coefficient A_{ℓ_1} admet, ainsi le développement asymptotique suivant :

$$(29) \quad A_{\ell_1} \approx \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp i \left[\sqrt{(k_{1r})^2 - \tilde{v}_{\ell_1}^2} - 2\sqrt{x_1^2 - \tilde{v}_{\ell_1}^2} - \tilde{v}_{\ell_1} \left(\cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{k_{1r}} - 2 \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{x_1} - \varepsilon \varphi - 2\pi m - \frac{\pi}{2} \right) \right] \exp \left[\tilde{v}_{\ell_1} \left(\cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{k_{1r}} - 2 \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{x_1} - \varepsilon \varphi - 2\pi m - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}.$$

Avant de donner une interprétation géométrique de ce résultat nous devons vérifier sa vraisemblance. En effet, aucun terme de l'équation (29) ne doit diverger lorsque x_1 tend vers l'infini. Si nous supposons que $|v_{\ell_1}|$ tend vers l'infini en même tant que x_1^1 , nous sommes amenés à introduire la restriction suivante :

$$(30) \quad \forall m \in \mathbf{N}, -\pi - \varepsilon\varphi \leq 2 \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{x_1} - \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{k_1 r} + \left(2m - \frac{1}{2}\right)\pi$$

avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Etant donné la symétrie du problème, nous pouvons considérer que $0 \leq \varphi \leq \pi$. Cette hypothèse supplémentaire permet de simplifier l'équation (30) qui devient :

$$(31) \quad \frac{\pi}{2} - \varphi + 2 \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{x_1} - \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{k_1 r} \geq 0.$$

Nous verrons dans la partie consacrée à l'interprétation géométrique, la signification physique de cette condition sur l'angle φ .

¹ Cette hypothèse se vérifie analytiquement dans le cas du cylindre fluide où un développement asymptotique de v_{ℓ_1} a été établi par J.M. Conoir J-M. Conoir, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, p. 154, 1987.
Nous justifierons numériquement cette hypothèse dans le cas du cylindre élastique et dans celui du tube.

II.2. Expression asymptotique de la pression due à une onde de type ℓ_2

Nous montrerons dans les chapitres suivants que les pôles v_{ℓ_2} sont situés dans la zone 8 vis à vis de x_1 et dans la zone 9 vis à vis de $k_1 r$. Le

rapport $\frac{H_{v_{\ell_2}}^{(2)}(x_1)}{H_{v_{\ell_2}}^{(1)}(x_1)}$ admet ainsi pour développement asymptotique :

$$(32) \quad \frac{H_{v_{\ell_2}}^{(2)}(x_1)}{H_{v_{\ell_2}}^{(1)}(x_1)} \approx i \frac{\exp(A - B)}{\exp(-A + B) - i \exp(A - B)},$$

$$\text{avec } A = v_{\ell_2} \operatorname{ch}^{-1} \frac{v_{\ell_2}}{x_1} \text{ et } B = \sqrt{v_{\ell_2}^2 - x_1^2}$$

Comme les pôles v_{ℓ_2} ont une partie réelle voisine de x_1 même à haute fréquence¹, ce rapport n'intervient pas dans le comportement asymptotique de A_{ℓ_2} . Ainsi, le comportement du résidu β n'est pas prépondérant dans l'évolution à haute fréquence de la pression $P_{v_{\ell_2}}$.

¹ A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson, in N. Gespa, p. 235.

L'expression asymptotique de $H_{\tilde{\nu}_{\ell_1}}^{(1)}(k_1 r)$ est identique dans la zone 9 et dans la zone 10. Connaissant les équations (26) et (28) nous pouvons donc établir le développement asymptotique de A_{ℓ_2} lorsque $\tilde{\tilde{\nu}}_{\ell_2} \ll \tilde{\nu}_{\ell_2}$. $\tilde{\tilde{\nu}}_{\ell_2}$ et $\tilde{\nu}_{\ell_2}$ sont les parties, respectivement, imaginaire et réelle de ν_{ℓ_2} . L'expression de A_{ℓ_2} est ainsi :

$$(33) \quad A_{\ell_2} \approx \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp i \left[\sqrt{(k_1 r)^2 - \tilde{\nu}_{\ell_2}^2} - \tilde{\nu}_{\ell_2} \left(\cos^{-1} \frac{\tilde{\nu}_{\ell_2}}{k_1 r} - \varepsilon \varphi - 2\pi m - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right. \\ \left. \exp \left[\tilde{\tilde{\nu}}_{\ell_2} \left(\cos^{-1} \frac{\tilde{\nu}_{\ell_2}}{k_1 r} - \varepsilon \varphi - 2\pi m - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}.$$

Afin de rendre cette expression asymptotique réaliste, il faut introduire une condition sur φ semblable à celle introduite lors du calcul de A_{ℓ_1} , soit :

$$(34) \quad \frac{\pi}{2} - \varphi - \cos^{-1} \frac{\tilde{\nu}_{\ell_2}}{k_1 r} \geq 0$$

que nous écrivons plus simplement

$$\varphi \leq \sin^{-1} \frac{\tilde{\nu}_{\ell_2}}{k_1 r}$$

avec l'hypothèse supplémentaire $0 \leq \varphi \leq \pi$. Nous donnerons comme pour l'équation (31) une interprétation géométrique de cette condition.

II.3. Transformation d'Imai - Justification numérique.

Lorsque l'observateur $P(r, \varphi)$ est situé dans une région ne permettant pas de respecter, pour certaines ondes, les conditions traduites par les équations (31) et (34), nous ne pouvons plus utiliser l'équation (17) pour exprimer les pressions P_{C_1} et P_{C_2} . Nous devons introduire la transformation d'Imai. Pour cela, en nous plaçant dans le plan complexe, nous déformons les contours C_2 et C_1 de la figure 5 afin que le nouveau contour C'_2 , entoure l'ancien contour C_2 et l'ensemble des pôles de type ℓ_1

ne permettant pas la réalisation des conditions (31) et (34)¹. Le contour C'_1 entoure l'ensemble des pôles de type ℓ_1 non entourés par C'_2 .

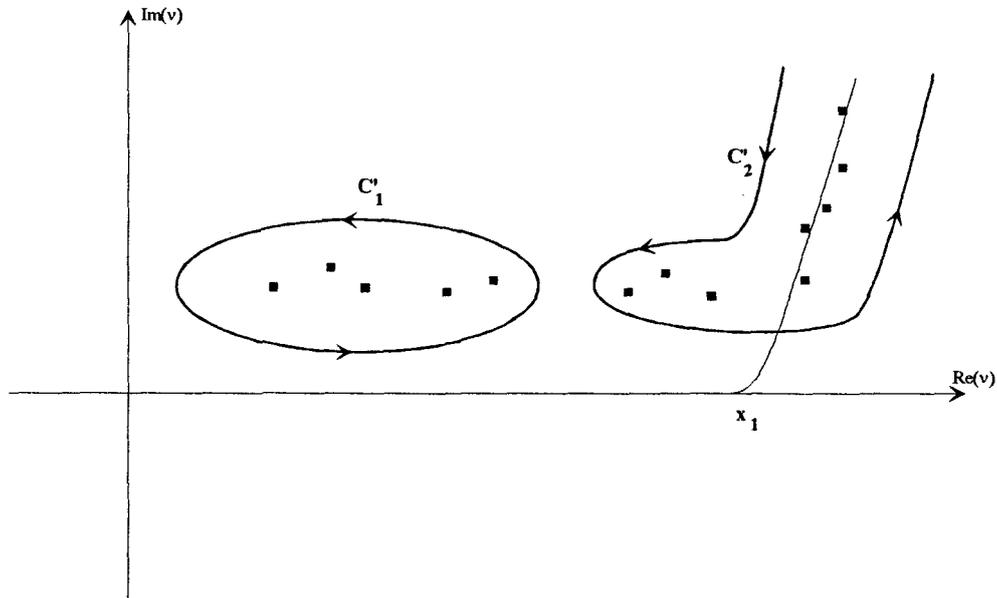


Figure 7 : Position des contours C'_1 et C'_2 .

Nous réalisons, ensuite la transformation d'Imai. Cette dernière consiste à développer "cos $v\varphi$ " de la façon suivante² :

$$(35) \quad \cos v\varphi = e^{iv\pi} \cos v(\varphi - \pi) - ie^{iv(\pi - \varphi)} \sin \pi v,$$

et à introduire cette identité dans le calcul de l'intégrale sur le contour C'_2 , notée $P_{C'_2}$. Cette pression a donc pour expression :

$$(36) \quad P_{C'_2}(x_1) = iP_0 e^{-i\omega t} \int_{C'_2} e^{iv\frac{\pi}{2}} \frac{\cos v(\varphi - \pi)}{\sin \pi v} \left[J_v(k_1 r) + \frac{D^{[1]}(v, x_1)}{D(v, x_1)} H_v^{(1)}(k_1 r) \right] dv \\ + P_0 e^{-i\omega t} \int_{C'_2} e^{iv(\frac{\pi}{2} - \varphi)} \left[J_v(k_1 r) + \frac{D^{[1]}(v, x_1)}{D(v, x_1)} H_v^{(1)}(k_1 r) \right] dv$$

¹ Figure 7.

² A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson, in N. Gespa., p. 205.

Nous pouvons de nouveau appliquer la théorie des résidus à la première intégrale. En appelant $P_{\ell_1}^L$ et $P_{\ell_2}^L$ les pressions correspondant respectivement aux résidus aux pôles v_{ℓ_1} et v_{ℓ_2} , nous obtenons :

$$(37) \quad \begin{cases} P_{\ell_1}^L = -2\pi P_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{\pi}{2}v_{\ell_1}} \frac{\cos v_{\ell_1} \psi}{\sin \pi v_{\ell_1}} H_{v_{\ell_1}}^{(1)}(k_1 r) \beta(v_{\ell_1}, x_1) \\ \text{et} \\ P_{\ell_2}^L = -2\pi P_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{\pi}{2}v_{\ell_2}} \frac{\cos v_{\ell_2} \psi}{\sin \pi v_{\ell_2}} H_{v_{\ell_2}}^{(1)}(k_1 r) \beta(v_{\ell_2}, x_1), \end{cases}$$

avec $\psi = \pi - \phi$

Les termes $A_{\ell_1}^L$ et $A_{\ell_2}^L$, déterminant les comportements asymptotiques de $P_{\ell_1}^L$ et $P_{\ell_2}^L$, valent dès lors :

$$(38) \quad A_{\ell_1}^L \approx \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp i \left[\sqrt{(k_1 r)^2 - \tilde{v}_{\ell_1}^2} - 2\sqrt{x_1^2 - \tilde{v}_{\ell_1}^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \tilde{v}_{\ell_1} \left(\cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{k_1 r} - 2 \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{x_1} - \varepsilon \psi - 2\pi m - \frac{3\pi}{2} \right) \right] \right\} \\ \exp \left[\tilde{v}_{\ell_1} \left(\cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{k_1 r} - 2 \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{x_1} - \varepsilon \psi - 2\pi m - \frac{3\pi}{2} \right) \right] \Bigg\},$$

et

$$(39) \quad A_{\ell_2}^L \approx \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp i \left[\sqrt{(k_1 r)^2 - \tilde{v}_{\ell_2}^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \tilde{v}_{\ell_2} \left(\cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_2}}{k_1 r} - \varepsilon \psi - 2\pi m - \frac{3\pi}{2} \right) \right] \right\} \\ \exp \left[\tilde{v}_{\ell_2} \left(\cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_2}}{k_1 r} - \varepsilon \psi - 2\pi m - \frac{3\pi}{2} \right) \right] \Bigg\}.$$

Les conditions d'existence de ces développements asymptotiques sont

$$(40) \quad -\pi - \varepsilon\psi \leq -\frac{\pi}{2} + 2 \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{x_1} - \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{k_1 r} \text{ pour le premier ,}$$

et

$$(41) \quad -\pi - \varepsilon\psi \leq -\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{\tilde{v}_{\ell_2}}{k_1 r} \text{ pour le second .}$$

Ces conditions restent cohérentes avec la démarche poursuivie ici puisqu'elles sont vérifiées dès lors que les équations (31) et (34) ne le sont plus.

La seconde intégrale de l'équation (36) correspond aux contributions des ondes géométriques, nous le démontrerons analytiquement dans le cas du cylindre fluide et du cylindre élastique, et nous le vérifierons numériquement dans le cas du tube élastique. Pour effectuer la démonstration, nous déformons une fois encore le contour C'_2 en le faisant passer par l'axe des abscisses qui ne contient plus de pôle¹. Le calcul est ensuite réalisé au moyen de la méthode dite "du col"². Nous ferons ainsi apparaître la contribution d'un rayon géométrique correspondant à l'onde incidente directe et d'une multitude associée à la diffraction de l'objet cylindrique ; les pressions résultantes sont notées respectivement, P_{inc} et $P_{géo}$.

¹ Figure 8.

² Annexe B :Méthode du col.

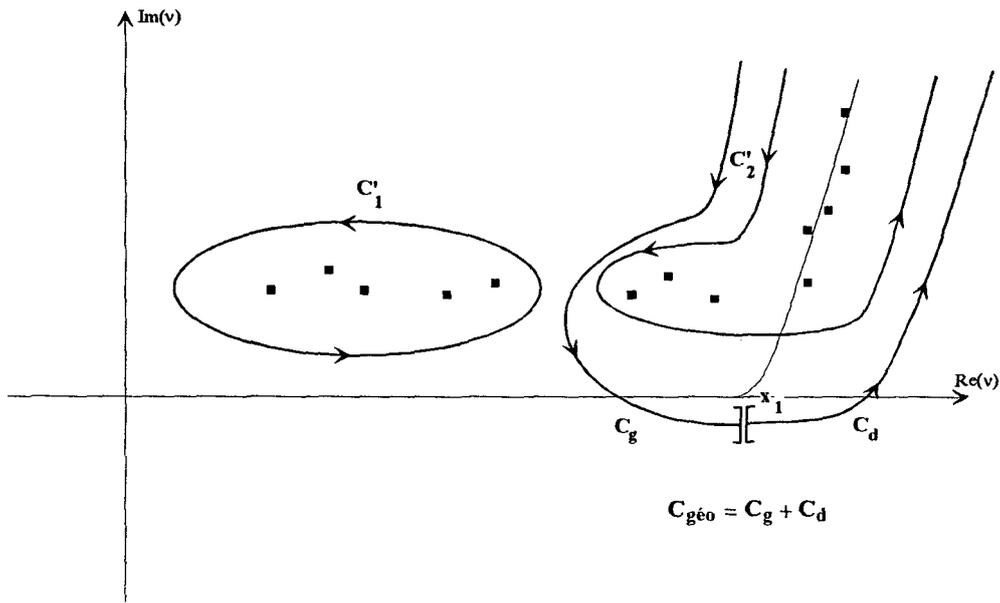


Figure 8 : Introduction du contour $C_{géo}$.

Nous remarquerons dans les chapitres suivants que les parties réelles des pôles de type ℓ_2 , nécessaires au calcul de la pression résultante, ont des valeurs suffisamment proches pour estimer que la condition (34) est vérifiée par tous ces pôles à partir de la même valeur de l'angle φ . Cette hypothèse est d'autant plus vraie que l'observateur est situé loin de l'objet cylindrique. Nous constaterons de plus que lorsque la condition (31) n'est plus vérifiée pour un angle φ et pour un pôle de type ℓ_1 , la condition (34) ne l'est plus pour aucun pôle de type ℓ_2 . Ces observations nous permettent d'affirmer que pour déterminer l'expression de la pression P_{tot} nous devons rechercher soit les expressions des pressions P_{C_1} et P_{C_2} comme nous l'avons effectuée dans le paragraphe précédent, soit celles de la pression $P_{C'_2}$ au moyen de la transformation d'Imai et celle de la pression $P_{C'_1}$ d'une façon identique au calcul de P_{C_1} .

Nous employons la transformation d'Imai pour éviter que les valeurs de la pression diffusée par l'objet ne deviennent irréalistes lorsque la fréquence est importante. Afin de préciser numériquement ce comportement, nous représentons la pression correspondant à certaines ondes de type ℓ_1 , en

fonction de l'angle φ . Ce dernier varie de 0 à 180° ; le rapport des rayons R vaut 5. Les figures 9, 10 et 11 mettent en évidence la divergence de la pression lorsque la fréquence x_1 est élevée et lorsque l'angle φ croît : les valeurs des pressions oscillent autour d'une courbe croissant d'autant plus rapidement que la fréquence est grande. Ainsi dans le cas du cylindre élastique, pour $x_1 = 100$, la pression de l'onde de Rayleigh est 200 fois plus importante lorsque φ passe de 0 à 180°. Pour la seconde onde de type ℓ_1 , appelée B₁ (nous verrons pourquoi dans le chapitre 3), la divergence est moins visible puisque la partie imaginaire du pôle correspondant est beaucoup plus faible (de 10 à 40 fois plus faible pour les valeurs de fréquences étudiées). Nous observons cependant une croissance régulière de la courbe porteuse des oscillations. Dans le cas du tube élastique, pour la première onde de type ℓ_1 , notée $\ell=1$, nous pouvons observer le même comportement que pour l'onde de Rayleigh dans le cylindre élastique. En effet la partie imaginaire du pôle correspondant est suffisamment importante pour permettre une visualisation rapide du phénomène de divergence lorsque la fréquence augmente (elle varie entre 0.8 et 16 pour les valeurs de x_1 représentées sur la figure 11). Pour chacune de ces courbes l'angle φ_{\max} , limite par valeur supérieure de l'ensemble des angles φ vérifiant l'équation (31), est proche de 123° lorsque x_1 tend vers l'infini. Les valeurs obtenues par φ_{\max} décroissent depuis 150° pour l'onde B1 et depuis 130° pour l'onde de Rayleigh cylindrique ; par contre, elles croissent dans le cas de l'onde $\ell=1$ du tube depuis 86° (ces angles correspondent à $x_1=20$, valeur de la fréquence correspondant à la première courbe représentée dans les figures 9 à 11).

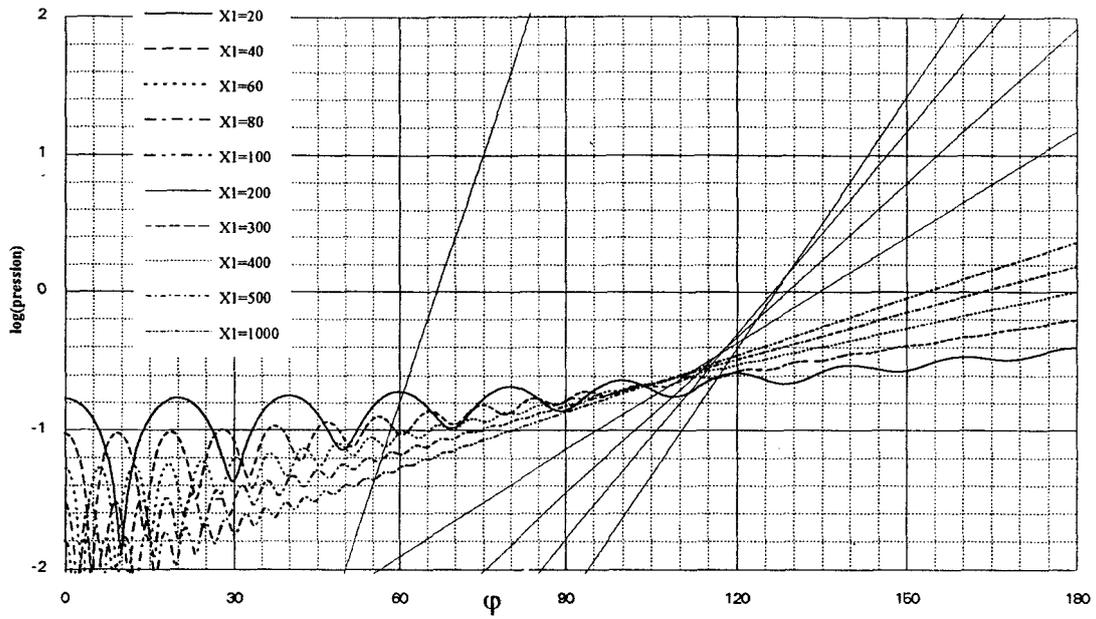


Figure 9 : Cylindre élastique - onde de Rayleigh-[log(pression)](φ)

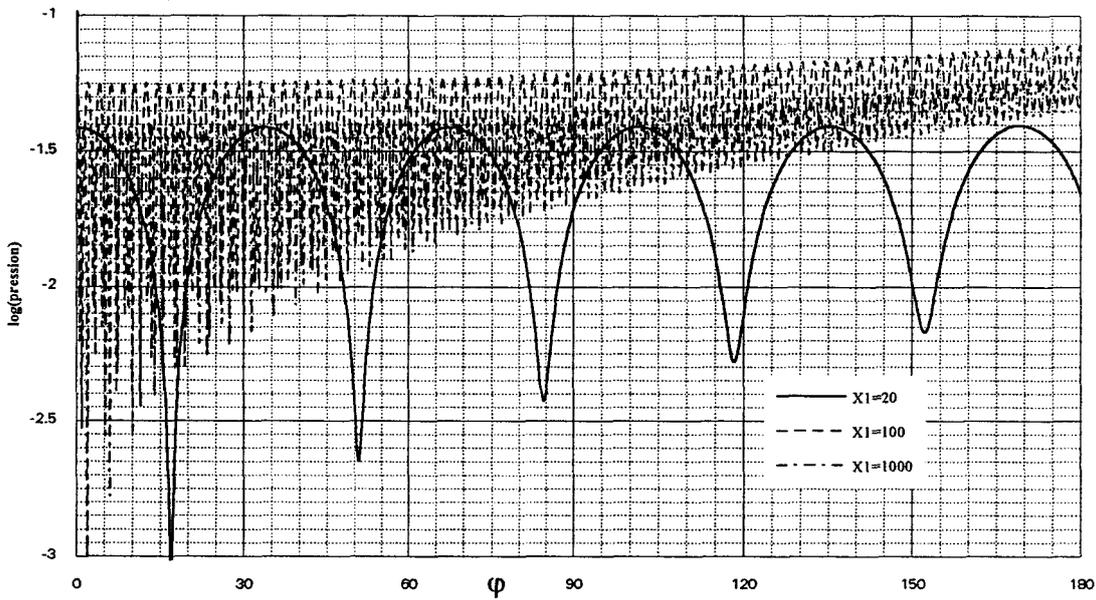


Figure 10 : Cylindre élastique - onde B_1 -[log(pression)](φ)

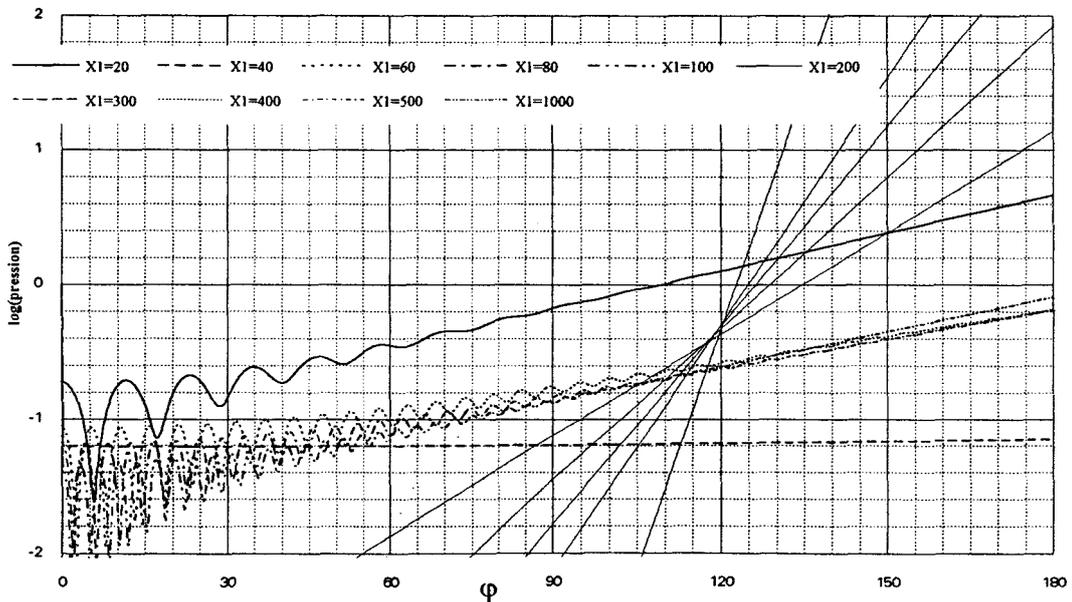


Figure 11 : Tube élastique - onde $\ell=1$ -[log(pression)](φ)

III. INTERPRETATION GEOMETRIQUE DES RESULTATS OBTENUS

III.1. Trajets géométriques associés aux ondes de type ℓ_1

$$\text{Soient les angles } \theta_{\ell_1} \text{ et } \gamma_{\ell_1} \text{ tels que } \begin{cases} \sin \theta_{\ell_1} = \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{x_1} \\ \sin \gamma_{\ell_1} = \frac{\tilde{v}_{\ell_1}}{k_1 r} = \frac{\sin \theta_{\ell_1}}{R} \end{cases}$$

avec "R" le rapport de la distance de l'observateur au centre du cylindre et du rayon de l'objet cylindrique ($R=r/a$).

Lorsque la condition décrite par l'équation (31) est vérifiée, nous pouvons écrire à partir de l'équation (38) :

$$(42) \quad A_{\ell_1} \approx \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp i \left[k_1 r \cos \gamma_{\ell_1} - 2x_1 \cos \theta_{\ell_1} - x_1 \sin \theta_{\ell_1} (2\theta_{\ell_1} - \gamma_{\ell_1} - 2\pi m - \varepsilon \varphi - \pi) \right] \exp \left[\tilde{v}_{\ell_1} (2\theta_{\ell_1} - \gamma_{\ell_1} - 2\pi m - \varepsilon \varphi - \pi) \right] \right\}.$$

En se référant à la figure 12, nous pouvons interpréter les arguments de la fonction exponentielle comme des distances parcourues sur l'objet cylindrique et de cet objet au point d'observation. En effet¹,

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{A_1 B_1'}{a} = -2\theta_{\ell_1} + \gamma_{\ell_1} + \varphi + \pi \\ r \cos \gamma_{\ell_1} - 2x_1 \cos \theta_{\ell_1} = B_1 P - a \cos \theta_{\ell_1} \\ \frac{A_1 B_1}{a} = -2\theta_{\ell_1} + \gamma_{\ell_1} - \varphi + \pi. \end{cases}$$

¹ $A_1 B_1$ et $A_1 B_1'$ sont des arcs orientés.

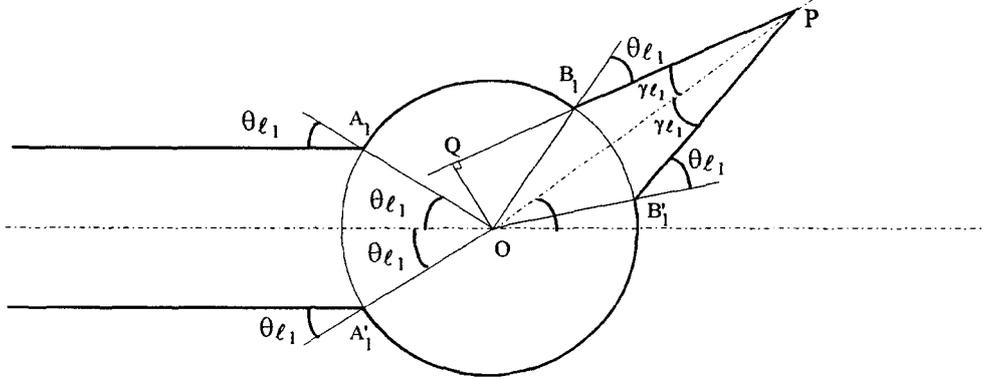


Figure 12 : Trajet d'une onde de type ℓ_1 lorsque la condition (31) est vérifiée.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 A_{\ell_1} \approx & \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp i \left[\frac{1}{c_1} (B_1 P - a \cos \theta_{\ell_1}) + \frac{1}{c_{\ell_1}} (A'_1 B'_1 + 2\pi m a) \right] \right. \\
 & \left. \exp \left[\frac{-\tilde{\nu}_{\ell_1}}{a} (A'_1 B'_1 + 2\pi m a) \right] \right\} \\
 (44) \quad & + \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp i \left[\frac{1}{c_1} (B_1 P - a \cos \theta_{\ell_1}) + \frac{1}{c_{\ell_1}} (A_1 B_1 + 2\pi m a) \right] \right. \\
 & \left. \exp \left[\frac{-\tilde{\nu}_{\ell_1}}{a} (A_1 B_1 + 2\pi m a) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

c_{ℓ_1} est la vitesse de phase associée à ν_{ℓ_1} ($c_{\ell_1} = \frac{\omega a}{\tilde{\nu}_{\ell_1}}$ avec ω la pulsation de l'onde incidente). A haute fréquence, nous interprétons la pression P_{ℓ_1} comme la somme des pressions dues à une infinité d'ondes se propageant dans les deux sens sur la surface de l'objet cylindrique et s'amortissant par émission de leur énergie propre durant ce trajet. L'amortissement est d'autant plus important que la partie imaginaire $\tilde{\nu}_{\ell_1}$ du pôle ν_{ℓ_1} et que l'entier "m" ont des valeurs élevées. Le terme $e^{-i \frac{a}{c_1} \cos \theta_{\ell_1}}$ précise que l'origine des phases est prise au centre O de l'objet cylindrique.

Lorsque la condition (31) n'est plus vérifiée, nous obtenons¹ :

$$(45) \quad A_{\ell_1}^L \approx \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp i \left[\frac{1}{c_1} (B_1 P - a \cos \theta_{\ell_1}) + \frac{1}{c_{\ell_1}} (A_1 B_1 + 2\pi a + 2\pi m a) \right] \right. \\ \left. \exp \left[\frac{-\tilde{\nu}_{\ell_1}}{a} (A_1 B_1 + 2\pi a + 2\pi m a) \right] \right\} \\ + \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp i \left[\frac{1}{c_1} (B_1 P - a \cos \theta_{\ell_1}) + \frac{1}{c_{\ell_1}} (A_1' B_1' + 2\pi m a) \right] \right. \\ \left. \exp \left[\frac{-\tilde{\nu}_{\ell_1}}{a} (A_1' B_1' + 2\pi m a) \right] \right\}.$$

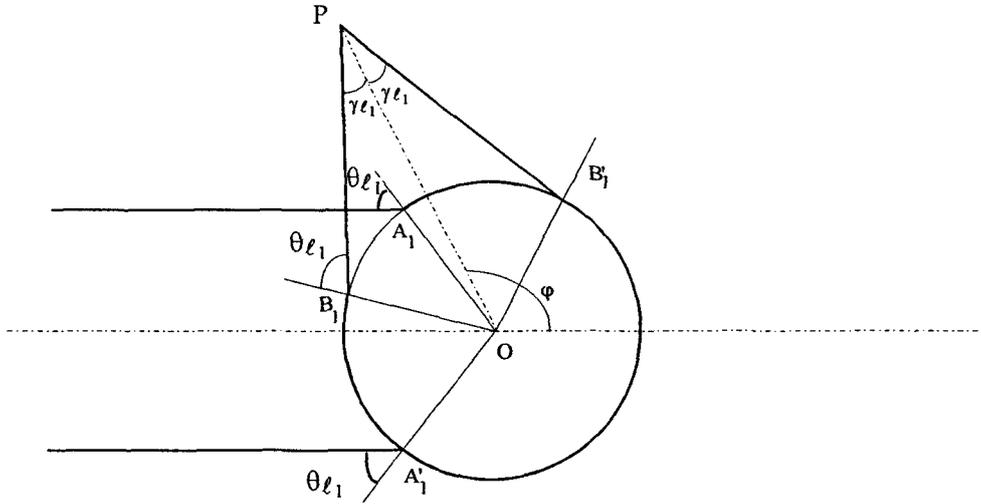


Figure 13 : Trajet d'une onde de type ℓ_1 lorsque la condition (31) n'est pas vérifiée.

La condition (31) est équivalente à $A_1 B_1 \geq 0$. Ainsi lorsque $A_1 B_1 < 0$, l'onde doit réaliser un tour de plus avant d'atteindre le point d'émergence. Lorsque $A_1 B_1 = 0$, cette onde de surface coïncide avec une onde géométrique se réfléchissant simplement à la surface du cylindre. L'expression de la pression est de plus non continue lorsque $A_1 B_1$ tend vers

0. En effet, nous avons $\frac{\lim_{A_1 B_1 \rightarrow 0^+} P_{\ell_1}}{\lim_{A_1 B_1 \rightarrow 0^-} P_{\ell_1}^L} \approx e^{2\pi \tilde{\nu}_{\ell_1}}$. La discontinuité est d'autant

plus importante que la valeur du réel $\tilde{\nu}_{\ell_1}$ est grande.

¹ Figure 13.

III.2. Trajets géométriques associés aux ondes de type ℓ_2

Nous suivons une démarche identique à celle employée pour l'interprétation géométrique de la pression P_{ℓ_1} . Pour cela, nous appelons γ_{ℓ_2} l'angle élément de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et défini par $\sin \gamma_{\ell_2} = \frac{\tilde{v}_{\ell_2}}{k_1 r}$. Comme $\tilde{v}_{\ell_2} \approx x_1 = k_1 a$, $\sin \gamma_{\ell_2} = \frac{a}{r}$.

Lorsque la condition décrite par l'équation (34) est vérifiée, en reprenant l'expression de A_{ℓ_2} obtenue par l'équation (39), nous pouvons écrire¹ :

$$(46) \quad A_{\ell_2} \approx \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp i \left[\frac{1}{c_1} B_2 P + \frac{1}{c_{\ell_2}} (A'_2 B'_2 + 2\pi m a) \right] \right. \\ \left. \exp \left[\frac{-\tilde{v}_{\ell_2}}{a} (A'_2 B'_2 + 2\pi m a) \right] \right\} \\ + \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp i \left[\frac{1}{c_1} B_2 P + \frac{1}{c_{\ell_2}} (A_2 B_2 + 2\pi m a) \right] \right. \\ \left. \exp \left[\frac{-\tilde{v}_{\ell_2}}{a} (A_2 B_2 + 2\pi m a) \right] \right\}.$$

$$(47) \quad \text{avec } \begin{cases} \frac{A'_2 B'_2}{a} = \gamma_{\ell_2} + \varphi \\ r \cos \gamma_{\ell_2} = B_2 P \\ \frac{A_2 B_2}{a} = \gamma_{\ell_2} - \varphi. \end{cases}$$

et c_{ℓ_2} la vitesse de phase associée à v_{ℓ_2} ($c_{\ell_2} = \frac{\omega a}{\tilde{v}_{\ell_2}}$)

¹ Figure 14.

$A_2 B_2$ et $A'_2 B'_2$ sont des arcs orientés.

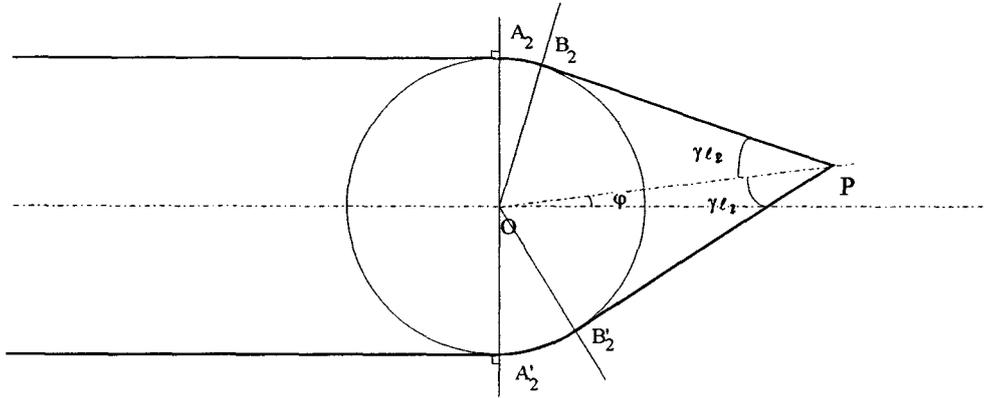


Figure 14: Trajet d'une onde de type ℓ_2 lorsque la condition (34) est vérifiée.

Le rayon géométrique modélisant l'onde de type ℓ_2 entre en contact avec l'objet cylindrique de façon tangentielle. De plus, comme ces ondes ont le fluide externe comme principal support¹, on les appelle usuellement ondes de surface externe ou ondes rampantes².

Lorsque la condition (34) n'est plus vérifiée, nous obtenons³ :

$$(48) \quad A_{\ell_2}^L \approx \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp \left[\frac{1}{c_1} B_2 P + \frac{1}{c_{\ell_2}} (A_2 B_2 + 2\pi a + 2\pi m a) \right] \right. \\ \left. \exp \left[\frac{-\tilde{v}_{\ell_2}}{a} (A_2 B_2 + 2\pi a + 2\pi m a) \right] \right\} \\ + \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \exp \left[\frac{1}{c_1} B_2 P + \frac{1}{c_{\ell_2}} (A'_2 B'_2 + 2\pi m a) \right] \right. \\ \left. \exp \left[\frac{-\tilde{v}_{\ell_2}}{a} (A'_2 B'_2 + 2\pi m a) \right] \right\}.$$

¹ Nous montrons dans les chapitres 2 et 3 que ces ondes dépendent faiblement du matériau constituant l'objet élastique.

² A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson, in N. Gespa, p. 205.

³ Figure 15.

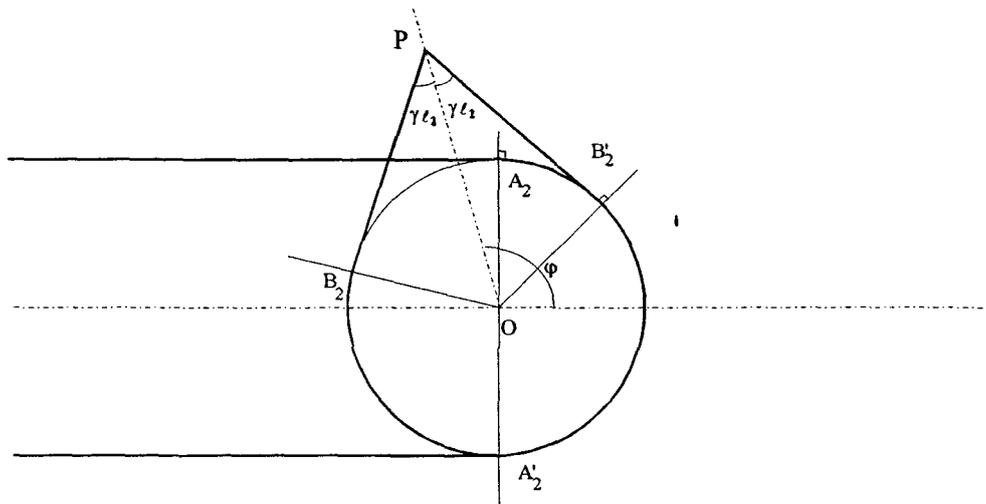


Figure 15: Trajet d'une onde de type ℓ_2 lorsque la condition (34) n'est plus vérifiée.

La condition (34) est équivalente à $A_2B_2 \geq 0$. Cette condition exprime le fait que le point d'observation P est dans "l'ombre" du cylindre et ainsi qu'aucun rayon incident ne peut l'atteindre directement. Lorsque le point d'observation se situe dans la zone de "lumière" du cylindre, l'onde de surface doit réaliser pratiquement un tour avant d'atteindre le point d'émergence. Lorsque A_2B_2 s'annule, nous pouvons également constater une discontinuité entre les expressions de P_{ℓ_2} et de $P_{\ell_2}^L$. Le rapport des pressions en 0 vaut $e^{2\pi\bar{\nu}_{\ell_2}}$.

Chapitre 2

Etude de la diffusion acoustique par un cylindre fluide

En reprenant en partie la démarche accomplie par J-L. Rousselot¹, nous présentons dans ce chapitre l'ensemble des résultats numériques obtenus lorsque l'objet est un cylindre fluide. Ces résultats concernent aussi bien les lieux du plan complexe où se situent les pôles associés aux ondes circonférentielles que les courbes représentant les valeurs prises par la pression au point d'observation en fonction de la position de ce dernier.

Le cylindre fluide étudié dans ce chapitre ne correspond à aucun objet réel. Nous introduisons un modèle de cylindre fluide afin de simplifier l'étude du cylindre élastique que nous entreprendrons dans le chapitre suivant.

Pour réaliser cet exposé, nous introduisons les spécificités du cylindre fluide : caractéristiques du cylindre, expressions des déterminants $D(v, x_1)$ et $D^{[1]}(v, x_1)^2$, localisation des pôles lorsque la fréquence varie, ...

Ensuite, nous complétons la théorie exposée dans le chapitre précédent par celle montrant, dans le cas du cylindre fluide, la contribution des ondes géométriques à la pression diffusée.³ Nous insistons plus particulièrement sur les domaines de validité de cette théorie.

Enfin, en utilisant les expressions théoriques étudiées dans le chapitre précédent, nous calculons le diagramme de rayonnement du cylindre. Puis nous interprétons les courbes obtenues en faisant apparaître les influences des différentes ondes.

¹ J-L Rousselot, Champ diffusé par un cylindre fluide : comparaison entre la théorie géométrique de la diffraction et la théorie modale, *Acoustica*, 79, 1993.

² Equations (5) et (19).

A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., pp. 68-78, 1989-1993.

I CARACTERISTIQUE DU CYLINDRE FLUIDE

Nous supposons qu'il existe un cylindre infini dont le matériau est un fluide supposé parfait de vitesse c_ℓ , et de masse volumique ρ_2 avec c_ℓ la vitesse longitudinale de l'aluminium et ρ_2 la masse volumique de ce matériau. Nous prendrons dans les applications numériques : $\rho_2 = 2.7 \text{ gcm}^{-3}$ et $c_\ell = 6419.88 \text{ ms}^{-1}$. Ces valeurs nous permettent de comparer nos résultats à ceux obtenus par J-L. Rousselot. Le fluide externe, supposé également parfait, se caractérise par une masse volumique $\rho_1 = 1 \text{ gcm}^{-3}$ et par une vitesse de propagation du son $c_1 = 1493 \text{ ms}^{-1}$. Nous notons n_1 le rapport $\frac{c_1}{c_\ell}$.

Avec ces hypothèses sur la nature des différents milieux les déterminants $D(v, x_1)$ et $D^{[1]}(v, x_1)$ s'écrivent¹ :

$$(49) \quad D(v, x_1) = J_v(x_\ell) H_v^{(1)}(x_1) \left\{ \frac{\rho_2}{\rho_1} {}^d H_v^{(1)}(x_1) - {}^d J_v(x_\ell) \right\}$$

et

$$D^{[1]}(v, x_1) = J_v(x_\ell) J_v(x_1) \left\{ \frac{\rho_2}{\rho_1} {}^d J_v(x_1) - {}^d J_v(x_\ell) \right\}$$

$$\text{avec}^2 \quad {}^d F(x_1) = \frac{x_1 \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_1}}{F(x_1)}$$

Les pôles sont tous solutions de l'équation $D(v, x_1) = 0$. Ceux de type ℓ_1 sont associés aux ondes de Wait³, ceux de type ℓ_2 sont associés aux ondes de Franz.

¹ J-L Rousselot, Champ diffusé par un cylindre fluide : comparaison entre la théorie géométrique de la diffraction et la théorie modale, *Acoustica*, **79**, 1993.

² A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson, in N. Gespa, p.208.

³ A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., p. 56, 1989-1993.

II CONTRIBUTION DES ONDES GEOMETRIQUES - METHODE DU COL.

La méthode utilisée ici a été développée dans le chapitre précédent, hormis le calcul de la seconde intégrale de l'équation (36) qui dépend de la nature du cylindre. Ce calcul est nécessaire dès lors que l'équation (34) n'est plus vérifiée par au moins un des pôles. Ceci se produit lorsque le point d'observation "P" ne se situe plus dans l'ombre du cylindre.

En reprenant l'expression de la seconde intégrale de l'équation (36) exposée dans le chapitre précédent, nous posons :

$$(50) \quad P_{\text{géo}}^{\text{tot}} = P_0 e^{-i\omega t} \int_{C_{\text{géo}}} e^{iv\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} \left[J_\nu(k_1 r) + \frac{D^{[1]}(\nu, x_1)}{D(\nu, x_1)} H_\nu^{(1)}(k_1 r) \right] dv$$

avec $C_{\text{géo}}$ le contour issu de C_2' passant par l'axe des abscisses¹

Comme nous le démontrerons dans la section suivante, la fonction à intégrer peut se décomposer à haute fréquence en deux facteurs dont l'un d'entre eux a un comportement exponentiel. Cette remarque nous permet d'utiliser la méthode du col² pour calculer $P_{\text{géo}}^{\text{tot}}$. Dans ce but, il suffit de déformer, lorsque cela est possible, le contour $C_{\text{géo}}$ afin qu'il vérifie les conditions mathématiques imposées par cette méthode. Ainsi, le contour $C_{\text{géo}}$ doit contenir le point, appelé *col*, maximum du facteur à comportement exponentiel de la fonction à intégrer. De plus, la fonction à intégrer doit être fortement décroissante de part et d'autre de cet extremum. Cette condition est plus difficilement réalisable, en particulier lorsqu'un pôle se situe au voisinage de ce col. Nous verrons dans les dernières sections de ce chapitre que l'infirmité de cette dernière condition explique en partie certains phénomènes numériques.

¹ Figure 8.

² Annexe B : Méthode du col.

Nous divisons le contour $C_{géo}$ en deux contours. Afin de pouvoir utiliser correctement la méthode du col, nous supposons qu'il est possible de négliger la valeur de l'intégrale calculée sur un contour inclus dans un voisinage du point de rencontre de C_g et C_d . Cette hypothèse nous permet de rendre indépendant les calculs effectués sur chacune des portions du contour $C_{géo}^1$. Dès lors, en supposant le point d'observation loin du cylindre, nous écrivons :

$$\begin{aligned}
 P_{géo}^{tot}(x_1) &= \frac{1}{2} P_0 e^{-i\omega t} \int_{C_g} e^{iv\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} S(v, x_1) H_v^{(1)}(k_1 r) dv \\
 &\quad + \frac{1}{2} P_0 e^{-i\omega t} \int_{C_d} e^{iv\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} S(v, x_1) H_v^{(1)}(k_1 r) dv, \\
 (51) \quad \text{avec } S(v, x_1) &= \left\{ 2J_v(k_1 r) + 2 \frac{D^{[1]}(v, x_1)}{D(v, x_1)} H_v^{(1)}(k_1 r) - H_v^{(2)}(k_1 r) \right\} \frac{1}{H_v^{(1)}(k_1 r)} \\
 &= 1 + 2 \frac{D^{[1]}(v, x_1)}{D(v, x_1)}.
 \end{aligned}$$

En effet, lorsque $k_1 r \gg \text{Re}(v) \gg \text{Im}(v)$, $H_v^{(2)}(k_1 r)$ est négligeable devant $J_v(k_1 r)$.

Afin de faciliter la présentation des résultats et les éventuelles comparaisons, nous utilisons la fonction S , introduite en acoustique par Flax, Dragonette et Überall².

¹ Le comportement des cols en fonction de la position du point d'observation est donné dans le paragraphe V.1. de ce même chapitre.

² L. Flax, L. R. Dragonette, H. Überall, Theory of elastic resonance excitation by sound scattering, *J. Acoust. Soc. Am.*, p. 724, 63, 1978.

II.1. Calcul de l'intégrale sur le contour C_d

Sur le contour C_d nous appliquons la méthode du col en notant v_d ce dernier. L'examen du développement asymptotique de la fonction à intégrer nous permet de le situer à l'intersection de C_d et de l'axe des abscisses.

Nous supposons le col v_d suffisamment loin de x_1 pour que les développements des fonctions cylindriques soit pris dans la zone 7 vis-à-vis de x . La validation de cette hypothèse est examinée en détail par la suite. Connaissant les développements asymptotiques des différentes fonctions cylindriques, $S(v, x_1)$ devient équivalent à haute fréquence à l'unité¹. Ainsi, la seconde intégrale de l'équation (51) est équivalente à la pression P_d avec : $P_d = \frac{1}{2} P_0 e^{-i\omega t} \int_{v_d} e^{iv(\frac{\pi}{2}-\varphi)} H_v^{(1)}(k_1 r) dv$ (nous notons " C_d " " v_d " pour préciser que seule l'évolution au voisinage de v_d contribue au calcul de l'intégrale).

Connaissant le développement asymptotique de $H_v^{(1)}(k_1 r)$ dans la zone 10 vis-à-vis de $k_1 r$, nous pouvons écrire :

$$(52) \quad e^{iv(\frac{\pi}{2}-\varphi)} H_v^{(1)}(k_1 r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\exp i \left(\sqrt{(k_1 r)^2 - v^2} - v \cos^{-1} \frac{v}{k_1 r} - v \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right)}{\left((k_1 r)^2 - v^2 \right)^{\frac{1}{4}}}$$

Dès lors, en utilisant la méthode du col, nous trouvons l'équation vérifiée par v_d , appelée équation au col de droite, et la valeur de la pression P_d :

$$(53) \quad \begin{cases} v_d = k_1 r \sin \varphi \\ P_d = P_0 e^{-i\omega t} e^{ik_1 r \cos \varphi} = P_{inc} \end{cases}$$

¹ Annexe E : Cylindre fluide : Différentes expressions de $S(v, x_1)$.

Comme $r \cos \varphi$ est l'abscisse du point d'observation, l'intégrale calculée au col de droite est la pression incidente.

II.2. Calcul de l'intégrale sur le contour C_g

Si nous notons $P_{\text{géo}}$ la première intégrale de l'équation (51), nous pouvons écrire l'égalité : $P_{\text{géo}}^{\text{tot}} = P_{\text{inc}} + P_{\text{géo}}$. Pour calculer $P_{\text{géo}}$, nous développons $S(\nu, x_1)$ en série de Debye¹ :

$$(54) \quad S(\nu, x_1) = \frac{1}{\sigma_1} \left[R_{12} + \sigma_\ell T_{12} T_{21} \sum_{j=1}^{+\infty} (\sigma_\ell R_{21})^{j-1} \right]$$

$$\text{avec } \sigma_1 = \frac{H_v^{(1)}(x_1)}{H_v^{(2)}(x_1)}, \quad \sigma_\ell = \frac{H_v^{(1)}(x_\ell)}{H_v^{(2)}(x_\ell)},$$

$$R_{12} = -\frac{\frac{\rho_1}{\rho_2} d_{H_v^{(2)}}(x_\ell) - d_{H_v^{(2)}}(x_1)}{\frac{\rho_1}{\rho_2} d_{H_v^{(2)}}(x_\ell) - d_{H_v^{(1)}}(x_1)},$$

$$R_{21} = -\frac{\frac{\rho_1}{\rho_2} d_{H_v^{(1)}}(x_\ell) - d_{H_v^{(1)}}(x_1)}{\frac{\rho_1}{\rho_2} d_{H_v^{(2)}}(x_\ell) - d_{H_v^{(1)}}(x_1)},$$

$$T_{12} = 1 + R_{12} \text{ et } T_{21} = 1 + R_{21}.$$

Tant que $|\sigma_\ell R_{21}| < 1 - \varepsilon \leq 1$, avec ε un réel indépendant de ν , ce développement en série de Debye est possible. L'intégrale $P_{\text{géo}}$ se décompose en une série d'intégrales calculées sur le contour C_g . Afin d'appliquer la méthode du col pour chacune de ces intégrales, nous déformons le contour initial C_g en autant de contours qu'il y a d'intégrales à calculer. La relative indépendance des contours C_g et C_d nous permet de modifier le contour C_g sans avoir à déformer le contour C_d . En notant

¹ J-M. Conoir, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, p. 119, 1987.

$]v_{g,j}[$ le voisinage du col $v_{g,j}$ correspondant à l'application de la méthode du col pour le $j^{\text{ème}}$ terme de la série, nous écrivons : $P_{géo} = \sum_{j=0}^{+\infty} P_{tr,j}$,

$$\text{avec } \begin{cases} P_{tr,0} = P_{réfl} = \frac{1}{2} P_0 e^{-i\omega t} \int_{]v_{g,0}[} e^{iv(\frac{\pi}{2}-\varphi)} \frac{R_{12}}{\sigma_1} H_v^{(1)}(k_1 r) dv \\ P_{tr,j} = \frac{1}{2} P_0 e^{-i\omega t} \int_{]v_{g,j}[} e^{iv(\frac{\pi}{2}-\varphi)} \frac{\sigma_\ell}{\sigma_1} T_{12} T_{21} (\sigma_\ell R_{21})^{j-1} H_v^{(1)}(k_1 r) dv \end{cases}$$

(une justification des notations $P_{réfl}$, R_{12} , T_{12} , ... est donnée dans la section suivante).

Pour calculer ces différentes pressions nous recherchons les termes des fonctions à intégrer possédant un comportement asymptotique de type exponentiel. Etant donnée leur définition, les coefficients R_{12} , R_{21} , T_{12} et T_{21} ne peuvent suivre des variations exponentielles à haute fréquence. Ainsi, l'évolution asymptotique de ces pressions est principalement déterminée par $e^{iv(\frac{\pi}{2}-\varphi)} \frac{H_v^{(2)}(x_1)}{H_v^{(1)}(x_1)} H_v^{(1)}(k_1 r)$ pour $P_{tr,0}$,

$$\text{et par } e^{iv(\frac{\pi}{2}-\varphi)} \left[\frac{H_v^{(1)}(x_\ell)}{H_v^{(2)}(x_\ell)} \right]^j \frac{H_v^{(2)}(x_1)}{H_v^{(1)}(x_1)} H_v^{(1)}(k_1 r) \text{ pour } P_{tr,j} \left(j \in \mathbb{N}^* \right).$$

Les développements asymptotiques de ces expressions sont calculés dans la zone 10 vis-à-vis de toutes les variables ; nous supposons pour cela $v_{g,j} \ll x_\ell < x_1 < k_1 r$ avec $v_{g,j}$ le col de gauche correspondant à la pression $P_{tr,j}$. En appliquant à ces développements la méthode du col, nous en déduisons l'équation vérifiée par $v_{g,j}$ ($j \in \mathbb{N}^*$) ainsi que l'expression asymptotique des pressions $P_{tr,j}^1$:

¹ A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson, in N. Gespa., pp. 215-221.

$$P_{réfl} = \frac{R_{12}(v_{g0}) P_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{|f^*(v_{g0})| x_1^2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{v_{g0}}{x_1}\right)^2}} \exp\left[ix_1 f(v_{g0})\right],$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,$$

$$(55) \quad P_{tr,j} = P_0 e^{-i\omega t} \frac{(-i)^{j-1} T_{12}(v_{gj}) T_{21}(v_{gj}) R_{21}(v_{gj})}{\sqrt{|f^*(v_{gj})| x_1^2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{v_{gj}}{x_1}\right)^2}} \exp\left[ix_1 f(v_{gj})\right],$$

avec $\forall j \in \mathbb{N}, v_{gj} /$

$$\frac{\pi}{2} - \varphi + 2 \cos^{-1} \frac{v_{gj}}{x_1} - 2j \cos^{-1} \frac{v_{gj}}{x_\ell} - \cos^{-1} \frac{v_{gj}}{k_1 r} = 0,$$

(équation au col)

et f une fonction complexe /

$$\left\{ \begin{aligned} x_1^2 f^*(v_{gj}) &= \frac{-2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{gj}}{x_1}\right)^2}} + \frac{2j}{\sqrt{n_\ell^2 - \left(\frac{v_{gj}}{x_1}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{v_{gj}}{x_1}\right)^2}} \\ f(v_{gj}) &= \left\{ -2\sqrt{1 - \left(\frac{v_{gj}}{x_1}\right)^2} + 2\sqrt{n_\ell^2 - \left(\frac{v_{gj}}{x_1}\right)^2} + \sqrt{R^2 - \left(\frac{v_{gj}}{x_1}\right)^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dans ces équations au col l'intervalle de variation de l'angle φ est illimité.

III. INTERPRETATION GEOMETRIQUE - LOIS DE SNELL-DESCARTES

Comme par hypothèse $v_{g,j} < x_\ell < x_1$, nous pouvons poser $\frac{v_{g,j}}{x_1} = \sin \theta_j$ et $\frac{v_{g,j}}{x_\ell} = \sin \theta_j^\ell$ avec $(\theta_j, \theta_j^\ell) \in [0; \frac{\pi}{2}]^2$. Dans le plan d'observation de la diffusion par le cylindre, nous modélisons géométriquement θ_j par l'angle aigu formé par la droite d'équation cartésienne $y = d_j$ et la normale au cylindre incluse dans le plan, coupant la droite au point E_0 ¹. Lorsque $j > 0$, θ_j^ℓ est modélisé par l'angle réalisé entre la même normale et la corde $[E_0E_1]$. De plus, nous créons une ligne polygonale régulière à "j" côtés dont les sommets, éléments du cylindre et du plan d'observation, sont notés $E_0, E_1, E_2, \dots, E_j$. En notant \widehat{ABC} , le secteur angulaire orienté de sommet B réalisé dans un triangle ABC, nous pouvons établir, à l'aide des notations de la figure 16, la relation :

$$(56) \quad \forall j > 0, \widehat{POR} = \widehat{POQ} + \widehat{QOE}_j + E_j \widehat{OE}_{j-1} + \dots + E_1 \widehat{OE}_0 + E_0 \widehat{OR}$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \widehat{POR} = \frac{\pi}{2} - \varphi \\ \widehat{POQ} = \cos^{-1} \frac{OQ}{r} \\ \widehat{QOE}_j = -\cos^{-1} \frac{OQ}{a} \\ E_0 \widehat{OR} = \theta_j - \frac{\pi}{2} = -\cos^{-1} \frac{v_{g,j}}{x_1} \\ \forall m \in \{0, \dots, j\}, E_m \widehat{OE}_{m+1} = -2\left(\frac{\pi}{2} - \theta_j^\ell\right) = -2 \cos^{-1} \frac{v_{g,j}}{x_\ell}. \end{array} \right.$$

Lorsque $j = 0$, l'angle θ_j^ℓ n'apparaît plus, la relation (56) s'écrit alors

$$\widehat{POR} = \widehat{POQ} + \widehat{QOE}_0 + E_0 \widehat{OR}.$$

¹ Figure 16.

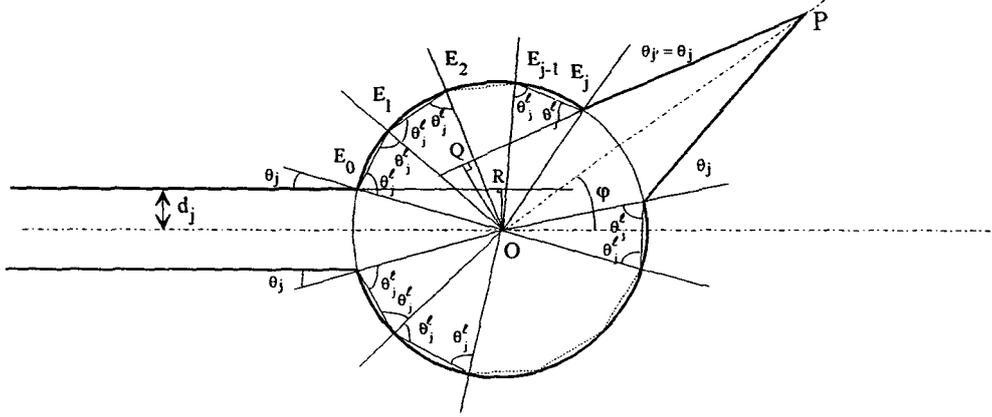


Figure 16 : Trajet d'une onde géométrique.

L'équation (56) étant vérifiée dès lors que nous avons identifié $\frac{v_{g,j}}{x_1}$ et $\frac{v_{g,j}}{x_\ell}$ aux sinus de deux angles, $\forall j \in \mathbb{N}$, $v_{g,j}$ est défini par le système

d'équations :

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \varphi + 2 \cos^{-1} \frac{v_{g,j}}{x_1} - 2j \cos^{-1} \frac{v_{g,j}}{x_\ell} - \cos^{-1} \frac{v_{g,j}}{k_1 r} = 0 \\ \text{(équation au col)} \\ \frac{\pi}{2} - \varphi + \cos^{-1} \frac{v_{g,j}}{x_1} + \cos^{-1} \frac{OQ}{a} - 2j \cos^{-1} \frac{v_{g,j}}{x_\ell} - \cos^{-1} \frac{OQ}{r} = 0 \\ \text{(équation (56))} \end{cases}$$

La vérification simultanée de ces deux équations implique :

$$(58) \quad \cos^{-1} \frac{d_0}{a} = \cos^{-1} \frac{OQ}{a}$$

Une étude rapide de la fonction $(x \mapsto \cos^{-1} \frac{x}{a} + \cos^{-1} \frac{x}{r})$ montre que cette dernière est bijective de $[-a, a]$ dans $[-\pi - \cos^{-1} \frac{-a}{r}, \pi - \cos^{-1} \frac{a}{r}]$. Ainsi dès lors que nous pouvons trouver Q tel que $OQ = \frac{v_{g,j}}{k_1}$ (cela revient à avoir $\theta'_j = \theta_j$). La relation au col s'interprète donc géométriquement par la

figure 16. Les relations que nous venons d'établir nous permettent d'écrire :

$$(59) \quad \begin{aligned} \theta_0 &= \theta'_0 \\ \forall j \in \mathbb{N}^*, \sin \theta_j &= n_\ell \sin \theta'_j \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi la première et la deuxième lois de Snell-Descartes de l'optique géométrique.

Afin de pouvoir utiliser à bon escient les théories de l'optique géométrique, nous devons établir la relation réciproque. Supposons les deux lois de Snell-Descartes vérifiées. En utilisant la figure 16 nous écrivons :

$$(60) \quad \forall j > 0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\varphi + 2 \cos^{-1} \sin \theta_j - \cos^{-1} \frac{\sin \theta_j}{R} - 2j \cos^{-1} \frac{\sin \theta_j}{n_\ell} + 2\pi m = 0$$

avec $\begin{cases} \varepsilon = 1 & \text{si le rayon est issu du demi-plan contenant le point P} \\ \varepsilon = -1 & \text{sinon} \end{cases}$

et $2\pi m$ le nombre de tours réalisés par le rayon avant de ressortir, sachant que $m < E\left(\frac{j}{2}\right)$.¹

L'introduction de ces deux entiers "ε" et "m" nous permet de faire varier φ uniquement dans l'intervalle $[0, \pi]$. En posant $v_{g,j} = x_1 \sin \theta_j$, θ_j restant positif, nous obtenons pour tout entier $j > 0$ l'équation :

$$(61) \quad \frac{\pi}{2} - \varepsilon\varphi + 2 \cos^{-1} \frac{v_{g,j}}{x_1} - 2j \cos^{-1} \frac{v_{g,j}}{x_\ell} - \cos^{-1} \frac{v_{g,j}}{k_1 r} + 2\pi m = 0$$

Cette équation est celle du col dans laquelle φ est défini dans l'intervalle $[0, \pi]$. Cette formulation est plus simple à utiliser numériquement puisque nous recherchons la somme des pressions diffractées au point P d'azimut φ élément de l'intervalle $[0, \pi]$.

Lorsque $j = 0$, la relation (58) devient

$$(58') \quad \frac{\pi}{2} - \varphi + 2 \cos^{-1} \sin \theta_0 - \cos^{-1} \frac{\sin \theta_0}{R} = 0$$

En posant comme précédemment $v_{g,0} = x_1 \sin \theta_0$, nous obtenons exactement l'équation au col $v_{g,0}$.

Nous pouvons conclure de cette interprétation géométrique que l'équation au col est équivalente soit à la première loi de Snell-Descartes lorsque $j = 0$ soit aux deux lois de Snell-Descartes lorsque $j > 0$.

¹ M. Fekikh, *thèse de troisième cycle*, Université de Paris VII, 1982.

Connaissant les relations liant les cols de gauche $v_{g,j}$ aux angles $\theta_{g,j}$, nous utilisons numériquement une expression des pressions géométriques directement interprétable en terme de rayons :

$$P_{\text{réfl}}(\theta_0) = P_0 e^{-i\omega t} R_{12}(\theta_0) \sqrt{\frac{a \cos \theta_0}{2PE_0 + a \cos \theta_0}} \exp ik_1 (PE_0 - a \cos \theta_0)$$

et $\forall j \geq 1$,

$$(62) \quad P_{\text{tr},j}(\theta_j) = \frac{-P_0 e^{-i\omega t} 1^{1-j} [R_{21}(\theta_j)]^{j-1} T_{21}(\theta_j) T_{12}(\theta_j)}{\sqrt{\left(\frac{-2}{a \cos \theta_j} + \frac{2j}{a \sqrt{n_\ell^2 - \sin^2 \theta_j}} \right) (PE_j + a \cos \theta_j) + 1} \exp ik_1 \left(PE_j - a \cos \theta_j + 2ja \sqrt{n_\ell^2 - \sin^2 \theta_j} \right)}$$

avec E_j le point d'émergence du rayon réalisant j passages dans le cylindre. Ce point peut aussi bien être dans le demi-plan contenant le point d'observation, nommé région 1, que dans l'autre, nommé région 2. Dans les deux cas, $PE_j = a \sqrt{R^2 - \sin^2 \theta_j} - a \cos \theta_j$.

Nous retrouvons dans les termes de phase de ces expressions le trajet réalisé par chaque rayon depuis un plan origine placé arbitrairement en O, ce qui est cohérent avec la théorie issue de l'optique géométrique.

Les coefficients de réflexions et de transmissions sont ceux calculés à l'interface plane entre deux milieux fluides¹. En effet, connaissant les développements asymptotiques des fonctions circulaires, nous pouvons obtenir ceux des coefficients R_{12} , R_{21} , T_{12} et T_{21} . Ces développements sont équivalents à haute fréquence avec les expressions exactes des coefficients correspondant en géométrie plane. Nous justifions ainsi la notation employée pour ces coefficients introduits dès le développement en série de Debye de la fonction S.

¹ J-M. Conoir, A. Gérard, A. Derem, Ondes acoustiques transmises et séries de Debye généralisées. I. Traitement des interfaces planes, *J. Acoustique*, 4, p. 174, 1991.

Tant que l'angle θ est inférieur à l'angle critique $\theta_{\ell}^{(c)} = \arcsin \frac{c_1}{c_{\ell}}$,

les développements asymptotiques de ces coefficients sont :

$$(63) \quad \begin{aligned} R_{12} &= \frac{-\rho_1 c_1 \cos \theta_{\ell} + \rho_2 c_{\ell} \cos \theta}{\rho_1 c_1 \cos \theta_{\ell} + \rho_2 c_{\ell} \cos \theta}, \quad R_{21} = \frac{\rho_1 c_1 \cos \theta_{\ell} - \rho_2 c_{\ell} \cos \theta}{\rho_1 c_1 \cos \theta_{\ell} + \rho_2 c_{\ell} \cos \theta} \\ T_{12} &= \frac{2 \rho_2 c_{\ell} \cos \theta}{\rho_1 c_1 \cos \theta_{\ell} + \rho_2 c_{\ell} \cos \theta} \quad \text{et} \quad T_{21} = \frac{2 \rho_1 c_1 \cos \theta_{\ell}}{\rho_1 c_1 \cos \theta_{\ell} + \rho_2 c_{\ell} \cos \theta}. \end{aligned}$$

Lorsqu'il est supérieur à cet angle critique il n'y a plus de rayons transmis et le coefficient R_{12} devient¹ :

$$(64) \quad R_{12} = \frac{-i \rho_1 \sqrt{\sin^2 \theta - n_{\ell}^2} + \rho_2 \cos \theta}{i \rho_1 \sqrt{\sin^2 \theta - n_{\ell}^2} + \rho_2 \cos \theta}.$$

¹ A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Internes*, Notes manuscrites, LCTAR., p. 129, 1989-1993.

IV. ETUDE ET INTERPRETATION DES RESULTATS NUMERIQUES

IV.1. Evolution des cols associés aux ondes réfléchie et incidente¹

Nous reprenons les équations aux cols correspondant à l'onde réfléchie et à l'onde incidente. En s'aidant de l'interprétation géométrique développée dans la section III, nous pouvons représenter l'évolution des cols et du contour $C_{géo}$ lorsque φ croît de 0° à 180° .

Tant que $\varphi < \sin^{-1} \frac{a}{r}$, le point P ne reçoit ni l'onde incidente directe ni l'onde réfléchie. Ainsi, dans le plan complexe les contours sont ceux de la figure 5. Lorsque $\varphi = \sin^{-1} \frac{a}{r}$, le point P se situe à la limite de la zone d'ombre du cylindre. L'angle θ_0 formé par l'onde incidente et la normale au cylindre vaut alors 90° . Comme $v_{g,0} = x_1 \sin \theta_0$, $v_{g,0} = x_1$. Lorsque φ croît jusqu'à 180° , l'interprétation géométrique nous montre que l'angle θ_0 décroît jusqu'à 0° . Le col $v_{g,0}$ suit la même évolution².

D'après l'équation au col de droite $v_d = k_1 r \sin \varphi$, lorsque $\varphi = \sin^{-1} \frac{a}{r}$, $v_d = x_1$. D'après l'évolution de la fonction sinus lorsque φ croît jusqu'à π , le col v_d va croître jusqu'à $k_1 r$ puis décroître jusqu'à 0 en restant toujours à droite de v_g .

Nous ne représentons pas dans la figure 17 le contour $C_{géo}$ dans son intégralité afin d'éviter toute confusion. En effet, si nous reprenons la démarche entreprise lors de la détermination des pressions géométriques, nous pouvons remarquer que le col de droite ne correspond, a priori, à aucun

¹ Figure 17

² Figure 17.

IV.2. Valeurs des pôles associés aux ondes de Wait et de Franz

Pour résoudre l'équation $D(v, x_1) = 0$ et séparer les différents types d'onde, nous avons utilisé les développements asymptotiques suivants :

$$(66)^1 \quad v_{\ell_1} = i \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{n_\ell}{\sqrt{1-n_\ell^2}} \left\{ 1 + ai_\ell \left[\frac{1}{6} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \right] \frac{n_\ell^2}{1-n_\ell^2} \right] \left(\frac{2}{x_\ell} \right)^{\frac{2}{3}} \right\} \\ + x_\ell + ai_\ell \left(\frac{x_\ell}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{ai_\ell^2}{60} \left(\frac{2}{x_\ell} \right)^{\frac{1}{3}} + O\left(\frac{1}{x_\ell} \right)$$

et

$$(67)^2 \quad v_{\ell_2} \approx v_\ell(r) = x_1 - ai'_\ell e^{i\frac{\pi}{3}} \left(\frac{x_1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \left[\frac{ai'^2_\ell}{60} - \frac{1}{10ai'_\ell} \right] \left(\frac{2}{x_1} \right)^{\frac{1}{3}} + O\left(\frac{1}{x_1} \right)$$

avec ai_ℓ et ai'_ℓ les $\ell^{\text{èmes}}$ zéros, respectivement, de la fonction de Airy et de sa dérivée³.

Connaissant par ces développements une valeur voisine de celles des pôles, nous estimons numériquement et avec une très bonne approximation, la valeur exacte des pôles. Pour cela nous utilisons un programme créé à partir de la méthode itérative de recherche de zéro issue de la méthode mathématique de Newton. Ainsi, nous représentons en fonction de la fréquence les parties réelles et imaginaires des pôles correspondant aux quatre premières ondes de Wait (notée W1, W2, W3 et

¹ J-M. Conoir, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, p. 154, 1987.

² A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson, in N. Gespa, p.235.

³ M. Abramowitz, I A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, New-York, .p.478, 1965.

W4)¹ et aux sept premières ondes de Franz (notée F1 à F7)². Ces courbes ont des comportements très réguliers et relativement bien connus³

Les pôles associés aux ondes de Franz ont des parties imaginaires de l'ordre de 0.1 à 0.8 fois leur partie réelle pour des fréquences réduites comprises entre 10 et 100. Leurs parties réelles sont voisines et de l'ordre de x_1 tout en restant strictement supérieur. Ceci confirme l'hypothèse adoptée a priori dans le premier chapitre : la vérification pour la même valeur angulaire de la condition (34) (condition précisant pour chaque onde la limite angulaire de la zone d'ombre).

Les pôles associés aux ondes de Wait ont des parties réelles comprises entre 0 et 0.23 fois x_1 ⁴. Leur partie imaginaire est environ 100 fois inférieure à leur partie réelle.

Connaissant les équations (29), (33), (38) et (39) établies dans le premier chapitre, nous pouvons dès à présent remarquer que les ondes de Wait ont un amortissement le long de leur trajet à l'interface entre les deux fluides nettement plus faible que les ondes de Franz. Cependant, nous ne pouvons pas conclure pour autant que ces dernières n'interviennent pas dans le calcul de la pression observée au point P. En effet, cela dépend encore de l'amplitude initiale de ces ondes.

Nous représentons dans la figure 18 des pôles à partie réelle négative. Comme nous utilisons des contours ne comprenant pas ces racines

¹ Figures 18 à 20.

² Figures 21 à 23.

³ J-L. Rousselot, Diffusion acoustique par un cylindre fluide : résonances et ondes de surface, *Acustica*, pp. 216-218, 64, 1987.

⁴ J-L. Rousselot montre numériquement dans son article sur le champ diffusé par un cylindre fluide que les parties réelles des pôles associés aux ondes de Wait convergent lorsque x_1 tend vers l'infini vers $x_r \approx 0.23 x_1 = n_2 x_1$.

de l'équation $D(v, x_1) = 0$, ces pôles non aucun sens physique. Nous les avons représentés afin de montrer que mathématiquement il existe bien une continuité dans le plan complexe en v lorsque la partie réelle s'annule. A une fréquence donnée, le lieu des pôles étant parfaitement déterminé, ceux à partie réelle négative n'apparaissent pas dans le calcul des pressions. Par contre lorsque la partie réelle d'un pôle est exactement égale à zéro nous déformons légèrement le contour d'intégration C_1 en le faisant passer dans le demi-plan à partie réelle nulle afin qu'il contienne ce pôle sans pour autant contenir ceux à partie réelle strictement négative. Ainsi le lieu exact du contour C_1 dépend de la fréquence.

Bien que la théorie s'appuie en partie sur l'utilisation des développements asymptotiques dans le calcul des fonctions cylindriques, nous ne les utilisons pas pour calculer les valeurs des pôles puisque nous conservons les développements convergents usuellement adoptés lorsque les variables sont de valeurs modestes. Cependant, nous employons ces développements pour évaluer la pression géométrique et en justifier l'existence. Ce paradoxe apparent s'explique de deux façons. D'une part, nous cherchons à simplifier au maximum cette étude afin de ne pas introduire trop de difficultés purement numériques inhérentes à l'utilisation de développements asymptotiques dépendant de la position relative des différentes variables v et x_1 . D'autre part, comme nous le remarquerons dans les chapitres 3 et 4, les valeurs obtenues par les développements convergents et asymptotiques sont très voisines dans le domaine d'étude du cylindre fluide. Cette simplification introduit néanmoins des contraintes. En effet, l'utilisation des développements convergents ne nous permet pas de dépasser facilement $x_1 = 50$.

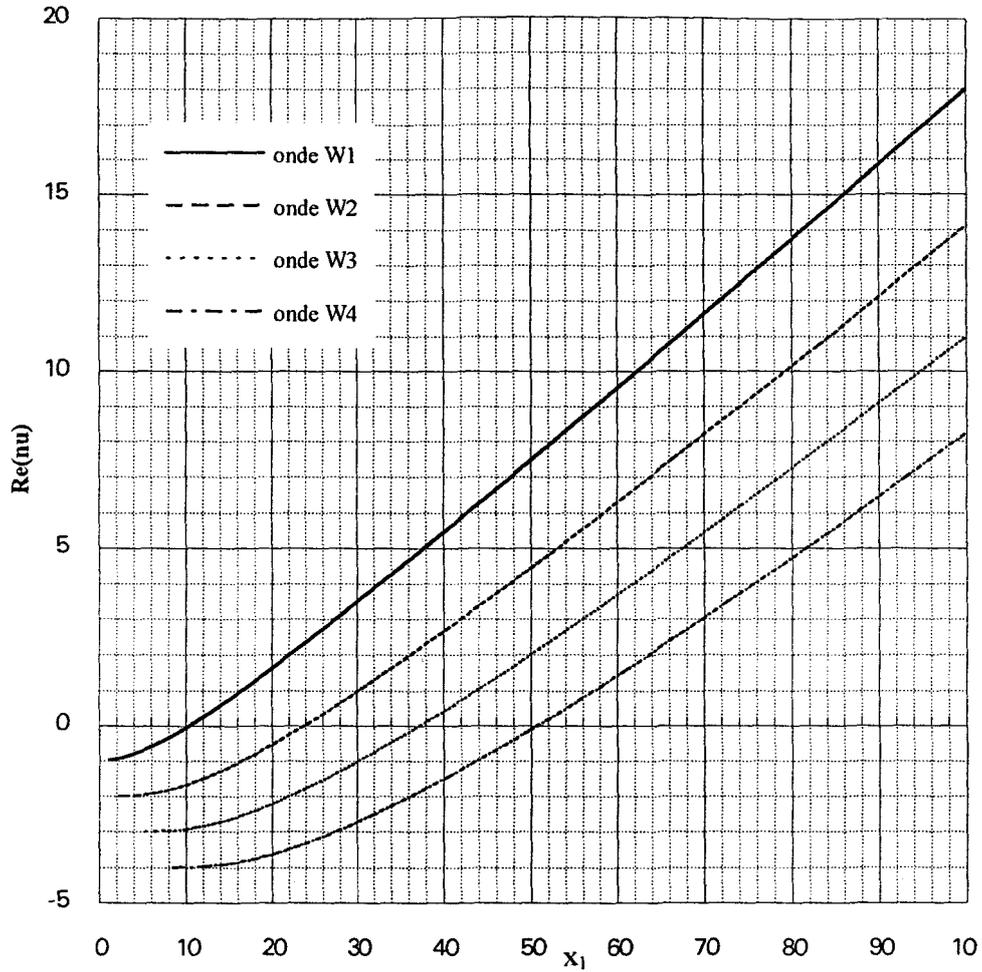


Figure 18 : Cylindre fluide - Ondes de Wait - $Re(v(x_1))$

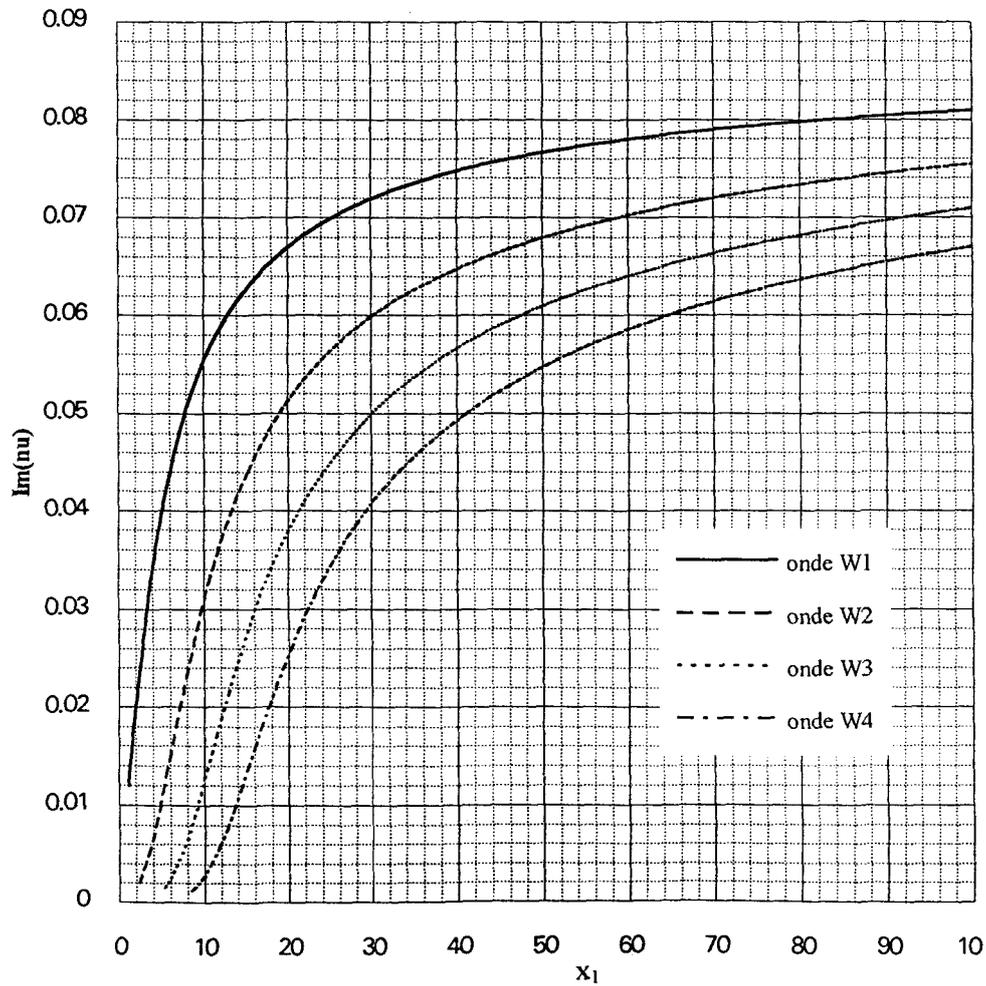


Figure 19 : Cylindre fluide - Ondes de Wait - $Im(v(x_1))$

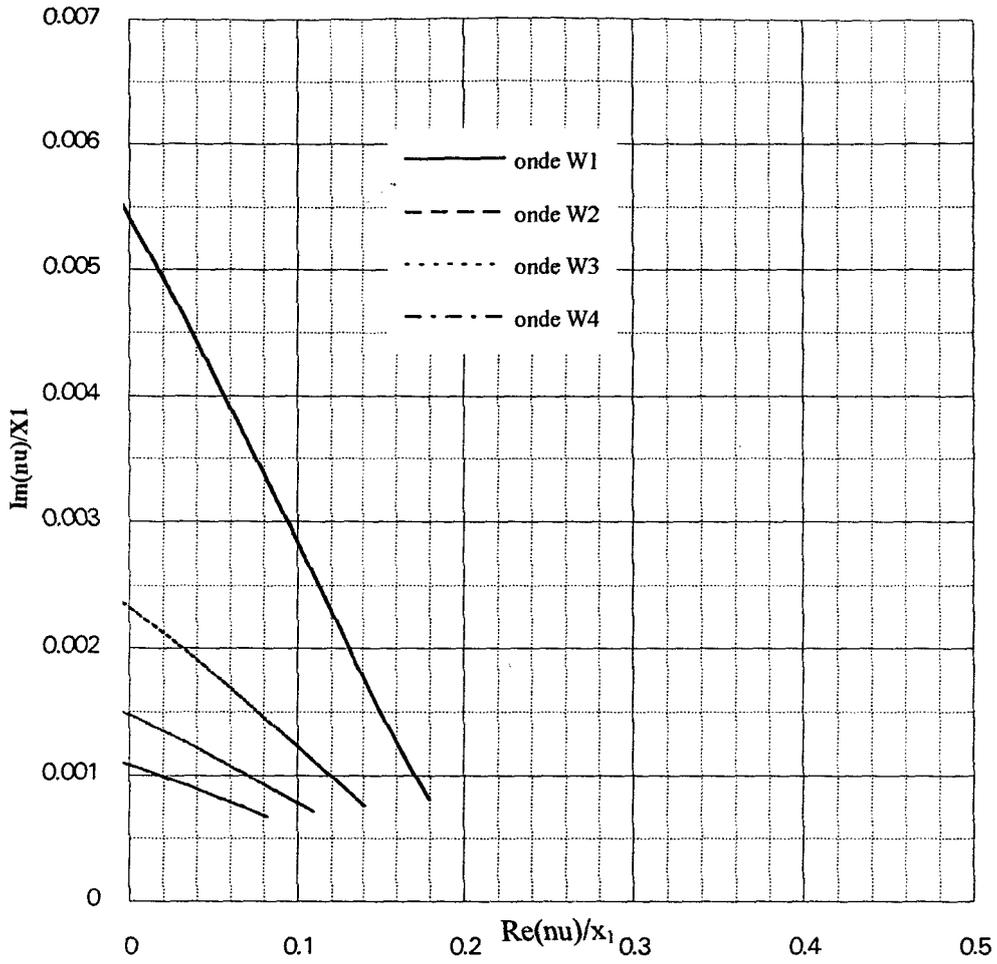


Figure 20 : Cylindre fluide - Ondes de Wait - $[\text{Im}(\nu)/x_1](\text{Re}(\nu)/x_1)$

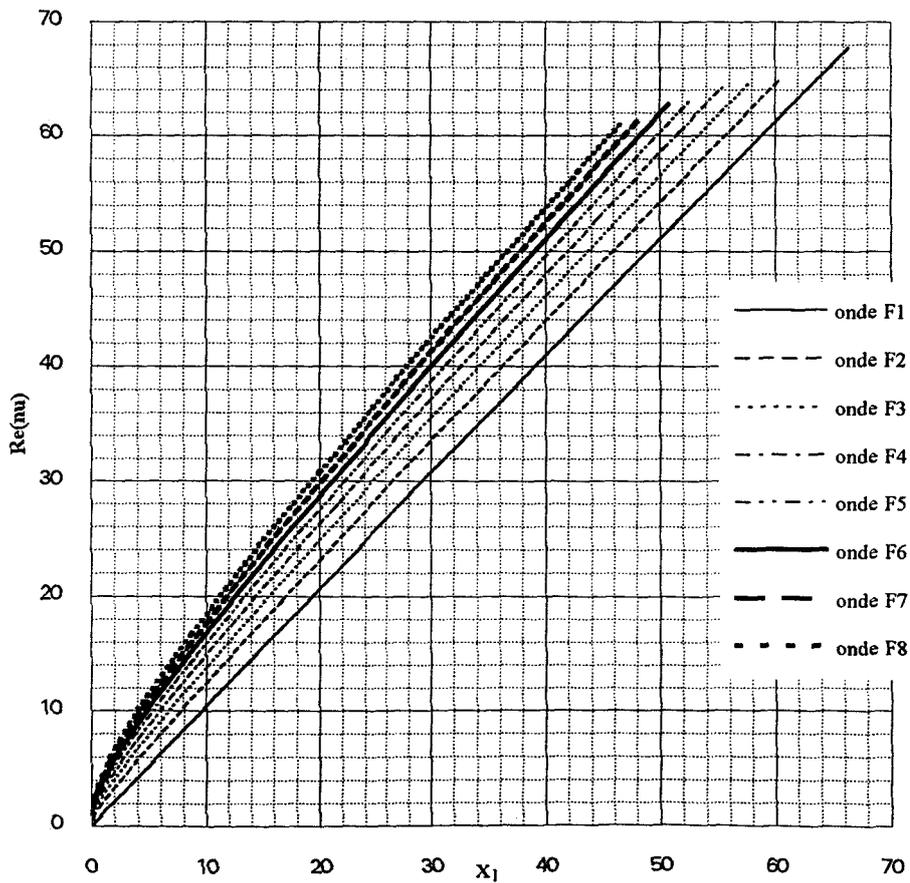


Figure 21 : Cylindre fluide - Ondes de Franz - $\text{Re}(\nu(x_1))$

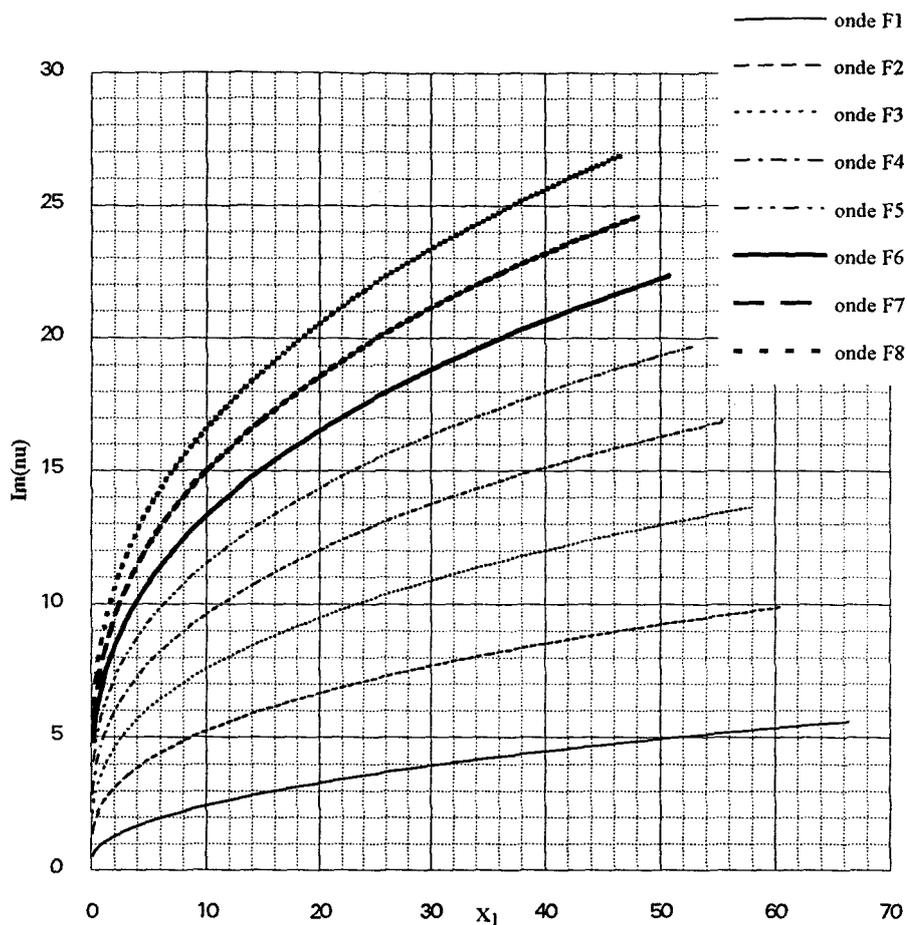


Figure 22 : Cylindre fluide - Ondes de Franz - $Im(v(x_1))$

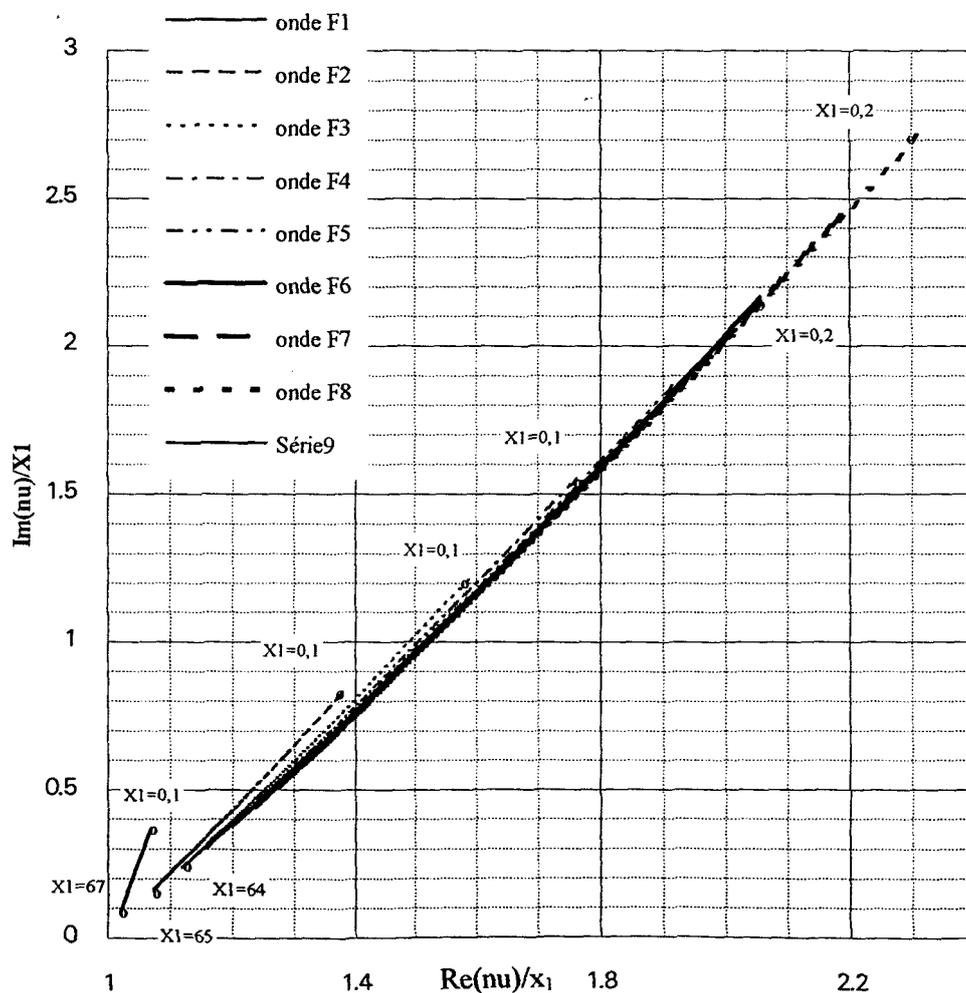


Figure 23 : Cylindre fluide Ondes de Franz - $[Im(v)/x_1] / [Re(v)/x_1]$

IV.3. Limites de la notion d'ondes géométriques

Nous avons supposé pour exprimer la valeur de la pression au col de droite que les développements des fonctions cylindriques se font lorsque la variable v_d est dans la zone 7 vis-à-vis de x_1 et de x_2 et dans la zone 10 vis-à-vis de $k_1 r$. La définition de v_d implique que ce col se situe dans les zones 7 ou 2 vis-à-vis de x_1 et de x_2 et dans les zones 10, 2 ou 7 vis-à-vis de $k_1 r$. Il semble donc nécessaire de justifier le choix des domaines utilisés.

La zone 2 est le cercle d'Airy de rayon $|v - x|$ de l'ordre de grandeur de $x^{\frac{1}{3}}$ avec x un réel que nous assimilons au centre du cercle. Les développements dans cette zone s'expriment en utilisant un paramètre τ défini par¹ : $\tau = (v - x) \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{3}}$. Des études conduites par J-L. Rousselot ont montré numériquement que le cercle d'Airy entoure l'ensemble des nombres complexes v vérifiant la condition $|\tau| = |(v - x) \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{3}}| \leq \tau^L$ avec τ^L compris entre 1 et 3.

¹ A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., p. 194, 1989-1993.
A. Derem, *Formulaire pour les développements asymptotiques des fonctions cylindriques d'indice complexe*, Rapport LCT.PL. 806 618 (diffusion interne), 1980.

Dès lors, les développements asymptotiques utilisant v_d et $k_1 r$ sont corrects tant que $\frac{v_d}{k_1 r} < 1 - \frac{\tau^L}{2} \left(\frac{2}{k_1 r} \right)^{\frac{2}{3}}$. D'après l'équation au col (51.a), nous pouvons exprimer cette condition en fonction uniquement des coordonnées polaires du point d'observation. En transformant dans ce but cette condition, nous obtenons : $\varphi \in [0; \varphi_1 \cup \varphi_2; \pi]$ avec φ_1 et φ_2 définis par $\varphi_1 = \sin^{-1} \left(1 - \frac{\tau^L}{2} \left(\frac{2}{k_1 r} \right)^{\frac{2}{3}} \right)$ et $\varphi_2 = 180 - \sin^{-1} \left(1 - \frac{\tau^L}{2} \left(\frac{2}{k_1 r} \right)^{\frac{2}{3}} \right)$.

Nous avons par exemple en notant les angles en degré :

x_1	R	τ^L	φ_1	φ_2
10	5	1	70	110
		3	56	124
	10	1	74	106
		3	63	117
30	5	1	76	103
		3	66	114
	10	1	79	101
		3	71	109

Ainsi, il existe un intervalle angulaire autour de 90° dans lequel le développement asymptotique issu de la zone 10 vis-à-vis de $k_1 r$, n'est pas rigoureusement correct. Ce domaine s'amenuise lorsque le produit $k_1 r$ croît et lorsque τ^L décroît.

Comme le col de droite est supérieur à x_1 , les développements asymptotiques utilisant ces deux variables pris dans la zone 7 sont corrects tant que $\frac{v_d}{x_1} > 1 + \frac{\tau^L}{2} \left(\frac{2}{x_1}\right)^{\frac{2}{3}}$. En remplaçant v_d par $k_1 r \sin \varphi$, nous obtenons comme précédemment un domaine angulaire dans lequel le développement asymptotique est parfaitement correct.

Cet intervalle est $]\varphi_3, \varphi_4[$ avec $\varphi_3 = \sin^{-1} \left(\frac{1}{R} + \frac{\tau^L}{2R} \left(\frac{2}{x_1}\right)^{\frac{2}{3}} \right)$ et $\varphi_4 = 180 - \sin^{-1} \left(\frac{1}{R} + \frac{\tau^L}{2R} \left(\frac{2}{x_1}\right)^{\frac{2}{3}} \right)$. Nous représentons quelques valeurs

obtenues pour différentes fréquences dans le tableau ci-dessous :

x_1	R	τ^L	φ_3	φ_4
10	5	1	13	166
		3	18	163
	10	1	7	173
		3	9	171
30	5	1	12	167
		3	14	166
	10	1	6	174
		3	7	173

Nous remarquons comme précédemment que le domaine de validité des développements asymptotiques étudiés croît lorsque la fréquence ou l'éloignement du point d'observation croît.

Pour calculer la pression géométrique au col de gauche nous supposons que les développements asymptotiques sont pris dans la zone 10 vis-à-vis de x_1 , x_ℓ et $k_1 r$.

En utilisant la relation $v_g = x_1 \sin \theta = x_\ell \sin \theta_\ell$, issue de l'équation (57), nous pouvons établir le domaine de validité de ces hypothèses. D'après cette relation $\sin \theta < \frac{c_1}{c_\ell}$. Les développements vis-à-vis

de x_1 se justifient dans un domaine de fréquence où $x_1 > 2 \left(\frac{\tau^L}{2(1-n_\ell)} \right)^{\frac{3}{2}}$.

Cela correspond numériquement et pour τ^L compris entre 1 et 3 à $x_1 > 5.5$. La limitation en fréquence correspondant aux développements vis-à-vis de $k_1 r$ est incluse dans le domaine en x_1 que nous venons de déterminer. En appliquant une démarche analogue nous écrivons pour les conditions de validités des développements établis en fonction de x_1 : $\sin \theta < n_\ell - \frac{\tau^L}{2} \left(\frac{2}{x_1} \right)^{\frac{2}{3}} n_\ell^{\frac{1}{3}} = \sin \theta_M$. Connaissant l'équation au col de gauche (59), à cette inéquation correspond une condition sur le domaine dans lequel peut varier l'angle φ , différente suivant la région d'où proviennent les rayons incidents.

Au calcul réalisé pour des rayons issus de la région 1 correspond la condition sur l'angle φ :

$$(68) \quad \varphi < 2\pi m + \pi - j\pi + \sin^{-1} \frac{\sin \theta_M}{R} + 2j \sin^{-1} \frac{\sin \theta_M}{R}$$

et

$$\varphi > 2\pi m + \pi - j\pi - 2\theta_M$$

Pour des rayons issus de la région 2 la condition sur l'angle φ est :

$$(69) \quad \varphi < 2\theta_M - 2\pi m - \pi + j\pi$$

et

$$\varphi > j\pi - 2\pi m - \pi - \sin^{-1} \frac{\sin \theta_M}{R} - 2j \sin^{-1} \frac{\sin \theta_M}{R}$$

Nous représentons en fonction de la fréquence x_1 et pour différentes valeurs des entiers j , m et du paramètre τ^L , les limites de ces intervalles angulaires¹. Ces courbes montrent que pour des fréquences de l'ordre de 100 le secteur angulaire dans lequel le développement asymptotique est parfaitement correct est excessivement restreint (pour ne pas écrire inexistant). De plus, ce secteur se réduit encore lorsque le nombre de rayons transmis considérés

¹ Figures 24 à 29.

Les légendes de ces figures sont du type "tol ph min" et se lisent : courbe du minimum admissible pour l'angle φ lorsque $\tau^L=1$. Lorsqu'une courbe est absente de la figure cela signifie que le domaine angulaire est délimité par cette courbe est à l'extérieur de l'intervalle $[0 \ 180^\circ]$.

augmente. En considérant la présence de 5 rayons transmis, il faudrait se placer à des fréquences de l'ordre de 10^5 pour obtenir un domaine angulaire convenable. Malheureusement le nombre de pôles intervenant dans ce domaine de fréquences est tel qu'il n'est pas envisageable dans cette première étude de se placer à des fréquences aussi élevées. Ainsi la méthode utilisée pour calculer la pression $P_{\text{géo}}^{\text{tot}}$ bien que théoriquement vérifiée ne semble pas adaptée.

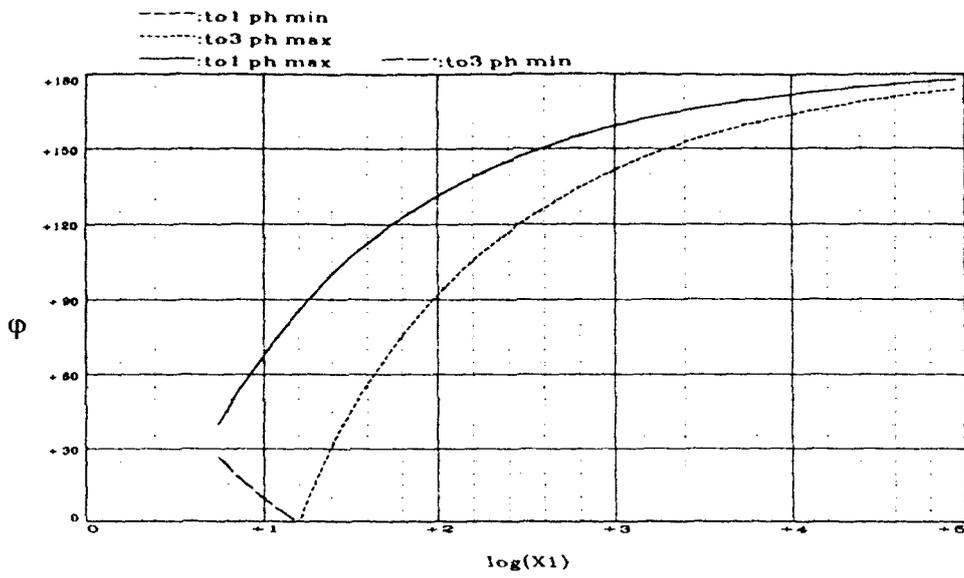


Figure 24 : Limites angulaires - $j=1$, $m=0$, région 1.

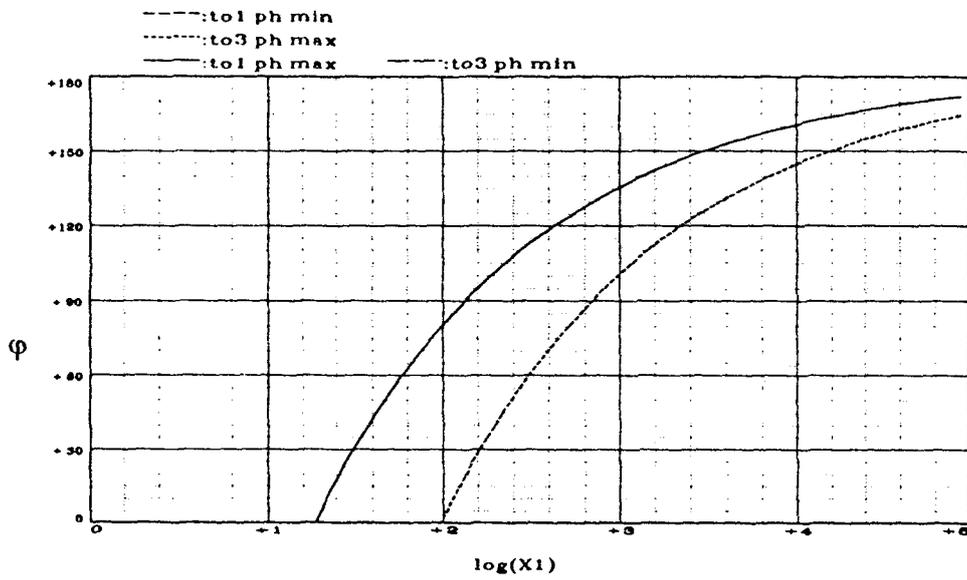


Figure 25 : Limites angulaires - $j=2$, $m=0$, région 1.

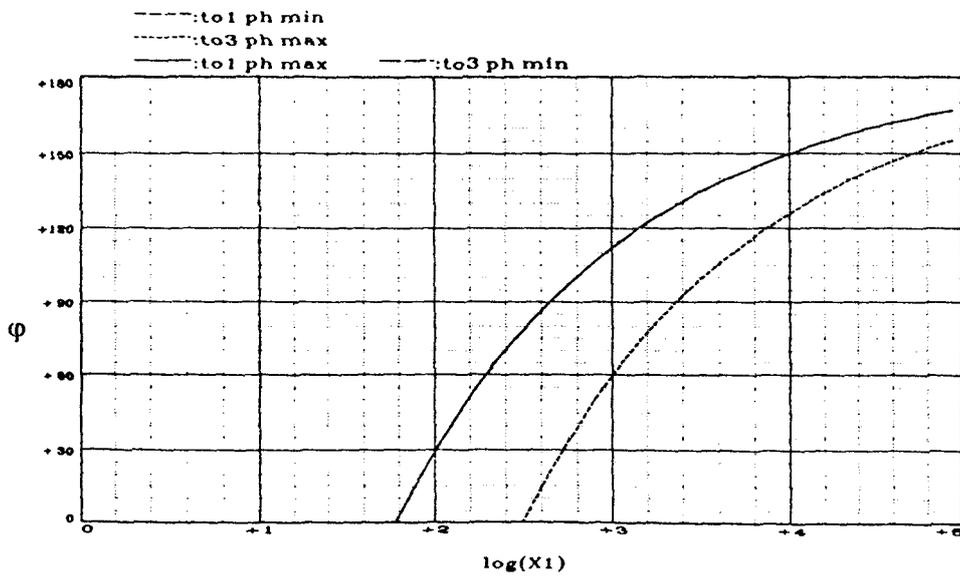


Figure 26 : Limites angulaires - $j=3$, $m=0$, région 1.

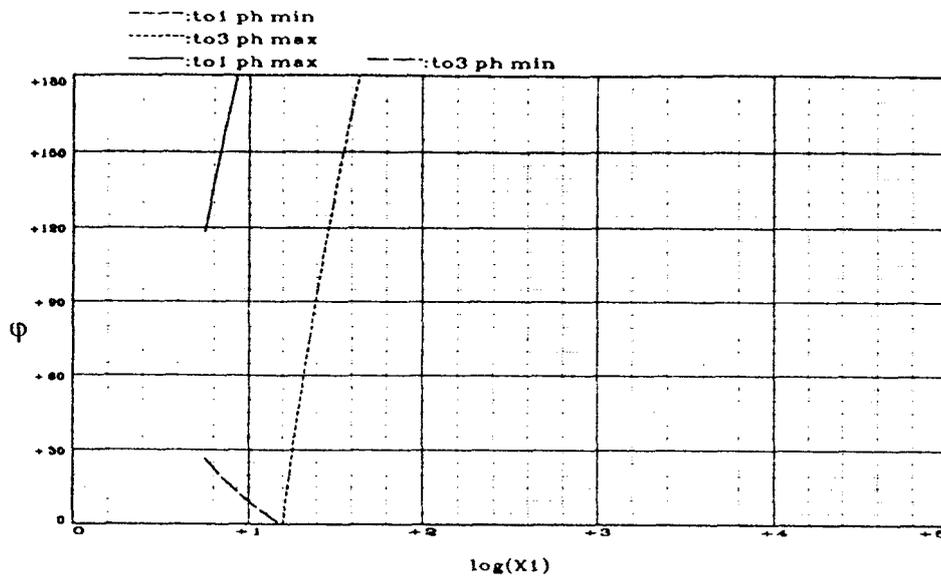


Figure 27 : Limites angulaires - $j=3$, $m=1$, région 2.

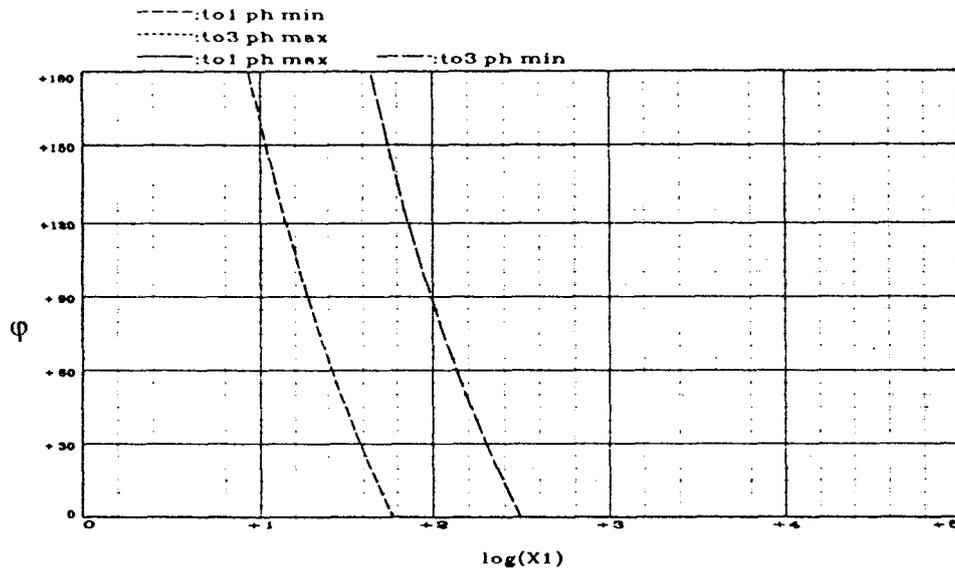


Figure 28 : Limites angulaires - $j=4$, $m=1$, région 1.

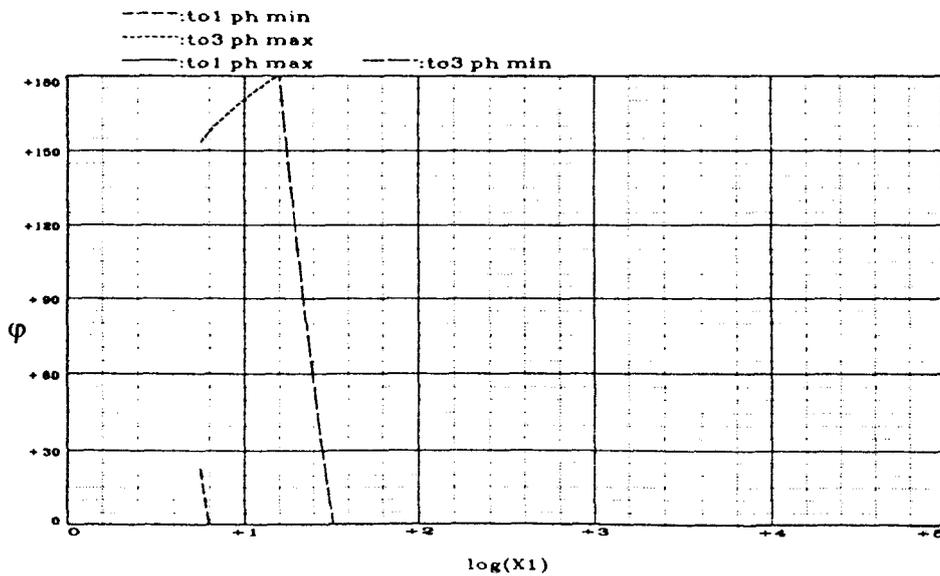


Figure 29 : Limites angulaires - $j=3$, $n=1$, région 1.

Ne connaissant pas l'erreur commise en utilisant les approximations géométriques dans les domaines où ils sont en toute rigueur incorrects, nous représentons la pression due aux ondes géométriques en fonction de l'angle φ et en tenant compte d'un nombre croissant de rayons transmis¹. Ces courbes montrent que quel que soit ce nombre, la pression résultante oscille autour de la pression due uniquement à l'onde réfléchie. De plus, la série des pressions dues aux ondes transmises ne semble pas converger correctement même à très haute fréquence ($x_1=10000$).

La convergence est déterminée par le terme $\sigma_\ell R_{21}$ que nous supposons inférieur à 1 pour que la théorie soit applicable. Lorsque nous représentons l'évolution de ce coefficient en fonction du rapport $\frac{v_\ell^2}{x_1}$, pour différente valeur de x_1 , nous remarquons qu'il est bien inférieur à 1. Pourtant sa valeur croît depuis 0.84 et tend vers 1 lorsque x_1 tend vers l'infini. Ainsi même lorsque la fréquence est faible il faudrait tenir compte de près de 20 rayons transmis pour pouvoir obtenir une bonne approximation de la valeur de la série des pressions géométriques à 0.01 près³.

Etant donné les restrictions apportées précédemment, et connaissant les difficultés informatiques inhérentes au calcul d'un tel nombre de rayons, il n'est pas intéressant de conduire plus loin la recherche de la pression diffractée par le cylindre.

¹ Figures 30 à 32.

La légende de ces courbes est du type : "re +2tran." et se lit pression due à l'onde réfléchie et aux ondes se réfléchissant une et deux fois à l'interface avant d'atteindre le point d'observation

² Figure 33.

³ Nous tiendrons compte de cette remarque dans le cas de la propagation d'ondes géométriques à travers un tube.

Ainsi, dans le calcul de la pression résultante, nous nous limitons à la première approximation de la pression $P_{\text{géo}}^{\text{tot}}$ donnée par la pression due à l'onde réfléchie.

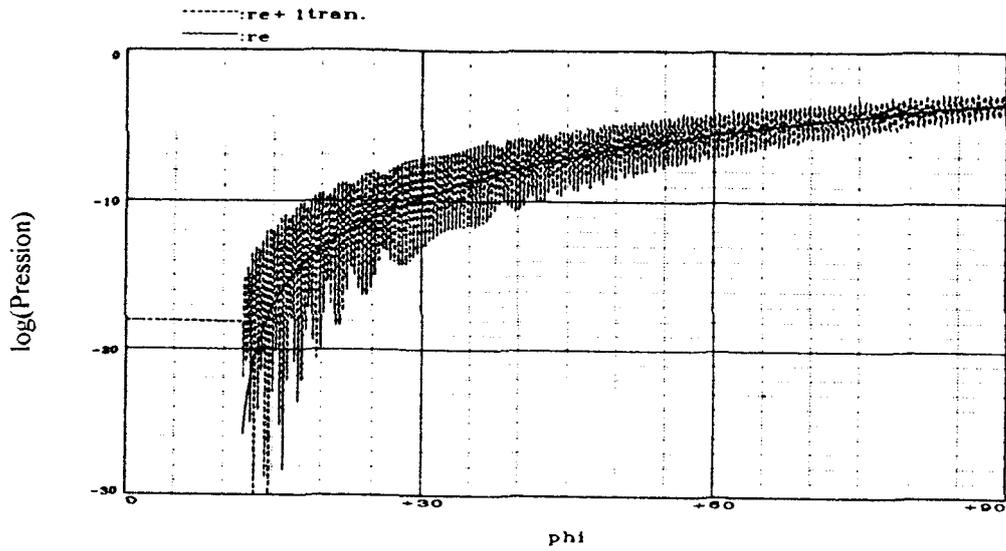


Figure 30 : Cylindre fluide $\log(P_{géo})(\phi)$ -Ondes se réfléchissant moins d'une fois.

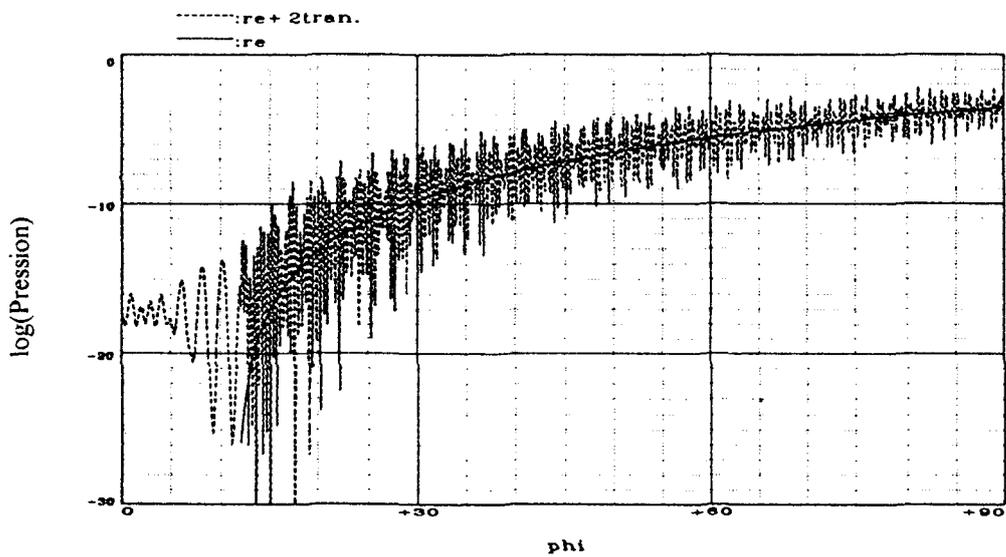


Figure 31 : Cylindre fluide $\log(P_{géo})(\phi)$ -Ondes se réfléchissant moins de deux fois.

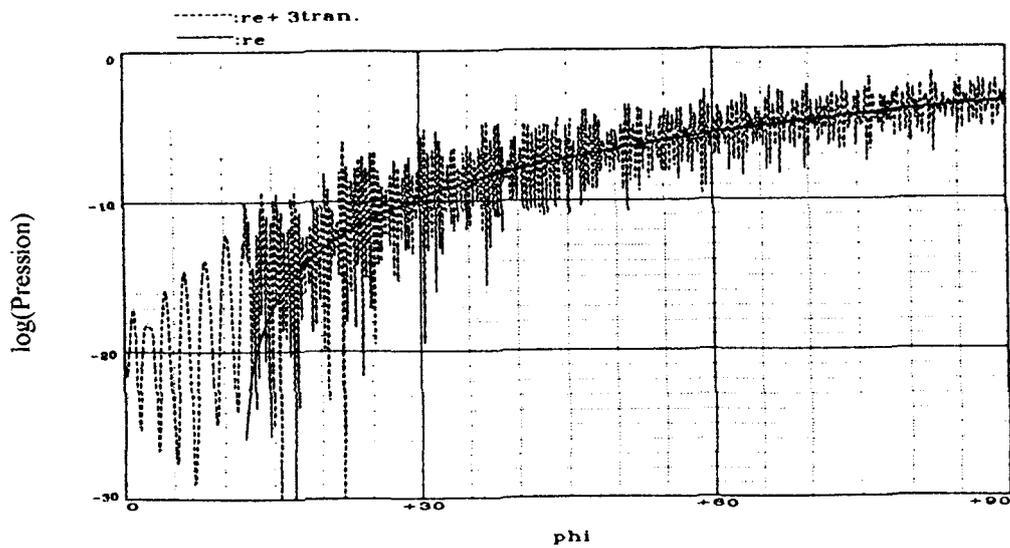


Figure 32 : Cylindre fluide $\log(P_{géo})(\phi)$ -Ondes se réfléchissant moins de trois fois.

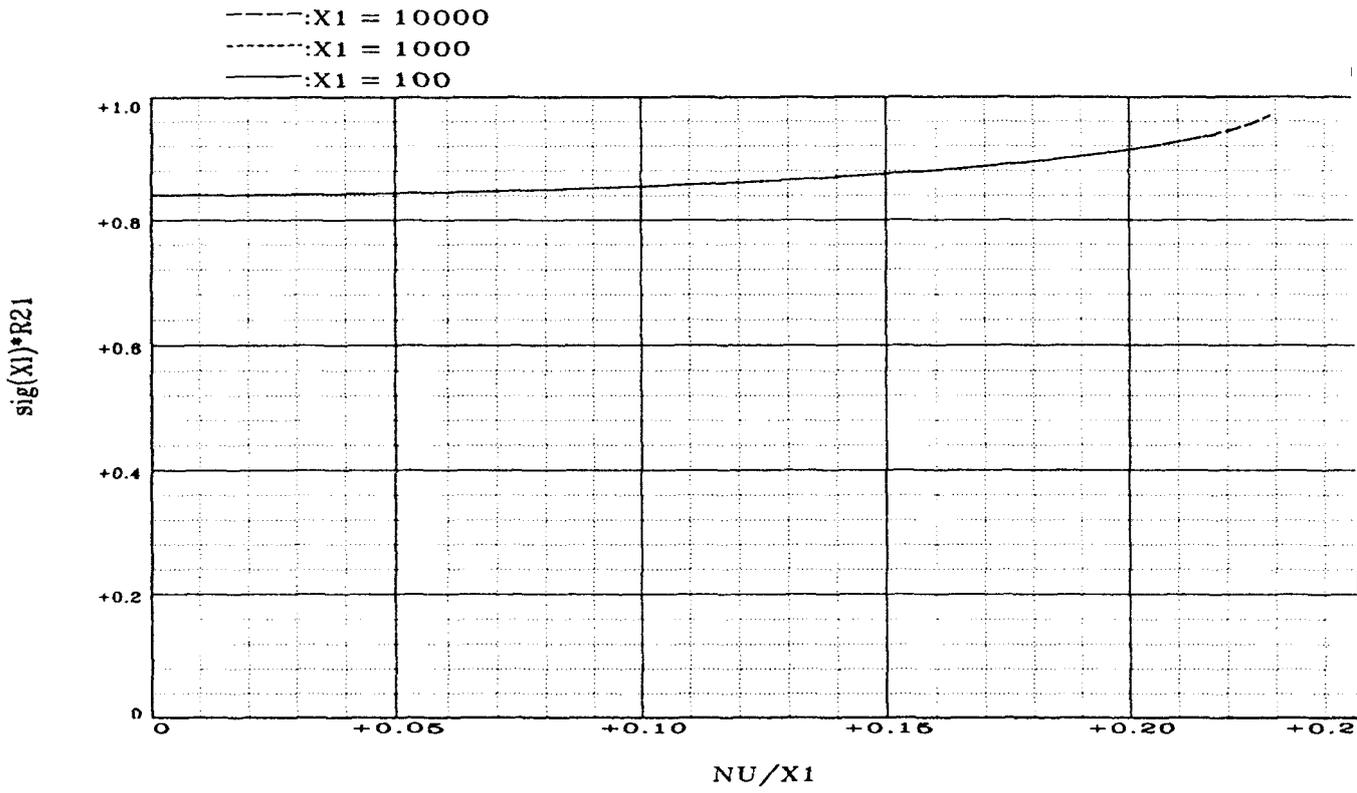


Figure 33 : Cylindre fluide - Coefficient $\sigma_f R_{21}$.

IV.4. Etude numérique de la pression résultante

Connaissant pour une fréquence donnée la valeur des différents pôles associés aux ondes de Wait, nous pouvons calculer la pression due aux ondes circonférentielles, au moyen de l'équation (21) démontrée dans le premier chapitre.

Bien que nous n'ayons pas utilisé les développements asymptotiques pour calculer la valeur des pôles, nous avons eu besoin dans le chapitre précédent de placer, a priori, ces pôles vis-à-vis de x_1 et de $k_1 r$. En utilisant une méthode fondée sur la comparaison des développements asymptotiques obtenus dans deux zones différentes, nous pouvons justifier numériquement ces hypothèses¹. Ainsi dans l'intervalle de fréquence $[10, 100]$, nous confirmons que les pôles de type ℓ_1 se situent en zone 10 vis-à-vis de x_1 et de $k_1 r$, et que les pôles de type ℓ_2 sont en zone 8 vis-à-vis de x_1 et en zone 9 vis-à-vis de $k_1 r$.

Avant de calculer la valeur de la pression résultante de la diffusion par le cylindre nous devons préciser les valeurs prises par le résidu au pôle noté $\beta(v, x_1)$. Pour cela nous employons la méthode développée par J-L. Rousselot². Son raisonnement s'appuie sur la définition d'un résidu. Par une convergence numérique de l'expression $(v - v_\ell) \frac{D^{[1]}(v, x_1)}{D(v, x_1)}$ nous obtenons ainsi une valeur de β , pour laquelle l'erreur est minimisée. Dans le cas des pôles de type ℓ_1 , les courbes donnant β en fonction de x_1 ³ ont des

¹ Nous détaillerons cette méthode dans le chapitre 4.

² J-L Rousselot, Champ diffusé par un cylindre fluide : comparaison entre la théorie géométrique de la diffraction et la théorie modale, *Acustica*, **79**, pp. 15-16, 1993.

³ Figures 34 et 35.

allures semblables à celles donnant $\text{Im}(v)$ en fonction de x_1 . Nous étudierons plus en détail cette remarque lorsqu'il nous sera possible de comparer ces résultats à ceux obtenus dans le cylindre élastique ou le tube¹. Lorsque nous comparons l'évolution de β pour les deux types de pôles nous pouvons constater que sa valeur, pour une même fréquence, est 10 fois plus importante pour les pôles de type ℓ_2 que pour ceux de type ℓ_1 . Cette remarque complète celle effectuée à propos de l'importance relative de l'amortissement des deux types d'ondes. Ainsi la pression due aux ondes de Franz devrait être prépondérante lorsque le trajet à effectuer sur le cylindre est court et minoritaire dans le cas contraire.

¹ Annexe C : Etude du résidu β .

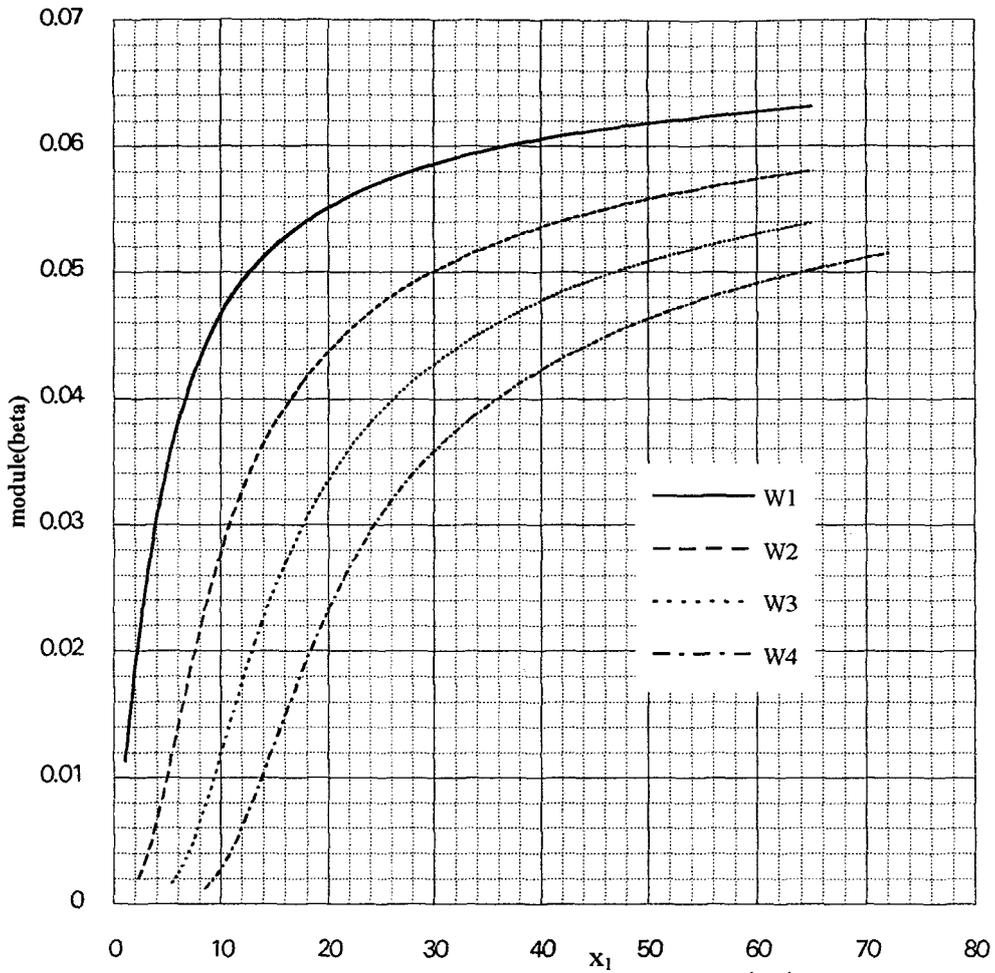


Figure 34 : Cylindre fluide - Ondes de Wait - $|\beta|(x_1)$

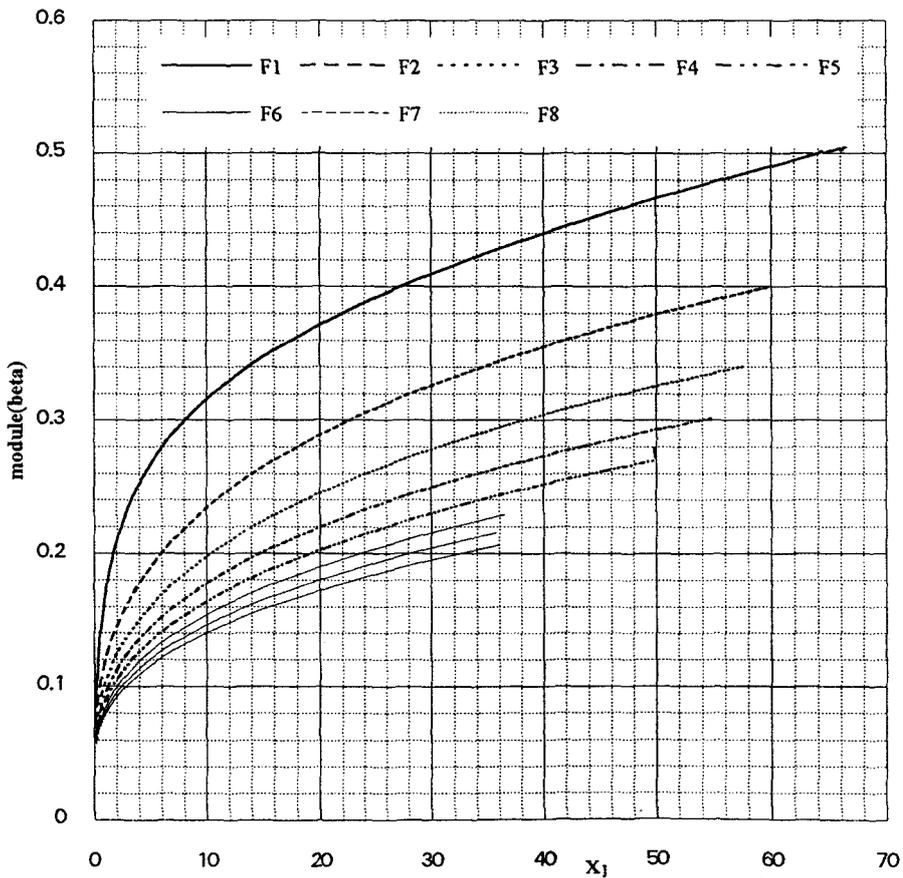


Figure 35 : Cylindre fluide - Ondes de Franz - $|\beta|(x_1)$

Nous représentons pour différentes valeurs de x_1 et de R sur le même graphe la pression diffusée obtenue par la série modale (équation (5)) et celle obtenue par la méthode développée dans ce chapitre et dans le chapitre précédent¹.

Lorsque nous sommes l'ensemble des pressions responsables de la pression diffusée au point P , nous pouvons confirmer les zones angulaires dans lesquelles les ondes de Franz sont prépondérantes : tant que le point P se situe dans la zone d'ombre du cylindre ($\varphi < \arcsin\left(\frac{r}{a}\right)$) la pression due aux ondes de Franz est le terme dominant de la pression diffusée.

Si nous comparons la courbe obtenue par la série modale et celle obtenue par la TGD., nous pouvons remarquer qu'elles coïncident plus ou moins bien suivant les valeurs de φ . Lorsque le point P est dans la zone d'ombre du cylindre, la différence entre les deux courbes est d'autant plus faible que le nombre d'ondes de Franz introduites dans le calcul de la pression résultante est grand². Cependant pour, par exemple, $x_1=30$, il ne semble pas nécessaire d'introduire plus de quatre ondes de Franz. Ainsi, la série des pressions dues aux ondes de Franz, introduite dans le cas général par l'équation (18), converge très rapidement. Lorsque le point P n'est plus situé dans la zone d'ombre, les ondes de Franz sont négligeables devant les ondes de Wait et l'onde réfléchi. Le passage d'une zone à l'autre se réalise bien avec une chute de pression de l'ordre de $e^{-2\pi\tilde{\nu}\ell/2}$. En toute rigueur et d'après l'équation (34), la valeur de l'angle correspondant au changement de zone dépend du pôle. Si nous tenions compte pour toutes les ondes de Franz de cette remarque nous obtiendrions une variation de pression beaucoup plus

¹ Figures 36 à 41.

² Figures 36 et 37.

³ Commentaires suivant l'équation (48).

continue au voisinage de la limite "ombre/lumière". Par contre l'introduction de cette précision de calcul complique l'interprétation géométrique puisque nous perdons la notion de zone d'ombre et de lumière du cylindre.

Lorsque le rapport R croît, l'intervalle angulaire correspondant à un point P situé dans la zone d'ombre décroît. Aussi plus le point P est situé loin du cylindre plus les ondes de Franz deviennent rapidement négligeables.¹

Dans une zone angulaire plus ou moins large suivant le passage du point P dans la zone de lumière, la différence entre la pression calculée par la série modale et celle calculée à partir de la TGD. est importante². Le fait de ne pas avoir tenu compte des pressions dues aux ondes transmises explique ce décalage entre les deux courbes. En effet dans cette zone angulaire, la pression réfléchie est relativement faible, il n'est donc pas correct de négliger la pression due aux ondes transmises devant elle.

Un changement brusque de courbure advient lorsque φ dépasse un angle que nous notons $\varphi_{\ell}^{(c)}$, ($\varphi_{\ell}^{(c)} \approx 156^\circ$). Cet angle correspond au passage de l'angle critique $\theta_{\ell}^{(c)} \approx 13,24^\circ$ par l'onde incidente se réfléchissant sur le cylindre et ainsi au changement de définition du coefficient de réflexion³. Des décrochements succédant à ce changement de courbure apparaissent lorsque le col de gauche atteint la même valeur que la partie réelle d'un pôle. La comparaison avec les valeurs obtenues par la série modale montre que ces décrochements ne se justifient pas physiquement. Ils sont essentiellement liés à la T.G.D.. En effet, la méthode du col utilisée dans la T.G.D. n'est plus rigoureusement correcte au voisinage d'un pôle : la

¹ Figures 37 et 38.

² Figures 36 à 41.

³ Equations (63) et (64).

fonction à intégrer sur le contour passant par les cols ne peut plus décroître rapidement après le passage du col de gauche puisque ce dernier est situé dans le voisinage d'un pôle (par définition de ce complexe, la fonction à intégrer croît lorsqu'elle s'en rapproche). Ces décrochements sont cependant suffisamment faible pour estimer que la T.G.D. donne encore une bonne interprétation du phénomène dans cette zone angulaire.

Nous essayons malgré tout d'atténuer l'importance de ces décrochements en déplaçant artificiellement la valeur de l'angle θ qui leur correspond. En effectuant un décalage de 0.07 degré, nous obtenons une coïncidence des courbes sur un plus grand intervalle angulaire¹. Un décalage de 0.1 degré convient pour la première onde de Wait mais pas pour la seconde². Ces études numériques montrent que l'angle correspondant au décrochement pourrait être calculé de façon plus précise en reprenant une méthode du col adaptée à cette situation. Malheureusement, comme pour les ondes de Franz, une augmentation de précision compliquerait l'interprétation géométrique alors que cette étude a pour objet de développer une méthode expliquant géométriquement un phénomène de diffusion.

En cherchant à représenter des courbes similaires de pressions pour une valeur de x_1 égale à 50, nous avons constaté un phénomène curieux : alors que numériquement il n'existe que trois pôles de type ℓ_1 à partie réelle positive, c'est en introduisant un pôle à partie réelle voisine de 0 mais négative ($v_{\ell_1=3} = (-0.104, 0.05)$) que la coïncidence entre les deux courbes s'effectuent le mieux. Ce type de résultat s'explique si nous admettons qu'un pôle voisin de zéro peut avoir été mal calculé. Il semblerait que lorsque $x_1=50$, il existe 4 pôles à partie réelle positive ou nulle, une erreur étant

¹ Figure 42.

² Figure 43.

vraisemblablement intervenue dans la recherche numérique du dernier pôle. L'hypothèse d'une erreur de calcul se justifie puisque lorsque nous nous plaçons à une fréquence supérieure à 50 où le quatrième pôle a une partie réelle strictement positive (nous avons pris $x_1=54,8$), la somme de ces quatre pressions et de la pression réfléchie équivaut bien à la pression calculée par la série modale.¹ Nous devons donc tenir compte des pôles à partie réelle nulle et, bien que cela ne représente rien théoriquement, étudier l'influence de ceux à partie réelle légèrement négative afin d'éviter une erreur numérique.

¹ Figures 39 à 41.

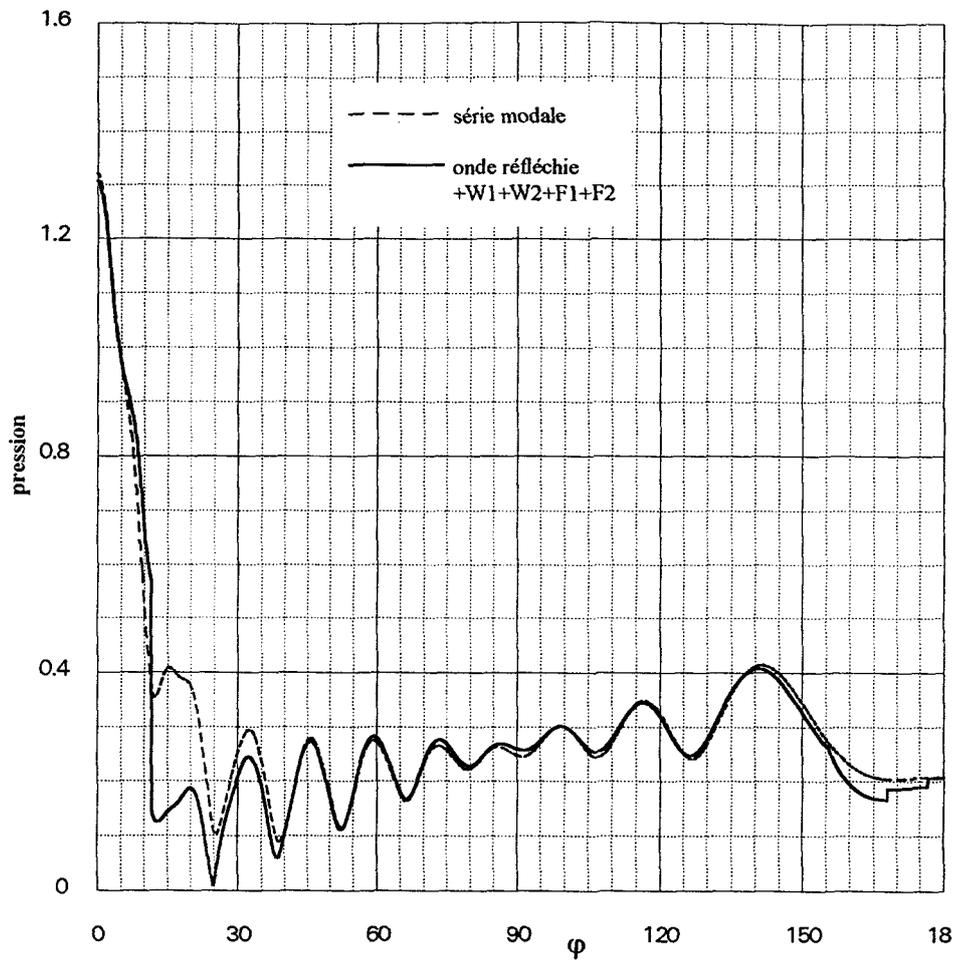


Figure 36 : Cylindre fluide - P_{diff} - réfl., $W1, W2, F1, F2, R=5, x_1=30$.

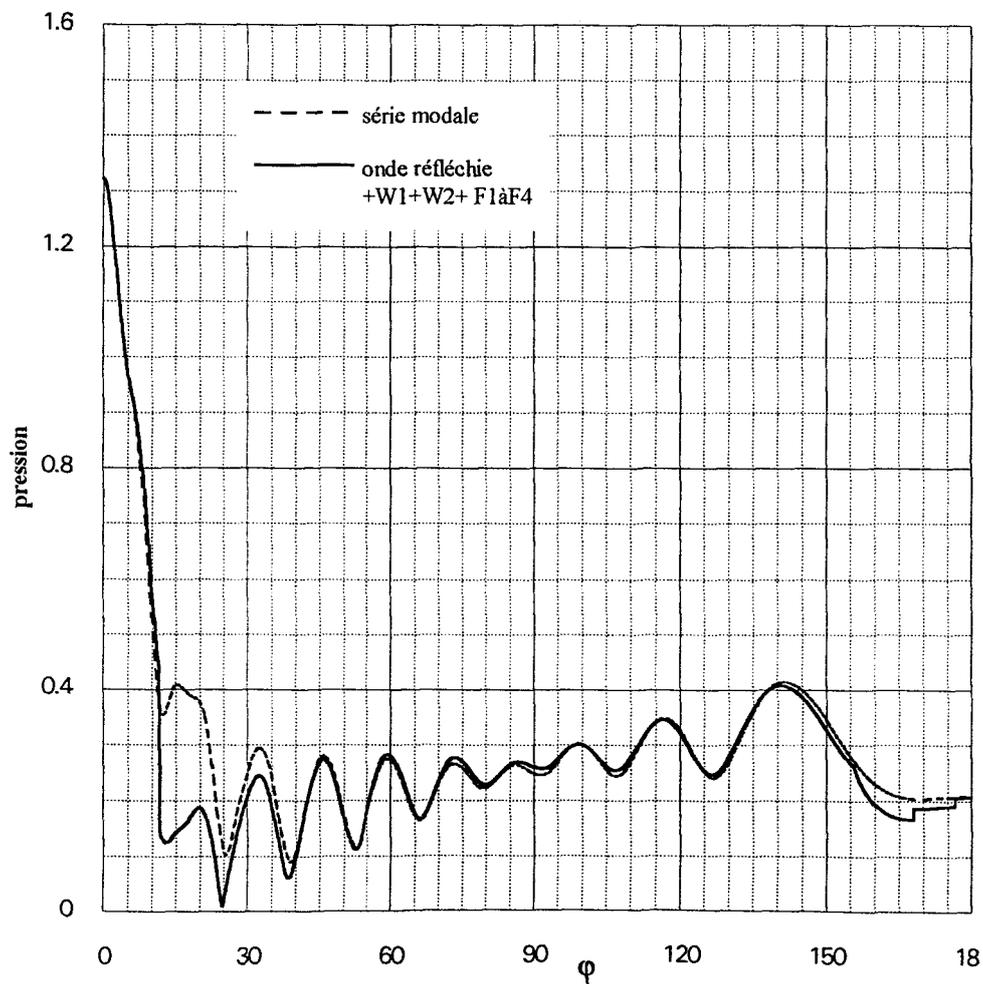


Figure 37 : Cylindre fluide - P_{diff} - réfl, $W1, W2, F1 \text{ à } F4, R=5, x_1=30$.

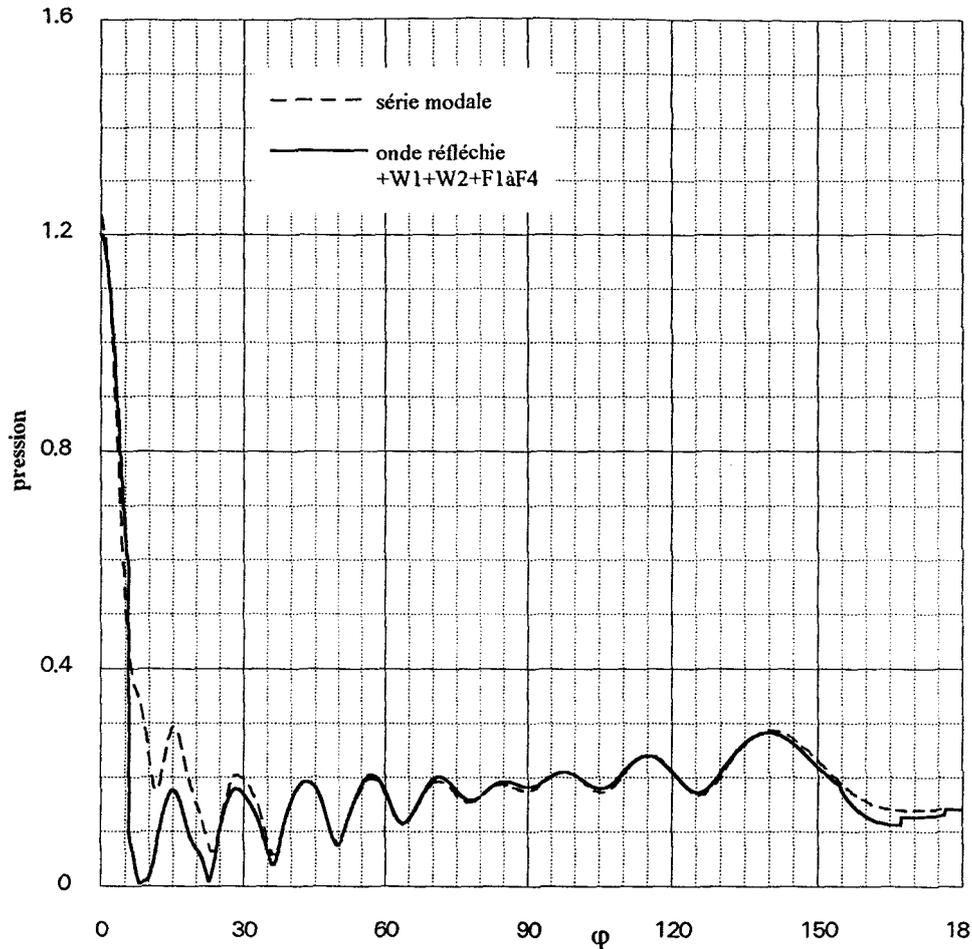


Figure 38 : Cylindre fluide $-P_{diff}$ - réfl., $W1, W2, F1$ à $F4, R=10, x_1=30$.

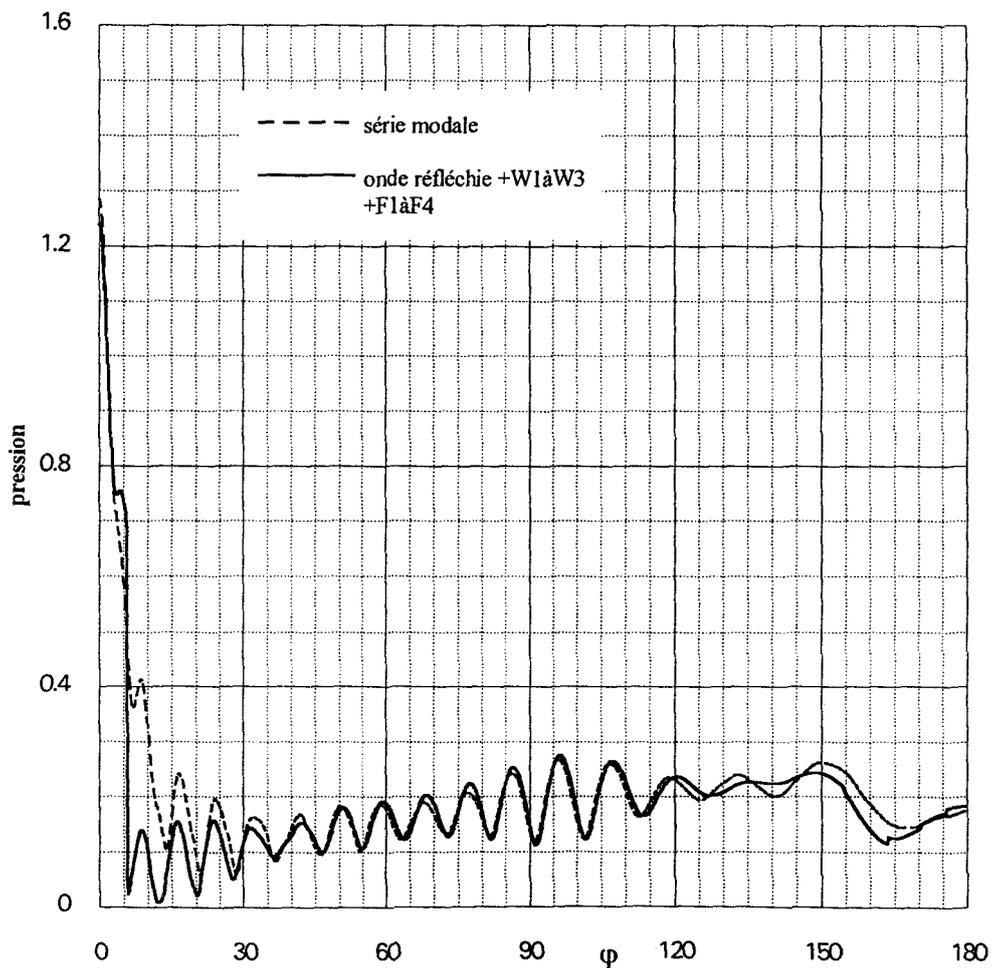


Figure 39 : Cylindre fluide $-P_{diff}$ - réfl., $W1$ à $W3, F1$ à $F4, R=10, x_1=50$.

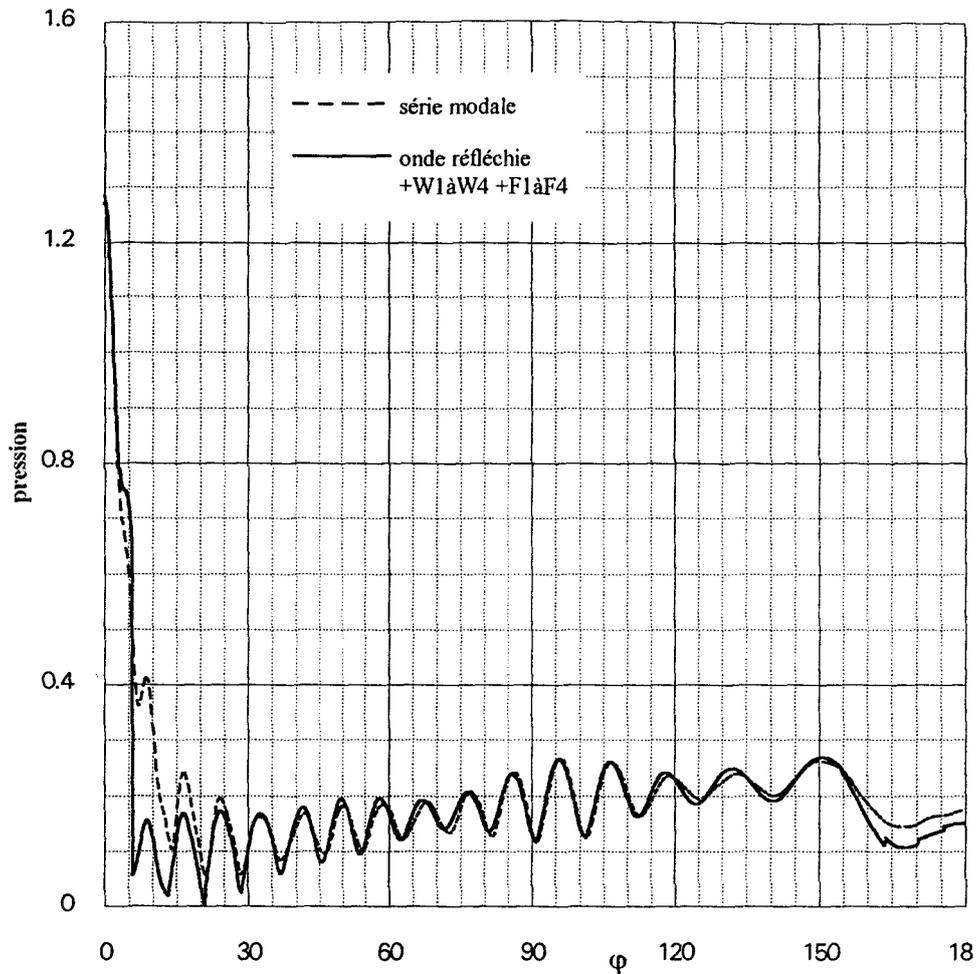


Figure 40: Cylindre fluide $-P_{diff}$ - réfl., $W1$ à $W4$, $F1$ à $F4$, $R=10$, $x_1=50$.

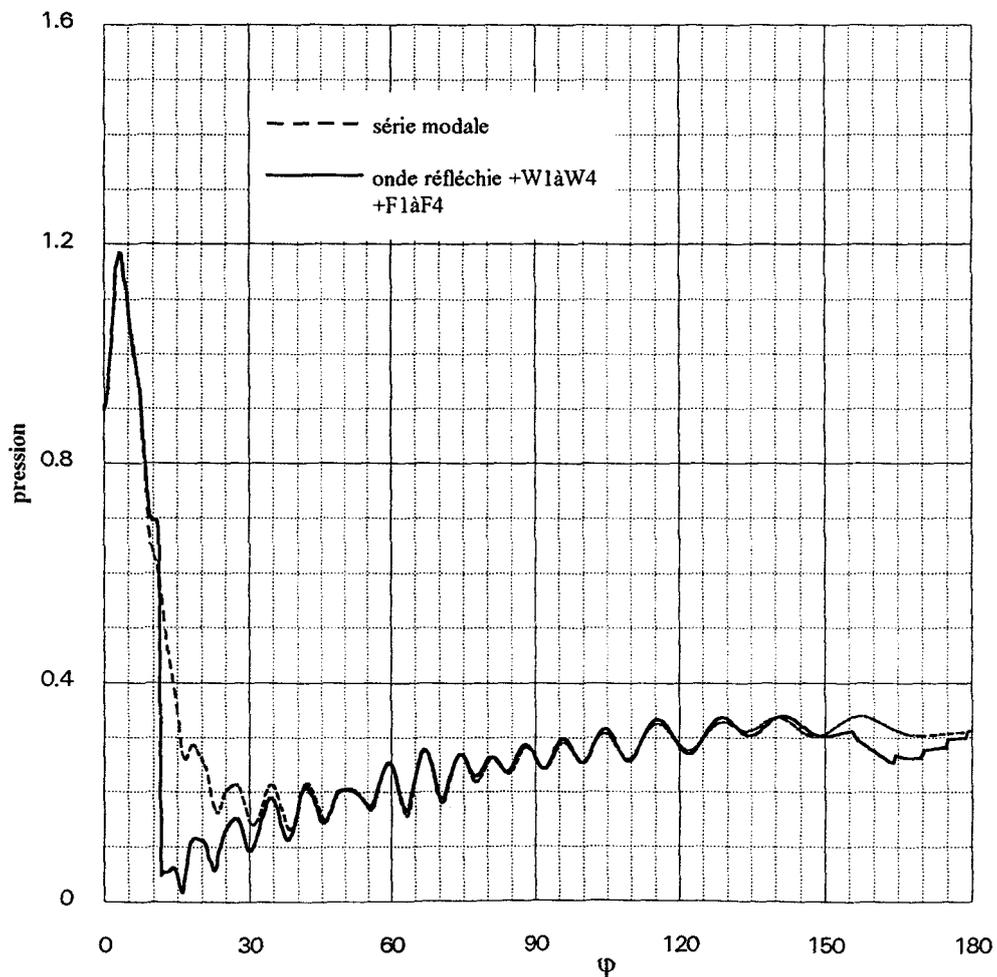


Figure 41: Cylindre fluide $-P_{diff}$ - réfl., $W1$ à $W4$, $F1$ à $F4$, $R=5$, $x_1=54.8$.

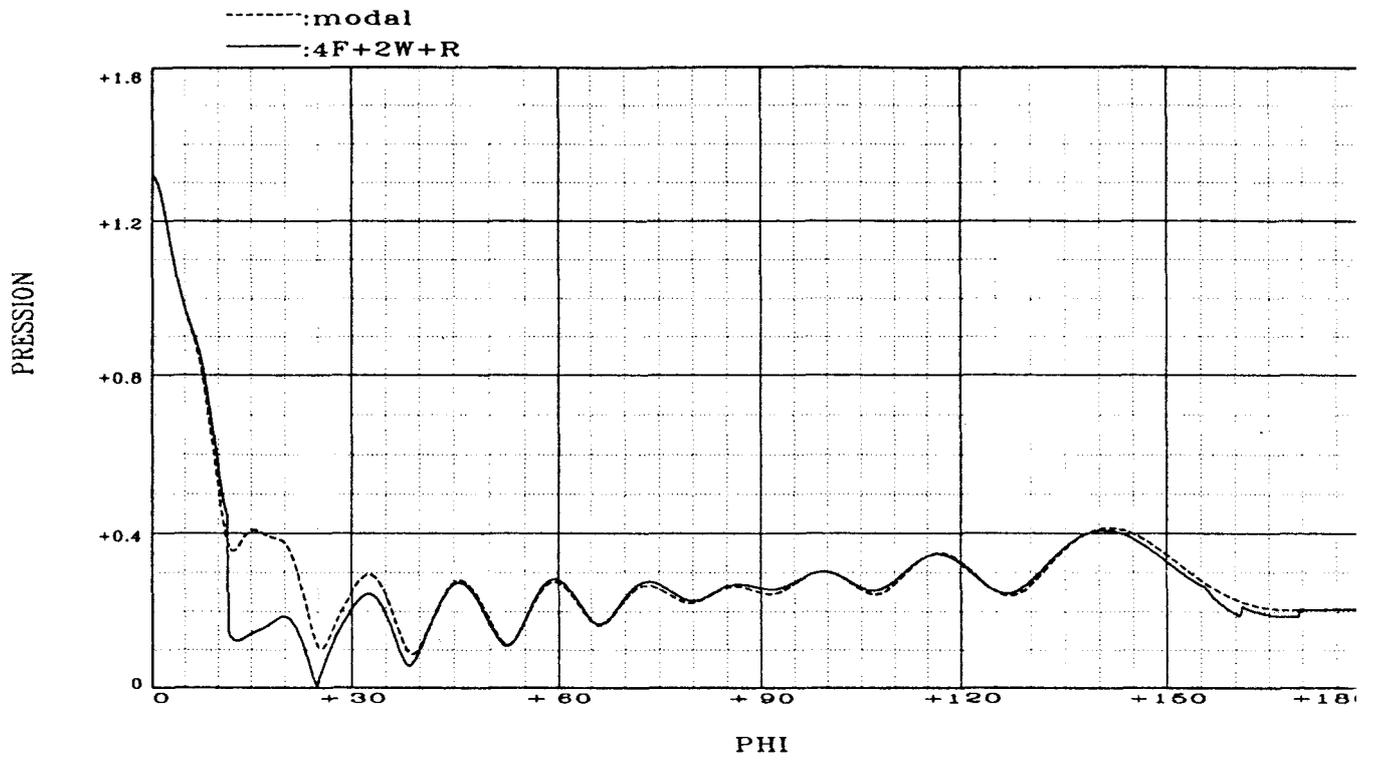


Figure 42 : Cylindre fluide - P_{diff} - réfl., $W1, W2, F1$ à $F4, R=5, x_1=30$.
 Décalage de l'angle correspondant au passage d'un pôle de 0.07° .

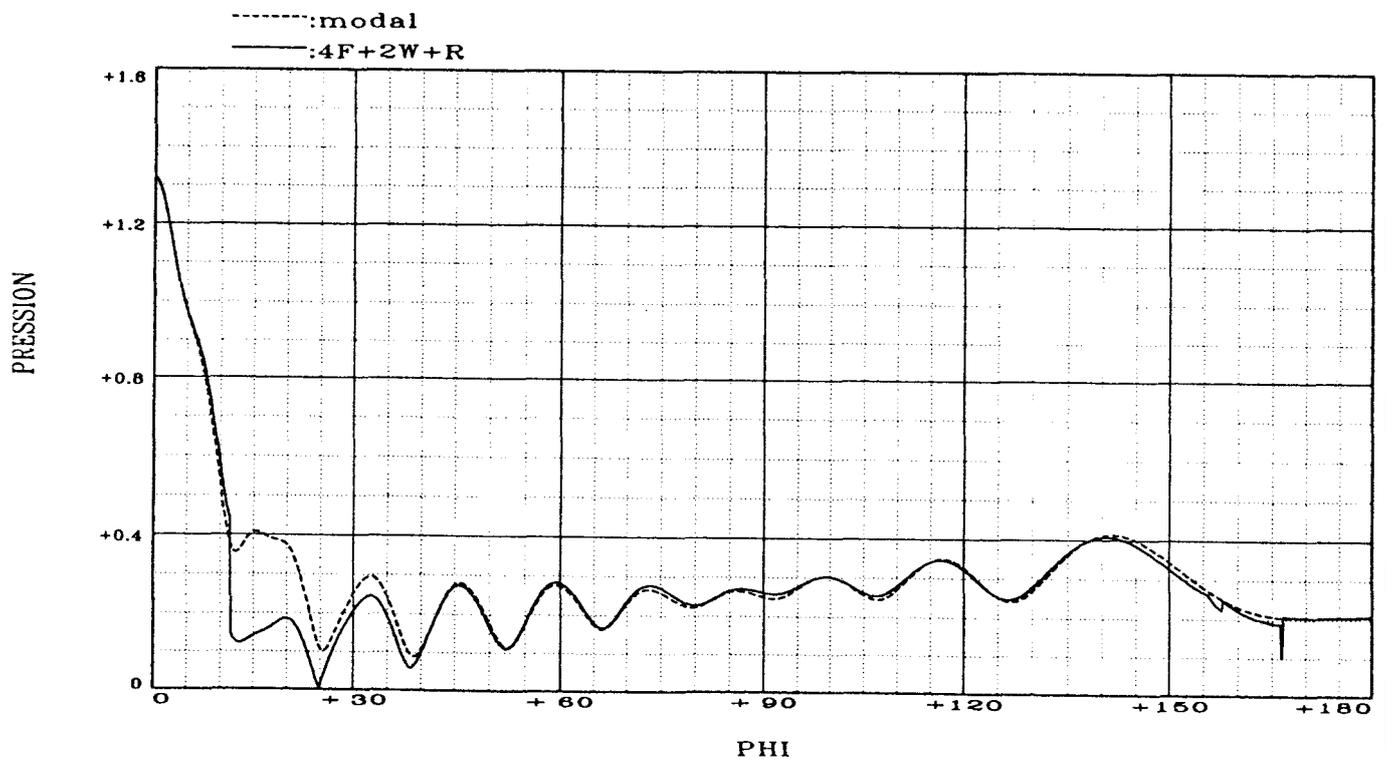


Figure 43 : Cylindre fluide - P_{diff} - réfl., $W1, W2, F1$ à $F4, R=5, x_1=30$.
 Décalage de l'angle correspondant au passage d'un pôle de 0.1° .

V. INDICE DE REFLECTIVITE

Nous étudions dans cette section l'évolution de la pression diffusée par le cylindre fluide lorsque le point d'observation s'éloigne à l'infini de l'objet. Nous nous plaçons à une fréquence ω_1 fixée mais suffisamment élevée pour avoir le droit d'appliquer la T.G.D. développée dans les sections précédentes. Pour cela, nous introduisons l'indice de réflectivité. En effet, cette fonction usuellement utilisée en acoustique sous marine nous permet d'obtenir une modélisation de la diffusion acoustique indépendante de la distance séparant l'objet diffusant de l'observateur.

Dans un problème à symétrie cylindrique il est défini en décibel par :

$$(70) \quad I_{dB} = 10 \log \left(2\pi r \left| \frac{P_{diff}}{P_{inc}} \right|^2 \right)$$

Pour calculer cette expression, nous utilisons le développement asymptotique de l'expression $H_v^{(1)}(k_1 r)$ lorsque r tend vers l'infini. pour un nombre complexe ν donné. Ce développement s'écrit :

$$(71) \quad H_v^{(1)}(k_1 r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} e^{i(k_1 r - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}$$

Ainsi en reprenant l'expression de la pression diffusée donnée dans l'équation (5), nous obtenons :

$$(72) \quad \left| \frac{P_{\text{diff}}}{P_{\text{inc}}} \right| = \sqrt{\frac{a}{2r}} F_{\infty}(\varphi)$$

$$\text{avec } F_{\infty}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi x_1}} \left| \frac{D_0^{(1)}(\omega, a)}{D_0(\omega, a)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n^{(1)}(\omega, a)}{D_n(\omega, a)} \cos n\varphi \right|$$

la fonction de forme.

Connaissant l'équation (70) et sa définition en décibel, l'indice de réflectivité s'écrit :

$$(73) \quad I_{\text{dB}} = 10 \log(\pi a F_{\infty}^2)$$

En employant la même démarche, nous allons rechercher l'indice de réflectivité calculé à partir de la pression diffractée et de la pression due aux ondes circonférentielles.

A partir des équations (60) et (61), nous estimons le développement asymptotique en "r" de la pression réfléchie et des pressions transmises. Nous obtenons ainsi :

$$(74) \quad P_{\text{réfl}} = P_0 e^{i\omega t} \sqrt{\frac{a}{2r}} \sqrt{\cos\theta_0} R_{12}(\theta) e^{-2ix_1 \cos\theta_0} e^{ik_1 r}$$

et $\forall j \geq 1$,

$$P_{\text{tr},j} = -\sqrt{\frac{a}{2r}} \frac{P_0 e^{i\omega t} i^{1-j} [R_{21}(\theta_j)]^{j-1} T_{21}(\theta_j) T_{12}(\theta_j)}{\sqrt{\frac{j}{\sqrt{n_l^2 - \sin^2 \theta_j}} - \frac{1}{\cos \theta_j}}}$$

$$e^{2ix_1 (j\sqrt{n_l^2 - \sin^2 \theta_j} - \cos \theta_j)} e^{ik_1 r}.$$

(75)

Nous utilisons les équations (21) et (37), pour exprimer les différentes pressions dues aux ondes circonférentielles. Lorsque "r" tend vers l'infini, il ne peut exister de point dans l'ombre du cylindre. Connaissant par

l'équation (71), le développement asymptotique de $H_v^{(1)}(k_1 r)$ nous écrivons pour les ondes de Franz :

$$(76) \quad P_{\ell_2}^c = -P_0 e^{-i\omega t} \pi \frac{\cos v_{\ell_2} (\pi - \varphi)}{\sin \pi v_{\ell_2}} \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} e^{ik_1 r} e^{-i\frac{\pi}{4}} \beta(v_{\ell_2}, x_1)$$

D'après l'équation (31), nous devons distinguer deux intervalles angulaires pour les ondes de Wait. Le pôle correspondant à l'angle limite entre ces deux intervalles, noté $v_{\ell_1}^{\text{lim}}$, vérifie l'équation $\tilde{v}_{\ell_1}^{\text{lim}} = x_1 \cos \frac{\varphi}{2}$. Lorsque $\tilde{v}_{\ell_1} < \tilde{v}_{\ell_1}^{\text{lim}}$, la pression due à l'onde de Wait de pôle v_{ℓ_1} s'écrit :

$$(77) \quad P_{\ell_1} = -P_0 e^{-i\omega t} \pi \frac{\cos v_{\ell_1} \varphi}{\sin \pi v_{\ell_1}} \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} e^{ik_1 r} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\pi v_{\ell_1}} \beta(v_{\ell_1}, x_1)$$

Lorsque $\tilde{v}_{\ell_1} > \tilde{v}_{\ell_1}^{\text{lim}}$, cette pression s'écrit :

$$(78) \quad P_{\ell_1}^c = -P_0 e^{-i\omega t} \pi \frac{\cos v_{\ell_1} (\pi - \varphi)}{\sin \pi v_{\ell_1}} \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} e^{ik_1 r} e^{-i\frac{\pi}{4}} \beta(v_{\ell_1}, x_1)$$

Lors du calcul numérique de $P_{\text{géo}}^{\text{tot}}$ nous avons uniquement tenu compte de la pression réfléchie. Nous faisons de même pour calculer l'indice de réflectivité.

Lorsque r tend vers l'infini, une des relations issue des équations aux cols permet pour un angle φ de déterminer l'angle d'incidence θ_0 :

$$(79) \quad \theta_0 = \frac{\pi - \varphi}{2}$$



Connaissant les équations (72) à (77) l'indice de réflectivité s'écrit lorsque "r" tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
 I_{dB} &= 10 \log \pi a \\
 &+ 20 \log \left| \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}} R_{12}(\varphi) e^{-2x_1 i \sin \frac{\varphi}{2}} \right. \\
 &\quad - \frac{2\pi}{\sqrt{\pi x_1}} e^{-i \frac{\pi}{4}} \sum_{\substack{\ell_1 \text{ tel que} \\ \tilde{\nu}_{\ell_1} < \tilde{\nu}_{\ell_1}^{\text{lim}}}} \frac{\cos \nu_{\ell_1} \varphi}{\sin \pi \nu_{\ell_1}} e^{-i \pi \nu_{\ell_1}} \beta(\nu_{\ell_1}, x_1) \\
 &\quad - \frac{2\pi}{\sqrt{\pi x_1}} e^{-i \frac{\pi}{4}} \sum_{\substack{\ell_1 \text{ tel que} \\ \tilde{\nu}_{\ell_1} > \tilde{\nu}_{\ell_1}^{\text{lim}}}} \frac{\cos \nu_{\ell_1} (\pi - \varphi)}{\sin \pi \nu_{\ell_1}} \beta(\nu_{\ell_1}, x_1) \\
 &\quad \left. - \frac{2\pi}{\sqrt{\pi x_1}} e^{-i \frac{\pi}{4}} \sum_{\ell_2} \frac{\cos \nu_{\ell_2} (\pi - \varphi)}{\sin \pi \nu_{\ell_2}} \beta(\nu_{\ell_2}, x_1) \right|
 \end{aligned}
 \tag{80}$$

Ainsi, l'utilisation de l'indice de réflectivité nous permet de représenter l'évolution de la pression diffusée à l'infini. En reprenant les équations (72) à (76) et en utilisant l'équation au col (58) nous obtenons l'expression de l'indice de réflectivité valable lorsque r est grand. La comparaison des courbes issues de ces deux expressions nous permet d'observer l'évolution de la pression lorsque le point P s'éloigne du cylindre¹. Au delà de 60°, la courbe représentant l'indice de réflectivité obtenue avec $r/a = 100$ est identique à celle obtenue lorsque r/a tend vers l'infini. Par contre pour les faibles valeurs angulaires, la courbe obtenue lorsque $r/a = 100$ présente d'importantes différences avec celle obtenue à l'infini mais aussi avec celle calculée à partir de la série modale. Ces différences sont dues à l'équation au col utilisée. Cette dernière ajoute un terme dépendant du rapport "r/a" dans l'expression de l'indice de réflectivité lorsque "r/a" tend vers l'infini. Le développement asymptotique utilisé pour calculer $H_V^{(1)}(k_1 r)$ étant établi au premier ordre en "r/a" (équation (71)), seul le premier ordre de l'indice de

¹ Figures 44 à 46.

réflectivité se justifie mathématiquement. Ainsi, la seule expression valable de l'indice de réflectivité est celle obtenue lorsque le point d'observation se situe à l'infini. La comparaison de la courbe représentant pour différentes valeurs angulaires cet indice de réflectivité et celle obtenue à partir de la série modale nous permet de confirmer les résultats numériques obtenus lorsque l'observateur est situé à une distance finie du cylindre. En effet, nous retrouvons une zone pour les faibles valeurs de l'angle φ où les courbes présentent le plus de différences. Ces dernières sont vraisemblablement dues à l'influence des ondes transmises que nous avons négligée. Lorsque les pressions associées à chaque onde de Wait changent d'expression asymptotique nous constatons une discontinuité dans la courbe représentant la pression diffusée ; cette discontinuité est due à l'inadéquation mathématique de la transformée de Sommerfeld-Watson lorsque les cols se situent au voisinage des pôles.

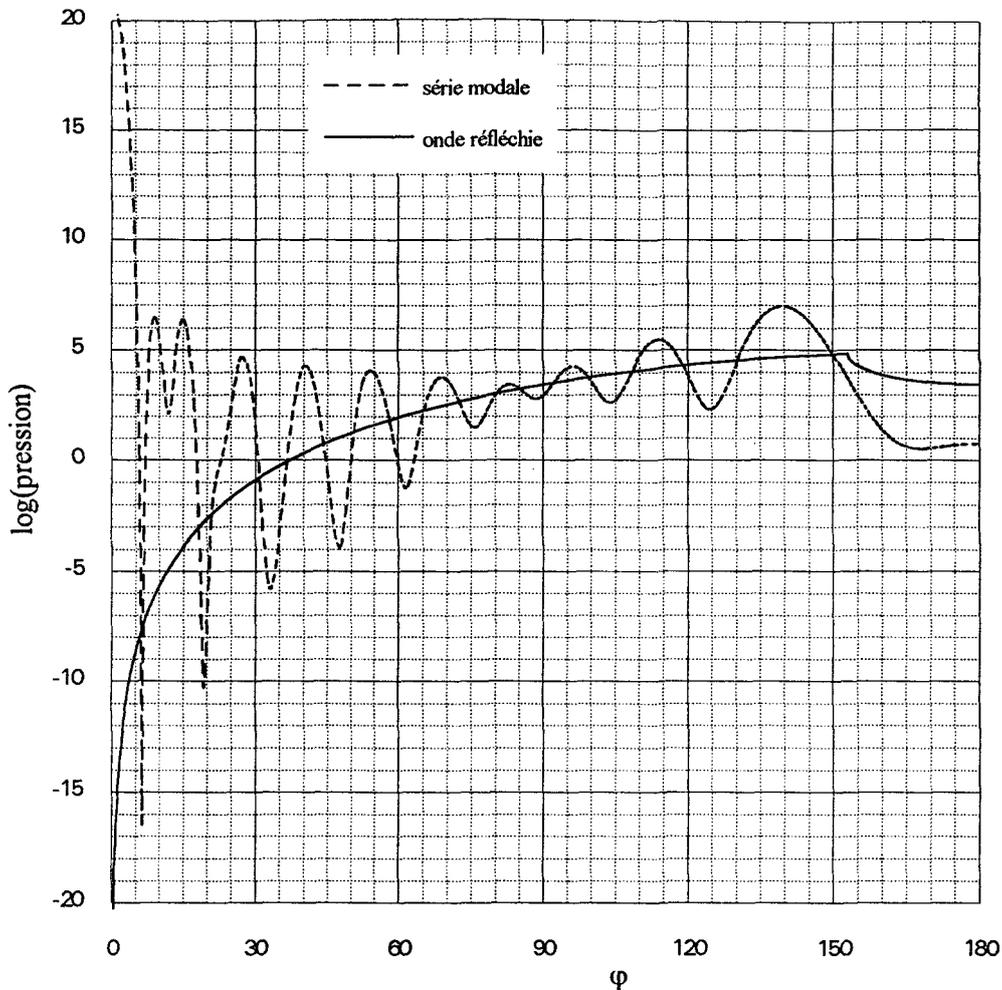


Figure 44: Cylindre fluide $-Ind(P_{diff})$ - réfl., $R \rightarrow \infty$, $x_1=30$

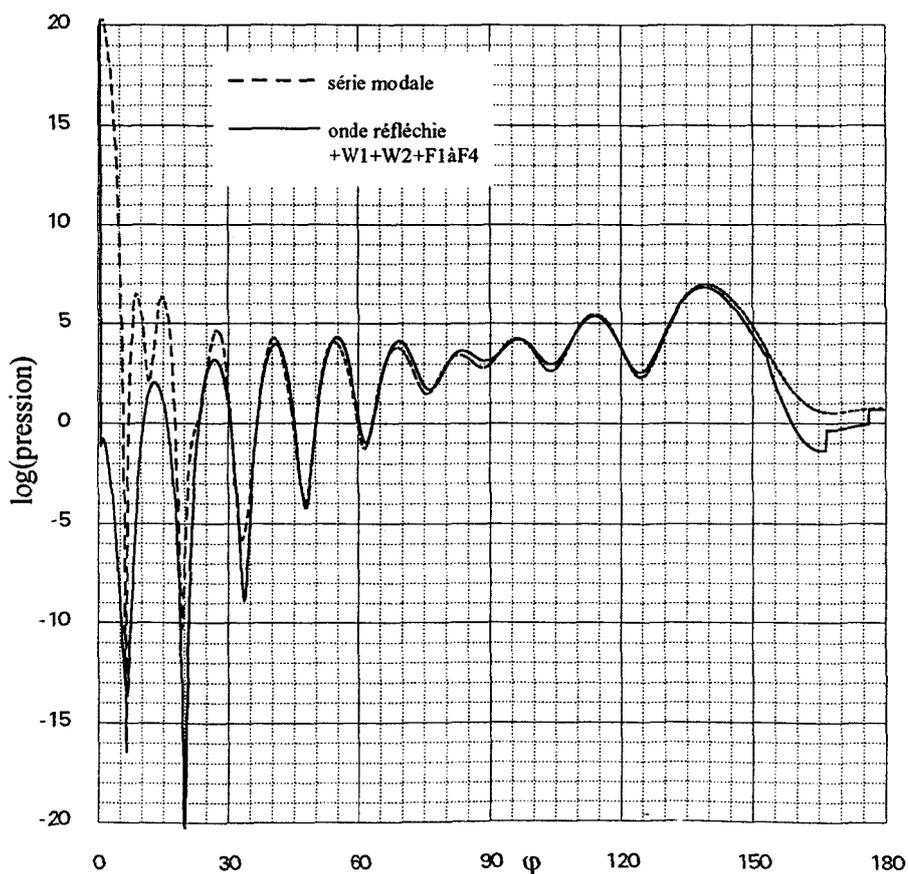


Figure 45: Cylindre fluide $-Ind(P_{diff})$ - réfl., $W1, W2, F1$ à $F4$, $R=10$, $x_1=30$

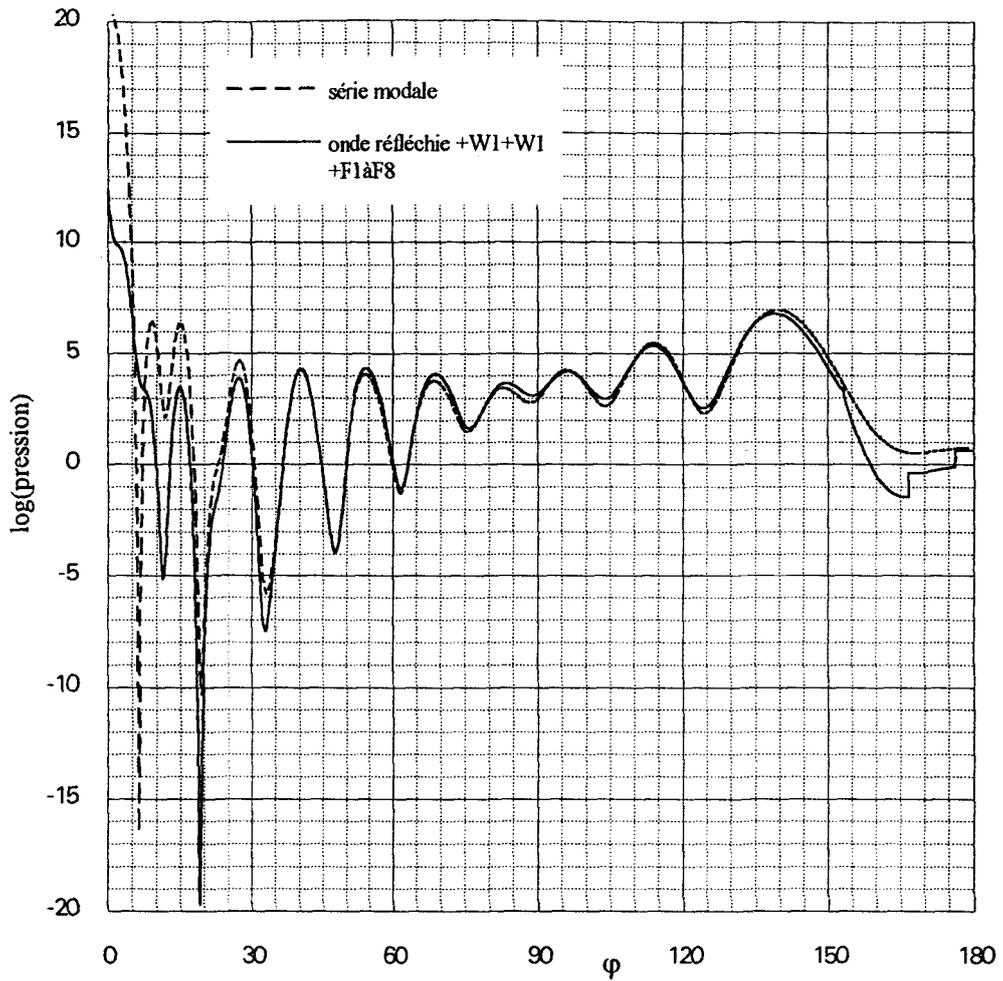


Figure 46: *Cylindre fluide -Ind(P_{diff})-réfl., $W1, W2, F1$ à $F8, R \rightarrow \infty, x_1=30$*

VI. CONCLUSION

Nous avons mis en place l'ensemble de la théorie et de la démarche numérique permettant de calculer et d'interpréter la pression diffusée par un cylindre fluide. L'analyse des courbes obtenues a permis de comprendre l'importance relative des différentes ondes ainsi que l'influence de certaines transformations théoriques comme la transformation d'Imai.

Cette étude nous a permis de résoudre une partie des problèmes qui se poseront lors de l'étude du cylindre ou du tube élastique. Par exemple, nous avons développé une démarche numérique réutilisable lorsque l'objet cylindrique n'est plus fluide. Les remarques issues de l'analyse des courbes nous seront utiles à la compréhension de phénomènes plus complexes. Les interprétations géométriques nous permettront d'appréhender plus facilement les problèmes du cylindre ou du tube élastique.

Chapitre 3

Etude de la diffusion par un cylindre élastique.

Dans le premier chapitre nous avons présenté la démarche générale conduite lors de la mise en place de la transformation de Sommerfeld-Watson. Lorsque l'objet dont nous étudions la diffusion est un cylindre élastique, nous utilisons à nouveau cette transformation. Afin de pouvoir reprendre certains résultats numériques établis dans le cas du cylindre fluide, nous supposons que ce cylindre est composé d'aluminium. Ainsi sa masse volumique, notée " ρ_2 ", vaut $2,7 \text{ gcm}^{-3}$. Ce matériau est supposé isotrope et homogène. Nous introduisons ainsi les vitesses du son longitudinale, notée " c_ℓ ", et transversale, notée " c_t " caractérisant ce milieu. c_ℓ vaut 6419.88 ms^{-1} et c_t 3040 ms^{-1} . Le milieu externe est fluide et possède les mêmes caractéristiques que dans le chapitre précédent. Les réels x_ℓ et x_t , définis par $x_\ell = \frac{c_1}{c_\ell} x_1$ et $x_t = \frac{c_1}{c_t} x_1$, sont donc ordonnés comme suit : $x_\ell < x_t < x_1$

Afin d'approfondir l'étude commencée dans le cas du cylindre fluide, nous démontrons que, sous certaines conditions, la pression, notée $P_{\text{géo}}^{\text{tot}}$ dans le chapitre précédent, est interprétable de nouveau comme une pression d'origine essentiellement géométrique. Pour cela, nous utilisons les résultats obtenus à partir de la méthode du col. Ces derniers ne sont applicables qu'après avoir mis en évidence à haute fréquence et pour une variable ν réelle une décomposition de la fonction S en terme de coefficients de réflexion et de transmission. Cette démarche utilise les développements asymptotiques des fonctions cylindriques. Connaissant ces derniers¹, nous sommes conduits à distinguer trois domaines d'étude suivant les positions de la variable ν et des réels x_ℓ , x_t et x_1 . Les cas où ν se situe au voisinage des réels x_ℓ , x_t et x_1 ne seront pas étudiés analytiquement.

¹ A. Derem, *Formulaire pour les développements asymptotiques des fonctions cylindriques d'indice complexe*, Rapport LCT., PL. 806 618 (diffusion interne), 1980.

Pour cela, par similitude avec l'étude menée dans le cylindre fluide, et sans en justifier l'existence a priori, nous introduisons l'angle, noté θ , défini par $\theta = \sin^{-1} v$ ainsi que les angles critiques $\theta_{\ell}^{(c)}$ et $\theta_t^{(c)}$ définis par les relations $\theta_{\ell}^{(c)} = \sin^{-1} \frac{c_1}{c_{\ell}}$ et $\theta_t^{(c)} = \sin^{-1} \frac{c_1}{c_t}$.

La recherche de plusieurs pôles associés aux ondes circonférentielles nous permettra ensuite de trouver numériquement la valeur de la pression totale diffusée par le cylindre.

I ETUDE LORSQUE L'ONDE INCIDENTE ATTEIND LE CYLINDRE SOUS UN ANGLE INFÉRIEUR AUX DEUX ANGLES CRITIQUES

Nous supposons dans cette section ν inférieure à x_ℓ

I. 1. Développement en série de Debye de la fonction S

Nous cherchons à établir un développement en série de Debye de la fonction $S(\nu, x_1)$ définie dans le chapitre 2 (équation (51)). Pour cela, nous utilisons la méthode matricielle développée par Conoir dans sa thèse¹. Cette méthode permet partant de l'interaction globale, de mettre en évidence les interactions locales caractérisées par les différents coefficients de réflexion et de transmission.

Pour résoudre les équations de continuité à l'interface avec le solide nous devons résoudre l'équation matricielle

$$(81) \quad \mathbf{DX} = \mathbf{f}$$

avec \mathbf{D} la matrice caractéristique du système étudié ; elle correspond au déterminant $D(\nu, x_1)$ défini par les équations (5) et (19). \mathbf{f} est le vecteur excitation associé à l'onde incidente plane. \mathbf{X} est le vecteur d'état de la diffusion par le cylindre élastique. Sa première coordonnée est la fonction S . Afin de modéliser le phénomène physique par des ondes géométriques, nous considérons que les ondes peuvent être divisées en deux catégories suivant leur direction de propagation. Celles qui s'éloignent vers l'infini sont représentées par les fonctions de Hankel de première espèce $H_\nu^{(1)}$, les autres par les fonctions de Hankel de seconde espèce $H_\nu^{(2)}$. La relation $J_\nu = \frac{1}{2} \left(H_\nu^{(1)} + H_\nu^{(2)} \right)$ nous permet ainsi de séparer la matrice \mathbf{D} en deux matrices \mathbf{D}_L et \mathbf{F} , chacune de ces matrices correspondant à une direction de

¹ J-M. Conoir, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, pp. 114-118, 1987.

propagation donnée. L'hypothèse de séparation des ondes se justifie pleinement à haute fréquence par les développements asymptotiques de ces fonctions. Nous suivons cependant cette décomposition bien qu'aucune hypothèse n'ait été établie quant au choix de la fréquence. Nous conservons cette séparation en deux matrices \mathbf{D}_L et \mathbf{F} , en introduisant le vecteur $\tilde{\mathbf{R}}$ et la matrice \mathbf{R} définis par :

$$(82) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}_L \tilde{\mathbf{R}} &= \mathbf{f} \\ \text{et} \\ \mathbf{R} &= -\mathbf{D}_L^{-1} \mathbf{F} \end{aligned}$$

La résolution de l'équation (79) s'écrit ainsi :

$$(83) \quad \mathbf{X} = (\mathbf{1} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{D}_L^{-1} \mathbf{f} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \mathbf{R}^n \tilde{\mathbf{R}}$$

Si l'hypothèse $\|\mathbf{R}^n \tilde{\mathbf{R}}\| < 1$ est vérifiée, nous obtenons ainsi le développement en série de Debye généralisée du vecteur \mathbf{X} et donc également celui de la fonction S .

Nous allons démontrer que cette série s'interprète comme la combinaison linéaire des coefficients locaux de transmission et de réflexion à

l'interface fluide-solide. Pour cela nous posons : $\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_{12} \\ 2 \dot{\mathbf{T}}_{12}^L \\ 2 \dot{\mathbf{T}}_{12}^T \end{bmatrix}$ et

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{T}}_{21}^L & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{T}}_{21}^T \\ 0 & \dot{\mathbf{R}}_{LL}^1 & \dot{\mathbf{R}}_{TL}^1 \\ 0 & \dot{\mathbf{R}}_{LT}^1 & \dot{\mathbf{R}}_{TT}^1 \end{bmatrix}. \text{ Les composantes du vecteur et de la matrice sont}$$

appelées, a priori, comme suit. " $\dot{\mathbf{R}}_{12}$ " est le coefficient de réflexion du milieu 1 (le fluide externe) vers le milieu 2 (le cylindre élastique). Les coefficients de transmission du milieu "i" vers le milieu "j" d'un rayon de nature "A" sont notés $\dot{\mathbf{T}}_{ij}^A$. La nature d'un rayon est soit longitudinale (notée L) soit transversale (notée T). Les coefficients de réflexion du milieu 2 vers le milieu

l d'un rayon de nature "A" avant l'interface et de nature "B" après est noté \dot{R}_{AB}^1 .

Ces appellations trouvent une justification dans le développement en série de la fonction S. En effet en écrivant les premiers termes de la série de Debye nous obtenons pour la fonction S :

$$(84) \quad S = \dot{R}_{12} + \frac{\dot{T}_{12}^L \dot{T}_{21}^L}{n=0} + \frac{\dot{T}_{12}^T \dot{T}_{21}^T}{n=1} + \frac{\dot{T}_{12}^L \dot{R}_{LL}^1 \dot{T}_{21}^L + \dot{T}_{12}^T \dot{R}_{TT}^1 \dot{T}_{21}^T}{n=2} + \frac{\dot{T}_{12}^L \dot{R}_{LT}^1 \dot{T}_{21}^T + \dot{T}_{12}^T \dot{R}_{TL}^1 \dot{T}_{21}^L}{n=\dots} + \dots$$

A chaque ordre de n correspond un coefficient identifié d'après les notations ci-dessus comme le coefficient géométrique résultant du passage d'un rayon géométrique dans le cylindre, émergent de celui-ci après n trajets entre deux contacts avec l'interface fluide-solide. Si nous comparons ce développement en série à celui établi par Brill et Überall¹, nous vérifions également la dénomination établie ci-dessus. Cette comparaison nous permet de plus de préciser nos notations. En effet, Brill et Überall introduise dans leur développement, non seulement des coefficients de réflexion et de transmission, mais aussi des coefficients dus à la courbure du cylindre. Nous verrons par la suite que ces nouveaux coefficients correspondent à ceux que nous avons notés σ_ℓ ou σ_1 dans l'étude du cylindre fluide. C'est pour cela que dans les notations employées plus haut nous avons pointé l'ensemble des coefficients afin de les distinguer de ceux que nous écrirons sans les pointer et qui seront en toute rigueur les coefficients de réflexion et de transmission comparables à ceux obtenus dans l'étude d'une plaque plane.

¹ D. Brill, H. Überall, *Acoustic Waves Transmitted through Solid Elastic Cylinders*, J. Acoust. Soc. Am., pp. 921-939, 50, 1971.

1.2. Expression des coefficients de réflexion et de transmission cylindriques.

Le développement en série de Debye de la fonction S semble pouvoir être associé à une interprétation géométrique similaire à celle mis en place dans le cylindre fluide. Il est donc intéressant de trouver les expressions des différents coefficients intervenant dans le développement.

Dans le cas du cylindre élastique, d'après les conditions de continuité à l'interface fluide-solide, la matrice **D** s'écrit en fonction de v et x_1 :

$$(85) \quad \mathbf{D}(v, x_1) = \begin{pmatrix} x_t^2 H_v^{(1)}(x_1) & (x_t^2 - 2v^2) J_v(x_\ell) + 2x_\ell J_v'(x_\ell) & 2v(x_t J_v'(x_t) - J_v(x_t)) \\ \frac{-\rho_2}{\rho_1} x_1 H_v^{(1)'}(x_1) & -x_\ell J_v'(x_\ell) & v J_v(x_t) \\ 0 & 2v(x_\ell J_v'(x_\ell) - J_v(x_\ell)) & (x_t^2 - 2v^2) J_v(x_t) + 2x_t J_v'(x_t) \end{pmatrix}$$

Lorsque nous séparons les ondes s'éloignant à l'infini de celles convergent vers le cylindre, nous obtenons au moyen de la relation

$$J_v = \frac{1}{2} \left(H_v^{(1)} + H_v^{(2)} \right) :$$

$$2\mathbf{D}_L(v, x_1) =$$

$$\begin{pmatrix} 2x_t^2 H_v^{(1)}(x_1) & (x_t^2 - 2v^2) H_v^{(2)}(x_\ell) + 2x_\ell H_v^{(2)'}(x_\ell) & 2v \left(x_t H_v^{(2)'}(x_t) - H_v^{(2)}(x_t) \right) \\ -2 \frac{\rho_2}{\rho_1} x_1 H_v^{(1)'}(x_1) & -x_\ell H_v^{(2)'}(x_\ell) & v H_v^{(2)}(x_t) \\ 0 & 2v \left(x_\ell H_v^{(2)'}(x_\ell) - H_v^{(2)}(x_\ell) \right) & (x_t^2 - 2v^2) H_v^{(2)}(x_t) + 2x_t H_v^{(2)'}(x_t) \end{pmatrix}$$

et

$$2\mathbf{F}(v, x_1) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (x_t^2 - 2v^2) H_v^{(1)}(x_\ell) + 2x_\ell H_v^{(1)'}(x_\ell) & 2v \left(x_t H_v^{(1)'}(x_t) - H_v^{(1)}(x_t) \right) \\ 0 & -x_\ell H_v^{(1)'}(x_\ell) & v H_v^{(1)}(x_t) \\ 0 & 2v \left(x_\ell H_v^{(1)'}(x_\ell) - H_v^{(1)}(x_\ell) \right) & (x_t^2 - 2v^2) H_v^{(1)}(x_t) + 2x_t H_v^{(1)'}(x_t) \end{pmatrix}$$

. Le vecteur excitation associé à l'onde incidente plane s'écrit :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -x_1^2 H_v^{(2)}(x_1) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} x_1 H_v^{(2)'}(x_1) \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Connaissant le système d'équations (80), nous}$$

pouvons calculer le vecteur $\tilde{\mathbf{R}}$ et la matrice \mathbf{R} en fonction de v et x_1 et ainsi connaître les expressions des différents coefficients. Pour cela, nous séparons les facteurs responsables d'un comportement exponentiel à haute fréquence des autres en introduisant la fonction $\sigma(v, x, y) = \frac{H_v^{(1)}(x)}{H_v^{(2)}(y)}$. Lorsque

$x = y = x_1$ nous retrouvons le coefficient σ , utilisé dans le cylindre fluide. De même lorsque $x = y = x_\ell$ nous retrouvons le coefficient σ_ℓ . Nous utilisons également les fonctions $\sigma_{AB}^1 (A, B \in \{L, T, 1\})$ qui à tout complexe v associe la valeur $\sigma(v, x_a, x_b)$. Ces fonctions nous permettent de définir les coefficients de réflexion et de transmission :

$$(86) \quad \begin{aligned} R_{12} &= \sigma_{11}^1 \dot{R}_{12} & T_{12}^L &= \frac{\sigma_{11}^1}{\sigma_{1L}^1} \dot{T}_{12}^L \\ R_{LL}^1 &= \sigma_{LL}^1 \dot{R}_{LL}^1 & T_{12}^T &= \frac{\sigma_{11}^1}{\sigma_{1T}^1} \dot{T}_{12}^T \\ R_{TT}^1 &= \sigma_{TT}^1 \dot{R}_{TT}^1 & T_{21}^L &= \frac{\sigma_{1L}^1}{\sigma_{LL}^1} \dot{T}_{21}^L \\ R_{LT}^1 &= \sigma_{LT}^1 \dot{R}_{LT}^1 & T_{21}^T &= \frac{\sigma_{1T}^1}{\sigma_{TT}^1} \dot{T}_{21}^T \\ R_{TL}^1 &= \sigma_{TL}^1 \dot{R}_{TL}^1 & & \end{aligned} \text{ et}$$

Avec ces notations la résolution du système d'équations (82)

permet d'obtenir l'expression des différents coefficients de réflexion :

$$\begin{aligned}
 R_{12} &= \frac{1}{\text{Dén}} \left\{ x_t^4 d_{H_v}^{(2)}(x_\ell) - 2x_t^2 \left[v^2 - d_{H_v}^{(2)}(x_\ell) d_{H_v}^{(2)}(x_t) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho_2}{\rho_1} d_{H_v}^{(2)}(x_1) \left[4(v^2 - 1) \left(v^2 - d_{H_v}^{(2)}(x_\ell) d_{H_v}^{(2)}(x_t) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + x_t^2 \left(x_t^2 - 4v^2 + 2d_{H_v}^{(2)}(x_\ell) + 2d_{H_v}^{(2)}(x_t) \right) \right] \right\}, \\
 R_{LL}^1 &= \frac{1}{\text{Dén}} \left\{ x_t^4 d_{H_v}^{(1)}(x_\ell) - 2x_t^2 \left[v^2 - d_{H_v}^{(1)}(x_\ell) d_{H_v}^{(2)}(x_t) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho_2}{\rho_1} d_{H_v}^{(1)}(x_1) \left[4(v^2 - 1) \left(v^2 - d_{H_v}^{(1)}(x_\ell) d_{H_v}^{(2)}(x_t) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + x_t^2 \left(x_t^2 - 4v^2 + 2d_{H_v}^{(1)}(x_\ell) + 2d_{H_v}^{(2)}(x_t) \right) \right] \right\}, \\
 R_{TT}^1 &= \frac{1}{\text{Dén}} \left\{ x_t^4 d_{H_v}^{(2)}(x_\ell) - 2x_t^2 \left[v^2 - d_{H_v}^{(2)}(x_\ell) d_{H_v}^{(1)}(x_t) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho_2}{\rho_1} d_{H_v}^{(1)}(x_1) \left[4(v^2 - 1) \left(v^2 - d_{H_v}^{(2)}(x_\ell) d_{H_v}^{(1)}(x_t) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + x_t^2 \left(x_t^2 - 4v^2 + 2d_{H_v}^{(2)}(x_\ell) + 2d_{H_v}^{(1)}(x_t) \right) \right] \right\}, \\
 R_{LT}^1 &= \frac{1}{\text{Dén}} 2v \left[x_t^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} d_{H_v}^{(1)}(x_1) (2(v^2 - 1) - x_t^2) \right] \\
 &\quad \left[d_{H_v}^{(1)}(x_\ell) - d_{H_v}^{(2)}(x_\ell) \right], \\
 R_{TL}^1 &= \frac{1}{\text{Dén}} 2v \left[x_t^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} d_{H_v}^{(1)}(x_1) (2(v^2 - 1) - x_t^2) \right] \\
 &\quad \left[d_{H_v}^{(1)}(x_t) - d_{H_v}^{(2)}(x_t) \right],
 \end{aligned}
 \tag{87}$$

et des différents coefficients de transmission :

$$\begin{aligned}
 T_{12}^L &= \frac{1}{\text{Dén}} x_t^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} dH_v^{(1)}(x_1) \left[2v^2 - x_t^2 - 2dH_v^{(2)}(x_t) \right. \\
 &\quad \left. + dH_v^{(2)}(x_1) \left(-2v^2 + x_t^2 + 2dH_v^{(2)}(x_t) \right) \right], \\
 T_{12}^T &= \frac{1}{\text{Dén}} 2vx_t^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[1 - dH_v^{(2)}(x_\ell) \right] \left[dH_v^{(2)}(x_1) - dH_v^{(1)}(x_1) \right] \\
 (88) \quad T_{21}^L &= \frac{1}{\text{Dén}} x_t^2 \left\{ \left[-2v^2 + x_t^2 \right] dH_v^{(2)}(x_\ell) + 2dH_v^{(2)}(x_t) dH_v^{(2)}(x_\ell) \right. \\
 &\quad \left. + dH_v^{(1)}(x_\ell) \left[2v^2 - x_t^2 - 2dH_v^{(2)}(x_t) \right] \right\} \\
 T_{21}^T &= \frac{1}{\text{Dén}} x_t^2 \left\{ \left[-2v^2 + x_t^2 \right] dH_v^{(2)}(x_\ell) + 2dH_v^{(2)}(x_t) dH_v^{(2)}(x_\ell) \right. \\
 &\quad \left. + dH_v^{(1)}(x_\ell) \left[2v^2 - x_t^2 - 2dH_v^{(2)}(x_t) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

ave

$$\begin{aligned}
 \text{Dén} &= -x_t^4 dH_v^{(2)}(x_\ell) + 2x_t^2 \left[v^2 - dH_v^{(2)}(x_\ell) dH_v^{(2)}(x_t) \right] \\
 &\quad + \frac{\rho_2}{\rho_1} dH_v^{(1)}(x_1) \left[4(v^2 - 1) \left(v^2 - dH_v^{(2)}(x_\ell) dH_v^{(2)}(x_t) \right) \right. \\
 &\quad \left. + x_t^2 \left(x_t^2 - 4v^2 + 2dH_v^{(2)}(x_\ell) + 2dH_v^{(2)}(x_t) \right) \right]
 \end{aligned}$$

1.3. Comportement à haute fréquence des coefficients de réflexion et de transmission.

L'ensemble des résultats obtenus jusqu'à présent semble permettre une interprétation géométrique semblable à celle établie dans le cylindre fluide. Dans le chapitre 2, nous pouvons remarquer que cette interprétation repose sur l'identification à haute fréquence des coefficients de réflexion et de transmission avec ceux obtenus lorsque l'interface fluide-solide est plane. Nous devons donc étudier le comportement asymptotique des différents coefficients donnés par les relations (87) et (88).

Lorsque $v \in [0; x_\ell[$, nous utilisons les développements asymptotiques calculés au premier ordre suivants :

$$(89) \quad \begin{aligned} dH_v^{(1)}(x_\ell) &\approx i\sqrt{x_\ell^2 - v^2}, & dH_v^{(2)}(x_\ell) &\approx -i\sqrt{x_\ell^2 - v^2}, \\ dH_v^{(1)}(x_t) &\approx i\sqrt{x_t^2 - v^2}, & dH_v^{(2)}(x_t) &\approx -i\sqrt{x_t^2 - v^2}, \\ dH_v^{(1)}(x_1) &\approx i\sqrt{x_1^2 - v^2}, & dH_v^{(2)}(x_1) &\approx -i\sqrt{x_1^2 - v^2}. \end{aligned}$$

$$\sigma(v, x, y) \approx -i \frac{(y^2 - v^2)^{\frac{1}{4}}}{(x^2 - v^2)^{\frac{1}{4}}} \exp \left[-iv \left(\cos^{-1} \frac{v}{x} + \cos^{-1} \frac{v}{y} \right) \right]$$

$$\exp \left[i \left(\sqrt{x^2 - v^2} + \sqrt{y^2 - v^2} \right) \right]$$

v étant inférieur aux variables x et y

En posant $\sin\theta = \frac{v}{x_1}$ avec $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, les développements des

fonctions réduites s'écrivent :

$$(90) \quad \begin{aligned} d_{H_v^{(1)}}(x_\ell) &\approx ix_1 \sqrt{n_\ell^2 - \sin^2 \theta} & d_{H_v^{(2)}}(x_\ell) &\approx -ix_1 \sqrt{n_\ell^2 - \sin^2 \theta} \\ &= ix_1 b_\ell, & &= -ix_1 b_\ell, \\ d_{H_v^{(1)}}(x_t) &\approx ix_1 \sqrt{n_t^2 - \sin^2 \theta} & d_{H_v^{(2)}}(x_t) &\approx -ix_1 \sqrt{n_t^2 - \sin^2 \theta} \\ &= ix_1 b_t, & &= -ix_1 b_t, \\ d_{H_v^{(1)}}(x_1) &\approx ix_1 \cos\theta, & d_{H_v^{(2)}}(x_1) &\approx -ix_1 \cos\theta, \end{aligned}$$

avec

$$n_\ell = \frac{c_1}{c_\ell}, \quad b_\ell = \sqrt{n_\ell^2 - \sin^2 \theta}$$

et

$$n_t = \frac{c_1}{c_t}, \quad b_t = \sqrt{n_t^2 - \sin^2 \theta}.$$

Avec ces notations et ces développements nous pouvons écrire plus simplement les expressions des coefficients de réflexion et de transmission.

Nous obtenons ainsi les coefficients de réflexion :

$$\begin{aligned}
 R_{12} &\approx \frac{-n_t^4 b_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4b_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}{n_t^4 b_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4b_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}, \\
 R_{LL}^1 &\approx \frac{n_t^4 b_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4b_\ell b_t \sin^2 \theta - (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}{n_t^4 b_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4b_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}, \\
 R_{TT}^1 &\approx \frac{-n_t^4 b_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4b_\ell b_t \sin^2 \theta - (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}{n_t^4 b_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4b_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}, \\
 R_{TL}^1 &\approx \frac{-4ib_t \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \sin\theta (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)}{n_t^4 b_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4b_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}, \\
 R_{LT}^1 &\approx \frac{-4ib_\ell \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \sin\theta (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)}{n_t^4 b_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4b_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]},
 \end{aligned}
 \tag{91}$$

et ceux de transmission :

$$(92) \quad \begin{aligned} T_{12}^L &\approx \frac{-2 \frac{\rho_2}{\rho_1} n_t^2 \cos\theta (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)}{n_t^4 b_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4b_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}, \\ T_{12}^T &\approx \frac{-4i b_\ell \frac{\rho_2}{\rho_1} n_t^2 \cos\theta \sin\theta}{n_t^4 b_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4b_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}, \\ T_{21}^L &\approx \frac{-2n_t^2 b_\ell (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)}{n_t^4 b_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4b_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}, \\ T_{21}^T &\approx \frac{-4i n_t^2 b_\ell b_t \sin\theta}{n_t^4 b_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4b_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}. \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi les coefficients de réflexion et de transmission utilisés dans l'étude des interactions locales aux interfaces d'une plaque lorsque les deux milieux externes sont identiques¹. Une ambiguïté subsiste cependant puisque les phases de certains coefficients ne sont pas semblables à celles obtenues pour les coefficients de la plaque. Si nous examinons à nouveau les premiers termes du développement en série de la fonction S (équation (84)), nous nous apercevons que les coefficients se combinent toujours d'une certaine façon. De plus, seule la combinaison linéaire obtenue pour un ordre n donné correspond à un phénomène physique observable depuis l'extérieur du cylindre. Ainsi l'ambiguïté qui existe sur la valeur des différents coefficients, n'apparaît pas dans l'expression complète potentiellement associée à un rayon transmis dans le cylindre. Par exemple, lorsque nous comparons les coefficients T_{12}^L et T_{21}^L à ceux obtenus par

¹ J-M. Conoir, A. Gérard, A. Derem, Ondes acoustiques transmises et séries de Debye généralisées. I. Traitement des interfaces planes, *J. Acoustique*, 4, p. 181, 1991.

Conoir, Gérard et Derem¹ nous trouvons un signe opposé. Ces deux coefficients interviennent ensemble, entre autre, dans le second ordre du développement en série, les deux signes moins se compensent donc. Pour cet ordre il n'y a donc plus lieu de parler d'ambiguïté.

Lorsque $v \in [0; x_\ell[$, les coefficients de réflexion et de transmission correspondent à ceux obtenus localement pour la plaque plane. Nous pouvons donc poursuivre notre recherche d'une interprétation géométrique en utilisant comme dans le cylindre fluide la méthode du col.

Le développement asymptotique des coefficients issu de l'expression $\sigma(v, x, y)$ est une fonction s'exprimant simplement sous la forme $\rho e^{i\alpha}$. Lorsqu'elle correspond au coefficient d'une onde de nature "A" avant le contact avec l'interface et de nature "B" après, nous pouvons constater la présence des fréquences réduites x_A et x_B dans l'expression de la phase α de la fonction. En fait cette dernière traduit la propagation de l'onde dans les différents milieux. Ainsi dans l'expression complète de la fonction S, ces coefficients caractérisent les différences phases qui apparaissent suivant le trajet réalisé effectivement par l'onde. Dans l'étude purement géométrique conduite par Fekikh², nous retrouvons d'une autre façon ces coefficients de propagation. En comparant nos résultats à ceux qu'il a obtenu, nous constatons que le module des fonction σ_{AB} intervient dans le calcul du coefficient de dispersion géométrique, coefficient que nous définirons plus précisément dans le chapitre 4.

¹ J-M. Conoir, A. Gérard, A. Derem, Ondes acoustiques transmises et séries de Debye généralisées. I. Traitement des interfaces planes, *J. Acoustique*, 4, p. 181, 1991.

² M. Fekikh, *thèse de troisième cycle*, Université de Paris VII, 1982.

II ÉTUDE LORSQUE L'ONDE INCIDENTE ATTEINT LE CYLINDRE SOUS UN ANGLE COMPRIS ENTRE LES DEUX ANGLES CRITIQUES

Dans cette section ν est compris entre x_ℓ et x_t .

Nous avons défini les angles critiques par analogie avec la géométrie plane. Nous considérons, également par analogie, qu'au delà du premier angle critique seules les ondes de nature transversale peuvent se propager à travers le cylindre.

II. 1. Développement en série de Debye de la fonction S

Nous utilisons les mêmes notations que dans la section I.. Comme nous supposons que les ondes longitudinales ne peuvent se propager nous construisons le vecteur $\tilde{\mathbf{R}}$ et la matrice \mathbf{R}^1 en considérant qu'aucune onde ne peut être longitudinale avant un contact avec l'interface. Par contre, nous devons supposer que des ondes du milieu externe ou des ondes transversales dans le cylindre puissent devenir longitudinales après contact avec l'interface. Les coefficients correspondant à ces deux cas devraient contenir à haute fréquence un terme caractérisant l'évanescence de l'onde. Le

vecteur $\tilde{\mathbf{R}}$ et la matrice \mathbf{R} sont ainsi définis par : $\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_{12} \\ 2\dot{\mathbf{T}}_{12}^L \\ 2\dot{\mathbf{T}}_{12}^T \end{bmatrix}$ et

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\dot{\mathbf{T}}_{21}^T \\ 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_{TL}^1 \\ 0 & 0 & \dot{\mathbf{R}}_{TT}^1 \end{bmatrix}.$$

¹ Ces deux inconnues sont définies par le système d'équation (82).

Connaissant d'après l'équation (83), une relation liant la fonction S aux inconnues $\tilde{\mathbf{R}}$ et \mathbf{R} , nous pouvons donner le développement de Debye supposé de cette fonction. Nous obtenons :

$$(93) \quad S = \underline{\dot{\mathbf{R}}_{12}} + \underline{\dot{\mathbf{T}}_{12}^T \dot{\mathbf{T}}_{21}^T} + \underline{\dot{\mathbf{T}}_{12}^T \dot{\mathbf{R}}_{TT}^1 \dot{\mathbf{T}}_{21}^T} + \dots$$

$$\left(\begin{array}{cccc} n=0 & n=1 & n=2 & n=\dots \end{array} \right)$$

Nous pouvons constater dans cette expression que les coefficients $\dot{\mathbf{T}}_{12}^L$ et $\dot{\mathbf{R}}_{TL}^1$ n'apparaissent pas ce qui est cohérent avec le fait que les ondes longitudinales ne peuvent se propager. Cette série de Debye est semblable à celle obtenue dans le cylindre fluide où un seul type d'onde se propage dans le cylindre.

II.2. Expression des coefficients de réflexion et de transmission cylindriques.

Le développement asymptotique de la fonction $J_\nu(x_\ell)$ ne contient pas de terme de propagation par lui-même dans le domaine étudié. Aussi pour ne faire apparaître que la propagation des ondes transversales nous transformons la matrice \mathbf{D} en réalisant la transformation $J_\nu = \frac{1}{2} \left(H_\nu^{(1)} + H_\nu^{(2)} \right)$ uniquement pour les fonctions de variable x_t . Avec cette relation nous créons les matrices \mathbf{D}_L et \mathbf{F} en adoptant une démarche identique à celle du paragraphe I.2.. Nous obtenons ainsi les expressions :

$$2\mathbf{D}_L(\nu, x_1) = \begin{pmatrix} 2x_t^2 H_\nu^{(1)}(x_1) & (x_t^2 - 2\nu^2) J_\nu(x_\ell) + 2x_\ell J_\nu'(x_\ell) & 2\nu \left(x_t H_\nu^{(2)'}(x_t) - H_\nu^{(2)}(x_t) \right) \\ -2\frac{\rho_2}{\rho_1} x_1 H_\nu^{(1)'}(x_1) & -x_\ell J_\nu'(x_\ell) & \nu H_\nu^{(2)}(x_t) \\ 0 & 2\nu \left(x_\ell J_\nu'(x_\ell) - J_\nu(x_\ell) \right) & (x_t^2 - 2\nu^2) H_\nu^{(2)}(x_t) + 2x_t H_\nu^{(2)'}(x_t) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } 2\mathbf{F}(\nu, x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\nu \left(x_t H_\nu^{(1)'}(x_t) - H_\nu^{(1)}(x_t) \right) \\ 0 & 0 & \nu H_\nu^{(1)}(x_t) \\ 0 & 0 & (x_t^2 - 2\nu^2) H_\nu^{(1)}(x_t) + 2x_t H_\nu^{(1)'}(x_t) \end{pmatrix}$$

A partir du système d'équations (80) et de ces expressions, nous vérifions la cohérence des définitions du vecteur $\tilde{\mathbf{R}}$ et la matrice \mathbf{R} . En outre, de la résolution de ce système résulte les expressions des différents coefficients de réflexion et de transmission existant lorsque la variable v est incluse dans le segment $]x_\ell, x_t[$. Pour cela nous utilisons la fonction σ définie précédemment ainsi que la fonction σ_j définie par $\sigma_j(v, x, y) = \frac{H_v^{(1)}(x)}{J_v(y)}$. Nous utilisons également les fonctions σ_{AB}^2 ($A, B \in \{L, T, 1\}$) qui à tout complexe v associe la valeur $\sigma(v, x_a, x_b)$ lorsque A et B sont distincts de L et la valeur $\sigma_j(v, x_a, x_\ell)$ lorsque $B = L$. En définissant les coefficients de réflexion et de transmission comme suit nous isolons les termes de propagation :

$$(94) \quad \begin{aligned} R_{12} &= \sigma_{11}^2 \dot{R}_{12}, \quad R_{TT}^1 = \sigma_{TT}^2 \dot{R}_{TT}^1, \quad R_{TL}^1 = \sigma_{TL}^2 \dot{R}_{TL}^1 \\ \text{et } T_{12}^L &= \frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{1L}^2} \dot{T}_{12}^L, \quad T_{12}^T = \frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{1T}^2} \dot{T}_{12}^T, \quad T_{21}^T = \frac{\sigma_{1T}^2}{\sigma_{TT}^2} \dot{T}_{21}^T. \end{aligned}$$

L'expression des différents coefficients de réflexion sont :

$$(95) \quad \begin{aligned} R_{12} &= \frac{1}{\text{Dén}} \left\{ x_t^4 dJ_v(x_\ell) - 2x_t^2 \left[v^2 - dJ_v(x_\ell) dH_v^{(2)}(x_t) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho_2}{\rho_1} dH_v^{(2)}(x_1) \left[4(v^2 - 1) \left(v^2 - dJ_v(x_\ell) dH_v^{(2)}(x_t) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + x_t^2 \left(x_t^2 - 4v^2 + 2dJ_v(x_\ell) + 2dH_v^{(2)}(x_t) \right) \right] \right\}, \\ R_{TT}^1 &= \frac{1}{\text{Dén}} \left\{ x_t^4 dJ_v(x_\ell) - 2x_t^2 \left[v^2 - dJ_v(x_\ell) dH_v^{(1)}(x_t) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho_2}{\rho_1} dH_v^{(1)}(x_1) \left[4(v^2 - 1) \left(v^2 - dJ_v(x_\ell) dH_v^{(1)}(x_t) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + x_t^2 \left(x_t^2 - 4v^2 + 2dJ_v(x_\ell) + 2dH_v^{(1)}(x_t) \right) \right] \right\}, \\ R_{TL}^1 &= \frac{1}{\text{Dén}} 2v \left[x_t^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} dH_v^{(1)}(x_1) \left(2(v^2 - 1) - x_t^2 \right) \right] \\ &\quad \left[dH_v^{(1)}(x_t) - dH_v^{(2)}(x_t) \right], \end{aligned}$$

et des différents coefficients de transmission :

$$T_{12}^L = \frac{1}{\text{Dén}} x_t^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} dH_v^{(1)}(x_1) \left[2v^2 - x_t^2 - 2dH_v^{(2)}(x_t) \right. \\ \left. + dH_v^{(2)}(x_1) \left(-2v^2 + x_t^2 + 2dH_v^{(2)}(x_t) \right) \right],$$

$$(96) \quad T_{12}^T = \frac{1}{\text{Dén}} 2vx_t^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[1 - dJ_v(x_\ell) \right] \left[dH_v^{(2)}(x_1) - dH_v^{(1)}(x_1) \right]$$

$$T_{21}^T = \frac{1}{\text{Dén}} 2vx_t^2 \left[1 - dJ_v(x_\ell) \right] \left[dH_v^{(2)}(x_t) - dH_v^{(1)}(x_t) \right]$$

avec

$$\text{Dén} = -x_t^4 dJ_v(x_\ell) + 2x_t^2 \left[v^2 - dJ_v(x_\ell) dH_v^{(2)}(x_t) \right] \\ + \frac{\rho_2}{\rho_1} dH_v^{(1)}(x_1) \left[4(v^2 - 1) \left(v^2 - dJ_v(x_\ell) dH_v^{(2)}(x_t) \right) \right. \\ \left. + x_t^2 \left(x_t^2 - 4v^2 + 2dJ_v(x_\ell) + 2dH_v^{(2)}(x_t) \right) \right]$$

II.3. Comportement à haute fréquence des coefficients de réflexion et de transmission.

Pour calculer les expressions des différents coefficients nous utilisons les développements asymptotiques calculés au premier ordre suivants :

$$\begin{aligned}
 dJ_v(x_\ell) &\approx \sqrt{v^2 - x_\ell^2}, \\
 dH_v^{(1)}(x_t) &\approx i\sqrt{x_t^2 - v^2}, \quad dH_v^{(2)}(x_t) \approx -i\sqrt{x_t^2 - v^2}, \\
 dH_v^{(1)}(x_1) &\approx i\sqrt{x_1^2 - v^2}, \quad dH_v^{(2)}(x_1) \approx -i\sqrt{x_1^2 - v^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (97) \quad \sigma(v, x, y) &\approx -i \frac{(y^2 - v^2)^{\frac{1}{4}}}{(x^2 - v^2)^{\frac{1}{4}}} \exp \left[-iv \left(\cos^{-1} \frac{v}{x} + \cos^{-1} \frac{v}{y} \right) \right] \\
 &\quad \exp \left[i \left(\sqrt{x^2 - v^2} + \sqrt{y^2 - v^2} \right) \right] \\
 \sigma_j(v, x, x_\ell) &\approx 2 \frac{(v^2 - x_\ell^2)^{\frac{1}{4}}}{(x^2 - v^2)^{\frac{1}{4}}} \exp \left[-iv \cos^{-1} \frac{v}{x} + i \sqrt{x^2 - v^2} - \frac{\pi}{4} i \right] \\
 &\quad \exp \left[v \operatorname{ch}^{-1} \frac{v}{x_\ell} - \sqrt{v^2 - x_\ell^2} \right]
 \end{aligned}$$

avec v inférieure à x et y et supérieure à x_ℓ .

En posant toujours $\sin \theta = \frac{v}{x_1}$ avec $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, les

développements des fonctions réduites s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 dJ_v(x_\ell) &\approx x_1 \sqrt{\sin^2 \theta - n_\ell^2} \\
 &= x_1 a_\ell, \\
 (98) \quad dH_v^{(1)}(x_t) &\approx ix_1 \sqrt{n_t^2 - \sin^2 \theta} \quad dH_v^{(2)}(x_t) \approx -ix_1 \sqrt{n_t^2 - \sin^2 \theta} \\
 &= ix_1 b_t, \quad = -ix_1 b_t, \\
 dH_v^{(1)}(x_1) &\approx ix_1 \cos \theta, \quad dH_v^{(2)}(x_1) \approx -ix_1 \cos \theta,
 \end{aligned}$$

avec

$$a_\ell = \sqrt{\sin^2 \theta - n_\ell^2}$$

Ces développements nous permettent d'écrire les coefficients de réflexion et de transmission à hautes fréquence :

$$(99) \quad \begin{aligned} R_{12} &\approx \frac{-i n_t^4 a_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4i a_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}{i n_t^4 a_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4i a_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}, \\ R_{TT}^1 &\approx \frac{-i n_t^4 a_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4i a_\ell b_t \sin^2 \theta - (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}{i n_t^4 a_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4i a_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}, \\ R_{TL}^1 &\approx \frac{-2i b_t \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \sin\theta (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)}{i n_t^4 a_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4i a_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}. \end{aligned}$$

et

$$(100) \quad \begin{aligned} T_{12}^L &\approx \frac{-\frac{\rho_2}{\rho_1} n_t^2 \cos\theta (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)}{i n_t^4 a_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4i a_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}, \\ T_{12}^T &\approx \frac{4a_\ell \frac{\rho_2}{\rho_1} n_t^2 \cos\theta \sin\theta}{i n_t^4 a_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4i a_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}, \\ T_{21}^T &\approx \frac{4n_t^2 a_\ell b_t \sin\theta}{i n_t^4 a_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos\theta \left[4i a_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}. \end{aligned}$$

Ces coefficients sont ceux qu'il serait possible d'obtenir dans la plaque entre les deux angles critiques¹.

De plus, à partir du développement asymptotique de la fonction σ_j , nous pouvons constater que les coefficients \dot{R}_{TL}^1 et \dot{T}_{12}^L sont bien

¹ A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., p. 149, 1989-1993.

négligeables aux hautes fréquences. Nous confirmons ainsi l'hypothèse selon laquelle les ondes longitudinales sont évanescentes dans le cylindre lorsque nous nous plaçons entre les angles critiques. Ces ondes traversent la première interface mais sont trop atténuées pour avoir un effet non négligeable lors du second contact avec l'interface.

L'ensemble de ces résultats valident bien le fait que la fonction S peut être décomposée en combinaison linéaire de coefficients de réflexion et de transmission correspondant à la propagation d'onde géométrique de nature transversale dans le cylindre.

III ETUDE LORSQUE L'ONDE INCIDENTE ATTEIND LE CYLINDRE SOUS UN ANGLE SUPERIEUR AUX DEUX ANGLES CRITIQUES

L'étude dans ce domaine est assez simple à conduire en revenant à l'expression initiale de la fonction S donnée dans le chapitre 2 :

$$(101) \quad S(v, x_1) = 1 + 2 \frac{D^{[1]}(v, x_1)}{D(v, x_1)}$$

avec D le déterminant associé à la matrice **D** et $D^{[1]}$ le déterminant associé à la matrice $\mathbf{D}^{[1]}$ avec :

$$(102) \quad \mathbf{D}^{[1]}(v, x_1) = \begin{pmatrix} -x_t^2 J_v(x_1) & (x_t^2 - 2v^2) J_v(x_\ell) + 2x_\ell J'_v(x_\ell) & 2v(x_t J'_v(x_t) - J_v(x_t)) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} x_1 J_v(x_1) & -x_\ell J'_v(x_\ell) & v J_v(x_t) \\ 0 & 2v(x_\ell J'_v(x_\ell) - J_v(x_\ell)) & (x_t^2 - 2v^2) J_v(x_t) + 2x_t J'_v(x_t) \end{pmatrix}$$

Nous écrivons la fonction S sous la forme :

$$(103) \quad S(v, x_1) = \frac{1}{\sigma_{11}^3} S_{12}(v, x_1)$$

avec

$$\sigma_{11}^3 = \frac{H_v^{(1)}(v, x_1)}{H_v^{(2)}(v, x_1)}$$

La fonction S_{12} est calculée à partir de l'équation (99). Nous obtenons ainsi :

$$(104) \quad S_{12} = \frac{1}{\text{Dén}} \left\{ x_t^4 {}^d J_v(x_\ell) - 2x_t^2 \left[v^2 - {}^d J_v(x_\ell) {}^d J_v(x_t) \right] - \frac{\rho_2}{\rho_1} {}^d H_v^{(2)}(x_1) \left[4(v^2 - 1) (v^2 - {}^d J_v(x_\ell) {}^d J_v(x_t)) + x_t^2 (x_t^2 - 4v^2 + 2 {}^d J_v(x_\ell) + 2 {}^d J_v(x_t)) \right] \right\},$$

avec

$$\text{Dén} = -x_t^4 {}^d J_v(x_\ell) + 2x_t^2 \left[v^2 - {}^d J_v(x_\ell) {}^d J_v(x_t) \right] + \frac{\rho_2}{\rho_1} {}^d H_v^{(1)}(x_1) \left[4(v^2 - 1) (v^2 - {}^d J_v(x_\ell) {}^d J_v(x_t)) + x_t^2 (x_t^2 - 4v^2 + 2 {}^d J_v(x_\ell) + 2 {}^d J_v(x_t)) \right]$$

Pour comparer cette fonction au coefficient de réflexion obtenu dans la plaque, nous utilisons les développements asymptotiques suivant :

$$\begin{aligned}
 d_{J_v}(x_\ell) &\approx x_1 \sqrt{\sin^2 \theta - n_\ell^2} \\
 &= x_1 a_\ell, \\
 d_{J_v}(x_t) &\approx x_1 \sqrt{\sin^2 \theta - n_t^2} \\
 &= x_1 a_t, \\
 d_{H_v^{(1)}}(x_1) &\approx ix_1 \cos \theta, & d_{H_v^{(2)}}(x_1) &\approx -ix_1 \cos \theta,
 \end{aligned}
 \tag{105}$$

avec

$$\begin{aligned}
 a_\ell &= \sqrt{\sin^2 \theta - n_\ell^2} \text{ et } a_t = \sqrt{\sin^2 \theta - n_t^2} \\
 \text{et } \theta &= \sin^{-1} \frac{v}{x_1}
 \end{aligned}$$

En utilisant ces développements la fonction S_{12} devient

$$S_{12} \approx \frac{-i n_t^4 a_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \theta \left[-4 a_\ell a_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}{i n_t^4 a_\ell + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \theta \left[-4 a_\ell b_t \sin^2 \theta + (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 \right]}
 \tag{106}$$

S_{12} correspond à haute fréquence au coefficient de réflexion d'une onde géométrique sur une interface plane¹.

Cette démonstration montre que, comme dans l'étude de la plaque, au delà du second angle critique aucune onde géométrique ne peut se propager dans le cylindre.

A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., p. 155, 1989-1993.

IV. UTILISATIONS DE LA TRANSFORMATION DE SOMMERFELD-WATSON

Nous venons de démontrer que, quelque soit la position relative de la variable v par rapport aux fréquences réduites x_ℓ et x_t , nous pouvons décomposer la fonction S en une combinaison linéaire de coefficients de réflexion et de transmission, obtenue par une analyse purement géométrique de la propagation d'un rayon à travers un cylindre élastique.

Il nous est donc possible de transposer les résultats obtenus pour le cylindre fluide. En effet dans l'étude des ondes géométriques se propageant au travers un cylindre fluide, nous utilisons la méthode du col. Pour les calculs au col de gauche, et depuis l'équation (54), nous fondons notre démarche sur le fait que la fonction S est décomposable en série de Debye ce que nous venons de démontrer dans le cas du cylindre élastique.

Pour l'étude au col de droite, si nous reprenons l'expression de la fonction S obtenue dans la section précédente, et comme lorsque $v \gg x_1$, $H_v^{(1)}(v, x_1) \approx -H_v^{(2)}(v, x_1)$, nous obtenons au col de droite ${}^dH_v^{(1)}(v, x_1) \approx {}^dH_v^{(2)}(v, x_1)$, $S(v, x_1) \approx 1$. Ce résultat est celui obtenu dans le cylindre fluide. Nous pouvons donc, au col de droite comme au col de gauche, transposer les résultats du chapitre précédent.

Nous montrons numériquement dans la section III du chapitre 2 que les courbes obtenues pour la pression due aux ondes transmises ne sont pas en toute rigueur correctes. En outre, la somme des pressions partielles ne converge pas suffisamment rapidement pour obtenir un résultat utilisable simplement. D'autre part, nous montrons également que les courbes obtenues avec la seule pression réfléchie sont numériquement très acceptables. Aussi, étant donné la complexité de la décomposition en série de Debye de la

fonction S dans le cas du cylindre élastique, nous ne calculons que la pression due à l'onde réfléchi. Nous négligeons les pressions dues aux autres ondes géométriques diffractées par le cylindre. Les résultats analytiques établis dans les deux chapitres précédents restent donc valables dans ce chapitre, seules les expressions du coefficient de réflexion et des déterminants D et $D^{[1]}$ varient.

V. RESULTATS NUMERIQUES

V.1. Lieux des pôles

Pour connaître le lieu des pôles nous utilisons des valeurs connues dans des cas similaires comme celles calculées dans le cylindre fluide ou bien nous nous référons à des études déjà entreprises dans ce domaine¹. Partant de ces valeurs, nous faisons évoluer les différents paramètres du milieu ainsi que la fréquence jusqu'à obtention des courbes représentant l'évolution des pôles pour une fréquence réduite x_1 évoluant entre 5 et 1000².

Pour cela, nous utilisons les développements asymptotiques des fonctions cylindriques. Nous savons que ces développements dépendent de la position relative de la variable "x" et du paramètre "ν". Par contre, nous ne savons pas pour quelle position exacte il est nécessaire de changer de développement.

Afin d'éviter d'obtenir des résultats erronés, nous entreprenons plusieurs types de contrôle du lieu des pôles. A fréquence relativement faible, nous comparons les résultats obtenus avec ces développements à ceux calculés à partir de développements convergents, plus simples à utiliser dans ce domaine de fréquence. Nous supposons également que l'évolution du lieu des pôles lorsque la fréquence varie ne peut se faire que continûment. Nous changeons ainsi de développements lorsque une discontinuité apparaît.

En dérivant une fonction, nous accentuons les discontinuités numériques. Pour surveiller le changement de développement asymptotique il

¹ Valeurs obtenues par D. Gerlic et J-L. Rousselot, documentation interne L.C.T.A.R.

² Figures 47 à 54.

est donc plus précis de suivre l'évolution d'une fonction utilisant les dérivées des fonctions cylindriques par rapport au paramètre ν . Pour calculer la pression résultante de la diffusion par le cylindre, nous devons calculer la valeur du résidu $\beta(\nu, x_1)$ aux pôles ν_ℓ ³. Ce résidu est défini à partir de la dérivée du déterminant $D(\nu, x_1)$ par rapport à ν , la dérivée étant prise au pôle ν_ℓ . Ainsi, l'étude simultanée de l'évolution du lieu des pôles et du résidu $\beta(\nu, x_1)$ permet de mieux identifier la fréquence réduite à partir de laquelle doit se produire le changement de développement asymptotique. Cette méthode nous permet numériquement de distinguer des erreurs de développements non visibles par l'unique examen de l'évolution des lieux des pôles.

Nous trouvons numériquement quatre types d'ondes : l'onde de Stoneley, les ondes de Franz; l'onde de Rayleigh et les ondes de Brekhovskikh.

Pour faciliter l'interprétation, nous avons adopté différents modes de représentation du lieu des pôles lorsque la fréquence varie. Les pôles étant complexes, nous avons tracé les parties imaginaires et réelles en fonction de la fréquence ainsi que la trajectoire décrite par le pôle ν dans le plan de représentation associé à la variable complexe réduite $\xi = \frac{\nu}{x_1}$. Cette représentation nous permet d'étudier la position relative du pôle et de la fréquence réduite et de comparer cette position aux valeurs des paramètres $n_\ell = \frac{c_1}{c_\ell}$ et $n_t = \frac{c_1}{c_t}$.

³ Chapitre I paragraphe I.2.

V.1.1. L'onde de Rayleigh⁴

A l'interface d'un milieu élastique avec le vide ou un milieu fluide peut se propager l'onde de Rayleigh. Elle apparaît par couplage des vibrations longitudinales et transversales d'un milieu élastique. Elle est donc très liée à la nature de l'objet étudié et ne peut exister qu'à la surface d'un milieu élastique. Ceci explique que nous n'ayons trouvé aucune onde de ce type dans l'étude du cylindre fluide. En milieu plan, l'équation donnant la valeur du pôle en fonction de la fréquence et de la nature du milieu est bien connue⁵. Sa généralisation au cas du cylindre élastique étudié à haute fréquence⁶, nous permet de connaître une première valeur du pôle associé à l'onde de Rayleigh, valeur qui nous permet de commencer notre recherche de la trajectoire suivie par le pôle lorsque la fréquence décroît.

Pour des fréquences réduites x_1 comprises entre 10 et 1000, la partie réelle du pôle est, à peu près, deux fois plus faible que x_1 . La partie imaginaire reste inférieure à 0.028 fois la fréquence. Le maximum de la trajectoire du pôle dans le plan réduit en ξ est atteint pour une fréquence voisine de 20. Nous retrouvons l'intégralité de la courbe obtenue dans le plan en ξ par Gerlic et Rousselot⁷ pour des fréquence variant entre 18 et 800. Au delà de cette valeur la trajectoire tend vers un point limite. En effet pour $x_1 = 800$ $\xi_R = (0.51998, 0.0159)$ et pour $x_1 = 1000$ $\xi_R = (0.5200, 0.0158)$. Il faut rapprocher ce point limite du complexe

⁴ Figures 47 à 50.

⁵ J-L. Izbicki, G. Maze, J. Ripoché, Diffusion acoustique par un plan, Onde de Rayleigh, in N. Gespa, *La Diffusion Acoustique*, chap. 2, pp. 50-62, 1987.

⁶ A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., p. 162, 1989-1993.

⁷ A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., figure 35, 1989-1993.

$\frac{c_1}{c_R} + i \frac{\text{Im}(x_R)}{x_1}$ où c_R est la vitesse de l'onde de Rayleigh lorsqu'elle se propage à la surface d'un milieu élastique plan de même caractéristique que le cylindre. Le rapport $\frac{c_1}{c_R}$ vaut à peu près 0.522⁸. Le rapport $\frac{\text{Im}(x_R)}{x_1}$ correspond à l'atténuation de l'onde de Rayleigh plane, il vaut 0.0155⁹. L'onde de Rayleigh cylindrique tend donc à haute fréquence vers l'onde de Rayleigh plane.

La position relative du pôle et de n_t concorde avec celle obtenue par Dickey et Überall¹⁰. En effet, pour des valeurs de fréquence inférieures à 53,2 le pôle se situe dans le plan réduit à gauche de n_t pour des valeurs supérieures à 53,2 la partie réelle de son expression réduite est plus élevée que n_t . A très basse fréquence le phénomène semble s'inverser. L'ensemble des calculs étant fondé sur une expression asymptotique des solutions, le comportement du pôle à très basse fréquence n'a pas beaucoup de sens. De plus, nous n'avons pu vérifier la cohérence des résultats que jusqu'à des fréquences de l'ordre de 1.

Les différentes courbes obtenues pour l'onde de Rayleigh nous permettent de conclure de plus que quelque soit la fréquence cette onde a un comportement de type ℓ_1 ¹¹

Pour valider la théorie asymptotique développée dans les chapitres précédents, nous devons étudier l'évolution des types de

⁸ A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., p. 160, 1989-1993.

⁹ A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., p. 160, 1989-1993.

¹⁰ J.W. Dickey, H. Überall, Acoustic high-frequency scattering by elastic cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.*, 66, pp. 275-283, 1979.

¹¹ Chapitre 1, paragraphe II.1.

développements asymptotiques employés. Le déterminant $D(v, x_1)$ utilisant les fonctions cylindriques pour les variables x_1, x_ℓ et x_t , nous devons trouver la position du pôle relativement à ces trois variables mais surtout par rapport au cercle d'Airy qui leur est associé et dont le rayon dépend de la fréquence.

Dans le chapitre 2 paragraphe IV.2., nous avons introduit le paramètre τ déterminant pour une fréquence donnée le rayon du cercle d'Airy. Afin d'obtenir des courbes continues, nous fixons ce paramètre à 2 pour l'ensemble du domaine de fréquence. Avec cette hypothèse nous distinguons trois grands types de lieux pour le pôle. Aux basses fréquences ($x_1 < 4.5$) il est à l'intérieur du cercle d'Airy pour les trois variables. Pour des fréquences supérieures à 340, il se positionne à l'extérieur des cercles d'Airy associés à x_1, x_ℓ et x_t tout en restant compris entre x_t et x_1 . La zone intermédiaire de fréquences est décrite dans le tableau ci-dessous dans lequel nous reprenons la notation des zones utilisées dans le premier chapitre:

domaine de fréquence	n° zone / x_1	n° zone / x_ℓ	n° zone / x_t
$x_1 < 4.5$	2	2	2
$4.5 \leq x_1 < 11.5$	10	2	2
$1.5 \leq x_1 < 340$	10	7	2
$340 \leq x_1 \leq 1000$	10	7	7

En se référant au paragraphe II.1. du premier chapitre nous ne pouvons utiliser l'expression asymptotique d'une onde de type ℓ_1 que lorsque le pôle correspondant se situe dans la zone 10 vis-à-vis de x_1 . L'étude faite ici précise que cette zone correspond à des fréquences supérieures à 4.5. Le fait qu'à cette fréquence le pôle soit encore dans le cercle d'Airy de x_t n'intervient pas pour le calcul de la pression diffusée. En effet, nous supposons depuis le premier chapitre que le coefficient d'excitation $E^{(c)}$ n'apporte aucun comportement asymptotique prépondérant.

Ce coefficient n'est pourtant pas constant aux basses fréquences¹². L'étude numérique de son évolution avec la fréquence, montre qu'il est constant à 10 % près qu'au delà de $x_1 \approx 300$. Nous retrouvons ainsi la zone du plan réduit pour laquelle l'ensemble des fonctions cylindriques admet un développement asymptotique de type exponentiel.

La difficulté est d'estimer que le coefficient n'a pas de comportement asymptotique notoire, ce qui est difficilement quantifiable, tout en constatant qu'il varie. Nous sommes ainsi obligés d'introduire pour l'exploitation des résultats trois domaines de fréquences correspondant au trois principales zones d'évolution du pôle :

- en deçà de 4.5 tout concorde à montrer que la théorie asymptotique n'est pas justifiée,
- entre 4,5 et 340 seul un examen a posteriori des résultats peut justifier l'utilisation de la théorie asymptotique,
- au delà de 340 la théorie asymptotique est parfaitement correcte.

¹² Figure 55.

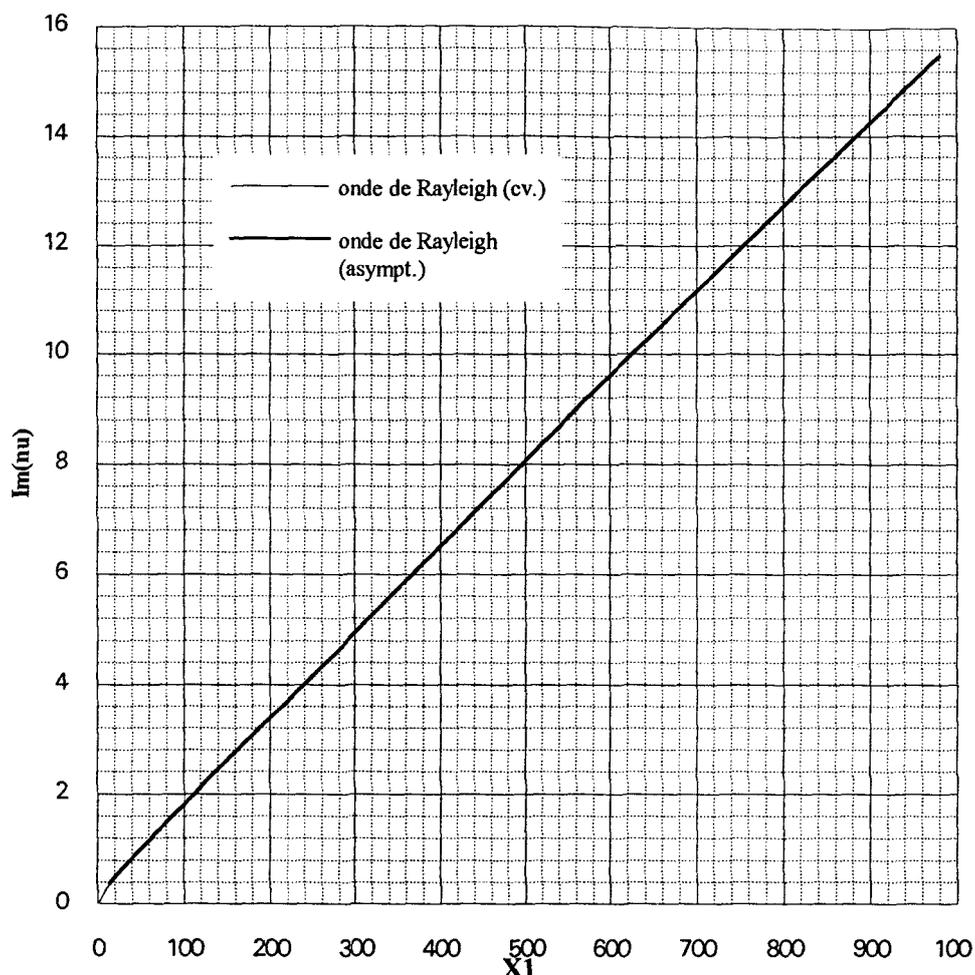


Figure 47 : Cylindre élastique - Onde de Rayleigh- $Im(\nu(x_1)) - x_1 \in [0; 1000]$

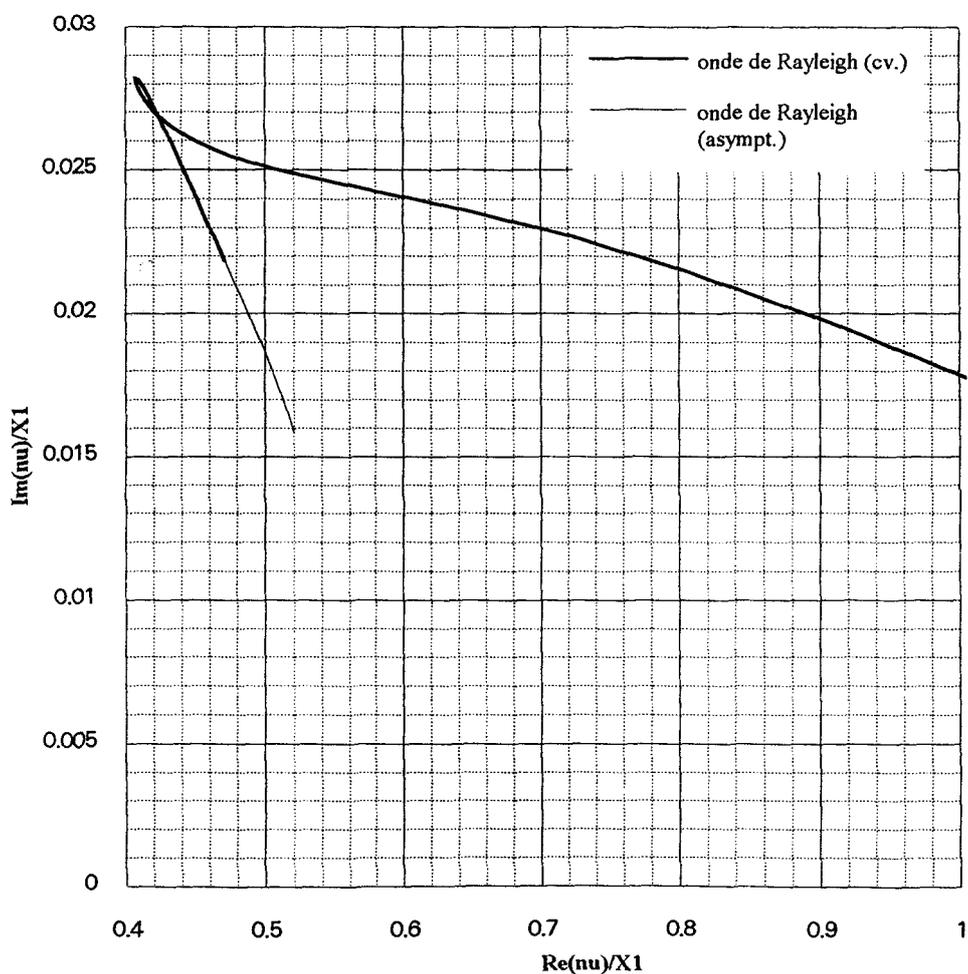


Figure 48 : Cylindre élastique - Onde de Rayleigh- $(Im(\nu)/x_1)[Re(\nu)/x_1]$

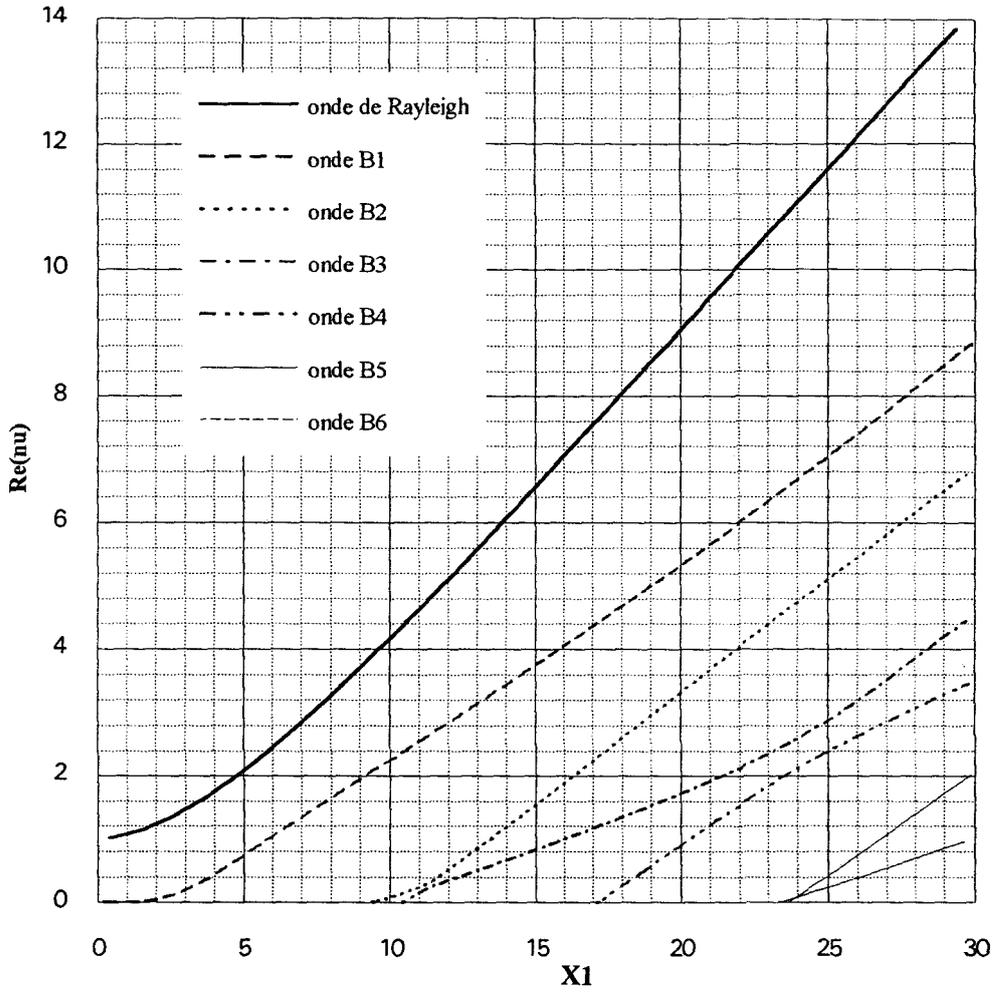


Figure 49 : Cylindre élastique - Ondes de type ℓ_1 - $Re(\nu(x_1))$ $x_1 \in [0; 30]$

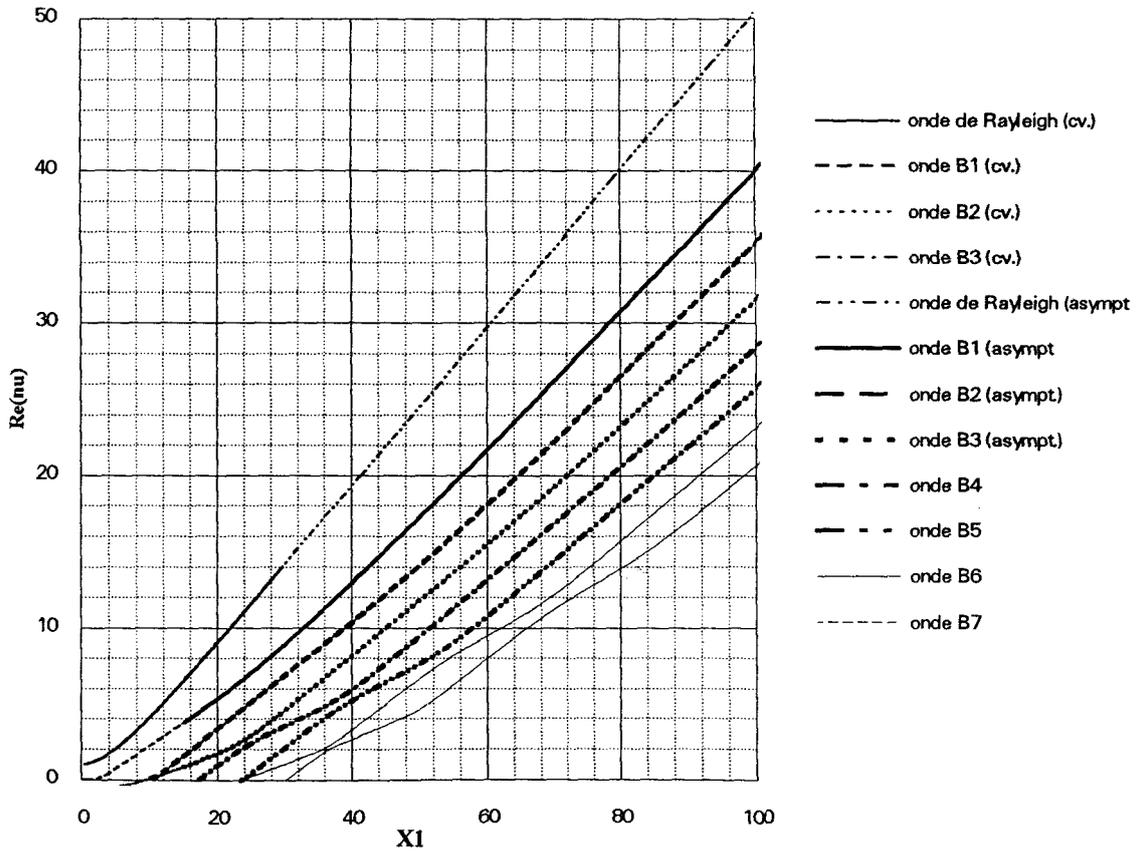


Figure 50 : Cylindre élastique - Ondes de type ℓ_1 - $Re(\nu(x_1))$ $x_1 \in [0; 100]$

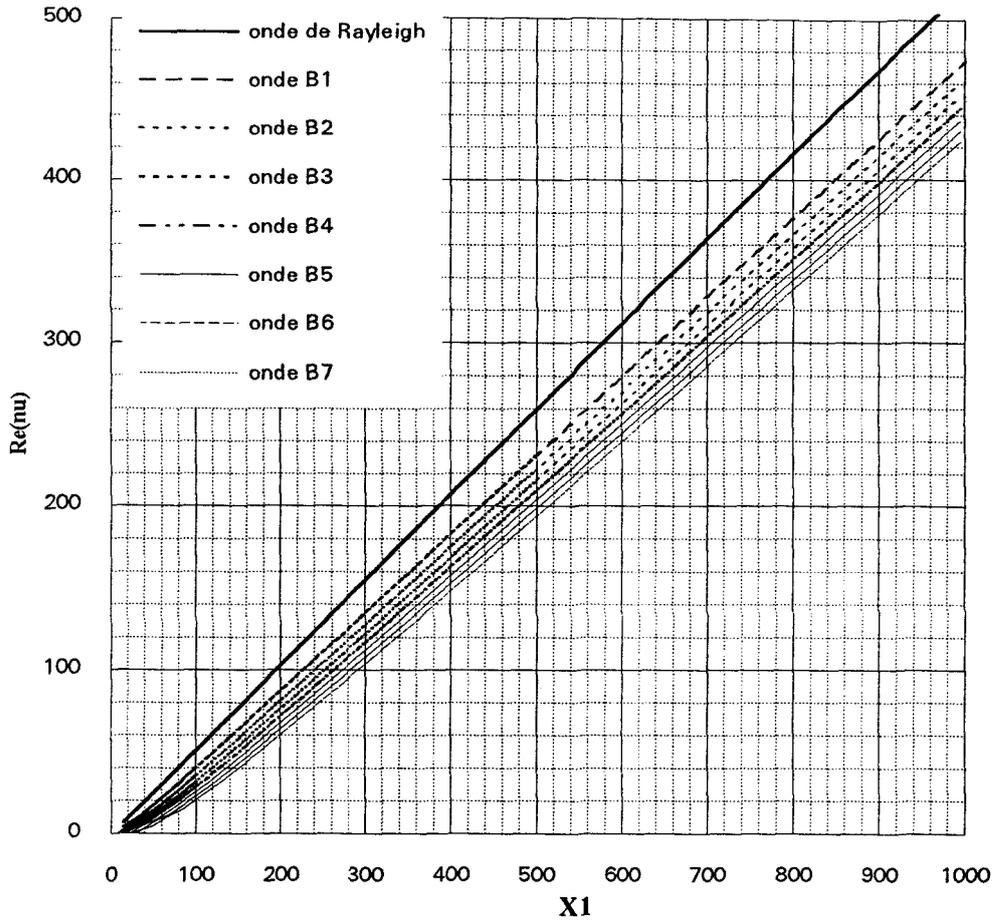


Figure 51 : Cylindre élastique - Ondes de type ℓ_1 - $Re(v(x_1))$ - $x_1 \in [0;1000]$

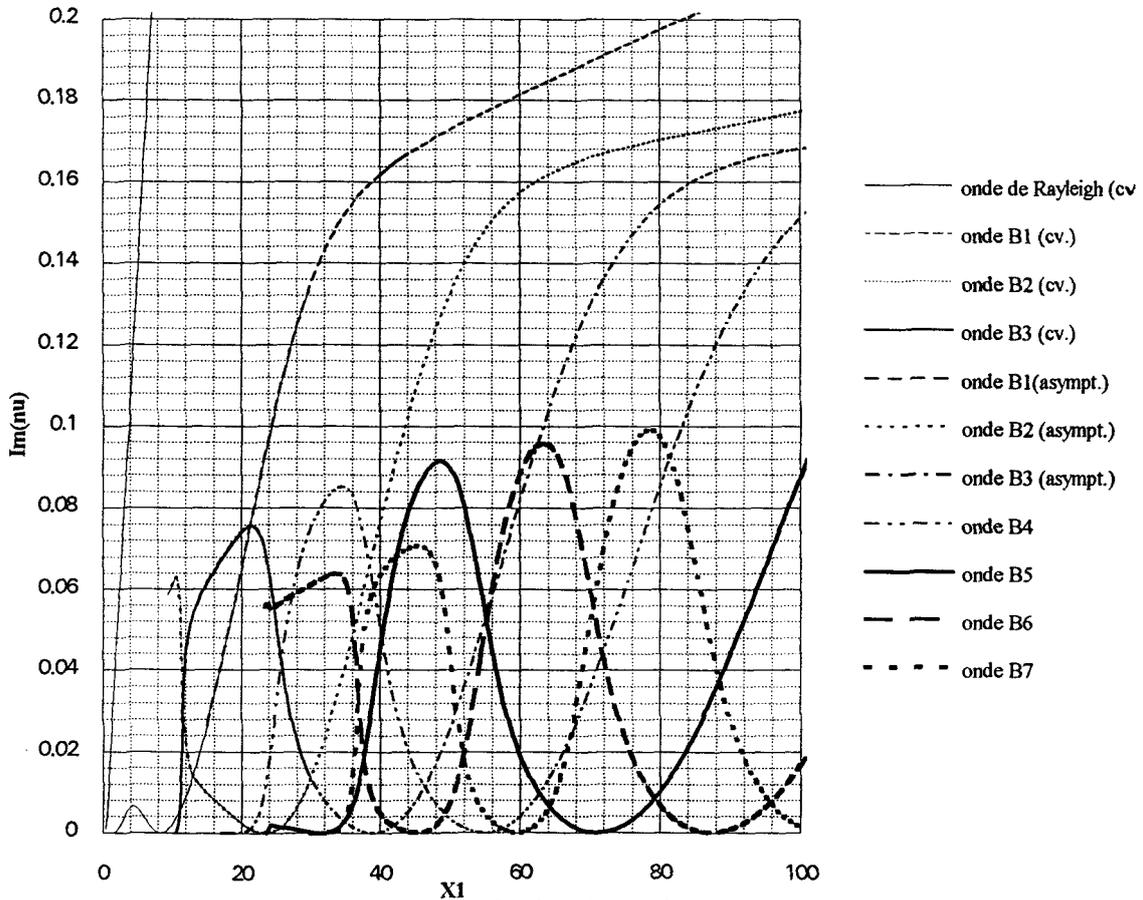


Figure 52 : Cylindre élastique - Ondes de Brekhovskih- $Im(v(x_1))$ - $x_1 \in [0;100]$

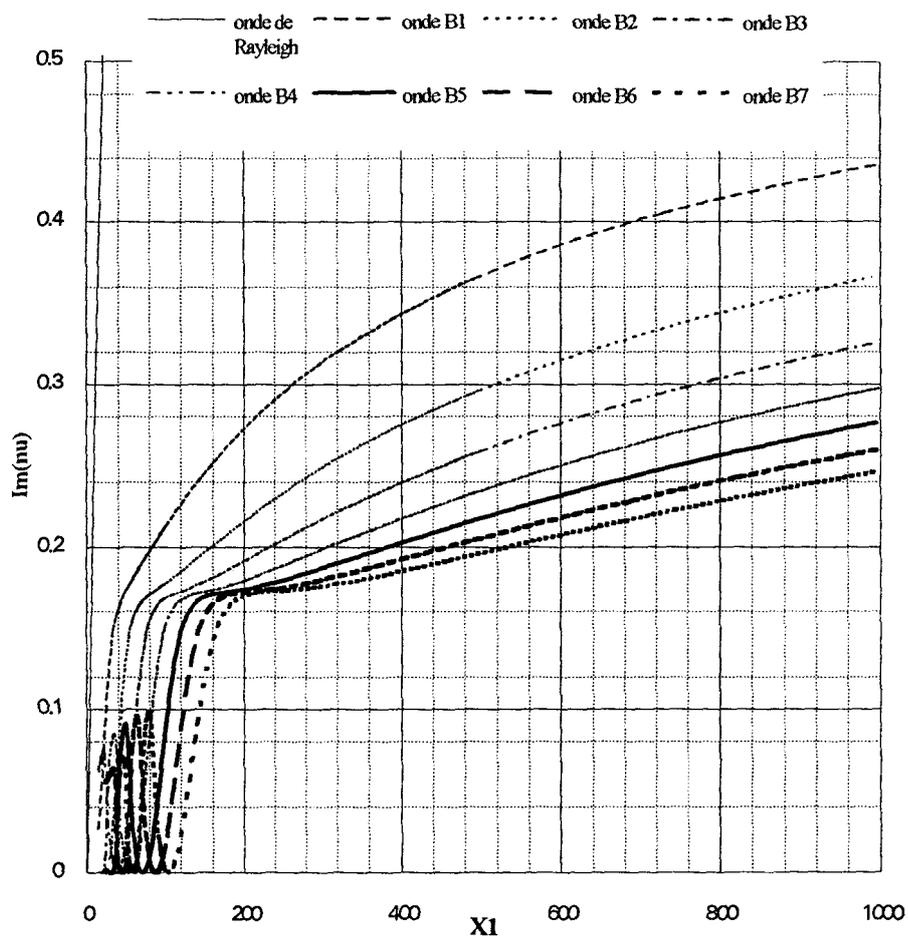


Figure 53 : Cylindre élastique - Ondes de Brekhovskikh- $Im(v(x_1))$ - $x_1 \in [0; 1000]$

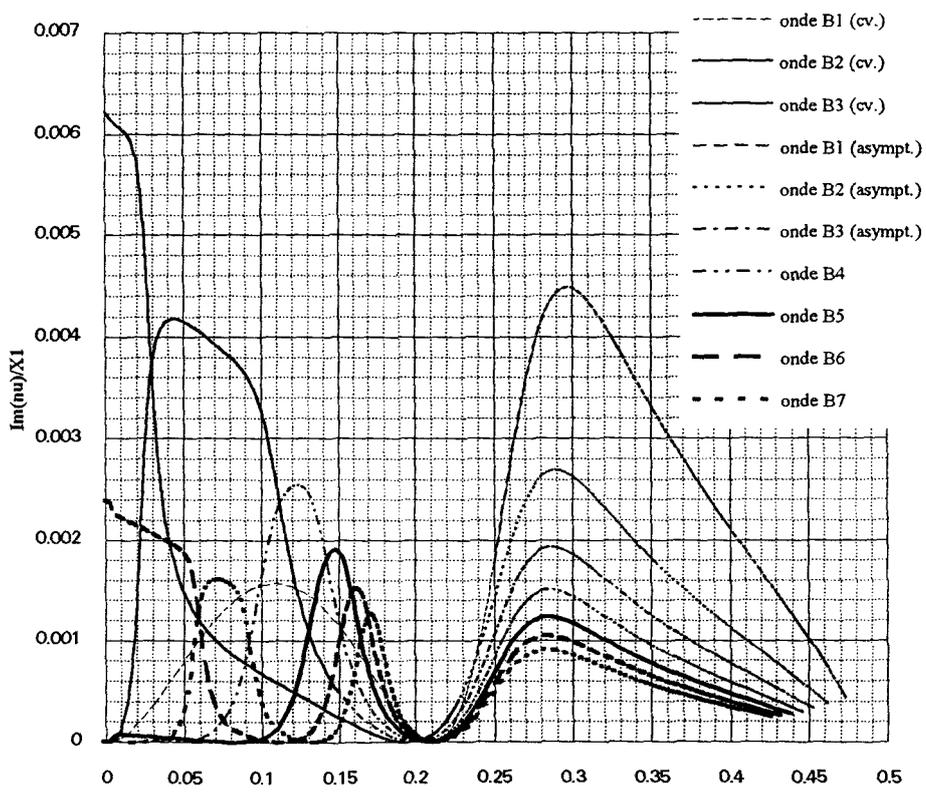


Figure 54 : Cylindre élastique - Ondes de Brekhovskikh- $(Im(v)/x_1)[Re(v)/x_1]$

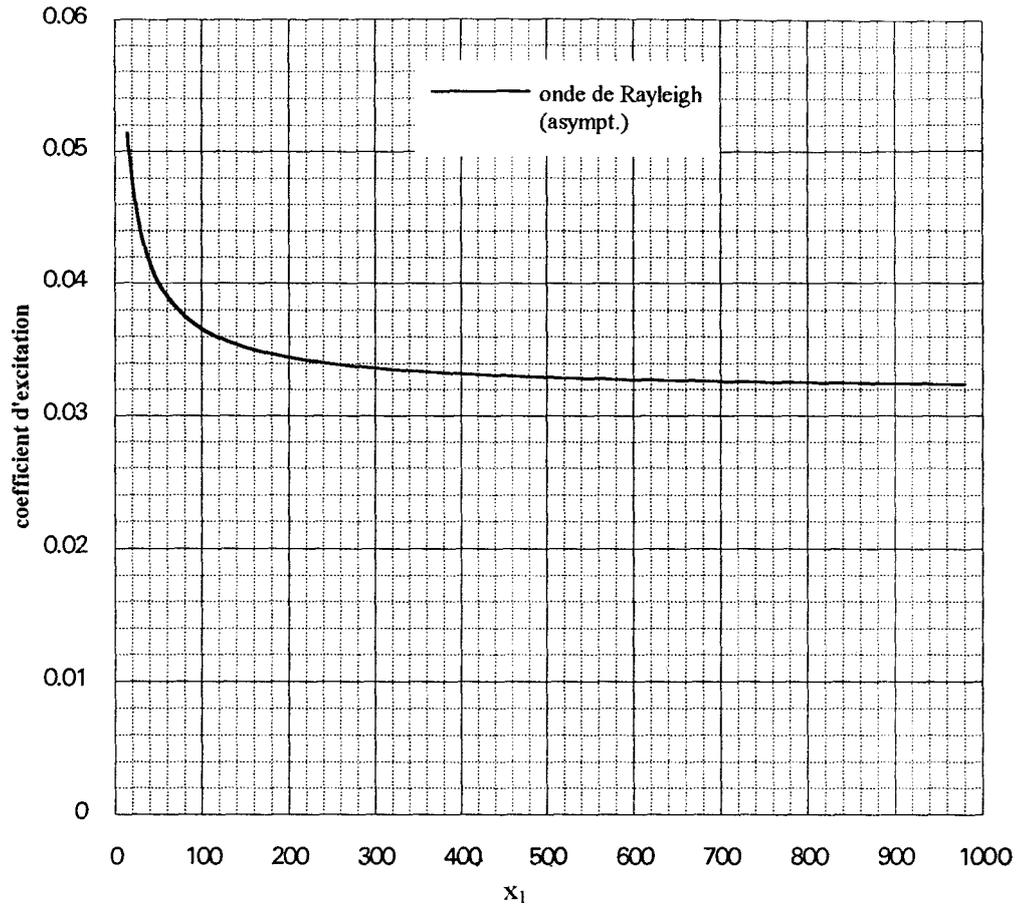


Figure 55 : Cylindre élastique - Onde de Rayleigh- $E^{(c)}(x_1)$

V.1.2. Les ondes de Brekhovskikh¹³

La dénomination d'onde de Galerie à échos ne correspondant pas au phénomène physique étudié, nous adoptons l'appellation utilisée par Derem¹⁴. En partant des résultats numériques obtenus dès 1982 par Gerlic et Rousselot, nous obtenons les sept premières ondes de Brekhovskikh notées B_1, B_2, \dots, B_7 . L'onde B_i correspond à l'onde notée usuellement $\ell = i+1$. En effet, l'onde $\ell = 1$ est l'onde de Rayleigh, la première onde de Galerie à échos ou onde de Brekhovskikh est donc associée à la notation $\ell = 2$. Les premiers résultats étant fondés sur des calculs établis lorsque la fréquence tend vers l'infini, la numérotation 1,2,...,7 correspond au classement décroissant des parties réelles des pôles à haute fréquence (B_1 est le pôle de partie réelle la plus élevée). Cette numérotation ne correspond pas à l'ordre d'apparition des pôles lorsque la fréquence augmente. En effet, nous constatons dans le plan $(x_1, \text{réel}(v))$ le croisement des courbes associées aux ondes B_5 et B_6 .

Les courbes tracées dans le plan en ξ ¹⁵ nous permettent de comparer nos résultats à ceux obtenus par Dickey, Frisk et Überall¹⁶. Nous retrouvons ainsi les quatre premières trajectoires des ondes appelées "transverse Whispering Gallery" (notées T_1 à T_4). Pour confirmer nos résultats, nous superposons dans la zone de fréquence $[0,30]$ ceux obtenus par les développements convergents. La concordance étant particulièrement correcte, nous pouvons utiliser les résultats obtenus par développements asymptotiques pratiquement jusqu'à une fréquence voisine de 1.

¹³ Figures 49 à 54.

¹⁴ A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., p.180, 1989-1993.

¹⁵ Figure 54.

¹⁶ J.W. Dickey, G.V. Frisk, H. Überall, Whispering Gallery wave modes on elastic cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.*, **59**, pp. 1339-1346, 1976.

Conformément à l'étude conduite dans le chapitre 1 et en suivant les remarques établies dans le section sur le lieu des pôles associés aux ondes de Wait du chapitre 2, nous considérons que les ondes de Brekhovskikh n'existent que lorsque la partie réelle des pôles associés est strictement positive. Nous donnons dans le tableau suivant le seuil d'apparition en fréquence de chacune de ces ondes, appelé également fréquence de coupure. Dans ce tableau, nous notons également la valeur de la partie imaginaire du pôle associé.

nom de l'onde	fréquence de coupure	Im(ν)
B ₁	0	0
B ₂	9.417	0.0586
B ₃	10.458	0
B ₄	17.139	0
B ₅	23.660	0
B ₆	23.357	0.0570
B ₇	30.128	0

Les ondes B₂ et B₆ ont un comportement totalement différent des autres lors de leur apparition puisqu'elles sont responsables d'une diffusion alors même que la partie réelle des deux pôles associés est nulle. Cette remarque nous permettra dans le chapitre 5 de comparer ces ondes aux ondes axiales pouvant se propager à la surface du cylindre.

Les pôles ν_{B_i} ont une partie imaginaire environ 10 fois plus faible que celle du pôle associé à l'onde de Rayleigh. Sachant que la partie réelle d'un pôle de type ℓ_1 croît régulièrement et connaissant la relation liant l'amortissement de la pression à la partie imaginaire du pôle¹⁷, nous pouvons supposer que, au cours du trajet des ondes à l'interface fluide-solide, l'onde de Rayleigh s'atténue plus rapidement que les ondes de Brekhovskikh. La contribution de l'onde de Rayleigh au calcul de la pression devrait donc être

¹⁷ L'amortissement est le double du rapport de la partie imaginaire du pôle sur la dérivée de la partie réelle de ce dernier par rapport à la fréquence. Annexe C : Etude du résidu β .

moins importante que celles des ondes de Brekhovskikh. Nous verrons dans le paragraphe sur le calcul de la pression diffusée qu'il n'en est rien.

L'examen des courbes nous permet d'ajouter que les pôles ont manifestement un comportement que Derem appelle *ultra asymptotique*¹⁸ à haute fréquence. Ce comportement ultra-asymptotique est visible dans le plan de la variable réduite ξ mais également au travers des courbes donnant la partie imaginaire des pôles en fonction de la fréquence. Il apparaît pour des fréquences variant de 40 pour l'onde B_1 à 200 pour l'onde B_7 . Le domaine ultra-asymptotique est donc lié à l'onde. Il est progressivement rejeté à l'infini lorsque l'indice caractérisant l'onde croît. Si nous replaçons ce domaine de fréquence sur le plan de la variable réduite ξ , nous pouvons préciser qu'il correspond à la zone du plan situé après le dernier changement de courbure des trajectoires. Il est intéressant de remarquer que dans ce plan cette zone semble indépendante de la fréquence puisqu'elle correspond à peu près à la droite verticale passant par l'abscisse 0.32.

Nous pouvons étudier cette zone ultra-asymptotique en présentant les changements de développements entrepris lors de la recherche des pôles. Comme pour l'onde de Rayleigh nous distinguons différents lieux occupés par le pôle ν_{B_i} lorsque la fréquence varie et lorsque l'indice "i" prend successivement les valeurs 1 à 7. Pour obtenir une bonne continuité des courbes, la valeur du paramètre τ est 2. Avec les notations adoptées pour l'onde de Rayleigh, nous obtenons les tableaux suivant :

pour l'onde B_1 ,

domaine de fréquence	n° zone / x_1	n° zone / x_ℓ	n° zone / x_t
$x_1 < 2.1$	2	2	2

¹⁸ A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., p.183, 1989-1993.

$2.1 \leq x_1 < 10.3$	10	2	2
$0.3 \leq x_1 < 38.$	10	2	10
$38.1 \leq x_1 \leq 1000$	10	7	10

pour l'onde B_2 ,

domaine de fréquence	n° zone / x_1	n° zone / x_ℓ	n° zone / x_t
$x_1 < 12.2$	10	10	10
$2.2 \leq x_1 < 58.$	10	2	10
$58.1 \leq x_1 \leq 1000$	10	7	10

pour l'onde B_3 ,

domaine de fréquence	n° zone / x_1	n° zone / x_ℓ	n° zone / x_t
$x_1 < 25.7$	10	10	10
$25.7 \leq x_1 < 77.3$	10	2	10
$77.3 \leq x_1 \leq 1000$	10	7	10

pour l'onde B_4 ,

domaine de fréquence	n° zone / x_1	n° zone / x_ℓ	n° zone / x_t
$x_1 < 40.2$	10	10	10
$40.2 \leq x_1 < 96.1$	10	2	10
$96.1 \leq x_1 \leq 1000$	10	7	10

pour l'onde B_5 ,

domaine de fréquence	n° zone / x_1	n° zone / x_ℓ	n° zone / x_t
$x_1 < 55.2$	10	10	10
$55.2 \leq x_1 < 114$	10	2	10
$14 \leq x_1 \leq 1000$	10	7	10

pour l'onde B_6 ,

domaine de fréquence	n° zone / x_1	n° zone / x_ℓ	n° zone / x_t
$x_1 < 70.6$	10	10	10
$70.6 \leq x_1 < 133$	10	2	10
$33 \leq x_1 \leq 1000$	10	7	10

et enfin pour l'onde B_7 ,

domaine de fréquence	n° zone / x_1	n° zone / x_ℓ	n° zone / x_t
$x_1 < 86.2$	10	10	10
$86.2 \leq x_1 < 15$	10	2	10
$51 \leq x_1 \leq 1000$	10	7	10

Les sept premières ondes de Brekhovskikh ont donc une évolution analogue par rapport aux fréquences réduites x_1 , x_ℓ et x_t . Ce

comportement est vraisemblablement généralisable à toutes les ondes de ce type. Ainsi, quelque soit la fréquence, les pôles ν_{B_i} sont situés loins de x_1 et de x_t ($\text{réel}(\nu_{B_i}) \ll x_t \ll x_1$). Par contre, la partie réelle de chacun des pôles va croître, atteindre la valeur de x_ℓ et la dépasser. Le passage à l'intérieur du cercle d'Airy s'effectue pour des fréquences d'autant plus élevées que l'indice "i" caractérisant l'onde est grand.

L'étude de ces résultats, nous permet de constater que ces ondes sont toutes de type ℓ_1 . En reprenant la démarche entreprise pour l'onde de Rayleigh, nous constatons que seul l'intervalle de fréquences correspondant au passage des pôles à l'intérieur du cercle d'Airy peut être préjudiciable à l'application de la T.G.D.. Comme la fréquence à partir de laquelle cette théorie est strictement applicable croît avec le nombre d'onde étudiée, il faut éviter de considérer des domaines de fréquences où un trop grand nombre d'ondes interviendraient. De plus, en se restreignant à l'intervalle de fréquences où n'existe que les sept ondes étudiées, il n'y a pas de domaine de fréquence où aucune des ondes ne se situe dans le cercle d'Airy de x_ℓ . Il ne semble donc pas possible de trouver un domaine où les hypothèses de la T.G.D. sont strictement vérifiées.

A la lecture des tableaux donnant les différents domaines occupés par les pôles, nous remarquons également que la zone de développement ultra-asymptotique mise en évidence graphiquement correspond toujours au domaine de fréquences où les développements asymptotiques nécessaires à l'établissement de la T.G.D. sont utilisables.

V.1.3. Les ondes de Franz et l'onde de Stoneley¹

Nous appelons onde de Stoneley l'onde décrite en milieu plan comme ayant une célérité inférieure à toutes les ondes de volume². Les ondes de Franz sont de même nature que celles trouvées à l'interface fluide-fluide. Toutes ces ondes se situent à droite de la fréquence x_1 . Elles doivent donc toute être de type ℓ_2 .

La recherche de l'évolution des pôles associés à ces ondes en fonction de la fréquence ne nous permet pas de distinguer correctement l'onde de Stoneley des ondes de Franz. L'évolution des parties réelles est semblable. Par contre, la partie imaginaire croît sensiblement moins rapidement que celle des ondes de Franz.

Quelque soit l'onde de type ℓ_2 étudiée, la partie imaginaire du pôle associé est considérablement plus importante que celles obtenues pour les ondes de type ℓ_1 , de l'ordre de 100 à 1000 fois. Ainsi ces ondes n'apporteront de contributions au calcul de la pression que pour des angles φ relativement faibles. Nous recherchons comme pour les ondes de type ℓ_1 , les huit premières ondes de type ℓ_2

L'utilisation des développements asymptotiques nous permet d'obtenir les valeurs des pôles pour des fréquences beaucoup plus élevées que dans le cylindre fluide. Il faut cependant remarquer que la première onde de Franz de l'interface fluide-fluide correspond à l'onde de Stoneley, la

¹ Figures 56 à 58.

² F.Luppé, *Contribution à l'étude de l'onde de Scholte-Stoneley à différentes interfaces fluide pargait/solide élastique*, Thèse de doctorat d'état es sciences physiques, Université Paris 7, pp. 1 à 6, 1987.

seconde à la première onde de Franz de l'interface fluide-solide et ainsi de suite.

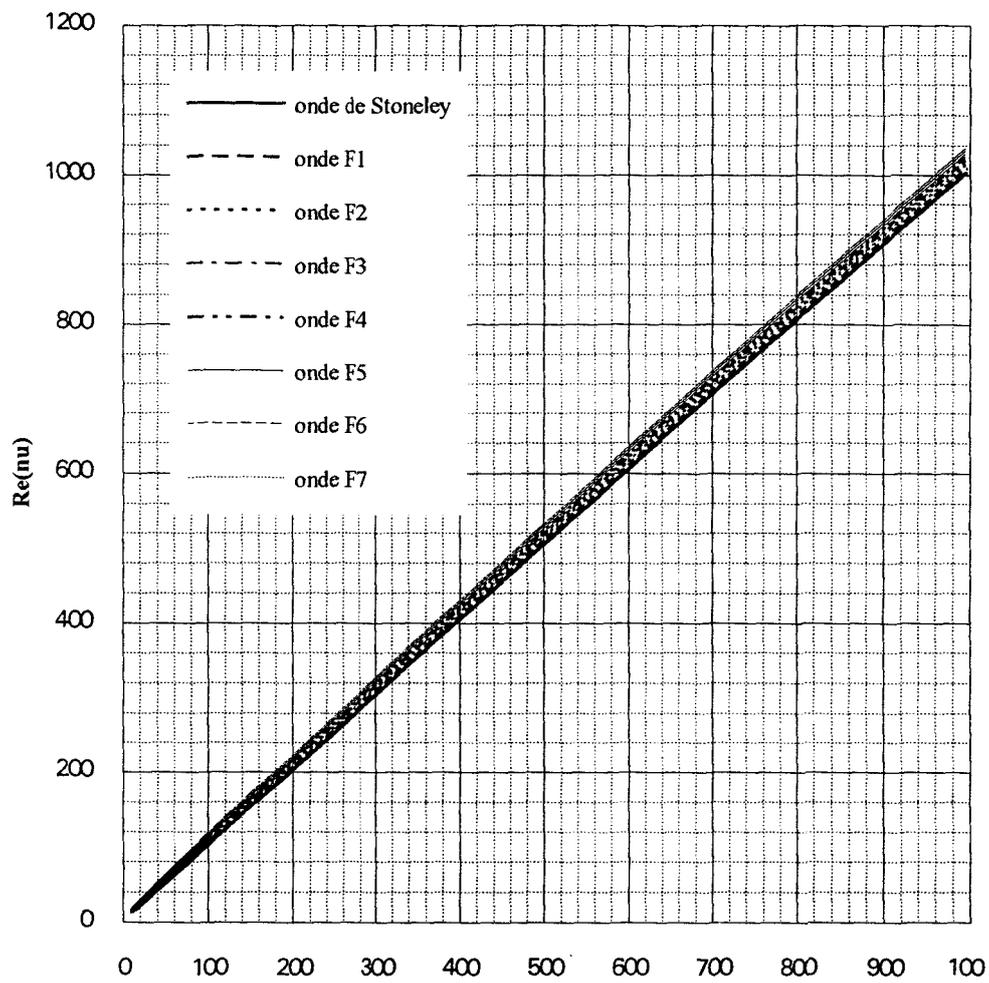


Figure 56 : Cylindre élastique -Ondes de type ℓ_2 - $Re(\nu(x_1))$

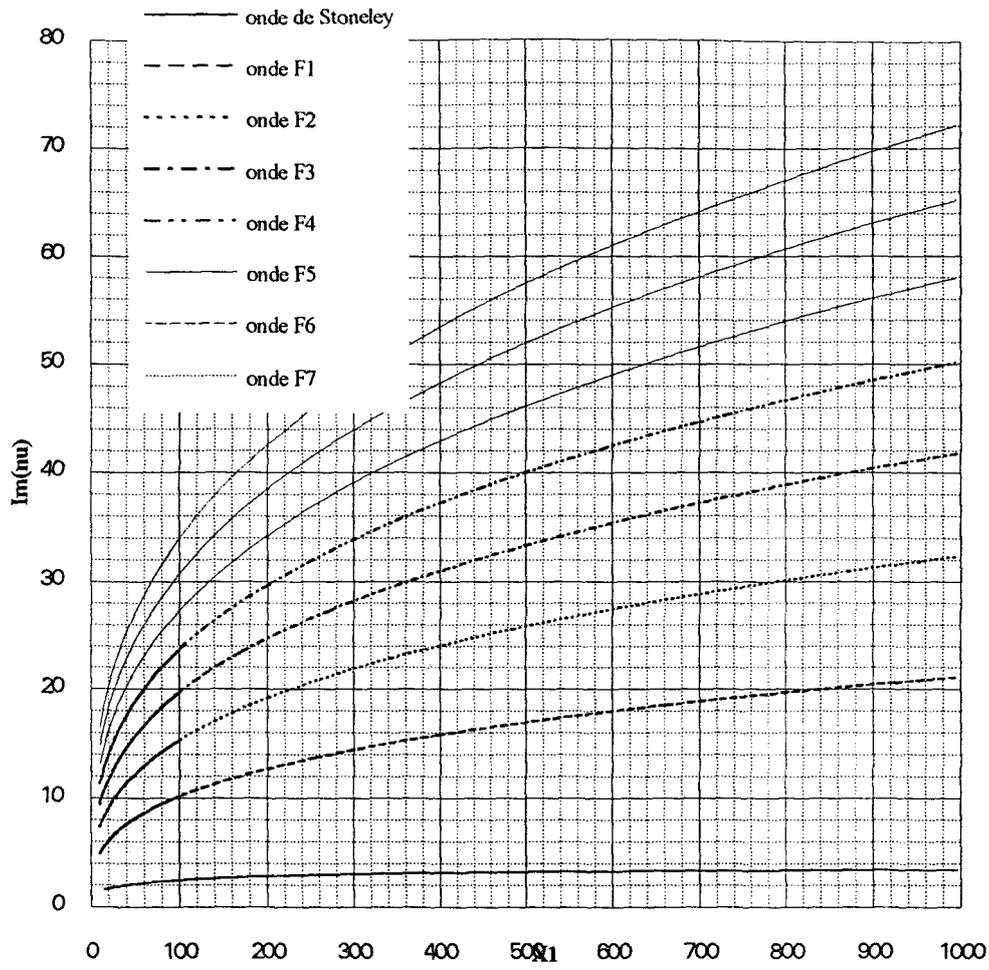


Figure 57 : Cylindre élastique -Ondes de type ℓ_2 - $Im(v(x_1))$

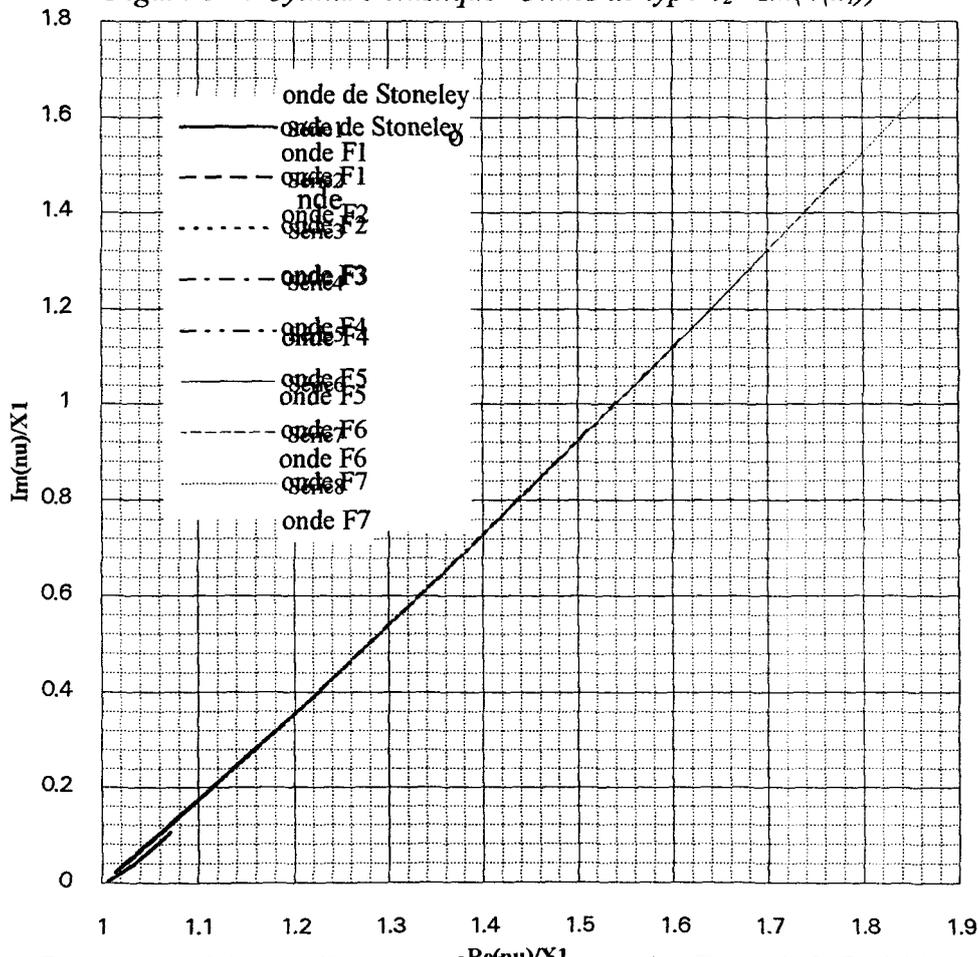


Figure 58 : Cylindre élastique -Ondes de type ℓ_2 - $[Im(v)/x_1]/(Re(v)/x_1)$

Dans les domaines de fréquence où une comparaison est possible, nous nous apercevons que les valeurs obtenues par les pôles associés aux ondes de Franz à l'interface fluide-fluide sont quasiment identiques à celles obtenues à l'interface fluide-solide¹. De plus, la comparaison des deux types d'interfaces étudiées contribue à considérer l'onde de Stoneley différemment des ondes de Franz. En effet, alors que toutes les ondes de ce nom sont fortement semblables quelque soit l'interface, le pôle associé à l'onde de Stoneley se distingue par l'évolution de sa partie imaginaire ; pour une fréquence donnée la partie réelle du pôle de l'onde de Stoneley est proche de celle obtenue à l'interface fluide-fluide par la première onde de Franz, par contre sa partie imaginaire est nettement moins importante (de 2 à 5 fois dans l'intervalle de fréquence $[0,70]$).

¹ Figures 59 et 60.

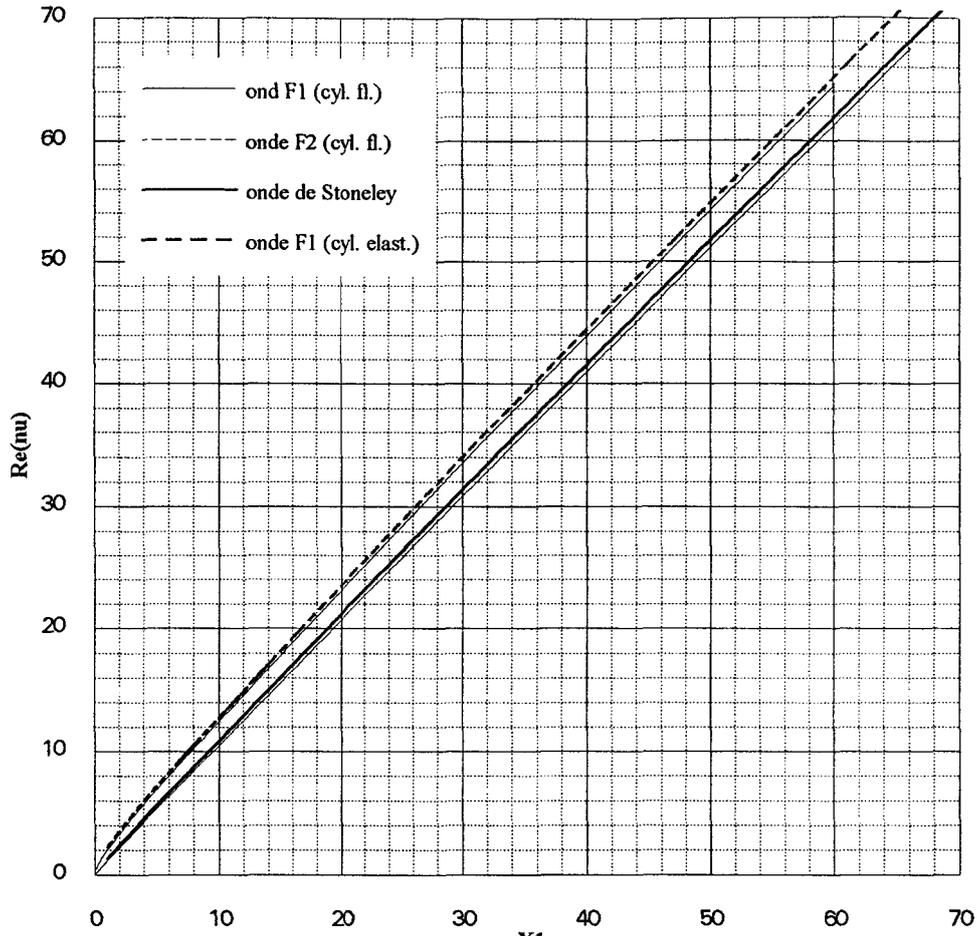


Figure 59 : Comparaison cylindre élastique, cylindre fluide -Ondes de type $\ell_2 - Re(\nu(x_1))$

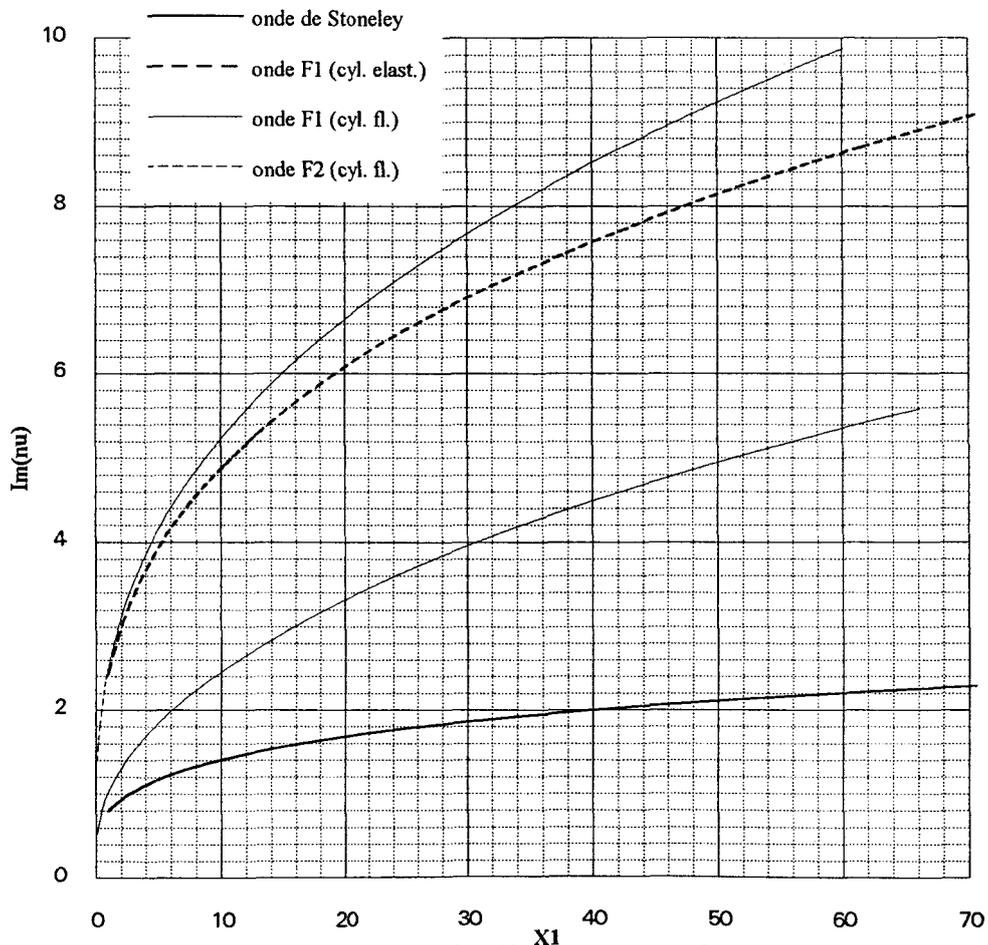


Figure 60 : Comparaison cylindre élastique, cylindre fluide -Ondes de type $\ell_2 - Im(\nu(x_1))$

Comme nous l'avons fait précédemment pour valider le choix des développements asymptotiques utilisés dans, nous relevons les positions relatives des pôles et des fréquences réduites. Nous obtenons les tableaux suivant :

pour l'onde de Stoneley,

domaine de fréquence	n° zone / x_1	n° zone / x_ℓ	n° zone / x_t
$2.2 \leq x_1 \leq 1000$	2	7	7

pour l'onde F_1 ,

domaine de fréquence	n° zone / x_1	n° zone / x_ℓ	n° zone / x_t
$x_1 \leq 1000$	2	7	7

et pour toutes les ondes F_i avec i variant entre 2 et 7,

domaine de fréquence	n° zone / x_1	n° zone / x_ℓ	n° zone / x_t
$x_1 \leq 1000$	8	7	7

Ainsi, pour toutes les ondes de Franz de rang supérieur ou égal à 2 la T.G.D. est directement applicable pour modéliser leur comportement. Par contre, l'utilisation de la T.G.D. ne se justifie pas théoriquement pour les deux premières ondes de type ℓ_2 trop proches de la fréquence réduite x_1 et cela quelque soit la valeur de cette dernière.

V.2. Pression diffusée par le cylindre élastique

Pour calculer la pression due à chacune des ondes circonférentielles, nous utilisons le système d'équation (21). L'estimation du résidu β correspondant à chaque onde se fait par la méthode exposée dans le chapitre sur le cylindre fluide¹ Nous réalisons l'étude numérique pour une fréquence réduite x_1 égale à 30 afin de limiter le nombre d'ondes de Brekhovskikh. Nous plaçons arbitrairement le point d'observation à une

¹ Chapitre 2 paragraphe IV.3.

distance "r" cinq fois supérieure au diamètre du cylindre. Nous représentons la contribution de chacune des ondes circonférentielles ¹ ainsi que le résultat de l'ensemble de ces contributions et de la pression due à l'onde réfléchie² comparé à la pression directement obtenue par la série modale. L'étude de la diffusion par un cylindre fluide nous montre que, numériquement, la pression obtenue sans les ondes transmises est très proche de celle obtenue par la série modale. Aussi, nous ne tenons pas compte numériquement de la pression due à ces ondes.

Depuis l'étude du cylindre fluide, la démarche entreprise est progressive. Afin de simplifier la présentation des résultats, nous n'insistons que sur les phénomènes propres au cylindre élastique.

V.2.1. Contribution des ondes de type ℓ_2^3

Lorsque nous représentons en fonction de l'angle azimutale φ , la pression due aux ondes de Franz et à l'onde de Stoneley, nous retrouvons comme dans l'étude du cylindre fluide deux types comportements.

Lorsque le point d'observation se trouve dans l'ombre du cylindre, ces ondes sont prépondérantes. Lorsque nous comparons la pression diffusée totale à celle due à l'onde de Stoneley, nous nous apercevons qu'elles sont très proches. Dans cette zone angulaire, la pression reçue par l'observateur est donc principalement due à l'onde de Stoneley. De plus, plus l'indice de l'onde est grand, moins la contribution de ces ondes est

¹ Figures 61, 62, 66 et 67.

² Figure 68.

³ Figures 61 et 62.

visible ; ainsi, nous montrons la convergence de la série des pressions dues aux ondes de type ℓ_2 ce que nous avons supposé dans le premier chapitre.

Lorsque le point P "sort de l'ombre" du cylindre la contribution de ces ondes devient négligeable. Seule la pression due à l'onde de Stoneley est encore visible. Elle représente cependant moins de 10% de la pression totale dès que $\varphi > 45^\circ$.

Comme dans l'étude du cylindre fluide, nous trouvons une forte discontinuité dans la valeur des pressions lors du passage de la zone d'ombre à la zone de lumière, discontinuité inhérente à la méthode.

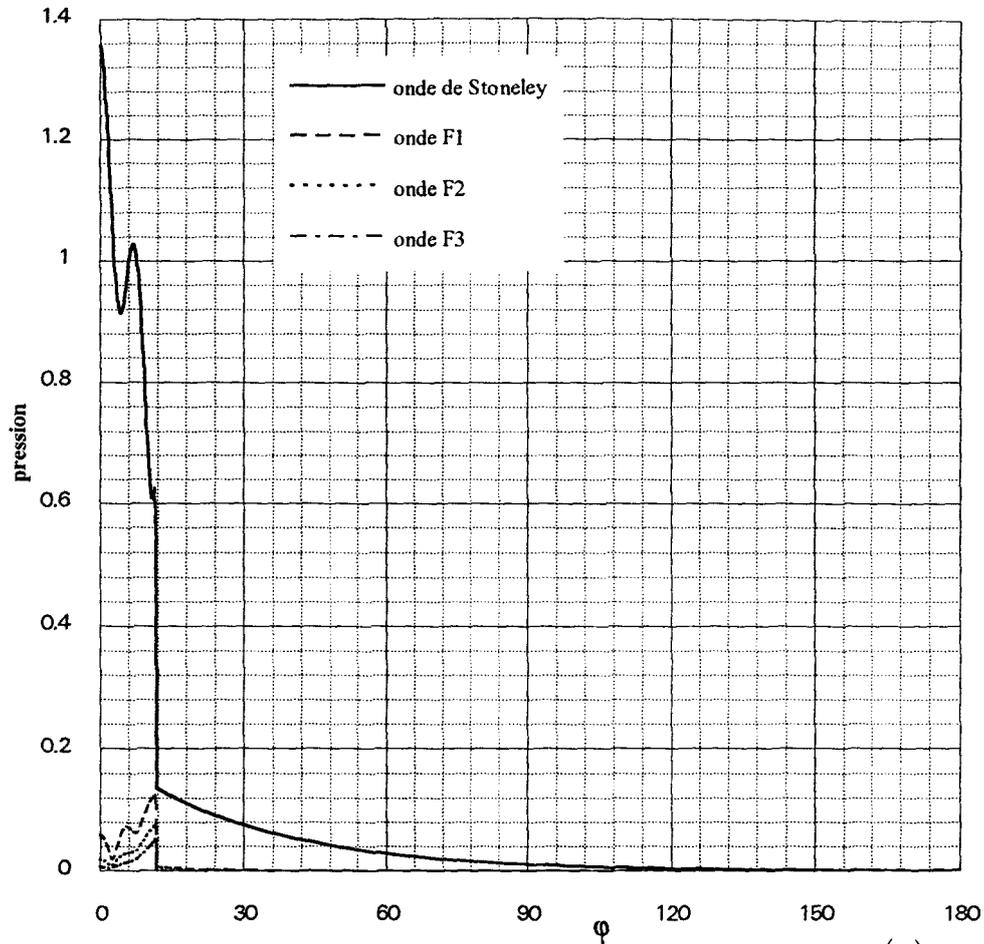


Figure 61 : *Cylindre élastique 4 premières ondes de type $\ell_2 - P_{\ell_2}(\varphi)$, $x_1=30, r/a=5$*

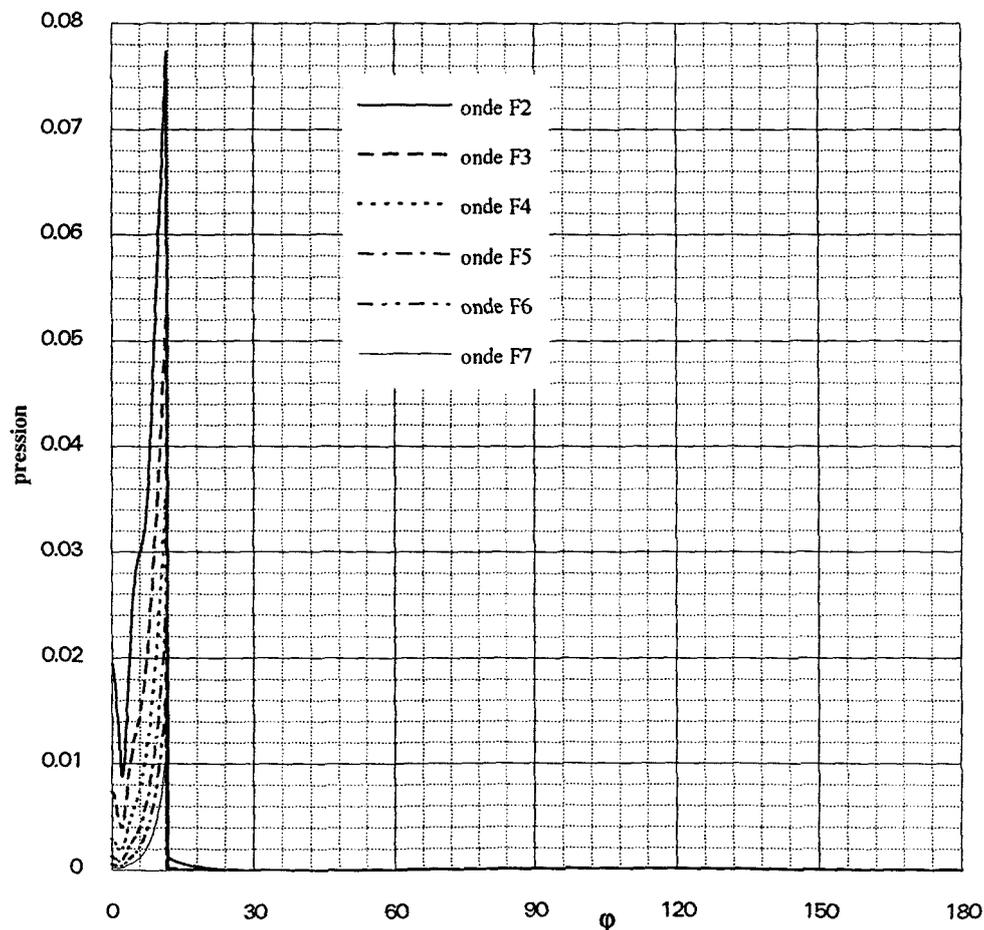


Figure 62 : *Cylindre élastique - Ondes F2 à F7- $P_{\ell_2}(\varphi)$ - $x_1=30, r/a=5$*

V.2.2. Contribution des ondes de type ℓ_1

Pour $x_1 = 30$, les huit pôles correspondant aux ondes de type ℓ_1

sont :

nom de l'onde	réel(ν)	im(ν)
Rayleigh	14.14	0.654
B ₁	8.898	0.135
B ₂	6.852	0.0135
B ₃	4.549	0.0136
B ₄	3.499	0.0747
B ₅	2.06	0.0002
B ₆	1.019	0.0611

Les courbes donnant les valeurs des pressions correspondantes nous permettent de remarquer que les quatre ondes de type ℓ_1 prépondérantes sont : l'onde de Rayleigh, la première, quatrième et sixième ondes de Brekhovskikh. C'est à dire les quatres ondes dont les parties imaginaires des pôles associés sont les plus importantes. De cette observation nous déduisons une loi quant à la prédominance de certaines ondes suivant la fréquence. En effet, l'importance relative d'une onde suit l'oscillation de la valeur du résidu β associé¹. En annexe D, nous montrons que, lorsque la fréquence varie, la courbe décrite par le résidu associé à une onde de Brekhovskikh possèdent des allures semblables à celle suivie par la partie imaginaire du pôle correspondant . Ainsi, à une fréquence donnée, nous pouvons conclure que les ondes prédominantes sont celles associées à des pôles de partie imaginaire élevée. Ce résultat est contraire à l'estimation réalisée dans le paragraphe sur les ondes de Brekhovskikh. En effet, lors de cette estimation nous ne tenions pas compte de la relation liant le résidu β à la partie imaginaire du pôle, relation qui permet de compenser le phénomène d'amortissement.

¹ Figures 63 à 65.

Lorsque l'angle φ varie, le comportement des pressions dépend du terme $\cos v_{\ell_1} \varphi$. Ainsi la partie réelle du pôle associé à une onde détermine la pseudo période d'oscillation de la pression. Un comportement de type exponentiel se superpose à cette oscillation lorsque la partie imaginaire du pôle est relativement importante. La pression due à l'onde de Rayleigh pour $x_1 = 30$ présente ces deux comportements (la partie imaginaire du pôle correspondant vaut 0.654).

Comme dans l'étude conduite sur le cylindre fluide, nous retrouvons des discontinuités inhérentes à la méthode et correspondant au au changement de définition de la pression.

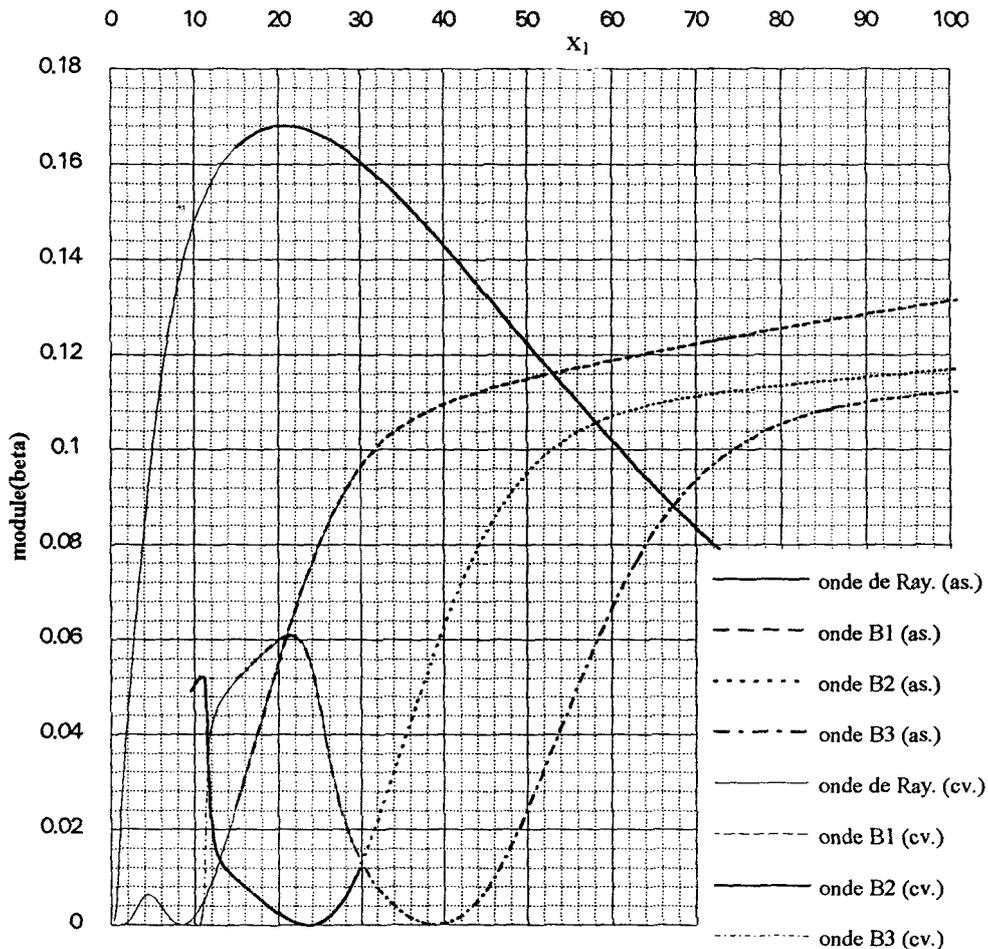


Figure 63 : Cylindre élastique -Ondes de Rayleigh, B1, B2 et B3 - $|\beta|(x_1)$, $x_1 \in [0,100]$

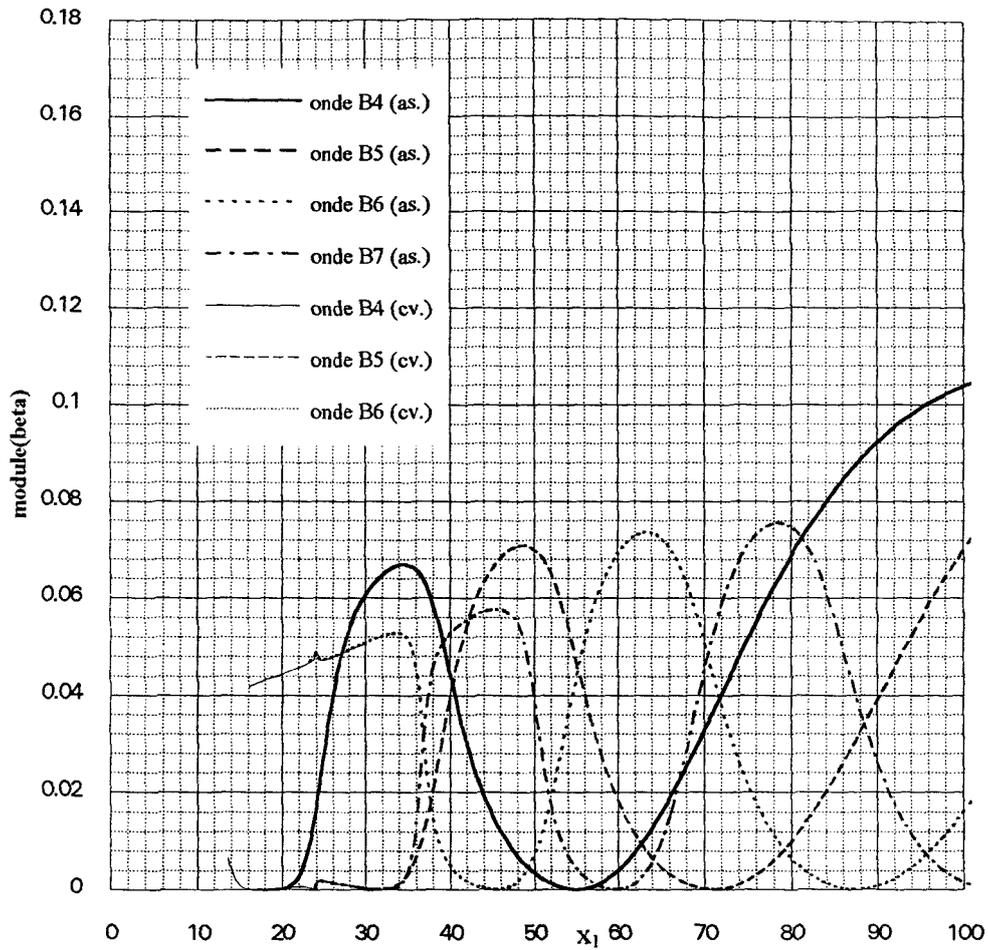


Figure 64 : Cylindre élastique - B4, B5, B6 et B7 - $|\beta|(x_1)$, $x_1 \in [0;100]$

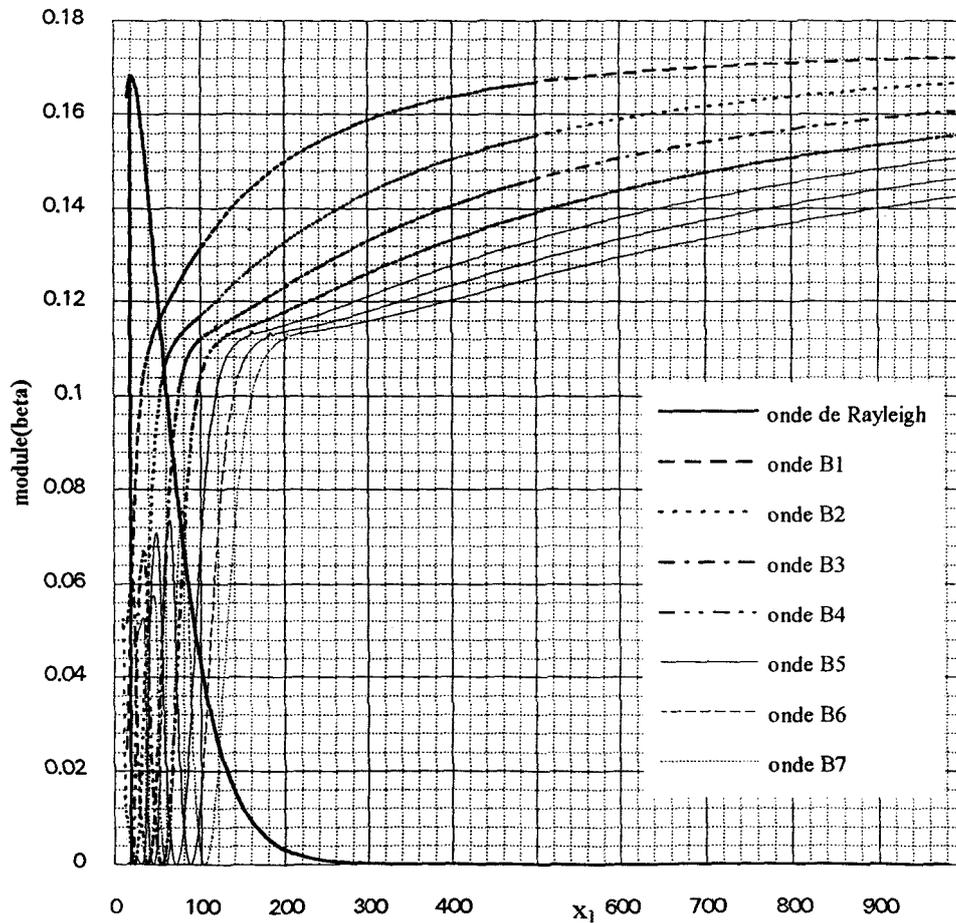


Figure 65 : Cylindre élastique - Ondes de type ℓ_1 - $|\beta|(x_1)$, $x_1 \in [0;1000]$

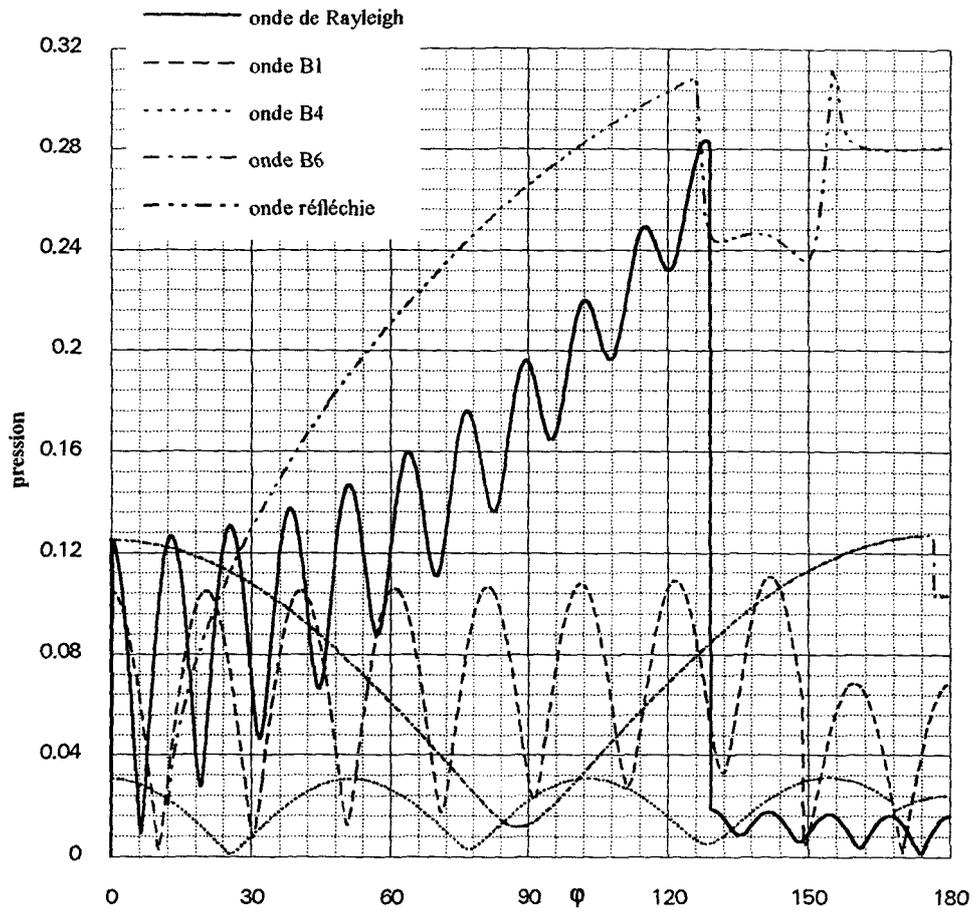


Figure 66 : Cylindre élastique - Ondes réfléchie, de Rayleigh, B1, B4 et B6
 $-P_{\ell_1}(\varphi) x_1 = 30, r/a = 5$

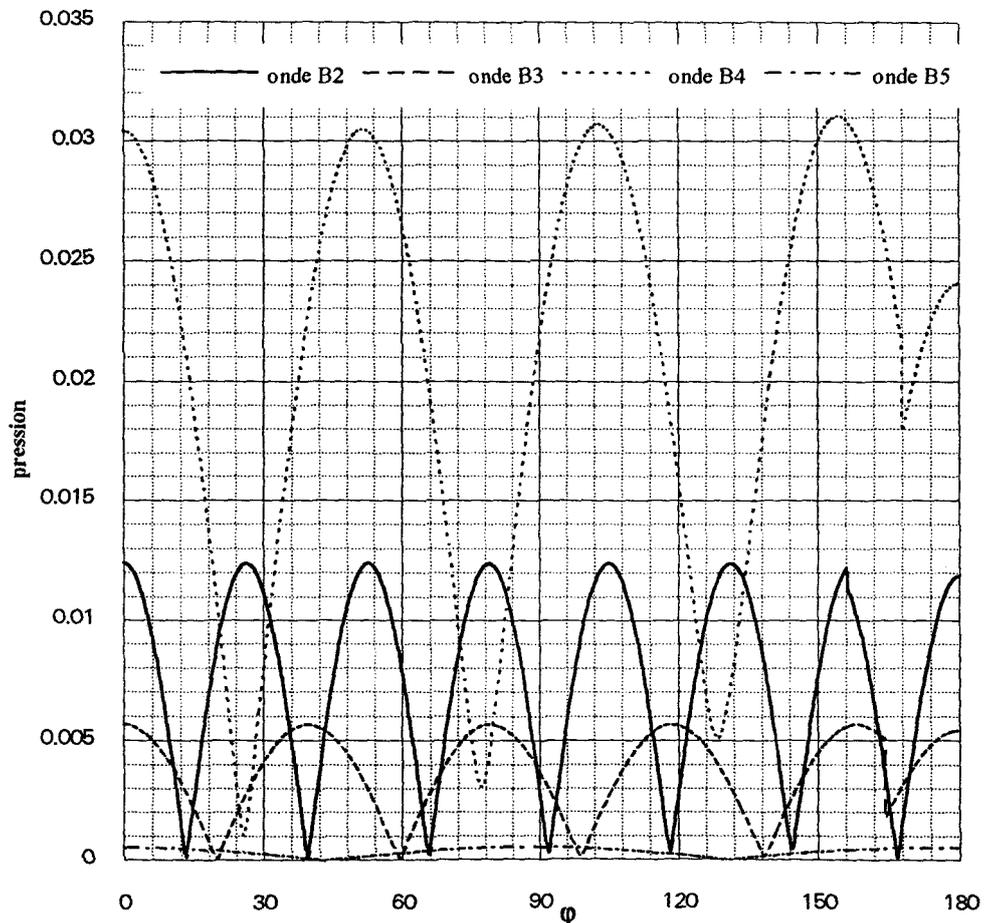


Figure 67 : Cylindre élastique - Ondes B2, B3 et B5 - $P_{\ell_1}(\varphi) x_1 = 30,$
 $r/a = 5$

V.2.3. Pression diffusée par le cylindre élastique

Lorsque nous sommes les contributions des 8 premières ondes de type ℓ_2 , de l'onde réfléchie et des 7 ondes de type ℓ_1 existant à la fréquence réduite $x_1 = 30$, nous obtenons une bonne estimation de la pression diffusée par le cylindre élastique¹ comparativement à la pression calculée directement à partir de la série modale. Comme dans le second chapitre, nous utilisons l'expression asymptotique du coefficient de réflexion mais les expressions exactes des pressions diffusées par les ondes circonférentielles.

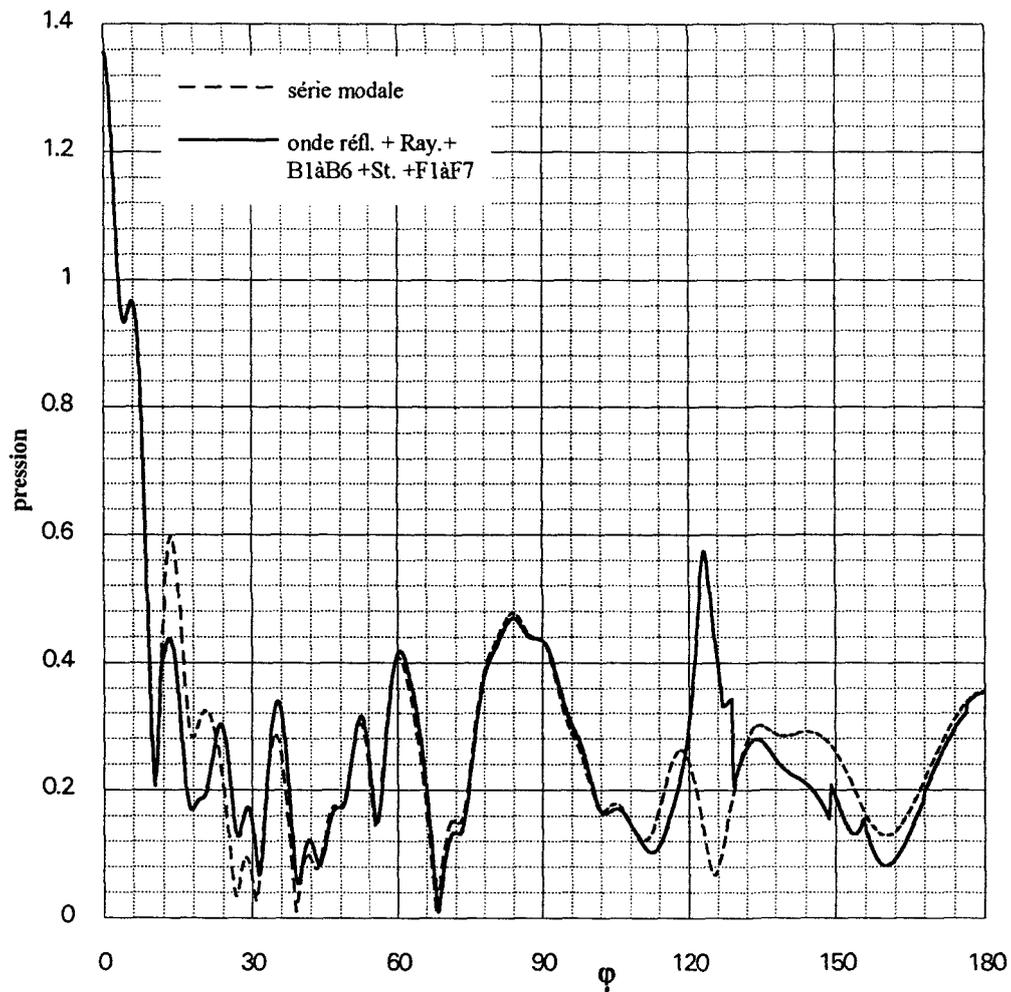


Figure 68 : Cylindre élastique - Pression résultante - $x_1 = 30$, $r/a = 5$

¹ Figure 68.

Numériquement, nous trouvons les mêmes erreurs que pour le cylindre fluide au voisinage du passage ombre/lumière, erreurs dues à l'absence des contributions des ondes transmises à travers le cylindre.

Nous obtenons également des points de rebroussement incorrects pour des angles φ correspondant au passage des angles critiques $\theta_{\ell}^{(c)}$ et $\theta_t^{(c)}$ par l'onde incidente $(\varphi_{\ell}^{(c)} = 155.8, \varphi_t^{(c)} = 127.2)$. Dans le paragraphe sur l'étude des contributions des ondes géométriques nous supposons arbitrairement que nous ne nous plaçons pas au voisinage de ces angles. En effet, dans ces zones aucun des développements asymptotiques établis pour le coefficient de réflexion n'est valable. Nous retrouvons donc cela numériquement.

Un phénomène ne s'explique pas apparemment par la théorie exposé jusqu'à présent. Vers 122° la courbe de la pression diffusée passe par un maximum alors que celle obtenue par la série modale est minimale. Si nous traçons uniquement les contributions de l'onde réfléchie et de l'onde de Rayleigh nous pouvons remarquer que ce phénomène est dû à la superposition de ces deux contributions¹.

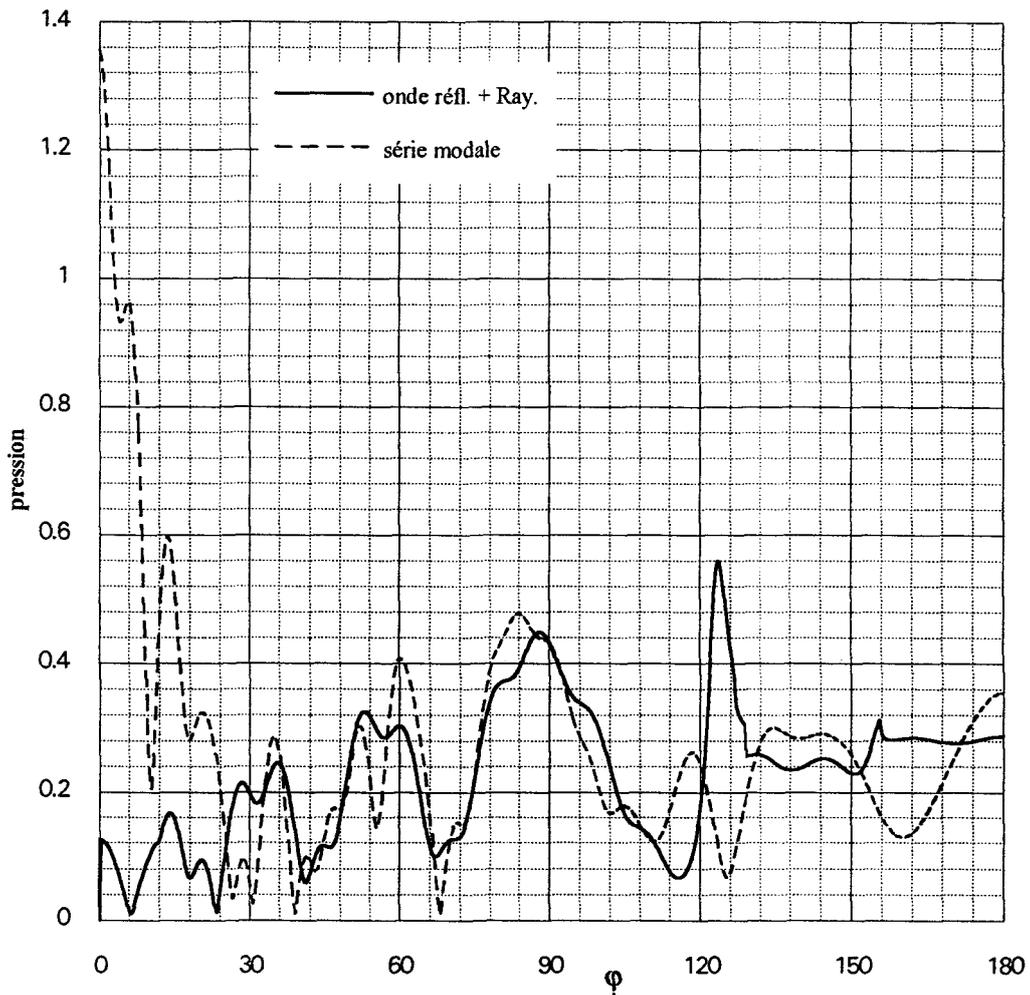


Figure 69 : Cylindre élastique - Pression résultante de la somme des ondes réfléchie et de Rayleigh - $x_1 = 30$, $r/a = 5$

¹ Figure 69.

Il faut rapprocher ce problème du phénomène d'interférence entre ces deux ondes existant lorsque l'interface est plane¹. En effet, l'angle de 122° correspond à l'angle associé à l'onde de Rayleigh lorsque l'interface est plane. Nous trouvons $\varphi_R = 90 + \theta_R = 121.5^\circ$ avec θ_R défini par la relation $\theta_R = \sin^{-1} \frac{c_1}{c_R}$ avec c_R la vitesse de propagation de l'onde de Rayleigh valant 2850 ms⁻¹ pour le problème qui nous intéresse ici. : elles se compensent exactement pour l'angle θ_R . Dans le cas du cylindre élastique, nous pouvons estimer que ce phénomène de compensation peut exister entre ces deux ondes si nous n'utilisons pas de développements asymptotiques pour calculer l'une ou l'autre des expressions. L'utilisation de tels développements change légèrement le comportement de l'une ou de l'autre des expressions est ainsi ne fait plus apparaître de phénomène d'interférence. De plus, dans cette zone angulaire le coefficient de réflexion exact est assez différent du coefficient obtenu par un développement asymptotique. Les courbes donnant le module du coefficient de réflexion calculé sans développement asymptotique et avec obtiennent même leur maximum de différences dans ce domaine angulaire². La différence entre le calcul approché et l'expression exacte s'accroît encore pour une fréquence réduite de 50 avant de décroître pour devenir négligeable pour une fréquence de 1000³.

¹ J-L. Izbicki, G. Maze, J. Ripoche, Diffusion acoustique par un plan, Onde de Rayleigh, in N. Gespa, *La Diffusion Acoustique*, chap. 2, pp. 52-62, 1987.

² Figure 70.

³ Figures 71 à 74.

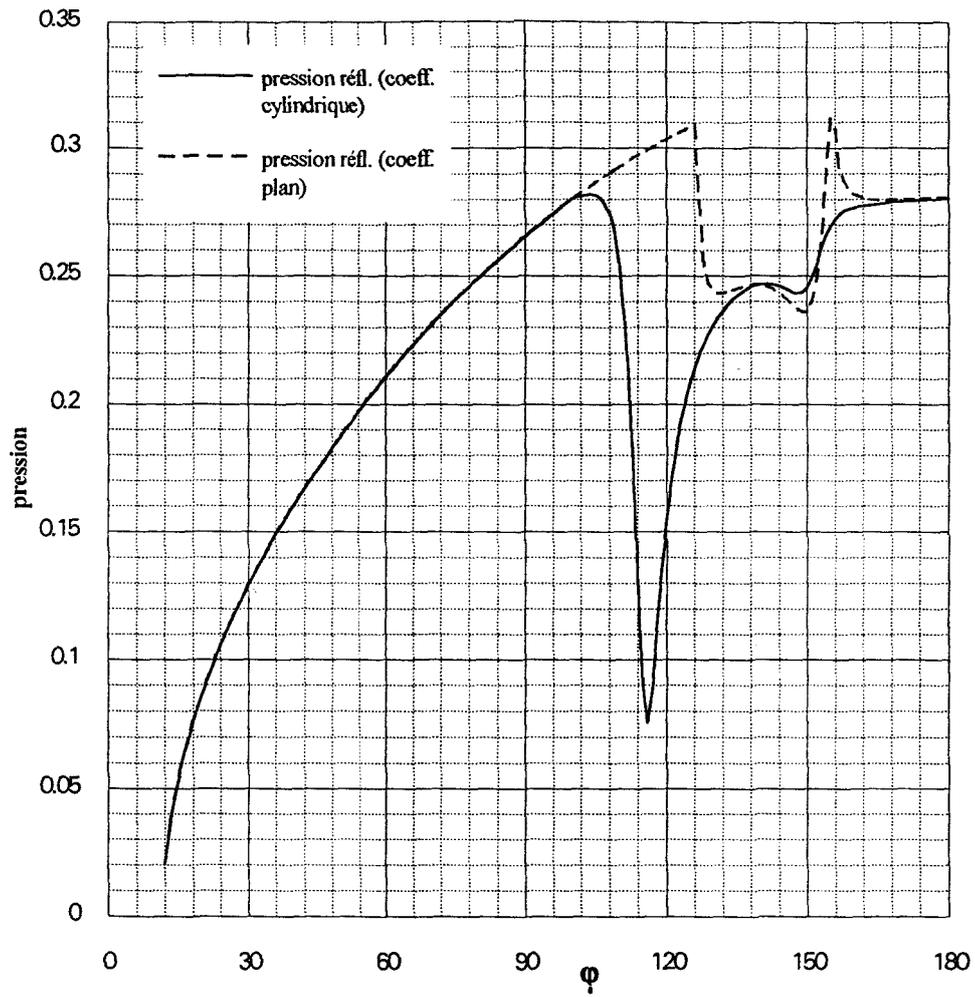


Figure 70 : Cylindre élastique - Pression due à l'onde réfléchie (coefficients plan et cylindrique), $x_1 = 30$, $r/a = 5$

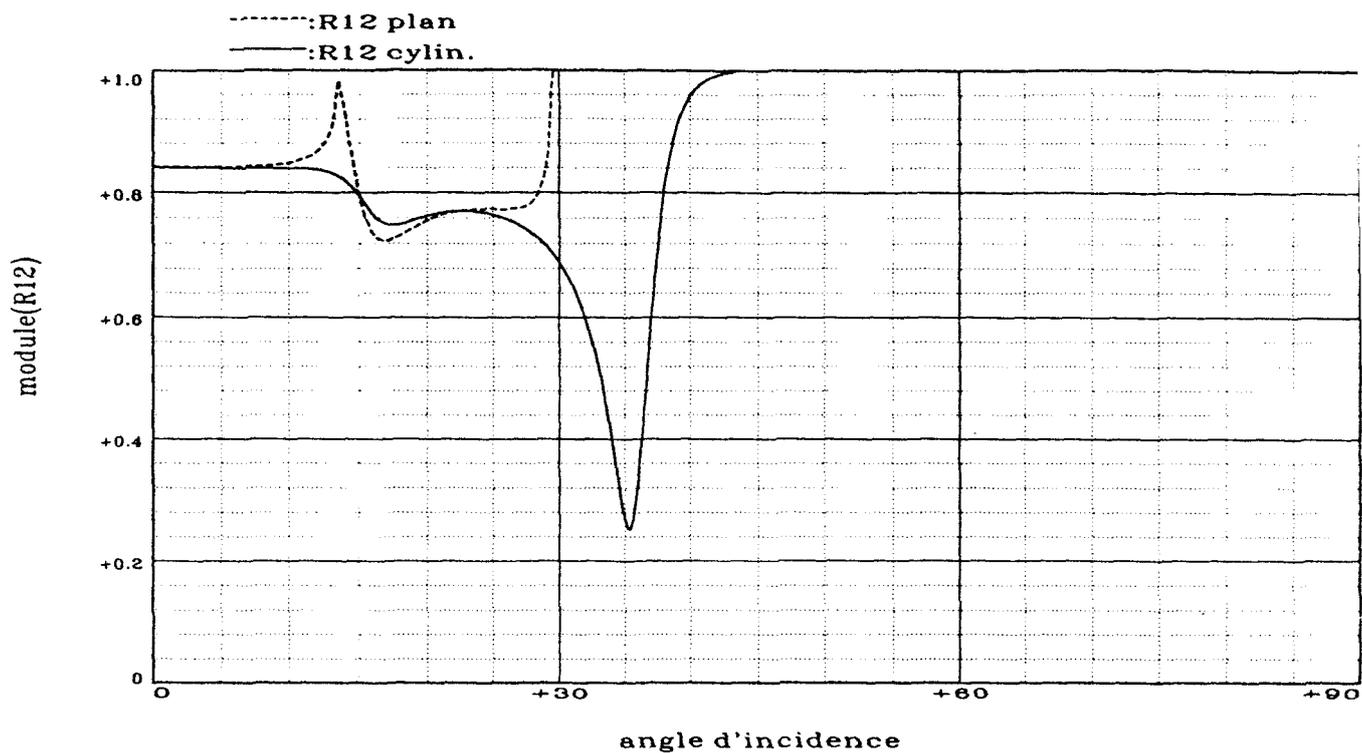


Figure 71 : Cylindre élastique - Coefficient de réflexion - $x_1 = 30$.

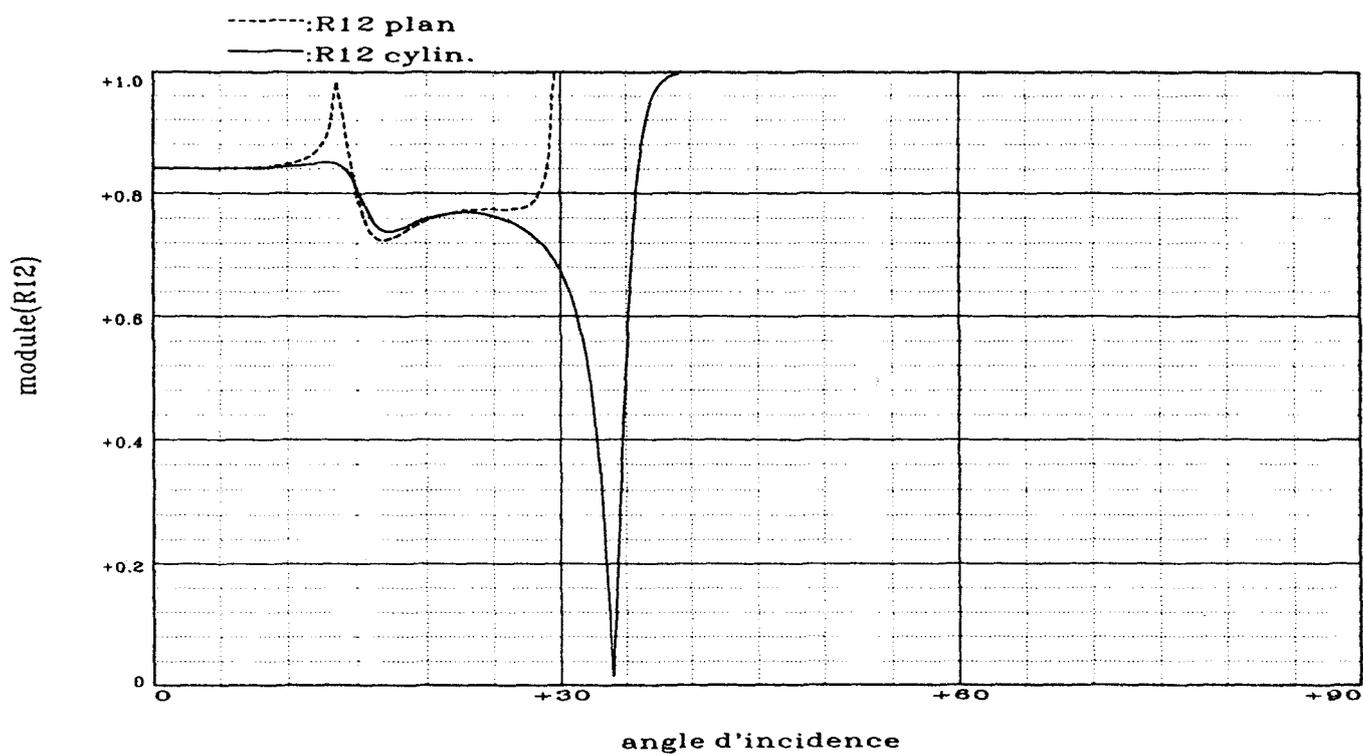


Figure 72 : Cylindre élastique - Coefficient de réflexion - $x_1 = 50$.

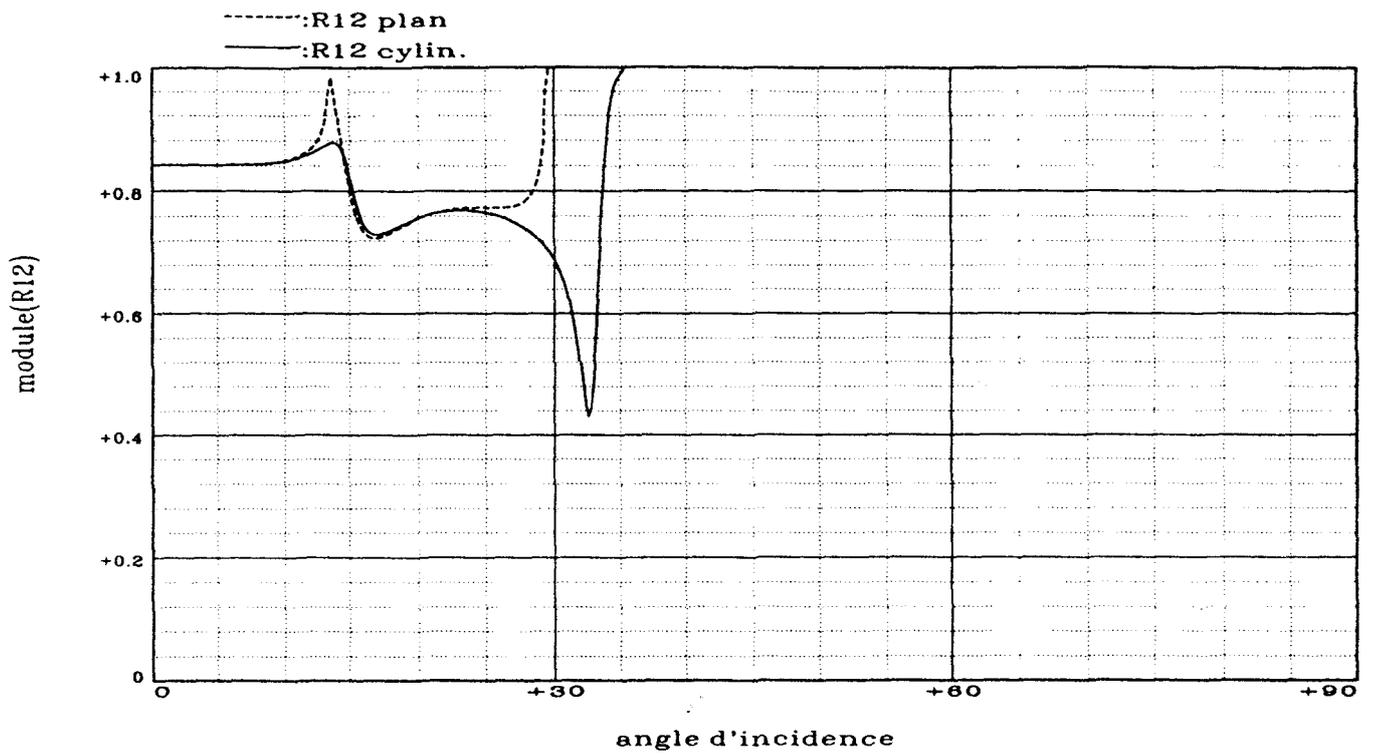


Figure 73 : Cylindre élastique - Coefficient de réflexion - $x_1 = 100$.

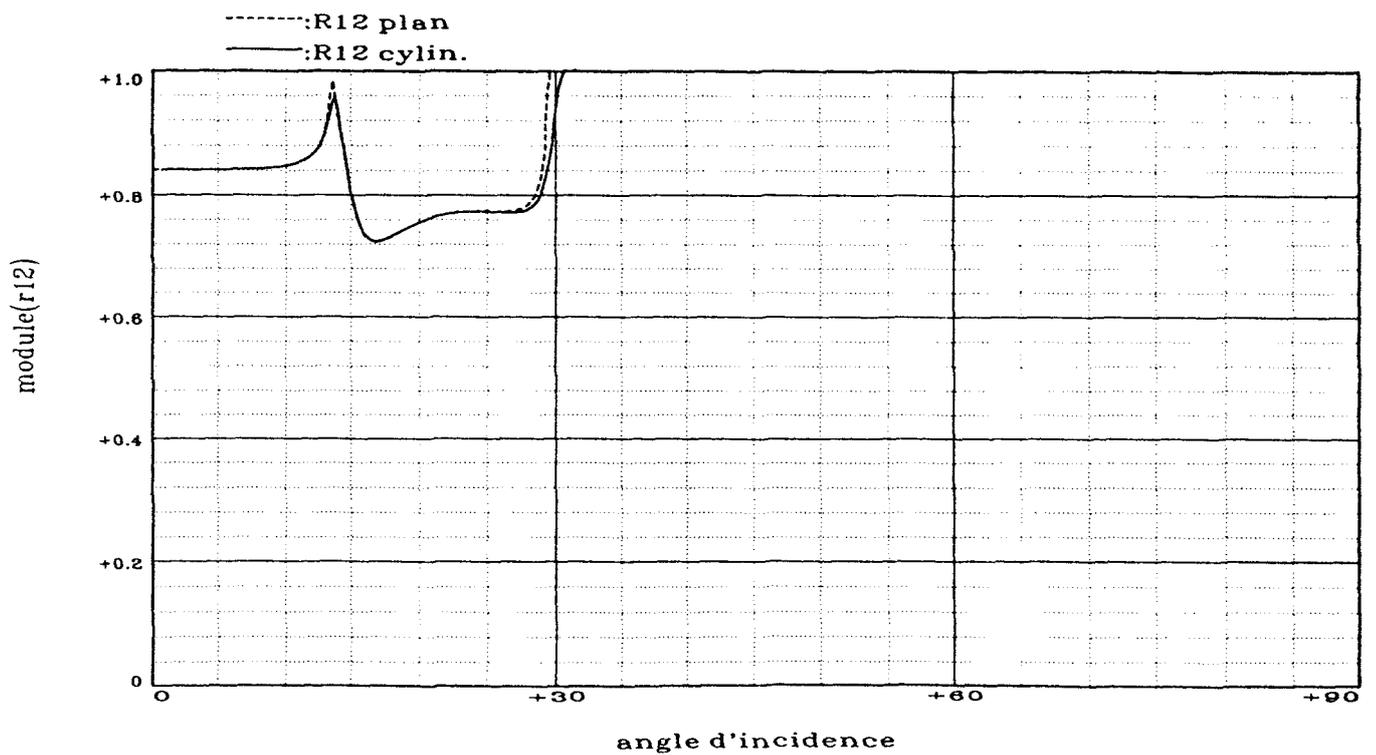


Figure 74 : Cylindre élastique - coefficient de réflexion - $x_1 = 1000$.

En utilisant l'expression exacte de la pression réfléchiée nous diminuons en partie le maximum de la courbe de la pression diffusée¹. Cette dernière ne coïncide pourtant toujours pas avec celle de la pression calculée à partir de la série modale. Nous nous trouvons en effet dans une zone très voisine du passage du pôle associé à l'onde de Rayleigh cylindrique, domaine où la théorie n'est pas correcte.

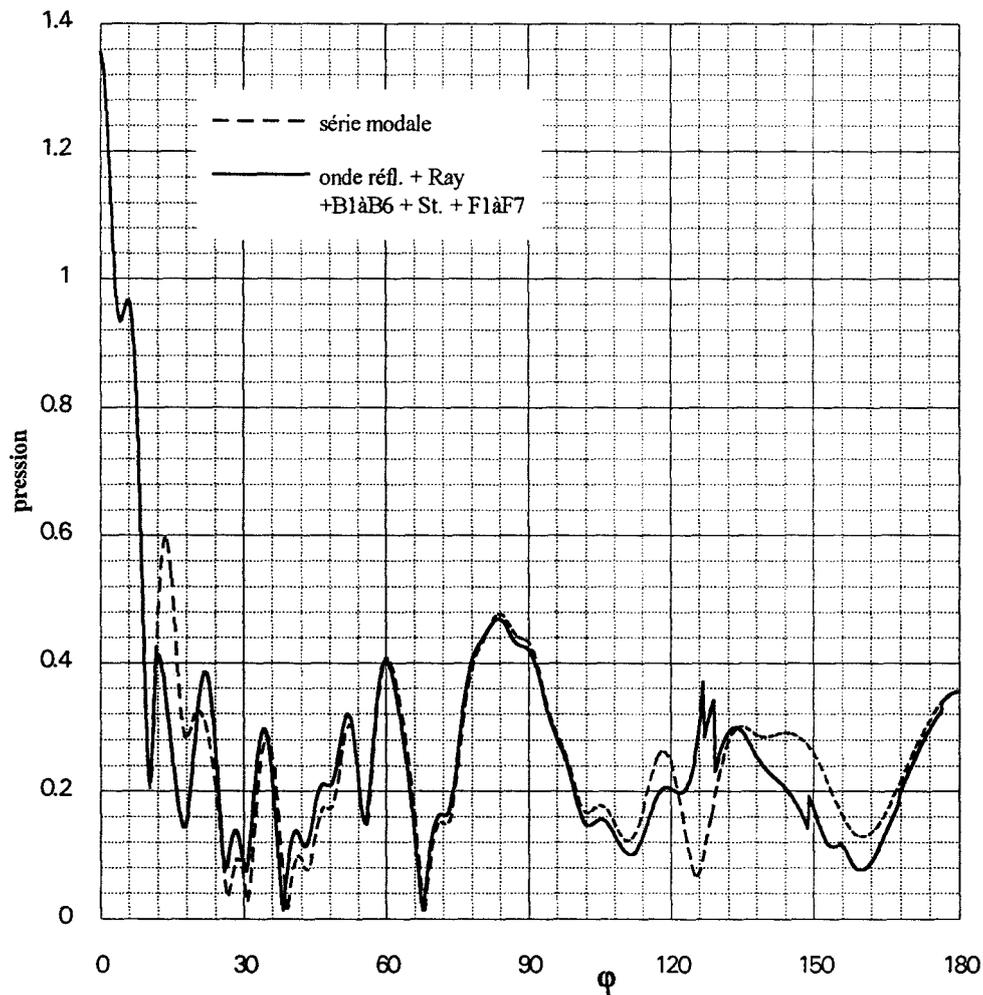
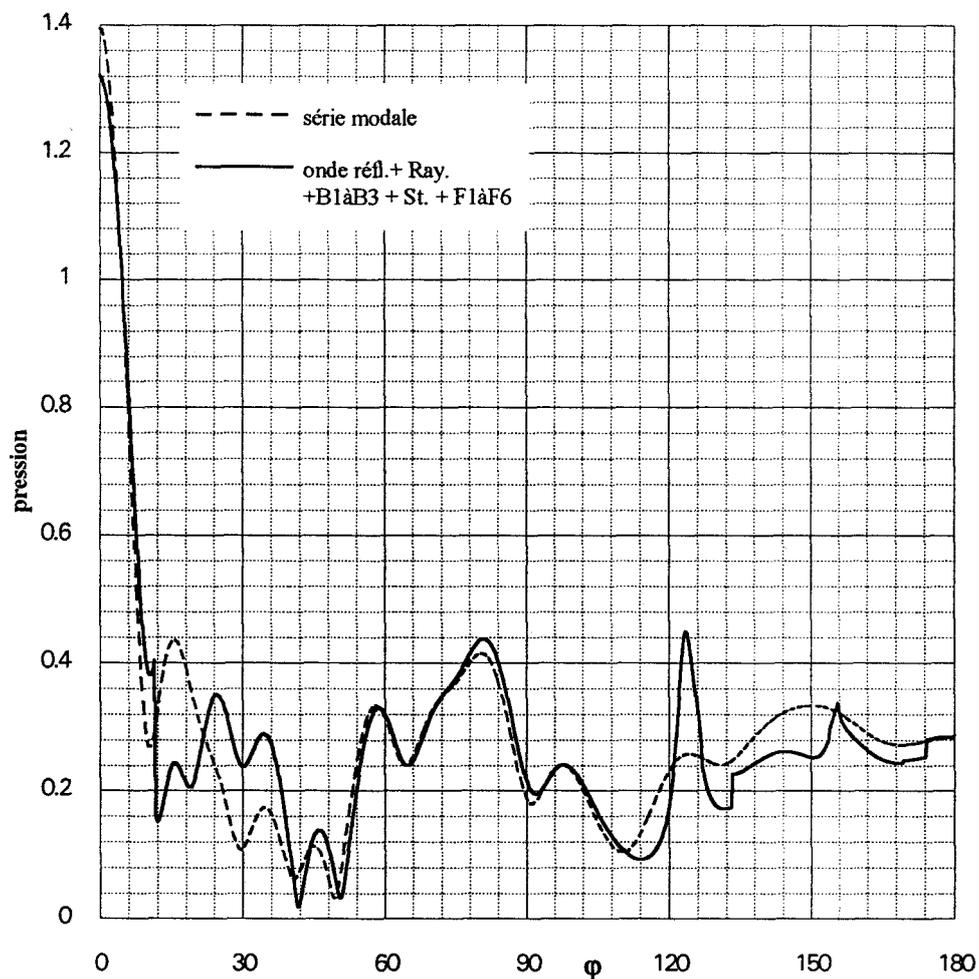


Figure 75 : Cylindre élastique - Pression résultante (calculée avec un coefficient de réflexion cylindrique) - $x_1 = 30$, $r/a = 5$

En dépit de ces problèmes numériques limités à une faible zone angulaire, nous estimons que la théorie développée jusqu'à présent se justifie numériquement pour l'étude de la diffusion par un cylindre élastique et pour

¹ Figure 75.

des fréquences supérieures ou voisine de 30. Nous avons calculé la pression diffusée jusqu'à une fréquence de 15 pour laquelle nous obtenons une relativement bonne approximation de la pression calculée à partir de la série modale¹. Dans ce type d'étude il est donc intéressant d'utiliser la T.G.D. pour identifier la diffusion comme la somme des contributions d'ondes circonférentielles et d'ondes géométriques même si en toute rigueur cette théorie n'est pas vérifiée dans tous les domaines de fréquence.



Afin d'obtenir des résultats indépendants de la distance séparant l'observateur du cylindre nous utilisons les calculs exposés dans la section V

¹ Figure 76.

du chapitre 2 pour évaluer l'indice de réflectivité du cylindre élastique¹. La comparaison des indices de réflectivité en décibel des pressions calculées par la T.G.D. et par la série modale montre des oscillations maximales de l'ordre de 40 dB et des différences de comportement pouvant aller jusqu'à 6 dB au voisinage de l'angle de Rayleigh.

¹ Figure 77.

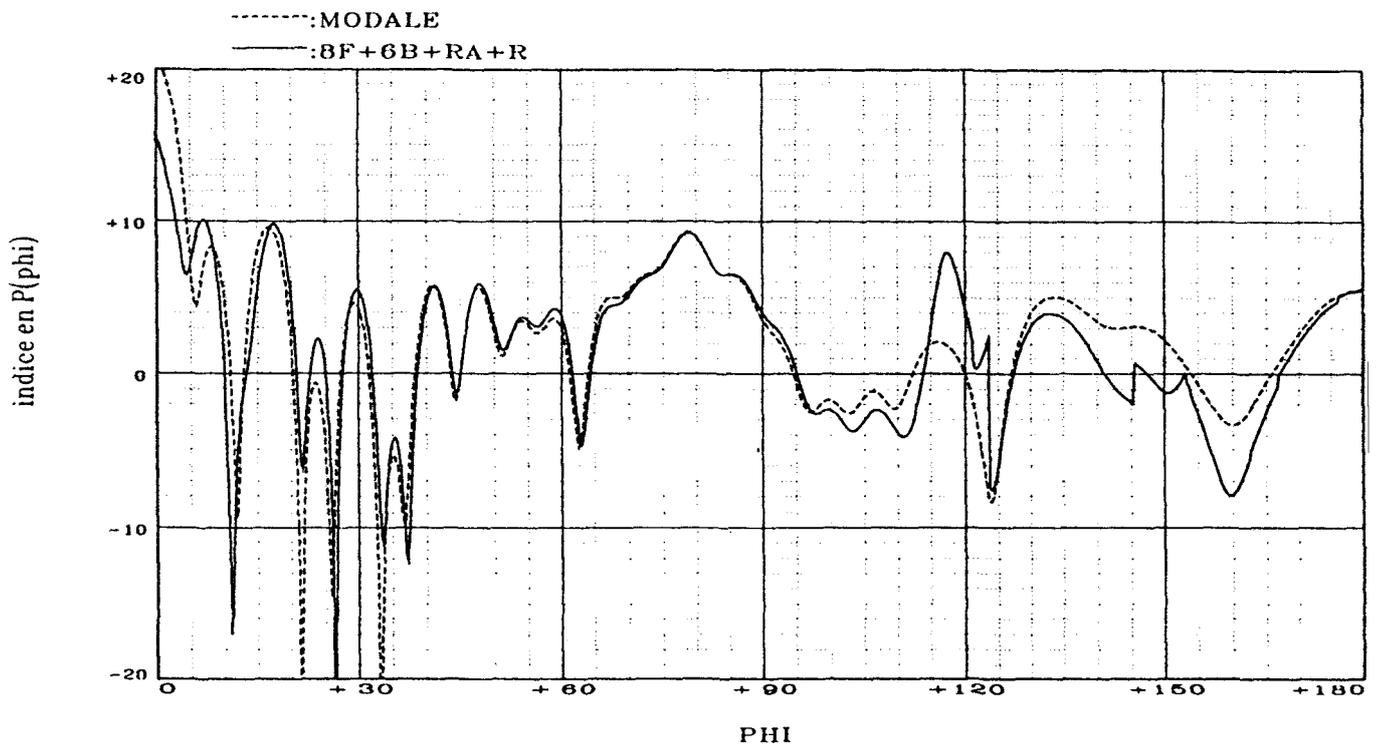


Figure 77 : Cylindre élastique - Indice de réflectivité - $x_1 = 30$ - $r/a=5$.

Chapitre 4

Etude de la diffusion par un tube élastique.

Nous considérons dans ce chapitre le cas d'un tube infini fait du même matériau que le cylindre élastique précédemment étudié. Ce tube est entouré d'eau possédant les mêmes caractéristiques que dans les deux chapitres précédents. Il contient de l'air considéré comme un gaz parfait de masse volumique $\rho_3 = 1.29 \cdot 10^{-3} \text{ gcm}^{-3}$. La vitesse du son dans ce milieu est notée c_3 et vaut 330 ms^{-1} . Son rayon interne est noté "b" et vaut lors du calcul de la pression diffusée $0.90 \times$ le rayon externe "a". Pour ne pas alourdir la présentation, nous appelons rayon interne aussi bien l'entité notée "b", que le rapport de ce rayon sur le rayon externe.

Comme la théorie développée dans le premier chapitre est vérifiée par tout objet cylindrique, nous pouvons utiliser les résultats obtenus pour l'étude du tube élastique infini. Le système d'équations (21) permet ainsi de calculer la pression diffusée par les ondes circonférentielles dès lors que les valeurs correspondant à ces dernières sont connues. Nous entreprenons la recherche de ces ondes en assurant une continuité numérique depuis les valeurs des pôles obtenues pour le cylindre élastique, jusqu'à celles calculées pour un tube de rayon interne variant entre 0 et 0,90.

La démarche entreprise jusqu'ici pour justifier analytiquement la contribution d'ondes diffractées par l'objet cylindrique est lourde à mettre en place dans le cas du tube. Admettant a priori la présence à hautes fréquences d'ondes diffractées par le tube, nous accentuons notre recherche sur l'étude purement géométrique de ces ondes. La résultante de l'ensemble de ces contributions correspond à la pression notée $P_{\text{géo}}^{\text{tot}}$ dans les chapitres précédents.

Afin d'accroître la validité de l'étude géométrique, il est nécessaire d'établir des résultats pour une fréquence plus élevée que dans les chapitres précédents. Cependant, souhaitant limiter le nombre d'ondes

circonférentielles nécessaires à l'obtention de la pression diffusée, nous sommes contraint à ne pas prendre une fréquence trop grande. La valeur de 100 semble un compromis acceptable pour calculer la pression résultante de la diffusion par le tube.

I APPLICATION DES REGLES DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE AU CALCUL DE LA PRESSION DIFFRACTEE

I.1. Hypothèses

Pour déterminer la pression diffractée par le tube élastique, nous appliquons les lois de l'optique géométrique à une onde se propageant à l'intérieur du tube. La propagation de cette onde est modélisée par une infinité de tubes élémentaires de champ de pression caractérisés chacun par une ligne polygonale appelée *rayon géométrique* ou *rayon* et par un coefficient de dispersion géométrique. Chaque rayon est identifié par l'angle, noté " α ", qu'il réalise avec la normale au tube. Il obéit aux lois de l'optique géométrique puisqu'il suit un trajet rectiligne entre les parois du tube et change de direction suivant les lois de Snell-Descartes à chaque contact avec une interface.

Nous appelons *trajet* le segment de rayon pris entre deux changements de direction. Après chaque réflexion, un rayon peut suivre deux trajets possibles suivant la nature de l'onde modélisée. Les trajets correspondant à des ondes transversales sont appelés *trajets transversaux*, ceux modélisant des ondes longitudinales sont les *trajets longitudinaux*. A chaque rayon composé, entre deux points notés "A" et "B", de "n" trajets dont "m" transversaux nous pouvons associer une durée de parcours ne dépendant que de "A", "B", "n" et "m" ; nous la notons $t(AB)$.

L'axe passant par O et de direction celle de l'onde incidente coupe le plan d'observation \mathbf{P} en deux demi-plans ; celui contenant le point

"P" est appelé *demi-plan "1"*, l'autre est le *demi-plan "2"*¹. La notation des angles adoptée dans cette section utilise les indices "1" ou "2" lorsque les angles correspondent à un rayon incident issu respectivement du demi-plan "1" ou du demi-plan "2". Elle utilise également, les exposants "L" et "T" pour différencier les trajets (longitudinaux ou transversaux). Lorsque ces exposants ne sont pas essentiels à la compréhension ils n'apparaissent pas.

L'interface entre le milieu élastique et le milieu extérieur est appelée interface "1/2". Celle entre le milieu élastique et le milieu intérieur est appelée interface "2/3".

Nous établissons dans un premier temps les équations permettant de calculer l'angle d'incidence d'un rayon susceptible d'atteindre un point cible situé loin du tube, ainsi que la durée du parcours de ce rayon dans le tube. Nous cherchons ensuite l'expression du coefficient de dispersion géométrique correspondant à un tube élémentaire de rayons. L'établissement des expressions des coefficients de *réflexion-réfraction* correspondant à chaque rayon complète cette section. Connaissant ces différentes expressions analytiques ainsi que leurs relations avec la pression diffractée, il nous est possible de calculer numériquement la valeur de cette pression.

¹ Figure 1.

I.2. Définition des domaines angulaires

$$\text{Soient } \begin{cases} n_\ell = \frac{c_1}{c_\ell}, \\ n_t = \frac{c_1}{c_t}, \\ n_3 = \frac{c_1}{c_3}, \end{cases} \text{ les indices de réfraction.}$$

A l'interface "1/2", il existe une limite angulaire, notée $\alpha_\ell^{(c)}$, au delà de laquelle les trajets ne peuvent plus être longitudinaux. De même, l'angle $\alpha_t^{(c)}$ correspond à la limite d'existence des trajets transversaux. Les lois de Snell-Descartes appliquées aux interfaces notées "2/3" et "1/2" permettent de calculer ces angles critiques :

$$\bullet \alpha_\ell^{(c)} = \sin^{-1}\left(\frac{c_1}{c_\ell}\right),$$

$$\bullet \alpha_t^{(c)} = \sin^{-1}\left(\frac{c_1}{c_t}\right).$$

Suivant la valeur de l'angle réalisé par un rayon, les trajets, effectués dans le tube et venant de l'interface "1/2", atteignent la paroi interne ou non. L'angle limite correspondant à un contact tangent des trajets longitudinaux sur l'interface "2/3", noté $\alpha_{s\ell}$, vérifie l'équation :

$$\bullet \sin(\alpha_{s\ell}) = n_\ell \sin(\beta)$$

où l'angle " β " s'exprime simplement en fonction du rapport des rayons " η " :

$$\beta = \text{Arsin}(\eta).$$

² Il n'y a aucun rapport entre cet angle et le résidu défini en amont et en aval de cette section.

De même l'angle limite, noté α_{st} au delà duquel les trajets transversaux ne sont plus en contact avec l'interface "2/3" vérifie l'équation :

$$\bullet \sin(\alpha_{st}) = n_t \sin(\beta)$$

Ainsi, $\alpha_{s\ell} = \sin^{-1}(\eta n_\ell)$ et $\alpha_{st} = \sin^{-1}(\eta n_t)$

Suivant les valeurs de η , n_ℓ et n_t , les domaines angulaires varient. Afin de simplifier l'étude, le rapport " η " est supposé supérieur à $\frac{c_t}{c_\ell}$.

Seul le cas réaliste $c_t > c_\ell$ est envisagé ici.

Ces hypothèses étant précisées, l'étude doit être conduite dans les 5 intervalles angulaires suivants :

$$\begin{aligned} I_1 &= [0 ; \alpha_{s\ell}[, \\ I_2 &= [\alpha_{s\ell} ; \alpha_\ell^{(c)}[, \\ I_3 &= [\alpha_\ell^{(c)} ; \alpha_{st}[, \\ I_4 &= [\alpha_{st} ; \alpha_t^{(c)}[, \\ I_5 &=]\alpha_t^{(c)} ; \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

I.3. Etudes des rayons³

Avec les notations de la figure 78 nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$(107) \quad \begin{cases} \pi - \varphi = \alpha_1 + \Sigma_1 + \gamma_1 \\ \pi + \varphi = \alpha_2 + \Sigma_2 + \gamma_2 \end{cases}$$

Seuls les rayons dont l'angle d'incidence vérifie l'une de ces deux équations atteind le point d'observation "P". Les angles " Σ_1 " et " Σ_2 " correspondent aux trajets multiples effectués dans le tube.

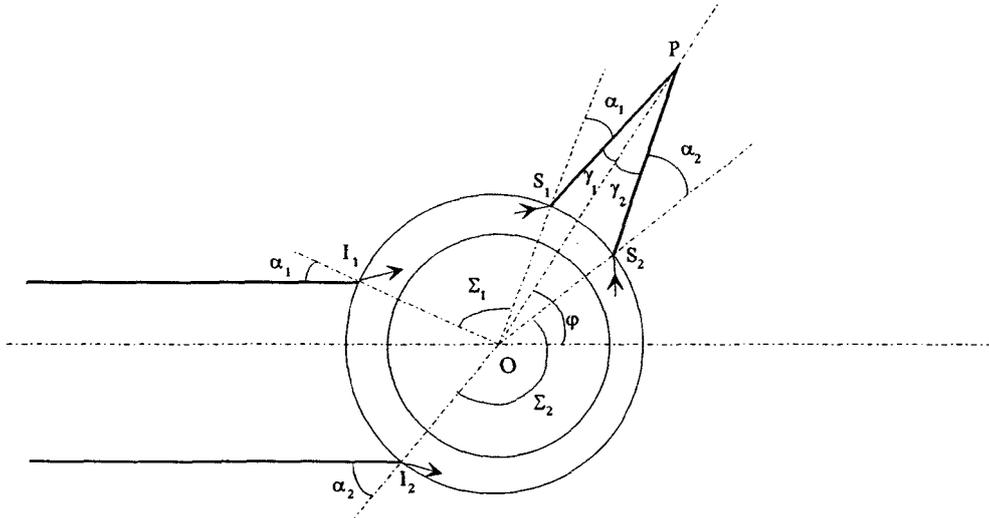


Figure 78 : Trajet d'une onde géométrique - notations.

En utilisant des lois trigonométriques simples dans les triangles OPS₁ et OPS₂, nous obtenons les expressions de γ_1 et γ_2 :

$$(108) \quad \gamma_i = \alpha_i - \sin^{-1} \left(\frac{\sin(\alpha_i)}{R} \right) \quad \text{avec } i \in \{1, 2\}$$

³ Ce paragraphe et le suivant reprennent la méthode utilisée par M. Fekih dans sa thèse de 3^{ème} cycle pour une onde incidente cylindrique. M. Fekikh, *thèse de troisième cycle*, Université de Paris VII, 1982.

Le calcul étant identique pour les angles " Σ_1 " et " Σ_2 ", nous l'effectuons pour un angle noté " Σ " sans préciser l'indice correspondant au demi-plan.

I.3.1. Intervalle angulaire $I_1 = [0; \alpha_{sl}]^4$

Dans cet intervalle, les rayons sont mixtes. Les trajets sont tous en contact avec la paroi interne du tube. Le point initial et les angles correspondant au $i^{\text{ème}}$ trajet ont pour indice " i ".

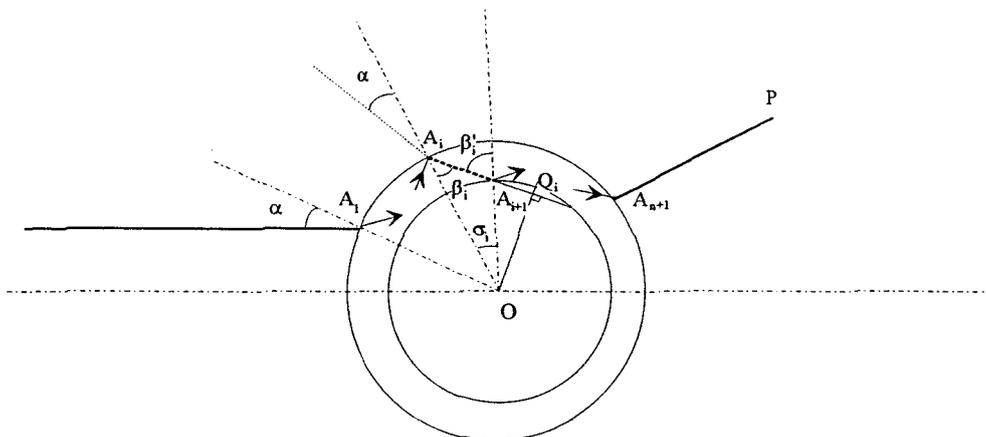


Figure 79: Trajet d'une onde géométrique - $\alpha \in I_1$

⁴ Figure 78.

En appliquant les lois de Snell-Descartes aux interfaces "1/2" et "2/3" autant de fois qu'il est nécessaire, nous obtenons les relations suivantes :

$$(109) \quad \begin{cases} \sin \beta_i^\ell = \frac{\sin \alpha}{n_\ell} \\ \sin \beta_i^t = \frac{\sin \alpha}{n_t} \end{cases}$$

De plus, sachant que $\sin \beta_i = \eta \sin \beta_i'$,

$$(110) \quad \begin{cases} \sin \beta_i'^\ell = \frac{\sin \alpha}{\eta n_\ell} \\ \sin \beta_i'^t = \frac{\sin \alpha}{\eta n_t} \end{cases}$$

A. CALCUL DE L'ANGLE "Σ"

L'angle au centre, correspondant au $i^{\text{ème}}$ trajet, noté σ_i vérifie la relation :

$$(111) \quad \sigma_i = \beta_i' - \beta_i.$$

Connaissant les expressions de β_i' et de β_i , nous obtenons l'expression des angles aux centres :

$$(112) \quad \begin{cases} \sigma_i^\ell = \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{\eta n_\ell} - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_\ell} \\ \sigma_i^t = \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{\eta n_t} - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_t} \end{cases}$$

L'expression de l'angle "Σ" pour "n" trajets dont "m" transversaux est ainsi :

$$(113) \quad \Sigma = (n - m) \left[\sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{\eta n_\ell} - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_\ell} \right] + m \left[\sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{\eta n_t} - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_t} \right]$$

B. EXPRESSION DU TEMPS DE PARCOURS DANS LE TUBE

Soit $t(A_1A_{n+1})$ l'intervalle de temps séparant A_1 (point d'impact) de A_{n+1} (point de résurgence du rayon transmis). Soit Q_i la projection du point A_{i+1} sur la normale à la droite (A_iA_{i+1}) passant par O^5 .

$$(114) \quad A_iA_{i+1} = A_iQ_i - A_{i+1}Q_i = a(\cos\beta_i - \cos\beta'_i)$$

d'où

$$(115) \quad \begin{cases} A_iA_{i+1}^\ell = a \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\sin\alpha}{n_\ell}\right)^2} - \sqrt{\eta^2 - \left(\frac{\sin\alpha}{n_\ell}\right)^2} \right] \\ A_iA_{i+1}^t = a \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\sin\alpha}{n_t}\right)^2} - \sqrt{\eta^2 - \left(\frac{\sin\alpha}{n_t}\right)^2} \right] \end{cases}$$

Ainsi,

$$(116) \quad t(A_1A_{n+1}) = \frac{a}{c_1} \left[(n-m) \left(\sqrt{n_\ell^2 - \sin^2\alpha} - \sqrt{\eta^2 n_\ell^2 - \sin^2\alpha} \right) + m \left(\sqrt{n_t^2 - \sin^2\alpha} - \sqrt{\eta^2 n_t^2 - \sin^2\alpha} \right) \right]$$

$$I.3.2. \text{ Intervalle angulaire } I_2 = \left[\alpha_{se} ; \alpha_\ell^{(c)} \right] \text{ } ^6$$

Dans cet intervalle, il existe des trajets des deux types. Les trajets longitudinaux à l'inverse des transversaux ne sont plus en contact avec la paroi interne du tube. En adoptant une démarche identique à celle du précédent paragraphe nous en déduisons l'expression de Σ et de $t(A_1A_{n+1})$.

⁵ Figure 78.

⁶ Figure 79.

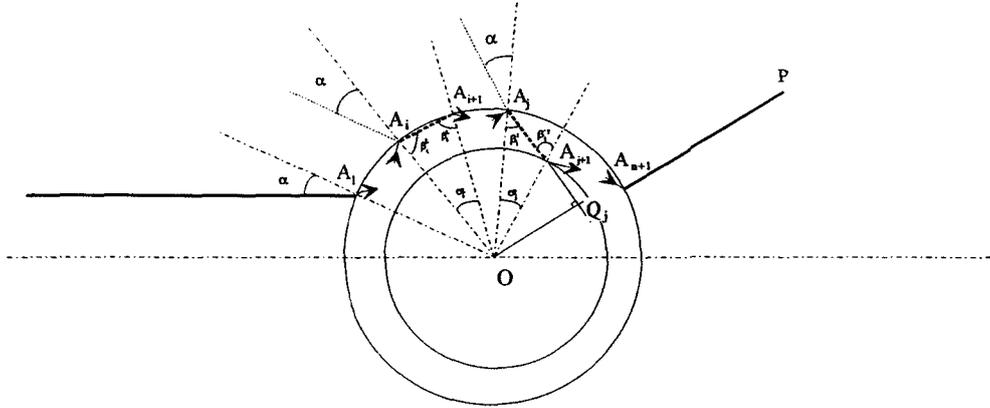


Figure 80 : Trajet d'une onde géométrique - $\alpha \in I_2$

A. EXPRESSION DE L'ANGLE " Σ "

L'angle au centre, correspondant au $i^{\text{ème}}$ trajet longitudinal, vérifie la relation :

$$(117) \quad \sigma_i^l = \pi - 2\beta_i^l.$$

Tant qu'une onde peut être transmise par le tube, l'angle β_i existe et reste indépendant de l'intervalle d'étude.

Connaissant son expression, nous obtenons celles des angles aux centres :

$$(118) \quad \begin{cases} \sigma_i^l = \pi - 2 \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_l} \\ \sigma_i^t = \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{\eta n_t} - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_t}. \end{cases}$$

L'expression de l'angle " Σ " pour " n " trajets dont " m " transversaux est ainsi :

$$(119) \quad \Sigma = (n - m) \left[\pi - 2 \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_l} \right] + m \left[\sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{\eta n_t} - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_t} \right]$$

B. EXPRESSION DU TEMPS DE PARCOURS DANS LE TUBE

Comme

$$(120) \quad A_i A_{i+1}^\ell = 2 a \cos \beta_i'^\ell = 2 a \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n_\ell} \right)^2},$$

nous obtenons pour $t(A_1 A_{n+1})$:

$$(121) \quad t(A_1 A_{n+1}) = \frac{a}{c_1} \left[(n-m) \left(\sqrt{n_\ell^2 - \sin^2 \alpha} \right) + m \left(\sqrt{n_t^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\eta^2 n_t^2 - \sin^2 \alpha} \right) \right]$$

$$I.3.3. \text{ Intervalle angulaire } I_3 = \left[\alpha_\ell^{(c)} ; \alpha_{st} \right]$$

Dans cet intervalle, les rayons transmis sont composés uniquement de trajets transversaux possédant un point commun avec l'interface "2/3". A partir de ces hypothèses nous obtenons les relations suivantes :

$$(122) \quad \Sigma = n \left[\sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{\eta n_t} - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_t} \right]$$

et

$$(123) \quad t(A_1 A_{n+1}) = \frac{a}{c_1} n \left[\sqrt{n_t^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\eta^2 n_t^2 - \sin^2 \alpha} \right]$$

I.3.4. Intervalle angulaire $I_4 = \left[\alpha_{st} ; \alpha_t^{(c)} \right]^7$

Dans cet intervalle, les rayons sont composés uniquement de trajets transversaux. Ces trajets ne rencontrent jamais la paroi interne du tube.

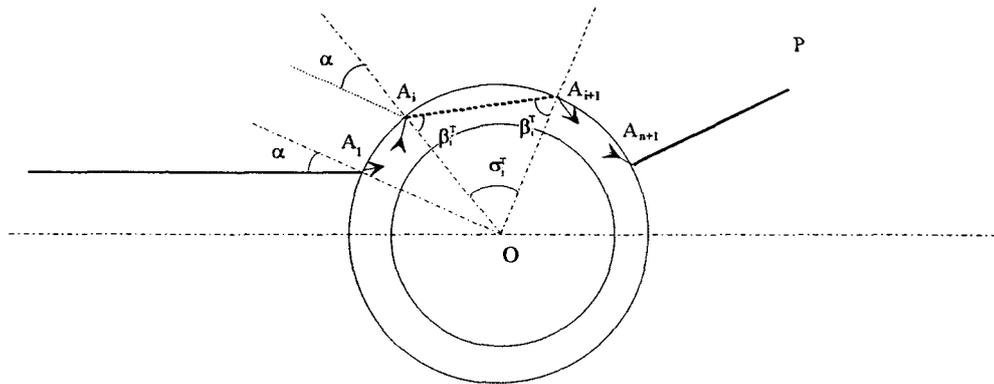


Figure 81: Trajet d'une onde géométrique - $\alpha \in I_4$

Les relations donnant Σ et $t(A_1 A_{n+1})$ sont

$$(124) \quad \Sigma = n \left[\pi - 2 \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_t} \right]$$

et

$$(125) \quad t(A_1 A_{n+1}) = \frac{a}{c_1} 2n \sqrt{n_t^2 - \sin^2 \alpha}.$$

⁷ Figure 80.

$$I.3.5. \text{ Intervalle angulaire } I_5 = \left] \alpha_t^{(c)} ; \frac{\pi}{2} \right]$$

Dans l'intervalle angulaire I_5 , aucun rayon ne traversant le tube.

Ainsi $\Sigma = 0$ et $n = 0$.

I.3.6. Conclusion

A. RELATIONS LIANT L'ANGLE " φ " ET LA DUREE " $t(OP)$ " A L'ANGLE " α "

Soit P_s un plan d'onde incident. $t(P_s P) = t(P_s A_1) + t(A_1 A_{n+1}) + t(A_{n+1} P)$. En prenant l'origine des temps en O, nous obtenons :

$$(126) \quad \begin{aligned} t(OP) &= t(OP_s) + t(P_s P) \\ &= t(OP_s) + t(P_s A_1) + t(A_1 A_{n+1}) + t(A_{n+1} P) \\ &= t(A_1 A_{n+1}) + t(A_{n+1} P) - t(A_1 O). \end{aligned}$$

avec

$$(127) \quad t(A_{n+1} P) = \frac{a}{c_1} \left[\sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \right]$$

et

$$t(A_1 O) = \frac{a}{c_1} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Nous pouvons ainsi donner les relations liant φ et $t(OP)$ à α connaissant l'intervalle décrit par α . Pour différencier les rayons issus du demi-plan "1" de ceux issus du demi-plan "2", nous introduisons la variable "s" définie par :

- $s = 1$ si le rayon incident est issu du demi-plan "2"
- $s = -1$ dans l'autre cas.

Les rayons peuvent accomplir plusieurs fois le tour du tube avant de ressortir. Il est donc utile d'introduire dans les relations liant φ à α un nombre entier "k" correspondant au nombre de tours effectués par un rayon ; ceci permet de conserver φ dans l'intervalle $[0, \pi]$.

En reprenant les équations (107) à (127), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \forall \alpha \in I_1 = [0, \alpha_{sl}], \\
 (128) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \pi + s\varphi = 2\alpha - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{R} + (n-m) \left[\sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{\eta n_\ell} - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_\ell} \right] \\
 & + m \left[\sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{\eta n_t} - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_t} \right] - 2k\pi \\
 & t(\text{OP}) = \frac{a}{c_1} \left[(n-m) \left(\sqrt{n_\ell^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\eta^2 n_\ell^2 - \sin^2 \alpha} \right) \right. \\
 & \left. + m \left(\sqrt{n_t^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\eta^2 n_t^2 - \sin^2 \alpha} \right) + \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} - 2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \right],
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \forall \alpha \in I_2 = [\alpha_{sl}, \alpha_\ell^{(c)}], \\
 (129) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \pi + s\varphi = 2\alpha - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{R} + (n-m) \left[\pi - 2 \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_\ell} \right] \\
 & + m \left[\sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{\eta n_t} - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_t} \right] - 2k\pi \\
 & t(\text{OP}) = \frac{a}{c_1} \left[2(n-m) \sqrt{n_\ell^2 - \sin^2 \alpha} \right. \\
 & \left. + m \left(\sqrt{n_t^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\eta^2 n_t^2 - \sin^2 \alpha} \right) + \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} - 2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \right],
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \forall \alpha \in I_3 = [\alpha_\ell^{(c)}, \alpha_{st}], \\
 (130) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \pi + s\varphi = 2\alpha - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{R} + n \left[\sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{\eta n_t} - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_t} \right] - 2k\pi \\
 & t(\text{OP}) = \frac{a}{c_1} \left[n \left(\sqrt{n_t^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{\eta^2 n_t^2 - \sin^2 \alpha} \right) \right. \\
 & \left. + \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} - 2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \right],
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$(131) \quad \begin{cases} \forall \alpha \in I_4 = \left[\alpha_{st}, \alpha_t^{(c)} \right], \\ \pi + s\varphi = 2\alpha - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{R} + n \left[\pi - 2 \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n_t} \right] - 2k\pi \\ t(OP) = \frac{a}{c_1} \left[2n \sqrt{n_t^2 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} - 2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \right], \end{cases}$$

et enfin

$$(132) \quad \begin{cases} \forall \alpha \in I_5 = \left] \alpha_t^{(c)}, \frac{\pi}{2} \right], \\ \pi + s\varphi = 2\alpha - \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{R} \\ t(OP) = \frac{a}{c_1} \left[\sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} - 2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \right]. \end{cases}$$

B. REMARQUES

- pour les intervalles angulaires I_1 et I_3 , le nombre de trajets "n" effectués par les rayons entre deux parois est pair.

- pour l'intervalle angulaire I_2 , seul le nombre de trajets transversaux "m" est pair.

Les angles de réflexion aux interfaces "1/2" et "2/3" dépendent uniquement des caractéristiques du tube et de l'angle du rayon incident.

Ainsi,

- si $\alpha \in I_1$, aucun trajet entre deux réflexions sur la paroi externe ne se fait sans réflexion sur la paroi interne.

- si $\alpha \in I_2$, les trajets transversaux admettent tous un point commun avec la paroi interne. Par contre, ceux de nature longitudinale ne l'atteignent jamais.

- si $\alpha \in I_3$, les rayons sont purement transversaux et se réfléchissent toujours sur la paroi interne.

- si $\alpha \in I_4$, les rayons sont également transversaux mais ils ne se réfléchissent que sur l'interface "1/2".

I.4. Calcul du coefficient de dispersion géométrique⁸

Soit $1 \cdot \delta h_i$ la section d'un tube élémentaire incident. δh_i correspond à la dispersion dans le plan perpendiculaire à l'axe du tube. Soit $1 \cdot \delta h_s$ la section droite du tube élémentaire résurgent correspondant. En supposant qu'il y a conservation du flux d'énergie au cours du temps, nous pouvons écrire une relation liant le module de la pression incidente d'un tube élémentaire de rayon, notée " p_i " à celui de sa pression en P notée " p_s " :

$$(133) \quad |G_{n,m}(\alpha)|^2 |p_i|^2 \delta h_i = |p_s|^2 \delta h_s$$

avec $G_{n,m}(\alpha)$ le coefficient résultant des réflexions et réfractions multiples d'un rayon d'angle d'incidence " α ".

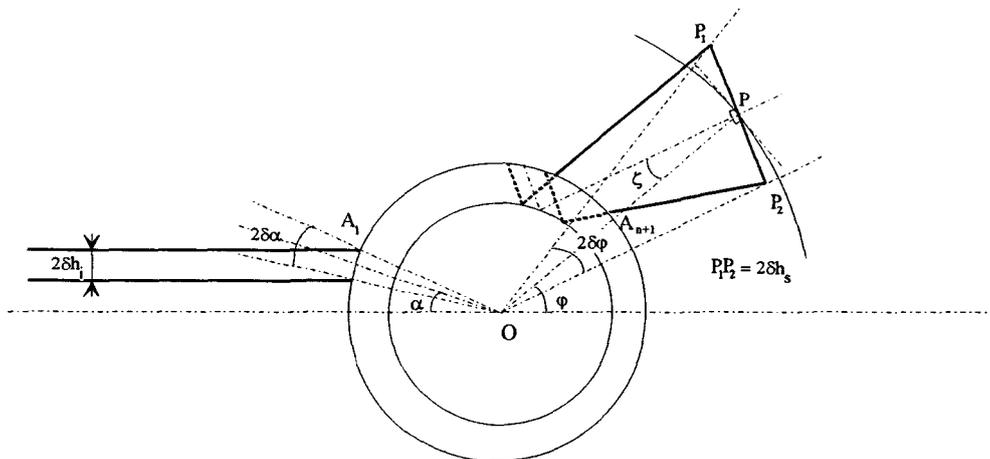


Figure 82 : Tube élastique : Coefficient de dispersion.

⁸ Figure 81.

Soit $D_{n,m}(\alpha)$ le coefficient de dispersion géométrique dans le plan \mathcal{P} du tube des rayons d'angle d'incidence " α ".

$$(134) \quad D_{n,m}(\alpha) = \frac{\delta h_s}{\delta h_i}.$$

Avec cette notation, la relation entre p_s et p_i devient :

$$(135) \quad \left| \frac{p_s}{p_i} \right| = \frac{|G_{n,m}(\alpha)|}{\sqrt{D_{n,m}(\alpha)}}.$$

En se référant à la figure 81, nous obtenons :

$$(136) \quad \begin{cases} \delta h_i = a \delta \alpha \cos \alpha \\ \delta h_s = r \delta \varphi \cos \zeta. \end{cases}$$

d'où

$$(137) \quad D_{n,m}(\alpha) = \frac{\sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} \, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \, d\alpha}.$$

Connaissant la relation qui lie φ à α suivant le domaine angulaire de α nous pouvons en déduire $D_{n,m}(\alpha)$.

$$(138) \quad \forall \alpha \in I_1, D_{n,m}(\alpha) = \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} \left\{ \frac{2}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha}} \right. \\ \left. + (n-m) \left[\frac{1}{\sqrt{\eta^2 n_\ell^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n_\ell^2 - \sin^2 \alpha}} \right] \right. \\ \left. + m \left[\frac{1}{\sqrt{\eta^2 n_t^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n_t^2 - \sin^2 \alpha}} \right] \right\}.$$

$$(139) \quad \forall \alpha \in I_2, D_{n,m}(\alpha) = \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} \left\{ \frac{2}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha}} \right. \\ \left. - 2 \frac{n-m}{\sqrt{n_\ell^2 - \sin^2 \alpha}} + m \left[\frac{1}{\sqrt{\eta^2 n_t^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n_t^2 - \sin^2 \alpha}} \right] \right\}.$$

$$(140) \quad \forall \alpha \in I_3, D_{n,m}(\alpha) = \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} \left\{ \frac{2}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha}} \right. \\ \left. + n \left[\frac{1}{\sqrt{\eta^2 n_t^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n_t^2 - \sin^2 \alpha}} \right] \right\}.$$

$$(141) \quad \forall \alpha \in I_4, \\ D_{n,m}(\alpha) = \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} \left\{ \frac{2}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{2n}{\sqrt{n_t^2 - \sin^2 \alpha}} \right\}$$

$$(142) \quad \forall \alpha \in I_5, D_{n,m}(\alpha) = \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha} \left\{ \frac{2}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha}} \right\}$$

1.5. Expression des coefficients de réflexion-réfraction des rayons

Afin de faciliter la lecture de ce paragraphe, nous présentons dans un premier temps les coefficients de réflexion-réfraction établis dans chaque zone angulaire. L'établissement du coefficient dans l'intervalle I_2 étant particulièrement complexe, l'annexe E lui sera consacrée.

En négligeant la courbure du tube, nous pouvons prendre pour coefficients de réflexion et de transmission à chaque interface ceux de la

plaque plane¹. Soit $g_{n,m}(\alpha)$ le coefficient de réflexion-réfraction résultant du trajet d'un rayon formé de "n-m" trajets longitudinaux et de "m" trajets transversaux. La définition précise de $G_{n,m}(\alpha)$ est $G_{n,m}(\alpha) = \sum_T g_{n,m}(\alpha)$, avec "T" l'ensemble de tous les rayons composés de "n-m" trajets longitudinaux et de "m" trajets transversaux.

1.5.1. Notations

A l'interface notée "1/2" le coefficient de réflexion du milieu 1 vers le milieu 2 est noté R_{12} . Les coefficients de transmission du milieu "i" vers le milieu "j" d'un rayon de nature "A" (avec $A \in \{L,T\}$ et $i,j \in \{1,2\}$) sont notés T_{ij}^A . Les coefficients de réflexion du milieu 2 vers le milieu 1 d'un rayon de nature "A" avant l'interface et de nature "B" après sont notés R_{AB}^1 (avec $A,B \in \{L,T\}$).

A l'interface notée "2/3" les coefficients de réflexion sont notés R_{AB}^3 par similarité avec l'interface "1/2".

La notation " Σ " désigne tout coefficient correspondant aux multiples réflexions sur les deux surfaces du tube.

Pour éviter toute confusion $G_{nm}^i(\alpha)$ porte en exposant le numéro "i" de l'intervalle dans lequel varie α .

$$1.5.2. \text{ domaine angulaire } I_5 = \left] \alpha_t^{(c)}, \frac{\pi}{2} \right]$$

¹ J-M. Conoir, A. Gérard, A. Derem, Ondes acoustiques transmises et séries de Debye généralisées. I. Traitement des interfaces planes, *J. Acoustique*, 4, pp. 159-200, 1991.

Comme il n'y a pas de rayon transmis dans le tube,

$$(143) \quad \forall \alpha \in I_5, \left\{ \begin{array}{l} \forall (n, m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* G_{n,m}^5(\alpha) = 0 \\ \text{et} \\ G_{0,0}^5(\alpha) = R_{12}(\alpha) \end{array} \right.$$

$$I.5.3. \text{ domaine angulaire } I_4 = \left[\alpha_{st} ; \alpha_t^{(c)} \right[$$

Les rayons transmis ne possèdent que des trajets transversaux n'ayant aucun contact avec la paroi interne du tube. Ainsi

$$(144) \quad \forall \alpha \in I_4, \forall n \in \mathbf{N}^*, \left\{ \begin{array}{l} \forall m \in \mathbf{N}, m \neq n, G_{n,m}^4(\alpha) = 0 \\ \text{et} \\ G_{n,n}^4(\alpha) = T_{12}^T(\alpha) \left(R_{TT}^1(\alpha) \right)^{n-1} T_{21}^T(\alpha). \end{array} \right.$$

$$I.5.4. \text{ domaine angulaire } I_3 = \left[\alpha_\ell^{(c)} ; \alpha_{st} \right[$$

Les trajets transversaux en contact avec la paroi interne du tube sont les seuls possibles pour les rayons d'angle $\alpha \in I_3$. Ainsi

$$(145) \quad \forall \alpha \in I_3, \forall n \in \mathbf{N}^*, \left\{ \begin{array}{l} \forall m \in \mathbf{N}, m \neq n \text{ ou } n \text{ impair}, G_{n,m}^3(\alpha) = 0 \\ \text{et} \\ G_{n,n}^3(\alpha) = T_{12}^T(\alpha) \left(R_{TT}^3(\alpha) \right)^p \left(R_{TT}^1(\alpha) \right)^{p-1} T_{21}^T(\alpha) \\ \text{avec } n = 2p. \end{array} \right.$$

$$I.5.5 \text{ domaine angulaire } I_2 = \left[\alpha_{s\ell} ; \alpha_\ell^{(c)} \right[$$

Les rayons correspondant à ce domaine angulaire possèdent des trajets transversaux en contact avec la paroi interne et des trajets

longitudinaux qui ne le sont pas. Les trajets transversaux sont donc en nombre pair noté "2p" avec $2p = m$.

$G_{n,2p}^2(\alpha)$ se décompose en quatre termes correspondant chacun à des produits de coefficients de réflexions. Ces derniers sont associés à des rayons dont la nature du premier et du dernier trajet diffèrent.

$$(146) \quad \forall \alpha \in I_2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall 2p \in \mathbb{N}^* / 2p \leq n,$$

$$G_{n,2p}^2(\alpha) = \sum_{T \rightarrow T}^2 + \sum_{T \rightarrow L}^2 + \sum_{L \rightarrow T}^2 + \sum_{L \rightarrow L}^2$$

avec $\sum_{A \rightarrow B}^2$ le coefficient résultant des réflexions multiples des

rayons possédant "n-2p" trajets longitudinaux et "2p" trajets transversaux ; le premier trajet est de nature "A" le dernier de nature "B" avec $\{A,B\} \in \{L,T\}$ ("L" pour "longitudinal" et "T" pour transversal).

Notons "A·B" l'union du trajet "A" puis du trajet "B" - la loi "." que nous venons de définir se lit "puis" et n'est pas commutative. "q" trajets "A" successifs se note ainsi "A^q".

Un rayon correspond, en utilisant ces conventions d'écriture, à un mot du type " $T^{t_1} \cdot L^{l_1} \cdot T^{t_2} \cdot L^{l_2} \dots T^{t_r} \cdot L^{l_r}$ ". Prenons par exemple l'ensemble des rayons possédant 2 trajets longitudinaux et 2×2 trajets transversaux. Les mots correspondant aux différents rayons possibles sont : "L·L·T·T", "L·T·L·T", "T·L·L·T", "L·T·T·L", "T·L·T·L", et "T·T·L·L". A chacun de ces rayons nous associons un coefficient correspondant aux multiples réflexions sur les parois du tube et tenant compte du changement de nature des trajets lors de ces réflexions. Ainsi

à "L·L·T·T" nous associons le coefficient : $T_{12}^L R_{LL}^1 R_{LT}^1 R_{TT}^3 R_{TT}^1 R_{TT}^3 T_{21}^T$,

à "L·T·L·T" nous associons le coefficient : $T_{12}^L R_{LT}^1 R_{TT}^3 R_{TL}^1 R_{LT}^1 R_{TT}^3 T_2^T$,

à "T·L·L·T" nous associons le coefficient : $T_{12}^L R_{TT}^3 R_{TL}^1 R_{LL}^1 R_{LT}^1 R_{TT}^3 T_2^T$,

à "L·T·T·L" nous associons le coefficient : $T_{12}^L R_{LT}^1 R_{TT}^3 R_{TT}^1 R_{TT}^3 R_{TL}^1 T_{21}^L$,

à "T·L·T·L" nous associons le coefficient : $T_{12}^T R_{TT}^3 R_{TL}^1 R_{LT}^1 R_{TT}^3 R_{TL}^1 T_{21}^L$,

à "T·T·L·L" nous associons le coefficient : $T_{12}^T R_{TT}^3 R_{TT}^1 R_{TT}^3 R_{TL}^1 R_{LL}^1 T_{21}^L$.

Pour obtenir l'expression de $G_{6,4}^2(\alpha)$, nous regroupons ces coefficients en quatre termes selon la nature du premier et du dernier trajet. Nous additionnons les coefficients associés aux mots "T·L·T·L" et "T·T·L·L" d'une part et ceux correspondant aux mots "L·T·L·T" et "L·L·T·T" d'autre part.

Nous obtenons ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}}^2 = T_{12}^T (R_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^3)^2 R_{\mathbb{T}\mathbb{L}}^1 R_{\mathbb{L}\mathbb{L}}^1 R_{\mathbb{L}\mathbb{T}}^1 T_{21}^L \\ \sum_{\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{L}}^2 = T_{12}^T (R_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^3)^2 R_{\mathbb{T}\mathbb{L}}^1 (R_{\mathbb{T}\mathbb{L}}^1 R_{\mathbb{L}\mathbb{T}}^1 + R_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^1 R_{\mathbb{L}\mathbb{L}}^1) T_{21}^L \\ \sum_{\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{T}}^2 = T_{12}^L (R_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^3)^2 R_{\mathbb{L}\mathbb{T}}^1 (R_{\mathbb{T}\mathbb{L}}^1 R_{\mathbb{L}\mathbb{T}}^1 + R_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^1 R_{\mathbb{L}\mathbb{L}}^1) T_{21}^T \\ \sum_{\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}}^2 = T_{12}^L R_{\mathbb{L}\mathbb{T}}^1 (R_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^3)^2 R_{\mathbb{T}\mathbb{L}}^1 R_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^1 T_{21}^L. \end{array} \right.$$

En utilisant ce principe de calcul nous obtenons l'expression de $G_{n,2p}^2(\alpha)$. Pour faciliter l'écriture de cette expression, il est nécessaire d'introduire la convention suivante.

$$(147) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall 2p \in \mathbb{N}^* / 2p \leq n, \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}}^2 = \sum_{\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{L}}^2 = \sum_{\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{T}}^2 = 0 \\ \sum_{\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}}^2 = \sum_{\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{L}}^2 = 0 \\ \sum_{\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{T}}^2 = \sum_{\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}}^2 = 0. \end{array} \right.$$

Lorsque nous étudions un rayon purement transversal ou purement longitudinal, $G_{n,2p}^2(\alpha)$ s'exprime simplement. Nous obtenons :

$$(148) \quad \forall \alpha \in I_2, \forall p \in \mathbb{N}^*, G_{2p,2p}^2(\alpha) = T_{12}^T(\alpha) (R_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^3(\alpha))^p (R_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^1(\alpha))^{p-1} T_{21}^T(\alpha)$$

et

$$(149) \quad \forall \alpha \in I_2, \forall n \in \mathbb{N}^*, G_{n,0}^2(\alpha) = T_{12}^L(\alpha) (R_{\mathbb{L}\mathbb{L}}^1(\alpha))^{n-2} T_{21}^L(\alpha)$$

Lorsque $p > 1$ et $n > 2p+1$, les rayons étudiés possèdent des trajets transversaux et d'autres longitudinaux. Nous obtenons dans ce cas :

$$(150) \quad G_{np}^2(\alpha) =$$

$$T_{12}^T T_{21}^T \sum_{r=1}^{\inf(p-1, n-2p)} U_p^{r+1} U_{n-2p}^r (R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{p-r-1} (R_{TT}^3)^{r+1} (R_{TL}^1)^r (R_{LT}^1)^r (R_{LL}^1)^{n-2p-r}$$

$$+ T_{12}^T T_{21}^L \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p)} U_p^r U_{n-2p}^r (R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{p-r} (R_{TT}^3)^r (R_{TL}^1)^r (R_{LT}^1)^{r-1} (R_{LL}^1)^{n-2p-r}$$

$$+ T_{12}^L T_{21}^L \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p-1)} U_p^r U_{n-2p}^{r+1} (R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{p-r} (R_{TT}^3)^r (R_{TL}^1)^r (R_{LT}^1)^r (R_{LL}^1)^{n-2p-r-1}$$

$$+ T_{12}^L T_{21}^T \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p)} U_p^r U_{n-2p}^r (R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{p-r} (R_{TT}^3)^r (R_{TL}^1)^{r-1} (R_{LT}^1)^r (R_{LL}^1)^{n-2p-r}$$

avec U_p^r le nombre de combinaison de $r-1$ éléments parmi $p-1$.

1.5.6 domaine angulaire $I_1 = [0; \alpha_{sel}[$

Dans ce domaine angulaire les rayons sont mixtes et les trajets ont tous des contacts avec la paroi interne. Le nombre total de trajets, "n", est donc pair.

Après une première réflexion sur la surface externe, les deux premières lettres du mot correspondant à chaque rayon peuvent être de quatre sortes "L·L", "L·T", "T·L" ou "T·T". Le trajet suivant est soit longitudinal soit transversal. Nous allons bâtir un raisonnement par récurrence en considérant que les remarques précédentes sont encore valables après la $n^{\text{ème}}$ réflexion (les lettres correspondantes sont placées en 2^n et 2^{n+1} èmes position dans le mot caractérisant le rayon). Pour cela, nous introduisons huit termes représentant les produits des coefficients de réflexion correspondant aux portions de mots "L.L", "L.T", "T.L" et "T.T" : $B_{LL}^L, B_{LL}^T, B_{LT}^L, B_{LT}^T, B_{TL}^L, B_{TL}^T, B_{TT}^L, B_{TT}^T$. Ces huit termes tiennent compte de la lettre suivant ces portions de mots puisque les coefficients de réflexion aux interfaces dépendent de la nature du trajet suivant la réflexion.

" B_{AB}^C " correspond à la portion de mot "A·B" sachant que les rayons correspondants ont pour trajet suivant un trajet de type "C" (avec $(A,B,C) \in \{L,T\}^3$). La forme explicite de ces coefficients est

$$\begin{cases} B_{LL}^L = R_{LL}^3 R_{LL}^1 ; B_{LL}^T = R_{LL}^3 R_{LT}^1 \\ B_{LT}^L = R_{LT}^3 R_{TL}^1 ; B_{LT}^T = R_{LT}^3 R_{TT}^1 \\ B_{TL}^L = R_{TL}^3 R_{LL}^1 ; B_{TL}^T = R_{TL}^3 R_{LT}^1 \\ B_{TT}^L = R_{TT}^3 R_{TL}^1 ; B_{TT}^T = R_{TT}^3 R_{TT}^1. \end{cases}$$

Soit $\sum_{n,m}^A$ la combinaison linéaire des coefficients de

réflexion-réfraction représentant l'ensemble des rayons composés de "n" trajets dont "m" sont transversaux. L'exposant "A" restreint cet ensemble puisque cette notation suppose que le premier coefficient élémentaire intervenant dans $\sum_{n,m}^A$ est l'un des coefficients de réflexion sur l'interface

"2/3" correspondant à l'arrivée d'un trajet de nature "A" (avec $A \in \{L,T\}$). Soit " $M_{n,m}^A$ " le mot associé à l'un de ces rayons. Nous notons $\sum_{mots} "X"$

l'union des mots "X" et "coeff(X)" le produit des coefficients de réflexion correspondant au mot "X".

Avec ces conventions d'écriture nous obtenons

$$(151) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n+2,m}^L = \text{coeff} \left["L \cdot L" \cdot \sum_{mots} "M_{n,m}^L" + "L \cdot L" \cdot \sum_{mots} "M_{n,m}^T" + \right. \\ \quad \left. "L \cdot T" \cdot \sum_{mots} "M_{n,m-1}^L" + "L \cdot T" \cdot \sum_{mots} "M_{n,m-1}^T" \right] \\ \sum_{n+2,m}^T = \text{coeff} \left["T \cdot L" \cdot \sum_{mots} "M_{n,m-1}^L" + "T \cdot L" \cdot \sum_{mots} "M_{n,m-1}^T" + \right. \\ \quad \left. "T \cdot T" \cdot \sum_{mots} "M_{n,m-2}^L" + "T \cdot T" \cdot \sum_{mots} "M_{n,m-2}^T" \right] \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$(152) \quad \begin{cases} \Sigma_{n+2,m}^L = B_{LL}^L \Sigma_{n,m}^L + B_{LL}^T \Sigma_{n,m}^T + B_{LT}^L \Sigma_{n,m-1}^L + B_{LT}^T \Sigma_{n,m-1}^T \\ \Sigma_{n+2,m}^T = B_{TL}^L \Sigma_{n,m-1}^L + B_{TL}^T \Sigma_{n,m-1}^T + B_{TT}^L \Sigma_{n,m-2}^L + B_{TT}^T \Sigma_{n,m-2}^T \end{cases}$$

Nous pouvons déduire de cette relation une définition par récurrence des coefficients $\Sigma_{n,m}^L$ et $\Sigma_{n,m}^T$.

Les premiers termes de cette récurrence sont obtenus en revenant à la définition de ces coefficients :

$$(153) \quad \begin{cases} \Sigma_{2,0}^L = R_{LL}^3 T_{21}^L \\ \Sigma_{2,1}^L = R_{TL}^3 T_{21}^L \\ \Sigma_{2,1}^T = R_{LT}^3 T_{21}^T \\ \Sigma_{2,2}^T = R_{TT}^3 T_{21}^T \end{cases}$$

Nous prenons pour convention,

$$(154) \quad \forall (n,m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} / m > n, \quad \begin{cases} \Sigma_{n,0}^T = \Sigma_{n,m}^T = 0 \\ \Sigma_{n,n}^L = \Sigma_{n,m}^L = 0 \end{cases}$$

La relation générale de récurrence est

$$(155) \quad \begin{cases} \Sigma_{n,m}^L = B_{LL}^L \Sigma_{n-2,m}^L + B_{LL}^T \Sigma_{n-2,m}^T + B_{LT}^L \Sigma_{n-2,m-1}^L + B_{LT}^T \Sigma_{n-2,m-1}^T \\ \Sigma_{n,m}^T = B_{TL}^L \Sigma_{n-2,m-1}^L + B_{TL}^T \Sigma_{n-2,m-1}^T + B_{TT}^L \Sigma_{n-2,m-2}^L + B_{TT}^T \Sigma_{n-2,m-2}^T \end{cases}$$

Connaissant ces coefficients, nous déduisons

$$(156) \quad G_{n,m}^1(\alpha) = T_{12}^L \Sigma_{n,m}^L + T_{12}^T \Sigma_{n,m}^T$$

1.6. Valeurs numériques de la pression due aux ondes géométriques

A partir des relations (128) à (132), nous pouvons connaître, pour un point d'observation donné, l'angle d'incidence de chaque rayon susceptible d'atteindre ce point et la durée de son parcours. Les équations (138) à (142) déterminent l'expression du coefficient de dispersion géométrique en fonction de l'angle d'incidence d'un rayon. Les équations (144) à (156) permettent de calculer le coefficient résultant des multiples réflexions et réfractions de l'ensemble des rayons arrivant en phase au point P.

Pour connaître l'expression de la pression résultante due aux ondes géométriques notées "P_{géo}" nous utilisons la relation suivante :

$$(157) \quad P_{géo} = P_0 e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n e^{-i \frac{c_1}{a} x_1 t(OP)} \frac{G_{n,m}(\alpha)}{\sqrt{D_{n,m}(\alpha)}}$$

avec x_1 la fréquence réduite caractéristique de l'onde incidente.

Ainsi connaissant le point "P" d'observation et les nombres "n" de trajets de toutes natures et "m" de trajets transversaux, il nous est possible de déterminer la pression correspondante $P_{n,m}(\alpha(\varphi))$ en utilisant la relation :

$$(158) \quad P_{n,m}(\alpha(\varphi)) = P_0 e^{i\omega t} e^{-i\omega t(OP)} \frac{G_{n,m}(\alpha)}{\sqrt{D_{n,m}(\alpha)}}$$

Il nous est possible de calculer pour un "n" donné, la pression totale correspondante P_n définie par

$$(159) \quad P_n = P_0 e^{i\omega t} \sum_{m=0}^n e^{-i\omega t(OP)} \frac{G_{n,m}(\alpha)}{\sqrt{D_{n,m}(\alpha)}}$$

La valeur de la pression donnée par l'équation (159) est ensuite estimée en faisant varier "n" entre 0 et un nombre "N" correspondant au seuil de convergence de la somme.

Nous représentons figure 82 les courbes obtenues pour N égal à 16, 18 et 20. La valeur de la fréquence réduite x_1 est, pour cette figure, égale à 100. La différence entre les trois courbes étant minime (inférieure en tous points à 10%) la pression donnée pour $N = 20$ est une bonne approximation de la pression $P_{\text{géo}}$.

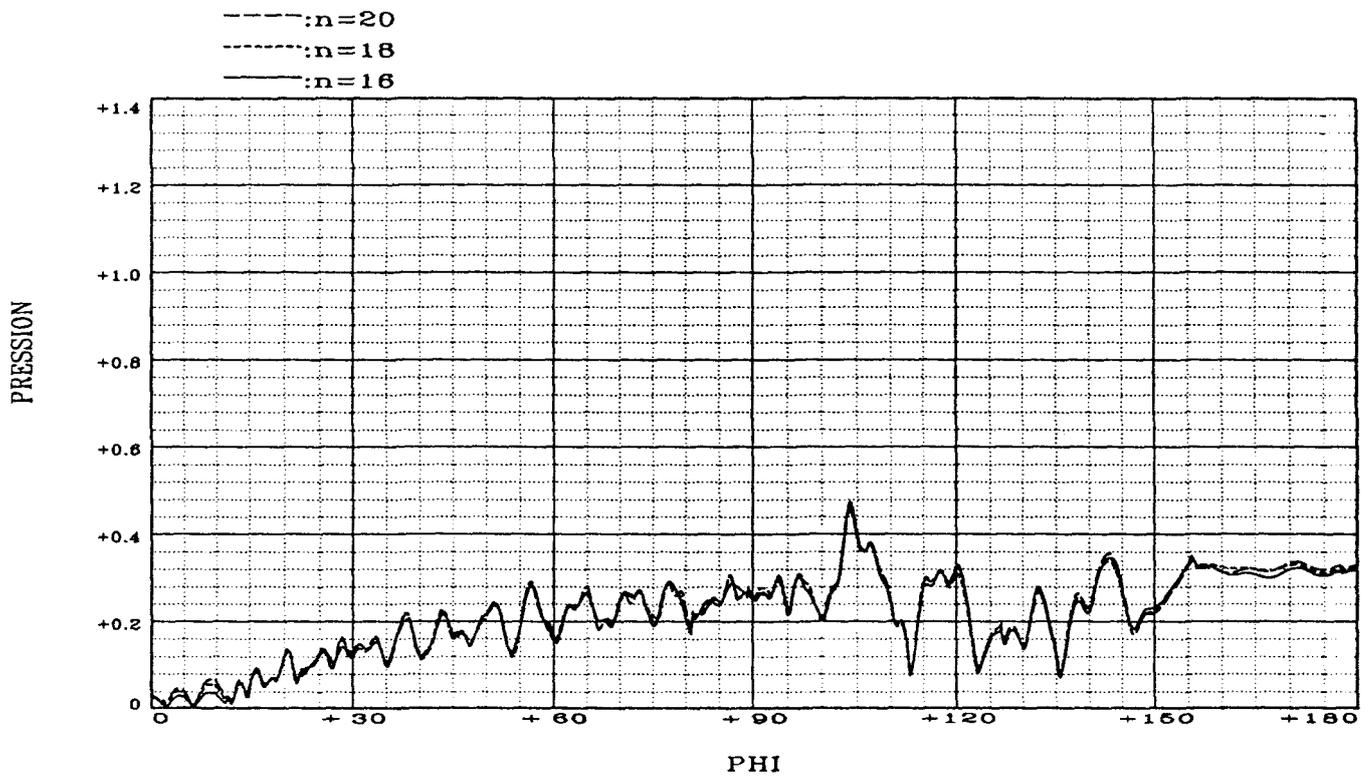


Figure 82 : Tube élastique - Pression due aux ondes géométriques -
 $x_1 = 100 - r/a = 5$.

1.7. Conclusion

Nous avons établi l'expression littérale de la pression due aux ondes géométriques à haute fréquence. Les seules conditions supplémentaires sont :

- la présence d'un milieu interne totalement réfléchissant,
- le rapport des rayons du tube doit être supérieur au rapport des célérités du matériau interne (c_i/c_t).

La pression résultante s'exprime en fonction d'une série qui converge lentement. Les rayons correspondant aux derniers termes de la série accomplissent plusieurs fois le tour du tube avant d'en ressortir. L'amortissement de ces ondes est donc très faible.

Cette pression doit être ajoutée à la pression due aux ondes de surface afin d'obtenir la pression diffusée par le tube. Cette pression sera ensuite comparée à des résultats obtenus par calcul de la pression par série modale.

L'influence des ondes géométriques peut se caractériser en comparant directement la pression due à ces ondes à la pression totale calculée à partir de la série modale. En dehors de la zone d'ombre du cylindre les courbes sont du même ordre de grandeur bien qu'il n'existe que peu de points de concordance².

² Figure 83.

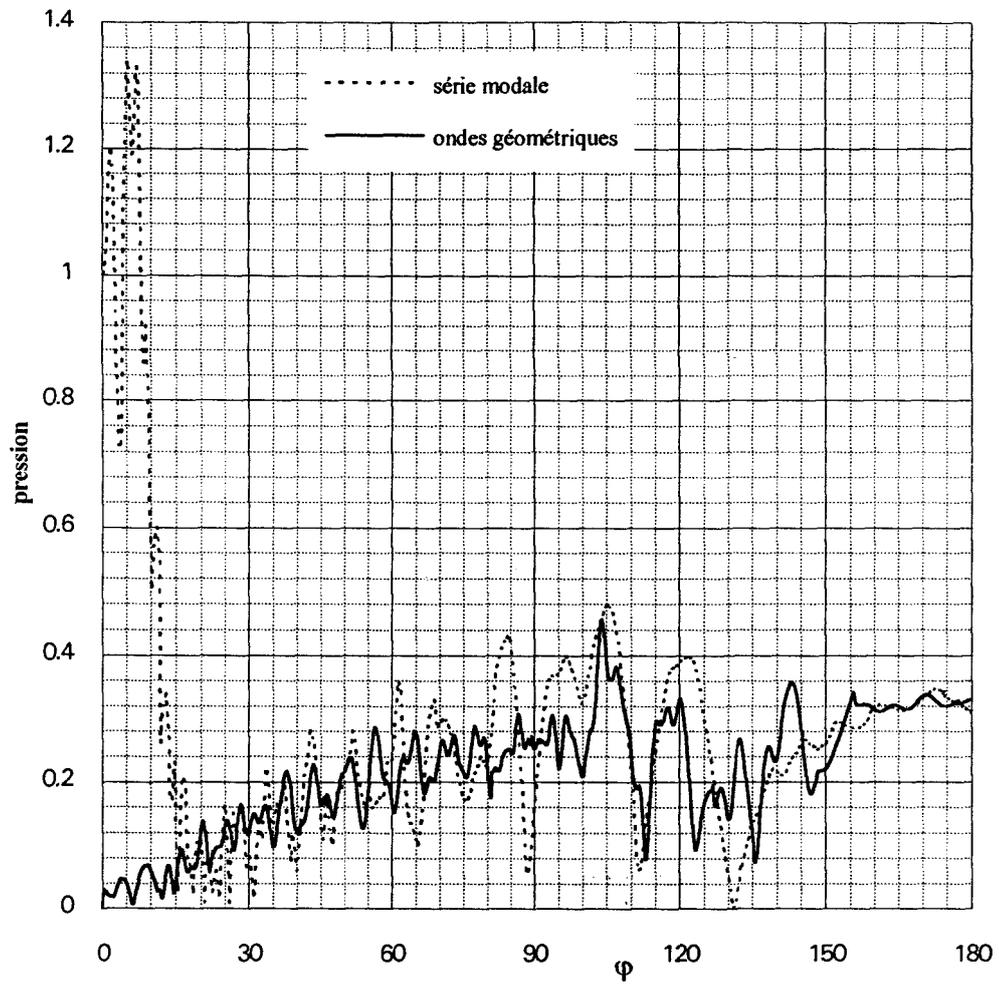


Figure 83 : Tube élastique - pression diffractée par le tube.

II. EXPRESSIONS NUMERIQUES DES POLES ASSOCIES AUX ONDES CIRCONFERENCELLES

II.1. Conditionnement initial de l'équation caractéristique des pôles.

Les pôles sont les solutions numériques de l'équation :

$$(105) \quad D(v_\ell, x_1) = 0.$$

avec $D(v_\ell, x_1)$ le déterminant défini par les équations (5) et (19) et correspondant au cas du tube élastique. Son expression est donnée par l'équation (106). Les variables y_3 , y_ℓ et y_t sont définies par les relations : $y_3 = \frac{b}{a} n_3 x_1 = \frac{b c_3}{a c_1} x_1$, $y_\ell = \frac{b}{a} x_\ell$ et $y_t = \frac{b}{a} x_t$. La fonction Y_v est la fonction de Neumann.

$$(106) \quad \mathbf{D}(v, x_1) = \begin{pmatrix} x_t^2 H_v^{(1)}(x_1) & (x_t^2 - 2v^2)J_v(x_\ell) & 2v(x_t J'_v(x_t) - J_v(x_t)) & (x_t^2 - 2v^2)Y_v(x_\ell) & 2v(x_t Y'_v(x_t) - Y_v(x_t)) & 0 \\ & +2x_\ell J'_v(x_\ell) & & +2x_\ell Y'_v(x_\ell) & & \\ \frac{-\rho_2}{\rho_1} x_1 H_v^{(1)'}(x_1) & -x_\ell J'_v(x_\ell) & vJ_v(x_t) & -x_\ell Y'_v(x_\ell) & vY_v(x_t) & 0 \\ 0 & 2v(x_\ell J'_v(x_\ell) - J_v(x_\ell)) & (x_t^2 - 2v^2)J_v(x_t) & 2v(x_\ell Y'_v(x_\ell) - Y_v(x_\ell)) & (x_t^2 - 2v^2)Y_v(x_t) & 0 \\ & & +2x_t J'_v(x_t) & & +2x_t Y'_v(x_t) & \\ 0 & (y_t^2 - 2v^2)J_v(y_\ell) & 2v(y_t J'_v(y_t) - J_v(y_t)) & (y_t^2 - 2v^2)Y_v(y_\ell) & 2v(y_t Y'_v(y_t) - Y_v(y_t)) & y_t^2 \\ & +2y_\ell J'_v(y_\ell) & & +2y_\ell Y'_v(y_\ell) & & \\ 0 & -y_\ell J'_v(y_\ell) & vJ_v(y_t) & -y_\ell Y'_v(y_\ell) & vY_v(y_t) & \frac{-\rho_2}{\rho_3} x_1^d J_v(y_3) \\ 0 & 2v(y_\ell J'_v(y_\ell) - J_v(y_\ell)) & (y_t^2 - 2v^2)J_v(y_t) & 2v(y_\ell Y'_v(y_\ell) - Y_v(y_\ell)) & (y_t^2 - 2v^2)Y_v(y_t) & 0 \\ & & +2y_t J'_v(y_t) & & +2y_t Y'_v(y_t) & \end{pmatrix}$$

A haute fréquence, lorsque nous recherchons des pôles pour un tube de faible rayon interne, nous sommes conduits à additionner ou soustraire des éléments excessivement grands et très proches les uns des autres ainsi que des éléments de valeur extrêmement faible. Afin de limiter ce comportement préjudiciable au calcul numérique, nous conditionnons le déterminant en posant :

$$(107) \quad d(v, x_1) = \frac{D(v, x_1)}{x^{10} H_v^{(1)}(x_1) J_v(x_\ell) J_v(x_t) Y_v(x_\ell) Y_v(x_t) J_v(y_3)}$$

Nous développons analytiquement ce nouveau déterminant suivant la première colonne puis suivant la dernière colonne de chacun des déterminants 5×5 obtenus. Ceci nous permet d'isoler les rapports de densité des différents milieux. Les six déterminants 4×4 résultants sont plus homogènes numériquement. Les différentes expressions analytiques nécessaires au calcul du déterminant $d(v, x_1)$ sont :

$$(108) \quad \begin{aligned} d(v, x_1) &= \delta_{11}(v, x_1) + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{dH_v^{(1)}(x_1)}{x_t} \delta_{21}(v, x_1) \\ \delta_{11} &= \frac{y_t^2}{x_t^2} \delta_{46}^1(v, x_1) + \frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{dJ_v(y_3)}{x_t} \delta_{56}^1(v, x_1) \\ \delta_{21} &= \frac{y_t^2}{x_t^2} \delta_{46}^2(v, x_1) + \frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{dJ_v(y_3)}{x_t} \delta_{56}^2(v, x_1) \end{aligned}$$

avec

$$\delta_{46}^1(v, x_1) = \left| \begin{array}{cccc} \frac{dJ_v(x_\ell)}{x_t} & \frac{v}{x_t} & -\frac{dY_v(x_\ell)}{x_t} & \frac{v}{x_t} \\ \frac{2v[dJ_v(x_\ell)-1]}{x_t^2} & \frac{x_t^2 - 2v^2 + 2dJ_v(x_t)}{x_t^2} & \frac{2v[dY_v(x_\ell)-1]}{x_t^2} & \frac{x_t^2 - 2v^2 + 2dY_v(x_t)}{x_t^2} \\ \frac{dJ_v(y_\ell) J_v(y_\ell)}{x_t J_v(x_\ell)} & \frac{v J_v(y_t)}{x_t J_v(x_t)} & \frac{dY_v(y_\ell) Y_v(y_\ell)}{x_t Y_v(x_\ell)} & \frac{v Y_v(y_t)}{x_t Y_v(x_t)} \\ \frac{2v[dJ_v(y_\ell)-1] J_v(y_\ell)}{x_t^2 J_v(x_\ell)} & \frac{y_t^2 - 2v^2 + 2dJ_v(y_t) J_v(y_t)}{x_t^2 J_v(x_t)} & \frac{2v[dY_v(y_\ell)-1] Y_v(y_\ell)}{x_t^2 Y_v(x_\ell)} & \frac{y_t^2 - 2v^2 + 2dY_v(y_t) Y_v(y_t)}{x_t^2 Y_v(x_t)} \end{array} \right|$$

$$\delta_{46}^2(v, x_1) = \begin{vmatrix} \frac{x_t^2 - 2v^2 + 2^d J_v(x_\ell)}{x_t^2} & \frac{2v[dJ_v(x_t) - 1]}{x_t^2} & \frac{x_t^2 - 2v^2 + 2^d Y_v(x_\ell)}{x_t^2} & \frac{2v[dY_v(x_t) - 1]}{x_t^2} \\ \frac{2v[dJ_v(x_\ell) - 1]}{x_t^2} & \frac{x_t^2 - 2v^2 + 2^d J_v(x_t)}{x_t^2} & \frac{2v[dY_v(x_\ell) - 1]}{x_t^2} & \frac{x_t^2 - 2v^2 + 2^d Y_v(x_t)}{x_t^2} \\ \frac{J_v(y_\ell) J_v(y_\ell)}{x_t J_v(x_\ell)} & \frac{v J_v(y_t)}{x_t J_v(x_t)} & \frac{Y_v(y_\ell) Y_v(y_\ell)}{x_t Y_v(x_\ell)} & \frac{v Y_v(y_t)}{x_t Y_v(x_t)} \\ \frac{2v[dJ_v(y_\ell) - 1] J_v(y_\ell)}{x_t J_v(x_\ell)} & \frac{y_t^2 - 2v^2 + 2^d J_v(y_t) J_v(y_t)}{x_t J_v(x_t)} & \frac{2v[dY_v(y_\ell) - 1] Y_v(y_\ell)}{x_t Y_v(x_\ell)} & \frac{y_t^2 - 2v^2 + 2^d Y_v(y_t) Y_v(y_t)}{x_t Y_v(x_t)} \end{vmatrix}$$

$$\delta_{56}^1(v, x_1) = \left| \begin{array}{cccc} \frac{-\frac{dJ_v(x_\ell)}{x_t}}{x_t} & \frac{v}{x_t} & \frac{-\frac{dY_v(x_\ell)}{x_t}}{x_t} & \frac{v}{x_t} \\ \frac{2v[dJ_v(x_\ell)-1]}{x_t^2} & \frac{x_t^2 - 2v^2 + 2dJ_v(x_t)}{x_t^2} & \frac{2v[dY_v(x_\ell)-1]}{x_t^2} & \frac{x_t^2 - 2v^2 + 2dY_v(x_t)}{x_t^2} \\ \frac{y_t^2 - 2v^2 + 2dJ_v(y_\ell) J_v(y_\ell)}{x_t^2} \frac{J_v(y_\ell)}{J_v(x_\ell)} & \frac{2v[dJ_v(y_t)-1] J_v(y_t)}{x_t^2} \frac{J_v(y_t)}{J_v(x_t)} & \frac{y_t^2 - 2v^2 + 2dY_v(y_\ell) Y_v(y_\ell)}{x_t^2} \frac{Y_v(y_\ell)}{Y_v(x_\ell)} & \frac{2v[dY_v(y_t)-1] Y_v(y_t)}{x_t^2} \frac{Y_v(y_t)}{Y_v(x_t)} \\ \frac{2v[dJ_v(y_\ell)-1] J_v(y_\ell)}{x_t^2} \frac{J_v(y_\ell)}{J_v(x_\ell)} & \frac{y_t^2 - 2v^2 + 2dJ_v(y_t) J_v(y_t)}{x_t^2} \frac{J_v(y_t)}{J_v(x_t)} & \frac{2v[dY_v(y_\ell)-1] Y_v(y_\ell)}{x_t^2} \frac{Y_v(y_\ell)}{Y_v(x_\ell)} & \frac{y_t^2 - 2v^2 + 2dY_v(y_t) Y_v(y_t)}{x_t^2} \frac{Y_v(y_t)}{Y_v(x_t)} \end{array} \right|$$

$$\delta_{56}^2(v, x_1) = \left| \begin{array}{cccc} \frac{x_t^2 - 2v^2 + 2^d J_v(x_\ell)}{x_t^2} & \frac{2v [{}^d J_v(x_t) - 1]}{x_t^2} & \frac{x_t^2 - 2v^2 + 2^d Y_v(x_\ell)}{x_t^2} & \frac{2v [{}^d Y_v(x_t) - 1]}{x_t^2} \\ \frac{2v [{}^d J_v(x_\ell) - 1]}{x_t^2} & \frac{x_t^2 - 2v^2 + 2^d J_v(x_t)}{x_t^2} & \frac{2v [{}^d Y_v(x_\ell) - 1]}{x_t^2} & \frac{x_t^2 - 2v^2 + 2^d Y_v(x_t)}{x_t^2} \\ \frac{y_t^2 - 2v^2 + 2^d J_v(y_\ell) J_v(y_\ell)}{x_t^2} \frac{J_v(x_\ell)}{J_v(x_t)} & \frac{2v [{}^d J_v(y_t) - 1] J_v(y_t)}{x_t^2} \frac{J_v(x_t)}{J_v(x_t)} & \frac{y_t^2 - 2v^2 + 2^d Y_v(y_\ell) Y_v(y_\ell)}{x_t^2} \frac{Y_v(x_\ell)}{Y_v(x_t)} & \frac{2v [{}^d Y_v(y_t) - 1] Y_v(y_t)}{x_t^2} \frac{Y_v(x_t)}{Y_v(x_t)} \\ \frac{2v [{}^d J_v(y_\ell) - 1] J_v(y_\ell)}{x_t^2} \frac{J_v(x_\ell)}{J_v(x_t)} & \frac{y_t^2 - 2v^2 + 2^d J_v(y_t) J_v(y_t)}{x_t^2} \frac{J_v(x_t)}{J_v(x_t)} & \frac{2v [{}^d Y_v(y_\ell) - 1] Y_v(y_\ell)}{x_t^2} \frac{Y_v(x_\ell)}{Y_v(x_t)} & \frac{y_t^2 - 2v^2 + 2^d Y_v(y_t) Y_v(y_t)}{x_t^2} \frac{Y_v(x_t)}{Y_v(x_t)} \end{array} \right|$$

Ce pré-calcul du déterminant $d(\nu, x_1)$ nous permet de rechercher numériquement des pôles pour un tube de rayon interne quelconque et dans un très large domaine de fréquences sans dépasser les capacités de calcul de l'ordinateur utilisé (VAX 6310).

II.2. Méthode utilisée pour rechercher les pôles

Pour débiter la recherche des pôles nous supposons qu'un tube de rayon interne très faible se comporte comme un cylindre vis-à-vis des ondes se propageant à sa surface. Nous nous plaçons à une fréquence où les domaines des développements asymptotiques correspondant aux ondes se propageant à la surface du cylindre sont identifiés sans ambiguïté. Puis nous "creusons" progressivement le cylindre et suivons les trajectoires décrites par les différents pôles lorsque le rayon interne croît d'une valeur quasiment nulle jusqu'à 1. Pour la valeur du rayon interne désiré, il nous suffit ensuite d'étudier le comportement des pôles lorsque la fréquence réduite varie.

Dans les chapitres précédents les positions relatives des pôles et des fréquences réduites permettent de ne considérer que des changements de domaines par passage de la zone d'Airy aux zones correspondant aux développements de Debye ou inversement. Nous devons compléter cette démarche afin de trouver le lieu des pôles correspondant à la diffusion par un tube. En effet, nous pouvons vérifier numériquement que les propriétés de certains pôles évoluent considérablement lorsque le rayon interne croît. Il est donc nécessaire de tenir compte pour chaque pôle de tous les changements de zone de développements asymptotiques possibles. En revenant à la définition des différentes zones de développements asymptotiques, nous nous apercevons que le passage entre les zones 7, 8, 9 et 10 est réalisé lorsque l'une des fonctions cylindriques devient négligeable devant les autres. En

étudiant l'évolution relative des fonctions de Watson¹ $S_v^{(1)}$ et $S_v^{(2)}$ en fonction de la fréquence et de la valeur du pôle, nous pouvons déterminer le changement de zone de développement.

La méthode utilisée ici peut être décrite par un exemple : l'étude de la première onde de type ℓ nommée onde de Rayleigh dans l'étude du cylindre élastique et que nous notons $\ell =$ dans ce chapitre. Nous prenons pour fréquence réduite $x_1 = 100$. A cette fréquence le pôle v_{ray} est le complexe (50.470,1.804) et il se situe dans les zones 10, 7 et 2 vis-à-vis, respectivement, de x_1, x_ℓ et x_t^2 . Pour assurer une continuité dans les résultats nous prenons un tube de rayon interne $b = 0.16a$ et nous recherchons le pôle $v_{\ell=1}$ en le supposant très voisin du pôle v_{ray} et situé dans les mêmes zones de développements asymptotiques vis-à-vis des trois fréquences réduites x_1, x_ℓ et x_t . Sachant que, pour $x_1 = 100$, $y_3 \approx 72.39$, $y_\ell \approx 3.72$ et $y_t \approx 7.86$, le pôle $v_{\ell=1}$ se situe vraisemblablement dans la zone 10 vis-à-vis de y_3 et dans la zone 7 vis-à-vis de y_ℓ et de y_t . Pour confirmer cela nous recherchons la valeur exacte du pôle $v_{\ell=1}$. Parallèlement à ce calcul, nous évaluons les nombres $S_{v_{\ell=1}}^{(1)}(x)$ et $S_{v_{\ell=1}}^{(2)}(x)$ (avec $x \in \{x_1, x_\ell, x_t, y_\ell, y_t, y_3\}$) ainsi que leurs rapports. Pour savoir si le pôle se situe en zone 10 ou en zone 9 vis-à-vis de x_1 , nous utilisons le rapport $\frac{S_{v_{\ell=1}}^{(2)}(x_1)}{S_{v_{\ell=1}}^{(1)}(x_1)}$. Lorsque ce dernier est négligeable devant le nombre 1, le pôle est en zone 9 vis-à-vis de x_1 ; il est en zone 10 dans le cas contraire. Pour quantifier l'expression "négligeable devant le nombre 1", nous introduisons

¹ Les fonctions de Watson sont utilisées pour définir les développements asymptotiques de Debye de chaque fonction cylindrique d'indice complexe A. Derem, *Formulaire pour les développements asymptotiques des fonctions cylindriques d'indice complexe*, Rapport LCT., PL. 806 618 (diffusion interne), p 24, 1980.

² Chapitre 3 paragraphe V.1.1.

un nombre, noté *rap* pour montrer qu'il n'intervient que dans l'évaluation d'un rapport. Lorsque ce dernier est inférieur au nombre *rap*, nous considérons qu'il est "négligeable devant 1". Numériquement *rap* vaut 0^{-10} . La position du pôle vis-à-vis de la fréquence réduite y_t est déterminée par le rapport $\frac{S_{v_{\ell=1}}^{(1)}(x_1)}{S_{v_{\ell=1}}^{(2)}(x_1)}$. Lorsque ce dernier est négligeable devant le nombre 1, le pôle

est en zone 7 ; dans le cas contraire il est en zone 8. Il faut cependant noter que ces calculs sont effectués uniquement dans les cas où le paramètre τ^3 , caractéristique du passage dans la zone d'Airy, est supérieur au maximum τ^L , fixé à 2.5 dans le cas de l'onde $\ell = 1$. En suivant cette démarche nous confirmons la position du pôle vis-à-vis des différentes fréquences réduites et nous trouvons $v_{\ell=1} \approx (50.470, 1.804)$.

L'étude est plus compliquée lorsque le choix doit s'effectuer entre les zones 7, 8 et 9. En effet, les fonctions de Watson ne sont pas déterminées de la même façon entre les zones 7 et 8 d'une part et la zone 9 d'autre part. Pour résoudre ce problème, nous calculons $S_{v_{\ell}}^{(1)}(x)$ et $S_{v_{\ell}}^{(2)}(x)$ des deux façons possibles et appliquons la règle suivante. Soient *rapport*₉ le rapport $\frac{S_{v_{\ell}}^{(2)}(x)}{S_{v_{\ell}}^{(1)}(x)}$

calculé dans la zone 9 et *rapport*₈ le rapport $\frac{S_{v_{\ell}}^{(1)}(x)}{S_{v_{\ell}}^{(2)}(x)}$ calculé dans la zone 8.

Si *rapport*₉ < *rap* et *rapport*₈ > *rap*, le pôle se situe en zone 9 vis-à-vis de "x". Si *rapport*₉ < *rap* et *rapport*₈ > *rap* le pôle se situe en zone 7. Si aucun des deux rapports n'est inférieur au nombre *rap* le pôle est en zone 8.

Lorsque le pôle est supposé initialement dans la zone d'Airy et que le paramètre $\tau > \tau^L$, nous associons à la démarche présentée ci-dessus la

³ Chapitre 2 paragraphe IV.2.

remarque suivante : lorsque $\text{Re}(v_\ell) < x$ le pôle ne peut être que dans les zones 9 ou 10 vis-à-vis de la fréquence réduite "x". Dans le cas contraire il se situe dans l'une des trois zones 7, 8 ou 9.

Lorsque le pôle se trouve initialement dans la zone 9, nous utilisons également cette remarque. En effet, lorsque les conditions $\text{Re}(v_\ell) < x$ et $\text{rapport}_9 > \text{rap}$ sont vérifiées, le pôle se situe en zone 10, dès lors que la première de ces deux conditions ne l'est plus le pôle se situe en zone 8.

Pour utiliser correctement l'ensemble de cette démarche, nous créons un programme informatique dans lequel nous évitons tout débordement de capacité numérique. Pour cela, lorsque c'est possible nous simplifions analytiquement ces rapports ou calculons séparément chacune des fonctions de Watson pour avoir une première évaluation de leur grandeur relative.

La connaissance du lieu des pôles nous permet dans les sections suivantes de classer les ondes en précisant celles de type ℓ_1 et celles de type ℓ_2 . Cette classification nous permet ensuite de calculer la pression due à chacune de ces ondes circonférentielles⁴.

Dans un premier temps et pour faciliter la présentation, le type ℓ_1 (ou ℓ_2) regroupe l'ensemble des ondes définies par continuité à partir d'ondes de ce type se propageant à la surface du cylindre élastique. Par la suite, l'étude détaillée de chacune de ces ondes permet de préciser exactement le domaine de validité de ces regroupements.

⁴ Nous suivons pour cela une démarche identique à celles conduites lors du calcul de la diffusion par un cylindre (élastique ou fluide).

II.3. Les ondes de type ℓ_1

Dans l'étude de la diffusion par un cylindre élastique, les ondes de type ℓ_1 sont l'onde de Rayleigh et les ondes de Brekhovskikh⁵. Nous les notons dans tube élastique $\ell = 1, \ell = 2, \dots$. En appliquant la démarche exposée précédemment, nous obtenons les trajectoires des pôles dans le plan complexe en " ν " lorsque le rayon interne croît de 0.1 à pratiquement 1⁶. Puis, à partir de la valeur obtenue pour une fréquence réduite x_1 égale à 100 et pour un rapport de rayon de 0.9, nous obtenons les trajectoires des pôles lorsque la fréquence varie de 1 à 800. Nous représentons ces trajectoires dans le plan réduit en ξ ⁷ ainsi qu'en traçant les courbes décrites par les parties imaginaires et réelles en fonction de la fréquence⁸.

II.3.1. Evolution des pôles de type ℓ_1 lorsque le rayon interne croît⁹

Nous suivons l'évolution de ces pôles aux fréquences réduites 15 et 100. A la fréquence réduite de 15, les calculs sont faits à partir des développements convergents afin d'obtenir un moyen supplémentaire de comparer les résultats obtenus par développements asymptotiques.

Nous n'étudions que les trois premières ondes de type $\ell = 1$. En effet, à une fréquence de 100, la quatrième onde n'est pas visible pour $\frac{b}{a} = 0.90$ puisque le pôle associé a une partie imaginaire quasiment nulle dès

⁵ Chapitre 3. paragraphe V.1.

⁶ Figures 77 à 82.

⁷ Chapitre 3. paragraphe V.1.
Figures 85 à 88.

⁸ Figures 83, 84, 89 et 90.

⁹ Figures 77 à 82.

que $\frac{b}{a} > 0.83$. La méthode numérique employée ne nous permet pas de suivre l'évolution de ce pôle au-delà de $\frac{b}{a} = 0.8307$. La partie imaginaire du pôle étant alors inférieure à 10^{-9} , elle est inférieure à l'erreur numérique due aux méthodes et outils de programmation utilisés; l'expérience acquise lors de la recherche numérique des différents pôles nous permet d'estimer cette erreur numérique à 10^{-6} .

Le lieu des trois premiers pôles est faiblement influencé par le rayon interne tant que ce dernier reste faible. Cette influence est d'autant moins marquée que la fréquence est grande et que le nombre d'onde ℓ est faible. Ainsi le pôle $v_{\ell=1}$ est invariant (à 10^{-4} près) tant que $\frac{b}{a} < 0.754$ lorsque la fréquence est de 100 et tant que $\frac{b}{a} < 0.22$ lorsque la fréquence est de 15. Par contre lorsque l'épaisseur du tube devient faible ($\frac{b}{a} \geq 0.90$) le lieu des trois pôles évolue très rapidement. Nous distinguons ainsi trois zones de comportement : lorsque $\frac{b}{a} < 0.3$ le lieu des pôles dépend du rayon externe du tube, lorsque $\frac{b}{a} \geq 0.90$ il dépend essentiellement de l'épaisseur du tube, les tubes de rayons compris entre ces deux limites marquent la transition entre un comportement de type cylindre plein et un comportement de type tube fin.

L'évolution comparée des parties imaginaires des différents pôles ne nous permet pas de conclure comme dans le chapitre précédent que la première onde de type ℓ_1 est considérablement plus amortie que les suivantes. En effet pour $\frac{b}{a} = 0.90$, nous obtenons les parties imaginaires représentées dans le tableau ci-dessous :

pôle\fréquence	$x_1=15$	$x_1=100$
$v_{\ell=1}$	1.655	1.133
$v_{\ell=2}$	0.008171	1.844
$v_{\ell=3}$	>13	0.205

Pour une fréquence de 15, la partie imaginaire du pôle associé à l'onde $\ell = 3$ est trop élevée pour être évaluable lorsque $\frac{b}{a} = 0.90$.

Cette étude nous permet également de constater que pour un tube d'épaisseur très faible les pôles ont une partie imaginaire de l'ordre de 10^{-3} ou excessivement grande : pour une fréquence de 100 et pour $\frac{b}{a} = 0.998$, $v_{\ell=1} \approx (115.882, 29.059)$, $v_{\ell=2} \approx (27.840, 2.384E-03)$, pour $\frac{b}{a} = 0.9359782$ (dernière valeur accessible numériquement) $v_{\ell=3} \approx (9.949E-02, 1.639E-03)$, pour une fréquence de 15 et pour $\frac{b}{a} = 0.9978$, $v_{\ell=1} \approx (17.172, 3.996)$, pour $\frac{b}{a} = 0.999$, $v_{\ell=2} \approx (4.178, 4.765E-03)$ et pour $\frac{b}{a} = 0.738$ $v_{\ell=3} \approx (7.645, 12.874)$.

Cette dernière valeur ne nous permet pas de conclure quant à l'ordre de grandeur du pôle $v_{\ell=3}$ pour un tube très fin. Nous ne pouvons qu'extrapoler la trajectoire réalisée par ce pôle lorsque le rapport $\frac{b}{a}$ croît et ainsi supposé que sa partie imaginaire est importante.

Pour chacune des ondes étudiées ici à la fréquence de 100, nous utilisons les développements asymptotiques correspondant aux zones inscrites dans les tableaux suivant. Pour obtenir des courbes continues nous fixons le paramètre caractéristique du cercle d'Airy à 2.5. Nous obtenons :

pour l'onde $\ell = 1$,

$\frac{b}{a}$	x_1	x_ℓ	x_t	y_3	y_t	y_ℓ
$0.160 \leq \frac{b}{a} < 0.673$	10	7	2	10	7	7
$0.673 \leq \frac{b}{a} < 0.808$	10	7	2	10	8	7
$0.808 \leq \frac{b}{a} < 0.932$	10	7	2	10	2	7
$0.932 \leq \frac{b}{a} < 0.937$	10	7	8	10	2	7
$0.937 \leq \frac{b}{a} < 0.966$	10	7	8	10	8	7
$0.966 \leq \frac{b}{a} < 0.970$	10	7	8	10	7	7
$0.970 \leq \frac{b}{a} < 0.984$	10	7	7	10	7	7
$0.984 \leq \frac{b}{a} < 0.992$	10	7	7	9	7	7
$0.992 \leq \frac{b}{a} < 0.993$	9	7	7	9	7	7
$0.993 \leq \frac{b}{a} < 0.998$	8	7	7	9	7	7

pour l'onde $\ell = 2$,

$\frac{b}{a}$	x_1	x_ℓ	x_t	y_3	y_t	y_ℓ
$0.102 \leq \frac{b}{a} < 0.493$	10	7	10	10	7	7
$0.493 \leq \frac{b}{a} < 0.610$	10	7	10	10	8	7
$0.610 \leq \frac{b}{a} < 0.752$	10	7	10	10	2	7
$0.752 \leq \frac{b}{a} < 0.883$	10	7	2	10	2	7
$0.883 \leq \frac{b}{a} < 0.894$	10	7	10	10	2	7
$0.894 \leq \frac{b}{a} < 0.904$	10	8	10	10	2	7
$0.904 \leq \frac{b}{a} < 0.905$	10	8	10	10	2	8
$0.905 \leq \frac{b}{a} < 0.910$	10	8	10	10	10	2
$0.910 \leq \frac{b}{a} < 0.935$	10	8	10	10	10	2
$0.935 \leq \frac{b}{a} < 0.998$	10	2	10	10	10	2

pour l'onde $\ell = 3$,

$\frac{b}{a}$	x_1	x_ℓ	x_t	y_3	y_t	y_ℓ
$0.100 \leq \frac{b}{a} < 0.418$	10	8	10	10	7	7
$0.418 \leq \frac{b}{a} < 0.528$	10	8	10	10	8	7
$0.528 \leq \frac{b}{a} < 0.8092$	10	8	10	10	2	7
$0.8092 \leq \frac{b}{a} < 0.8123$	10	8	2	10	2	8
$0.8123 \leq \frac{b}{a} < 0.8323$	10	8	10	10	2	2
$0.8323 \leq \frac{b}{a} < 0.8396$	10	8	10	10	10	2
$0.8396 \leq \frac{b}{a} < 0.9134$	10	2	10	10	10	2
$0.9134 \leq \frac{b}{a} < 0.9332$	10	10	10	10	10	2
$0.93328 \leq \frac{b}{a} < 0.935978$	10	10	10	10	10	10

Dans l'étude correspondant à la fin de ce tableau, le pas en $\frac{b}{a}$ est

beaucoup plus faible ; il n'est pas possible d'obtenir la valeur du pôle autrement. En effet, plus l'épaisseur du tube est faible plus ce pôle se situe proche de l'origine ce qui engendre certaines difficultés numériques.

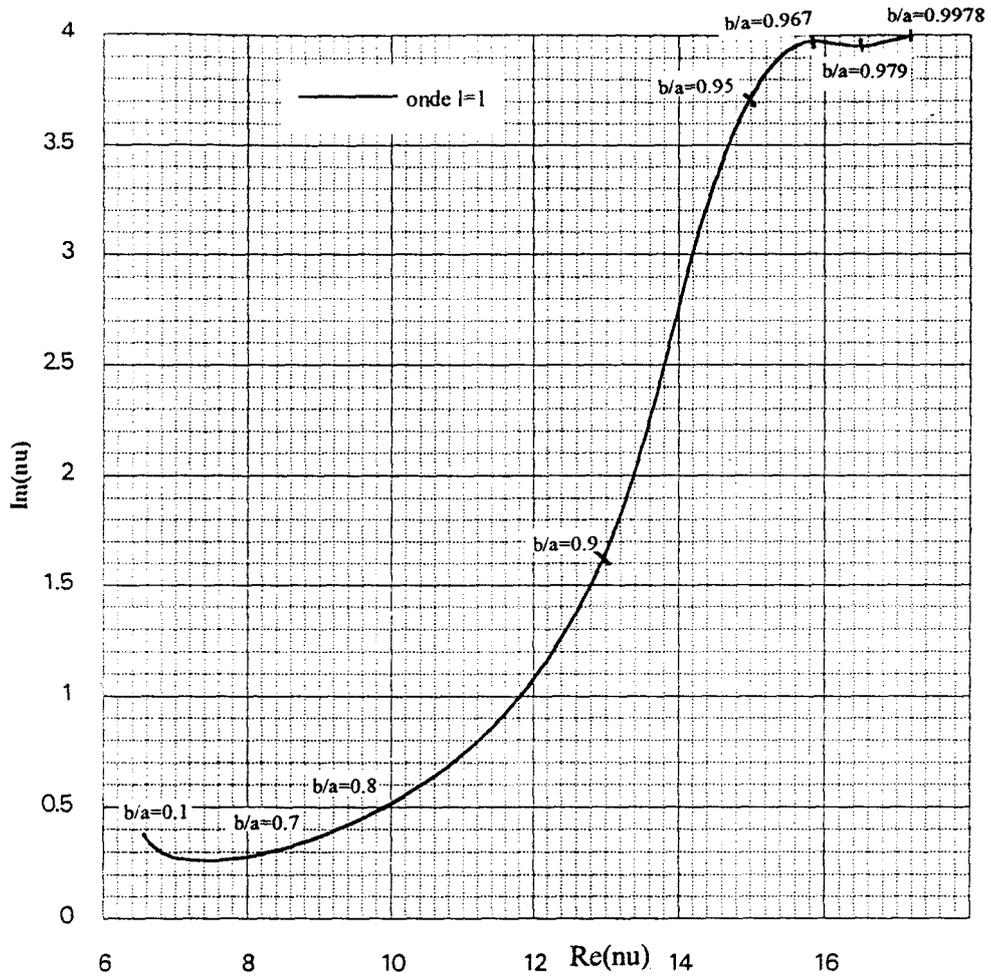


Figure 84 : Tube élastique - Onde $\ell=1$ - $\nu(b/a)$ - $x_1=15$.

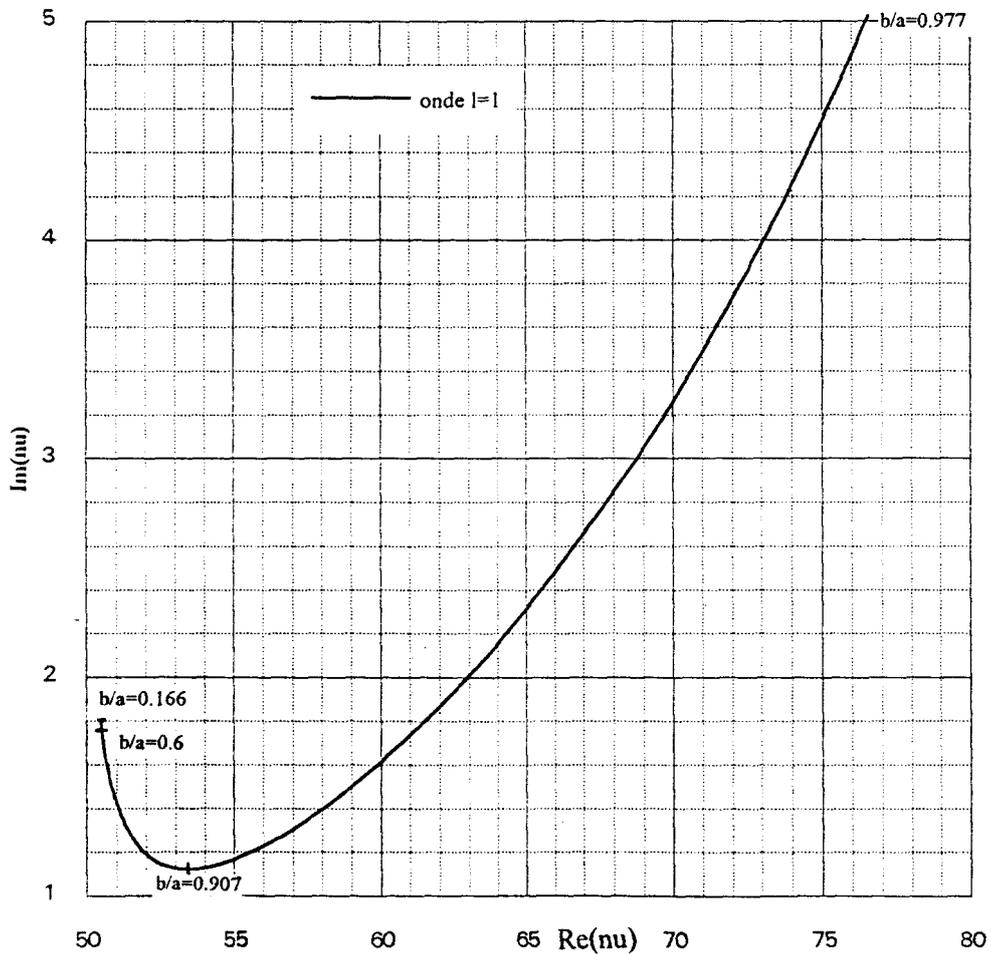


Figure 85 : Tube élastique - Onde $\ell=1$ - $\nu(b/a)$ - $x_1=100$.

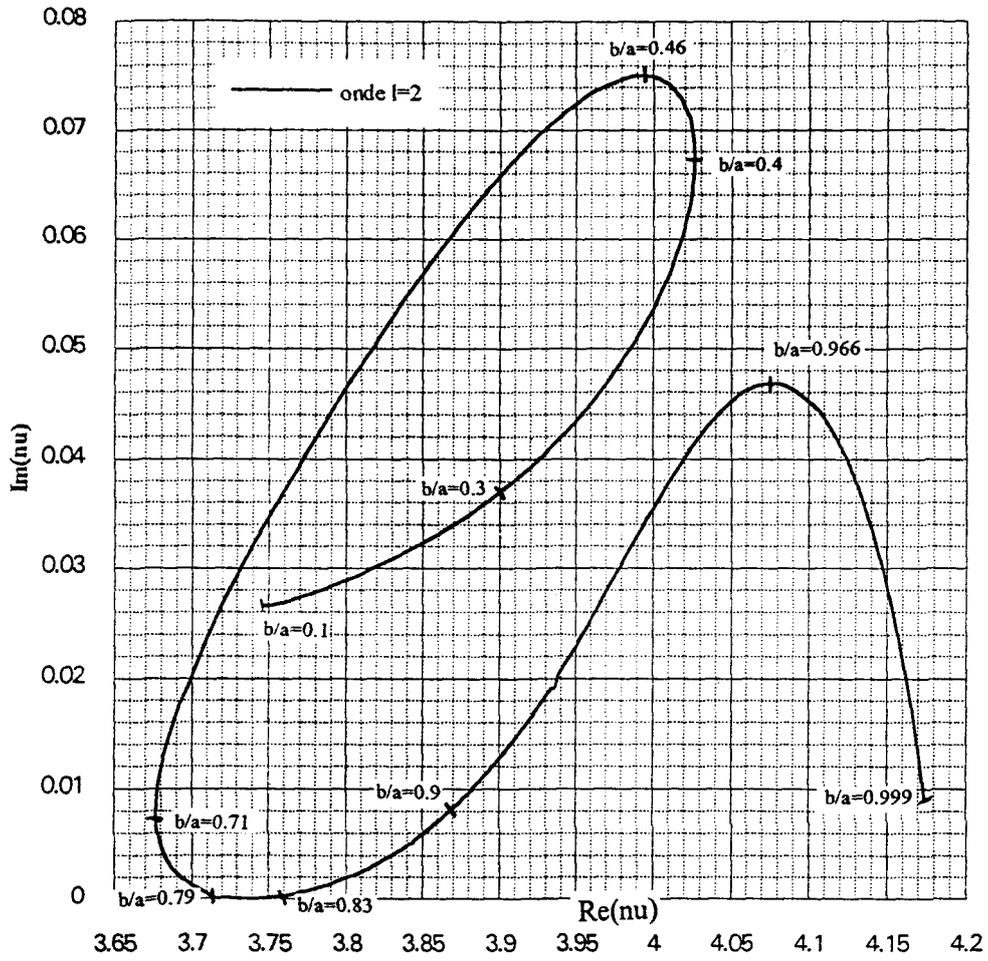


Figure 86: Tube élastique - Onde $l=2$ - $\nu(b/a)$ - $x_1=15$.

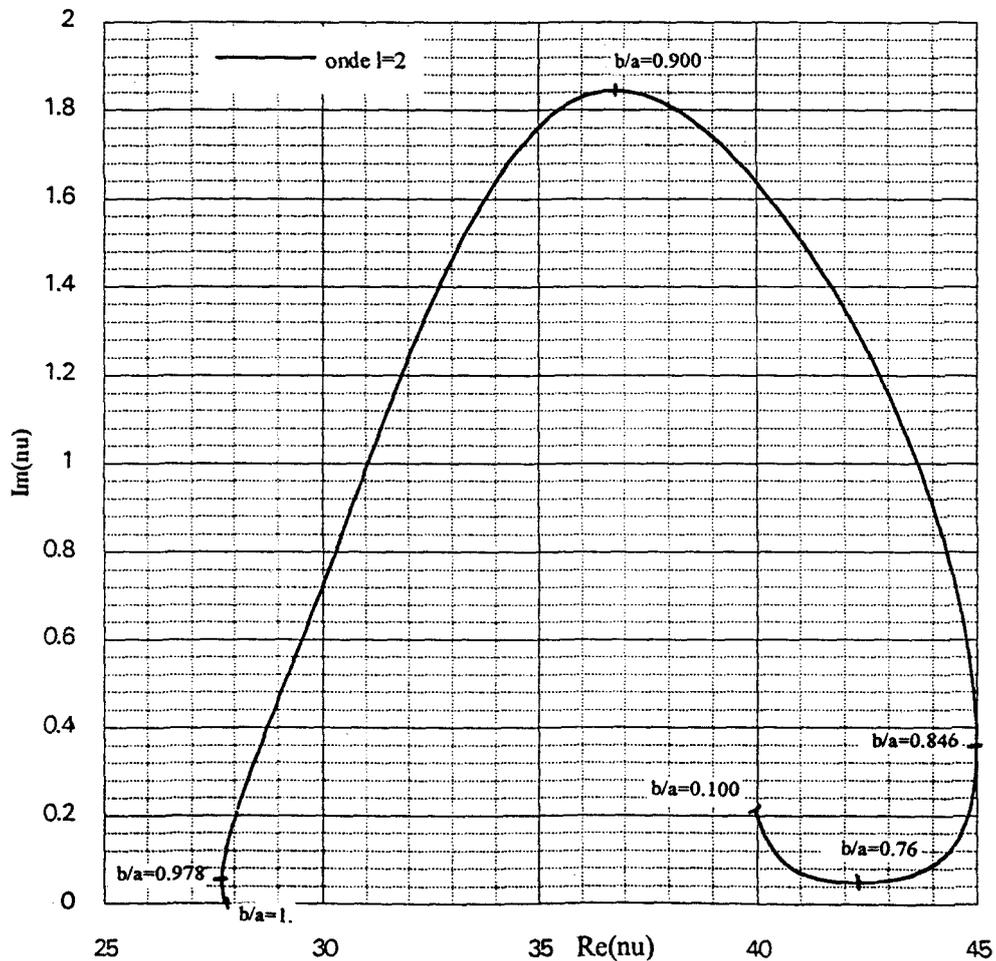


Figure 87: Tube élastique - Onde $l=2$ - $\nu(b/a)$ - $x_1=100$.

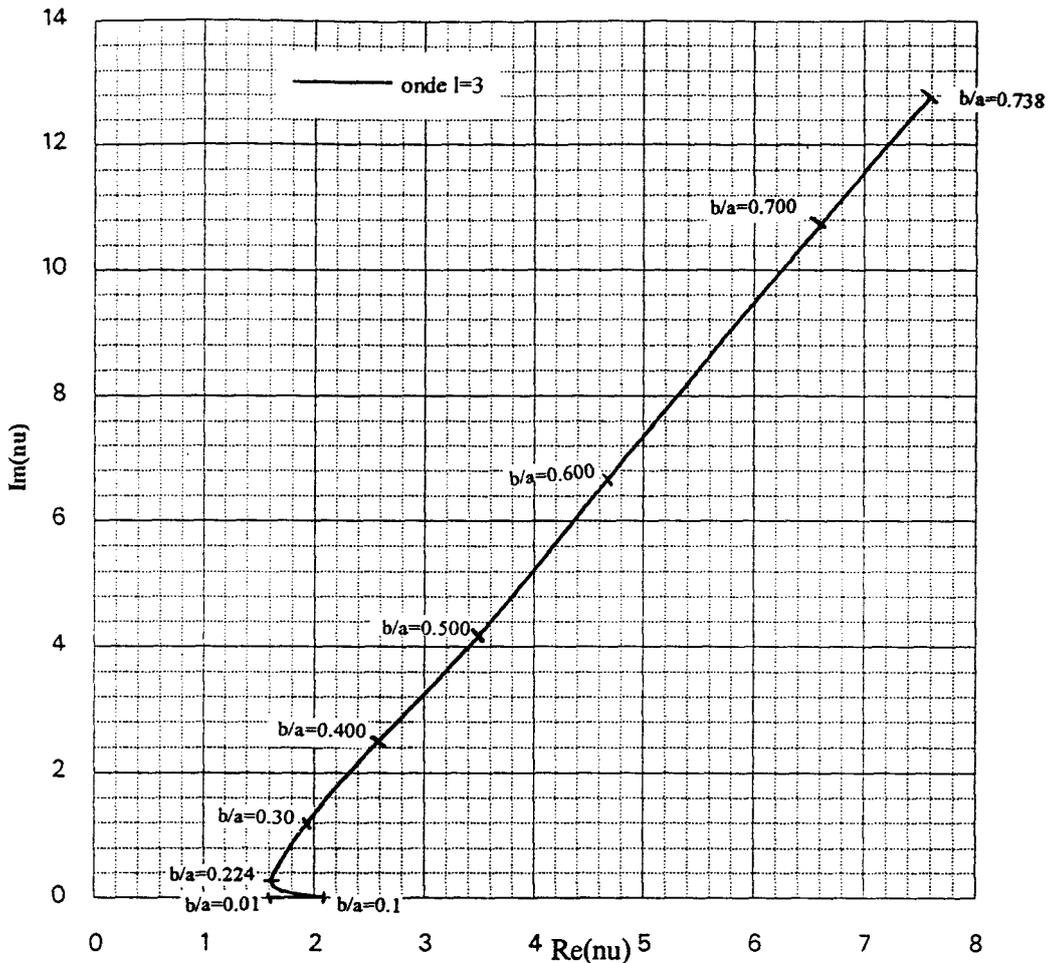


Figure 88 : Tube élastique - Onde $l=3$ - $\nu(b/a) - x_1=15$.

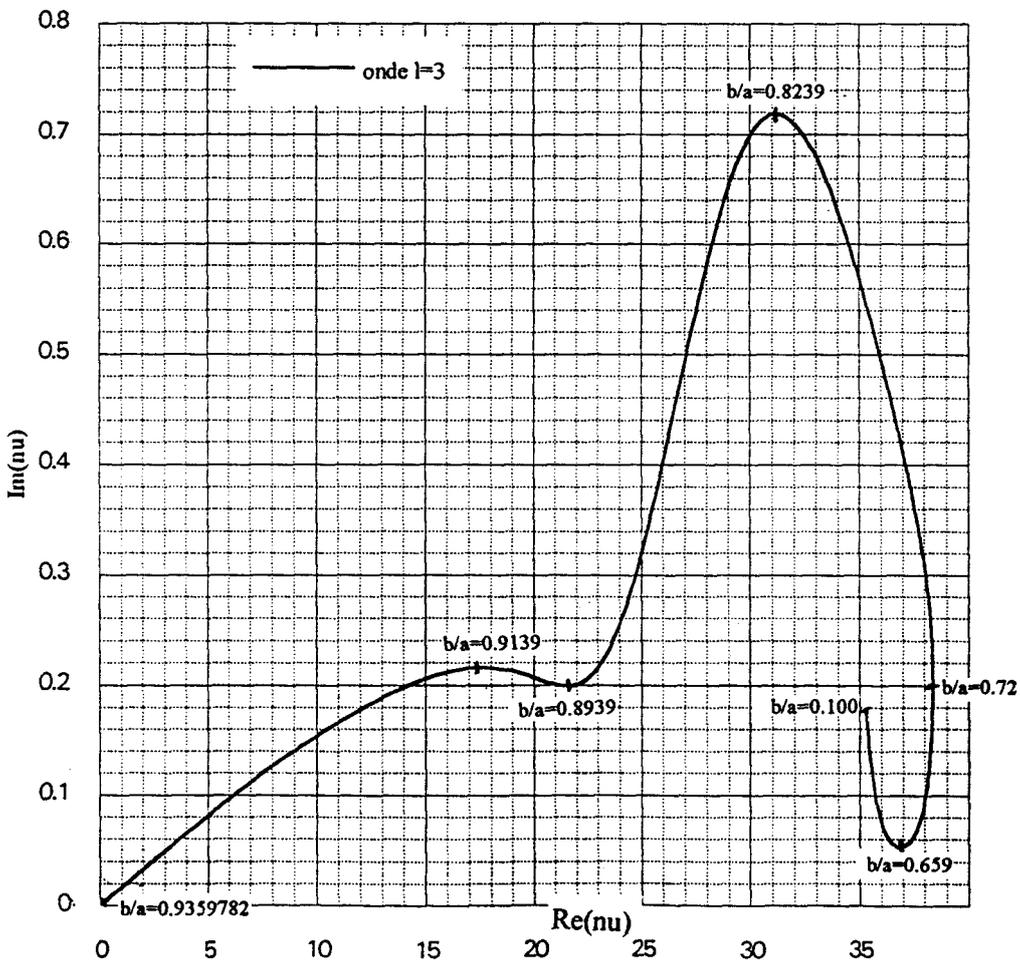


Figure 89 : Tube élastique - Onde $l=3$ - $\nu(b/a) - x_1=100$.

II.3.2. Comportement des pôles de type ℓ_1 en fonction de la fréquence réduite x_1 ¹

Le rapport des rayons adoptés pour cette étude est de 0.90. Pour obtenir les trajectoires des différents pôles, nous utilisons les valeurs obtenues dans le paragraphe précédent pour les fréquences réduites 15 et 100. La plus faible de ces valeurs permet de commencer la recherche des pôles en faisant croître la fréquence. L'autre est utilisée pour conduire la recherche des pôles de manière décroissante. Pour une fréquence donnée, l'égalité des résultats obtenues de deux façons différentes limite les erreurs de calcul ou de choix de la zone de développements à utiliser.

La comparaison de ces résultats nous permet d'affirmer que la méthode fondée sur les développements asymptotiques est correcte jusqu'à des fréquences relativement faibles : par exemple pour $x_1 = 3.7$, les valeurs du pôle $v_{\ell=1}$ sont identiques (à 0.005 près en module) à ceux obtenus par la méthode des développements convergents.

Une fois la validation des résultats effectuée, nous poursuivons la recherche du lieu des pôles jusqu'à une fréquence réduite supérieure ou égale à 1000.

II.3.2.1. L'onde $\ell = 1$

Pour $x_1 = 1$, le pôle $v_{\ell=1}$ vaut (1.530, 1.531). Il se situe donc dans le demi-plan des complexes v de partie réelle supérieure à x_1 ² (nous écrivons pour simplifier qu'il est à droite de x_1). Il se rapproche de la

¹ Figures 90 à 97.

² Figure 93.

fréquence réduite au fur et à mesure que cette dernière croît. Ainsi, la partie réelle du pôle vient à coïncider avec celle de la fréquence réduite entre $x_1 = 7.2$ et $x_1 = 7.4$; il prend pour valeur, respectivement, (7.202,2.307) et (7.374,2.311). Tant que ce pôle se situe à *droite* de la fréquence x_1 , l'onde a un comportement voisin de celui d'une onde de Franz. Ce résultat est conforme à celui obtenu par Rousselot¹.

Lorsque la fréquence croît les parties réelle et imaginaire du pôle décroissent jusqu'à atteindre un minimum pour la fréquence $x_1 = 167$. Au-delà de cette valeur la trajectoire dans le plan réduit en ξ semble s'enrouler sur elle-même. Pour $x_1 = 1000$, nous obtenons $v_{\ell=1} \approx (520.450, 15.797)$. Nous trouvons un résultat voisin de celui de Rousselot² ($\frac{v_{\ell=1}}{x_1} \approx 0.520 + 0.0158i$). Vraisemblablement la trajectoire tend vers le point limite $\frac{x_{\overline{R}}}{x_1} = 0.522 + 0.0155i$ correspondant à l'onde de Rayleigh plane³. Le comportement à haute fréquence de l'onde $\ell = 1$ est donc voisin de celui des ondes de Rayleigh cylindrique et plane. Seulement le point limite n'est pas atteint de la même façon par l'onde $\ell = 1$ et l'onde circumférentielles du cylindre.

II.3.2.2. Les ondes $\ell = 2$ et $\ell = 3$

Les ondes $\ell = 2$ et $\ell = 3$ sont associées à des pôles dont les parties réelles ne cessent de croître depuis une valeur nulle jusqu'à une valeur voisine de $\text{Re}(x_{\overline{R}})$ et de x_1 . Pour une fréquence de 1000, $\frac{v_{\ell=2}}{x_1}$ vaut

¹ J-L. Rousselot, *Acustica, Comportement acoustique d'un tube cylindrique mince en basse fréquence*, 58, p. 294, 1985.

² Ibid.

³ Chapitre 3, paragraphe V.1.1.

$(0.571, 10^{-18})$ et pour une fréquence de 1950, $\frac{v_{\ell=3}}{x_1}$ vaut $(0.480, 2.52 \cdot 10^{-4})$. Aucune limite n'apparaît de façon évidente. L'étude n'est pas réalisée pour des fréquences suffisamment élevées. Malheureusement la méthode numérique utilisée ne nous permet pas de conduire d'important calcul pour des pôles de partie imaginaire très faible (le déterminant initial n'est pas conditionné pour cela). Ainsi le résultat obtenu pour l'onde $\ell = 2$ n'est pas réellement sûr.

Conformément à l'étude conduite par Rousselot¹ pour un tube de rapport $\frac{b}{a} = 0.85$, la partie imaginaire de l'onde $\ell = 2$ s'annule une première fois pour une fréquence réduite voisine de 20 (nous trouvons 21.1). Le pôle $v_{\ell=2}$ vaut à peu près à cette fréquence 5.543. Contrairement à ce qui est montré dans l'étude d'un tube de rapport $\frac{b}{a} = 0.85$, ce pôle ne correspond pas à la fréquence réduite $x_\ell \approx 4.91$. Comme nous le verrons par la suite, il se situe dans le cercle d'Airy de x_ℓ mais ne peut être identifié à cette fréquence réduite. Nous retrouvons le comportement d'un pôle associé à une onde de Brekhovskikh dont la partie imaginaire s'annule lorsque le pôle est voisin de x_ℓ sans pour autant lui être égal. L'onde $\ell = 2$ est plus particulièrement proche de la première onde de Brekhovskikh. En effet, comme pour cette dernière l'onde $\ell = 2$ existe dès que la fréquence n'est plus nulle. Par contre, contrairement à l'onde B_1 , la partie imaginaire du pôle associé est relativement importante à l'origine des fréquences : nous obtenons $\text{Im}(v_{\ell=2}) \approx 0.239$. De plus, si nous représentons dans le plan réduit ξ le comportement de cette onde aux très basses fréquences (en utilisant les

¹ J-L. Rousselot, *Acoustica, Comportement acoustique d'un tube cylindrique mince en basse fréquence*, 58, p. 296, 1985.

développements convergents jusqu'à 0.04), nous trouvons un comportement voisin de celui de l'onde $\ell = 1$: le pôle se situe à *droite* de x_1 ¹

L'onde $\ell = 3$ peut être rapprochée de l'onde B_2 car elle est la première onde apparaissant à une fréquence non nulle. Pourtant, elle diffère des ondes de Brekhovskikh puisque la partie imaginaire du pôle associé ne s'annule pas au voisinage de x_ℓ . Dans le plan réduit en ξ , nous constatons simplement un minimum très faiblement marqué au voisinage de x_ℓ .

¹ Figure 94.

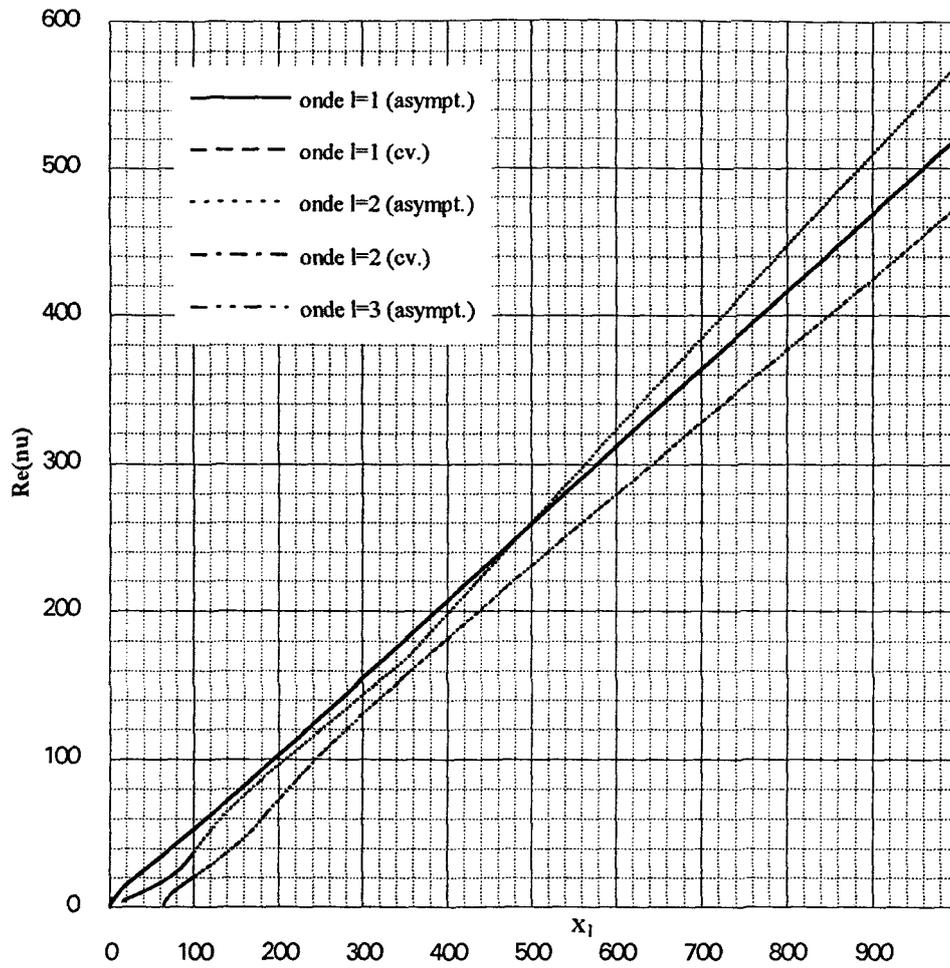


Figure 90 : Tube élastique - Ondes de type l_1 - $Re(v(x_1))$.

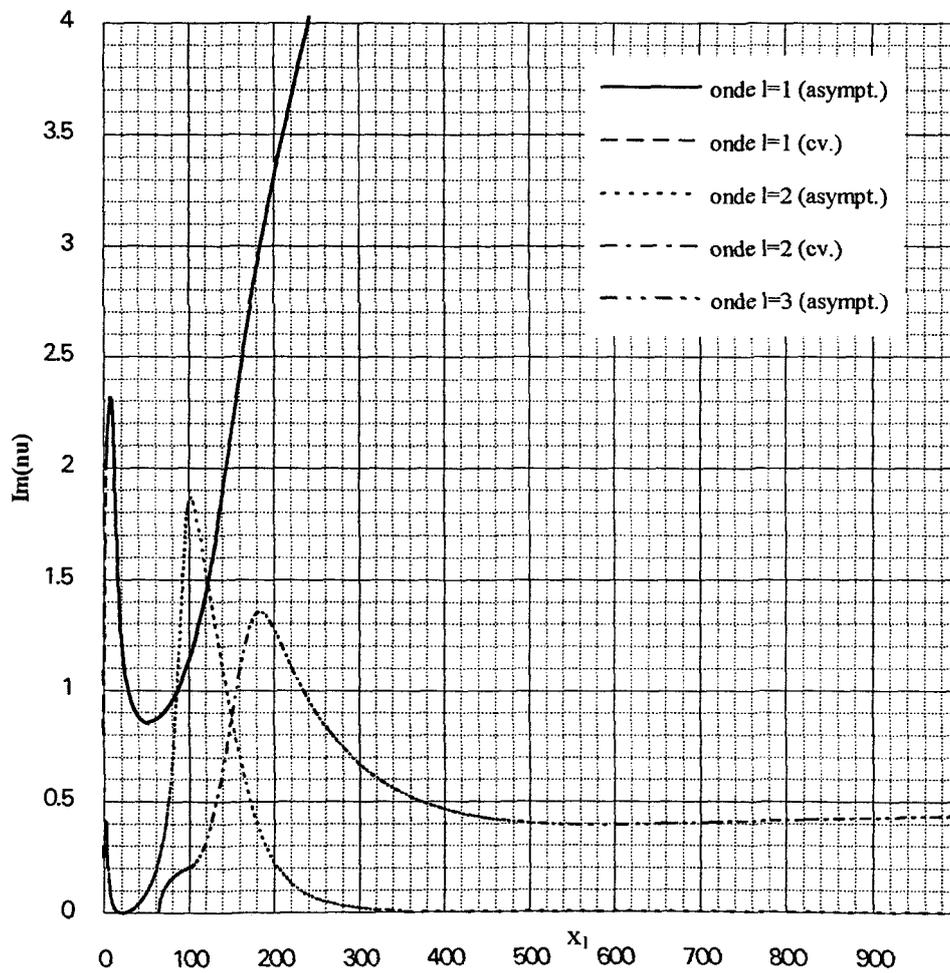


Figure 91: Tube élastique - Ondes de type l_1 - $Im(v(x_1))$.

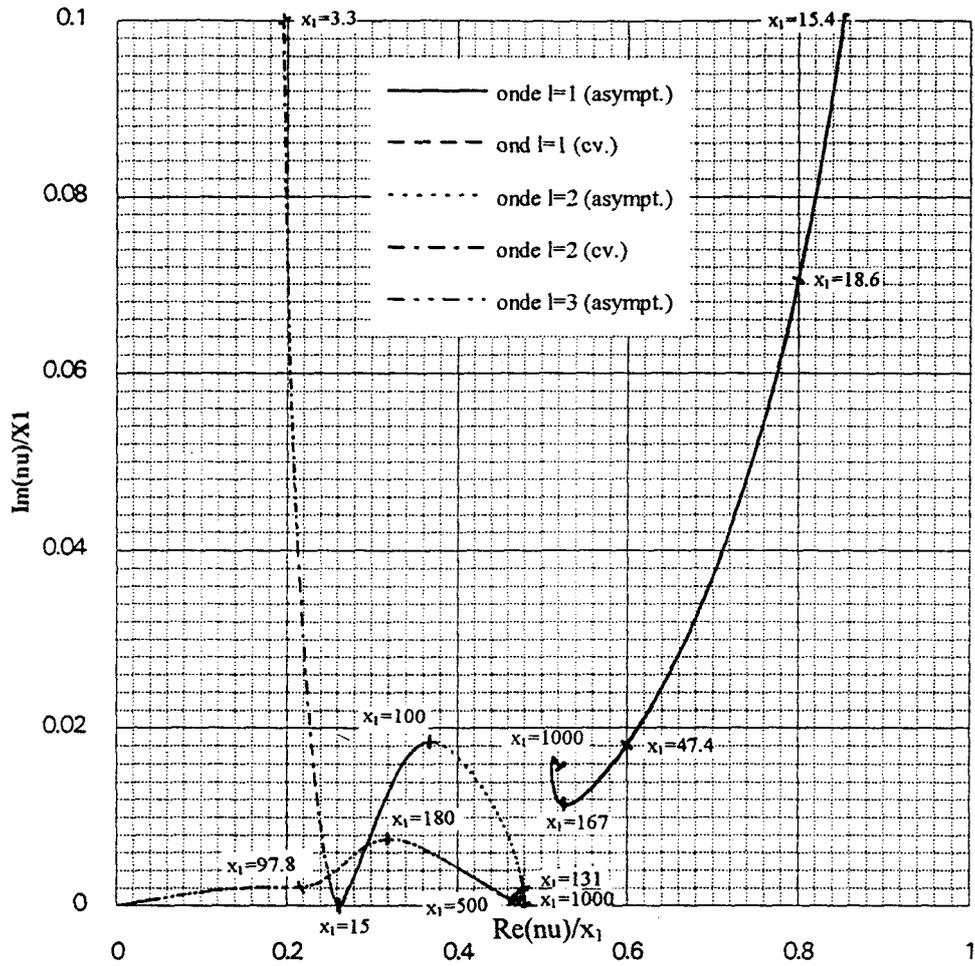


Figure 92 : Tube élastique - Ondes de type $l_1 - [Im(\nu)/x_1](Re(\nu)/x_1)$.

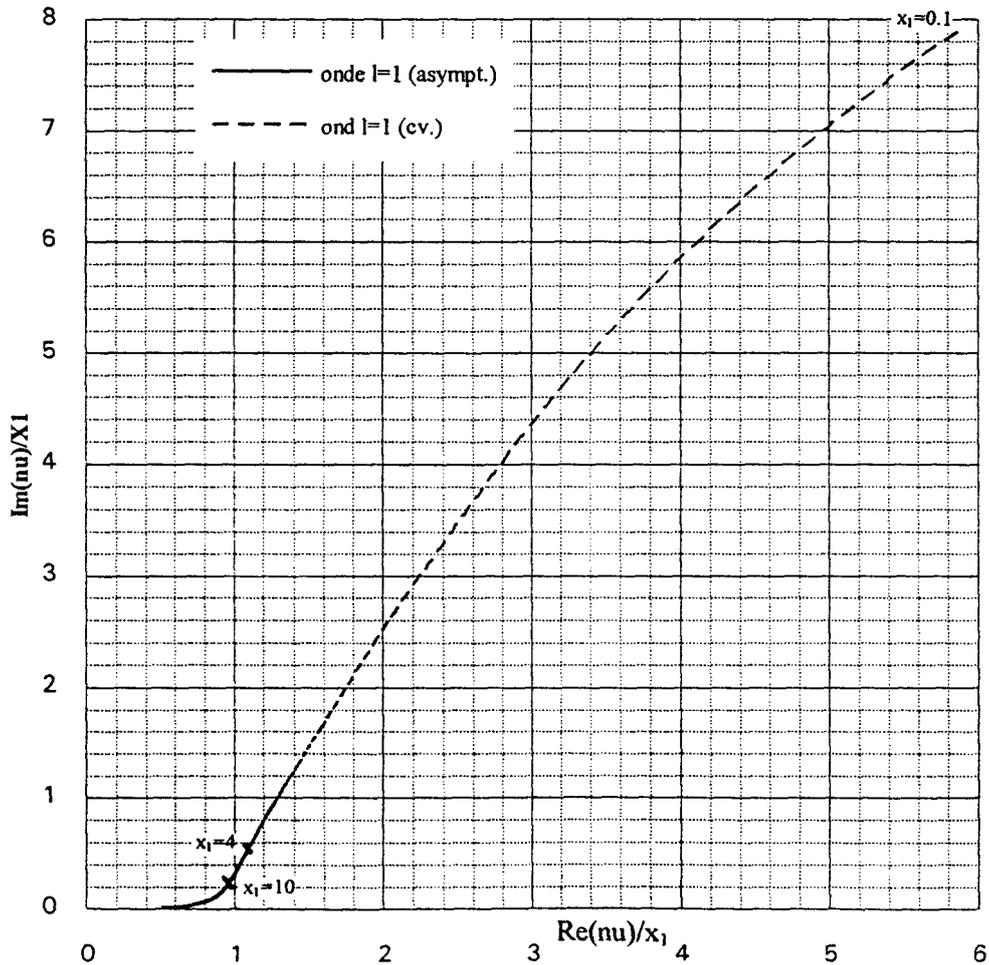


Figure 93 : Tube élastique - Onde $l = 1 - [Im(\nu)/x_1](Re(\nu)/x_1)$.

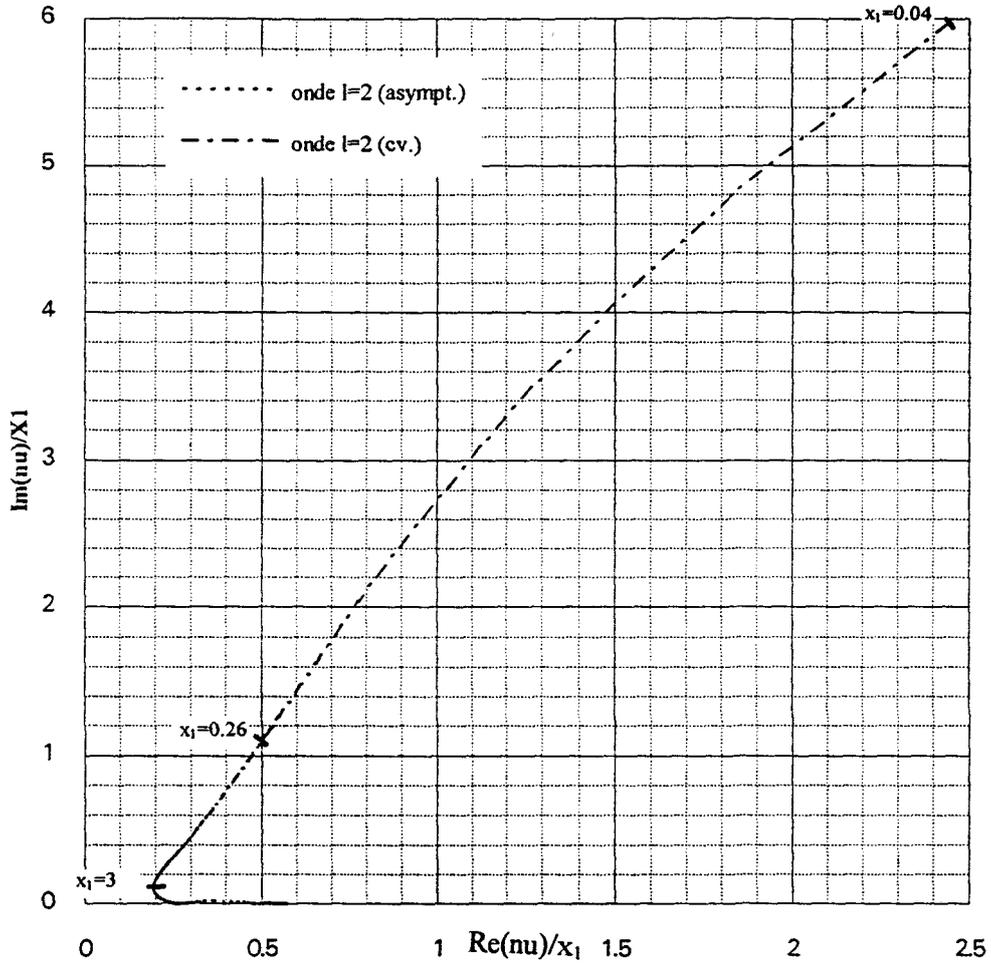


Figure 94 : Tube élastique - Onde $\ell = 2 - [\text{Im}(\nu)/x_1](\text{Re}(\nu)/x_1)$.

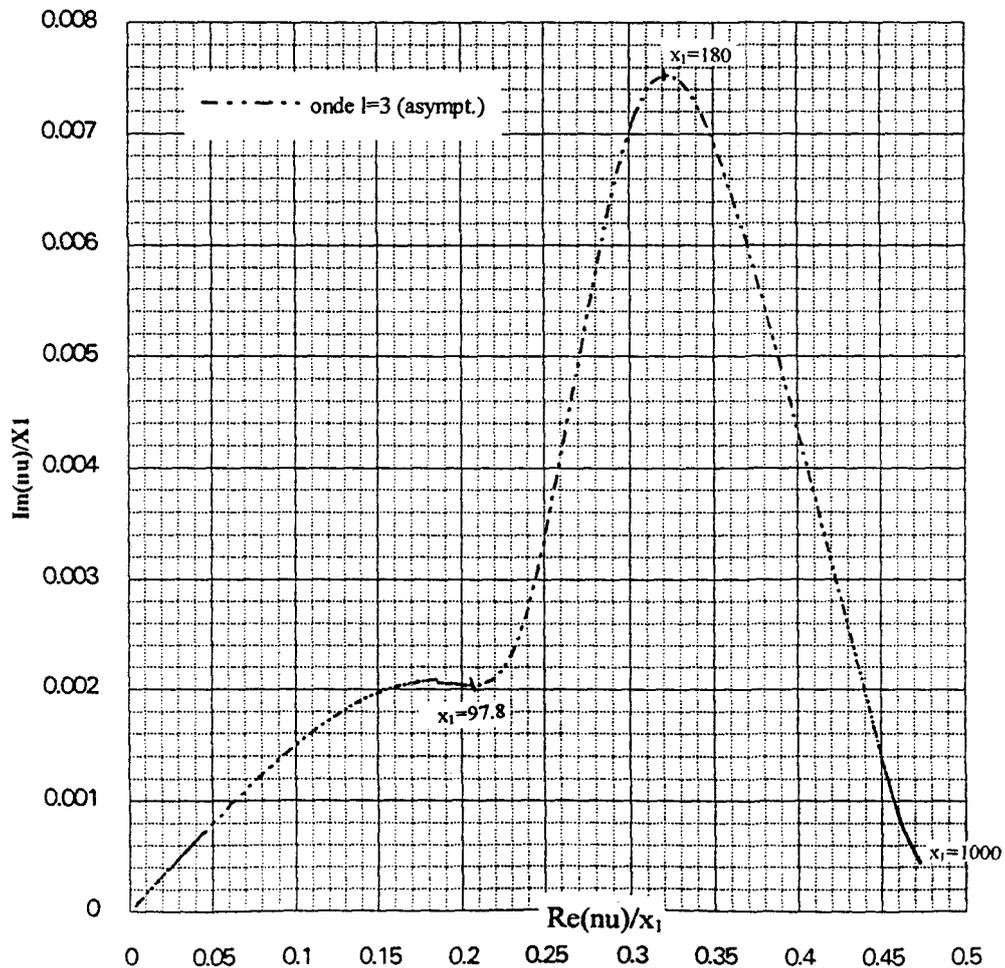


Figure 95 : Tube élastique - Onde $\ell = 3 - [\text{Im}(\nu)/x_1](\text{Re}(\nu)/x_1)$.

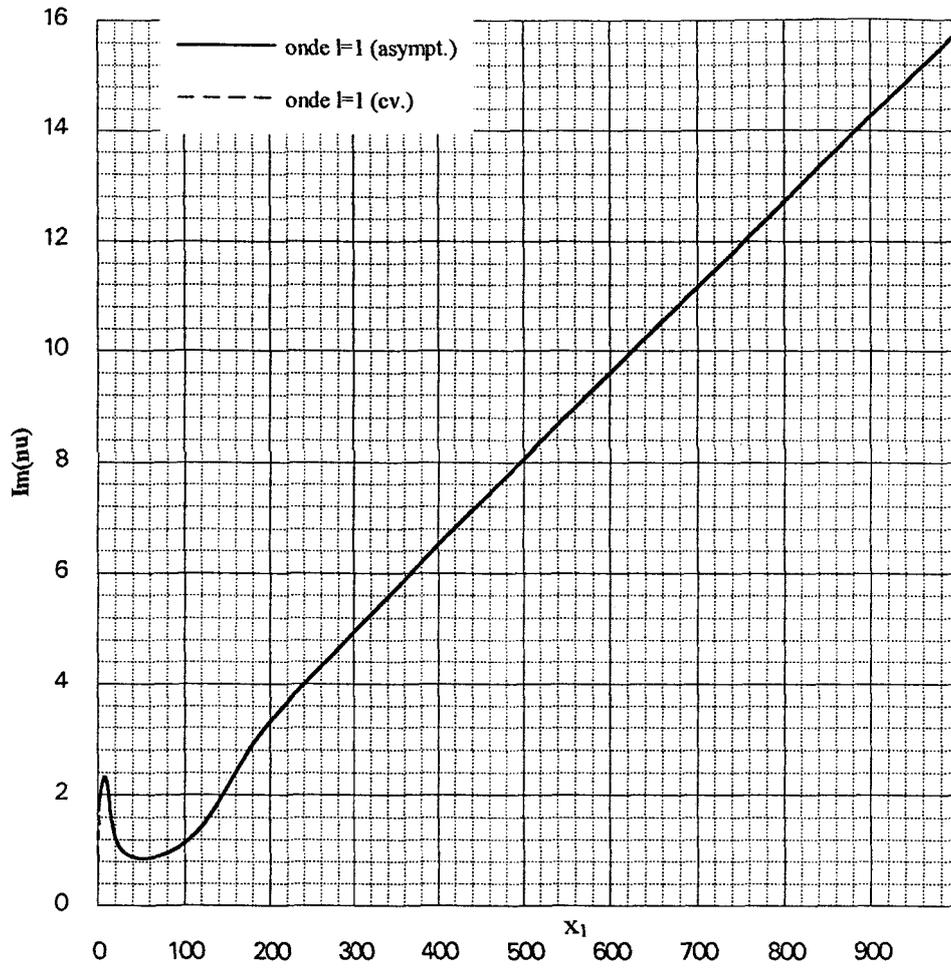


Figure 96 : Tube élastique - Onde $\ell = 1 - Im(v)(x_1)$.

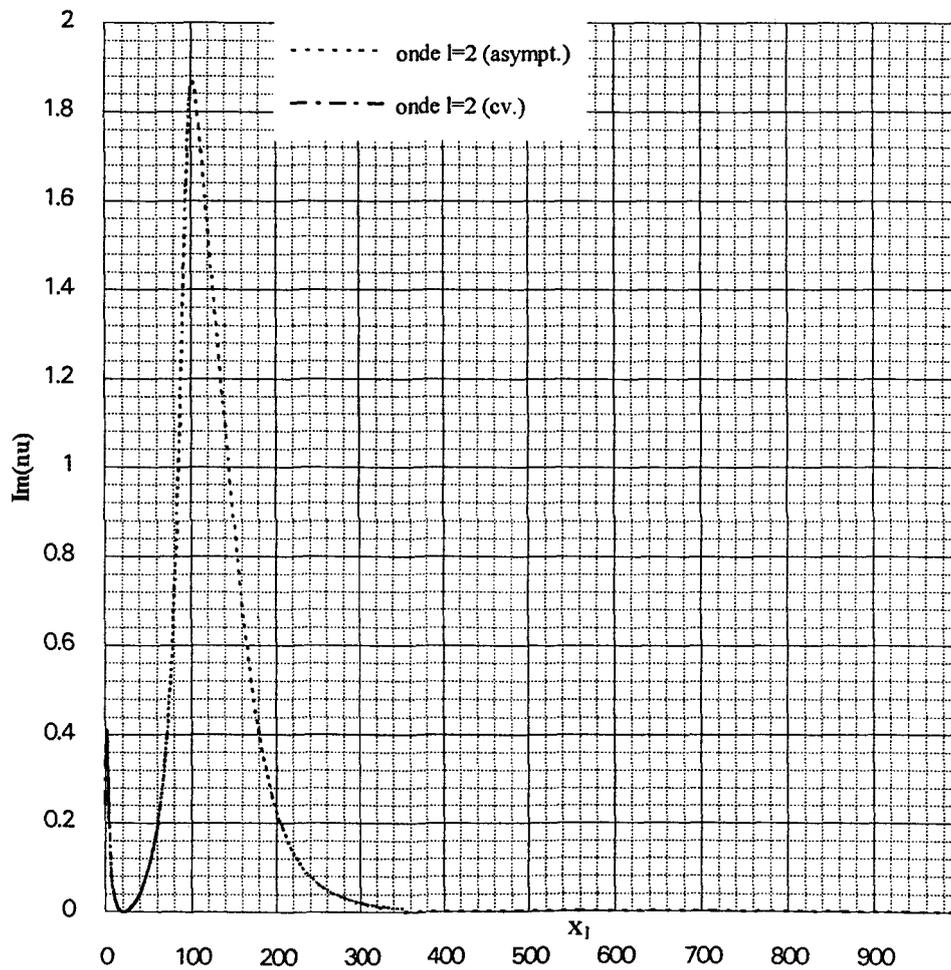


Figure 97 : Tube élastique - Onde $\ell = 2 - Im(v)(x_1)$.

II.3.2.3. Type de développements asymptotiques utilisés pour chacune de ces ondes

Afin de pouvoir appliquer les résultats du premier chapitre nous devons connaître, pour chacune de ces trois ondes et pour chaque fréquence réduite, les développements asymptotiques utilisés. Les tableaux suivants présentent les différentes zones de développements en fonction de la fréquence réduite x_1 et pour chacune des ondes.

pour l'onde $\ell = 1$,

x	x_1	x_ℓ	x_t	y_3	y_t	y_ℓ	τ^L
$3.7 \leq x_1 < 9.8$	2	8	8	10	8	8	2
$9.8 \leq x_1 < 11$	2	8	8	10	8	7	2
$1 \leq x_1 < 19$	2	7	8	10	8	7	2
$9 \leq x_1 < 52$	10	7	8	10	8	7	2.2
$52 \leq x_1 < 100$	10	7	2	10	2	7	2.2
$00 \leq x_1 < 300$	10	7	2	10	2	7	2.5
$300 \leq x_1 < 401$	10	7	2	10	2	7	2.5
$401 \leq x_1 < 496$	10	7	2	10	8	7	2.5
$496 \leq x_1 < 563$	10	7	2	9	7	7	2.5
$563 \leq x_1 < 706$	10	7	8	9	7	7	2.5
$706 \leq x_1 \leq 1000$	9	7	8	9	7	7	2.5

pour l'onde $\ell = 2$,

x	x_1	x_ℓ	x_t	y_3	y_t	y_ℓ	τ^L
$5 \leq x_1 < 17.7$	10	2	2	10	2	2	2.5
$7.7 \leq x_1 < 56.5$	10	2	10	10	2	2	2.5
$56.5 \leq x_1 < 78.2$	10	2	10	10	10	2	2.5
$78.2 \leq x_1 < 87.2$	10	8	10	10	10	2	2.5
$87.2 \leq x_1 < 96.9$	10	8	10	10	2	2	2.5
$96.9 \leq x_1 < 98.1$	10	8	10	10	2	8	2.5
$98.1 \leq x_1 < 100$	10	8	10	10	2	7	2.5
$00 \leq x_1 < 104$	10	8	10	10	2	7	2.5
$04 \leq x_1 < 118$	10	7	10	10	2	7	2.5
$18 \leq x_1 < 380$	10	7	2	10	2	7	2.5
$380 \leq x_1 < 456$	10	7	2	10	8	7	2.5
$456 \leq x_1 < 482$	10	7	2	10	7	7	2.5
$482 \leq x_1 < 669$	10	7	8	10	7	7	2.5
$669 \leq x_1 \leq 1000$	10	7	7	10	7	7	2.5

et pour l'onde $\ell = 3$,

x	x_1	x_ℓ	x_t	y_3	y_t	y_ℓ	τ^L
$64.1 \leq x_1 < 66.2$	10	10	10	10	10	10	2
$66.2 \leq x_1 < 90.8$	10	10	10	10	10	2	2
$90.8 \leq x_1 < 143$	10	2	10	10	10	2	2
$43 \leq x_1 < 161$	10	8	10	10	10	2	2
$61 \leq x_1 < 173$	10	8	10	10	10	8	2
$73 \leq x_1 < 185$	10	8	10	10	10	7	2
$85 \leq x_1 < 223$	10	7	10	10	10	7	2
$223 \leq x_1 < 669$	10	7	10	10	2	7	2
$669 \leq x_1 \leq 1000$	10	7	10	10	8	7	2

Nous représentons dans la dernière colonne de ces tableaux la valeur limite du paramètre de la zone d'Airy. En effet, afin d'obtenir des courbes régulières, nous sommes obligés de faire varier ce paramètre non seulement lorsque nous changeons d'onde étudiée mais aussi lorsque pour une même onde la fréquence atteint certaines valeurs.

La détermination des différentes valeurs du paramètre τ^L est particulièrement délicate dans le cas de l'onde $\ell = 1$. Nous savons que le résidu β est fortement sensible au changement de zones de développements. Pour chaque intervalle de fréquences contenant un ou plusieurs points de discontinuités, nous traçons les courbes représentant le résidu en fonction de la fréquence pour différents choix du paramètre τ^L (par exemple 1.8, 2 et 2.2, 2.3, 2.5 et 2.8)¹. Chacune de ces courbes possède des discontinuités qui se déplacent vers les x_1 décroissant lorsque τ^L croît. La courbe idéale est composée de l'ensemble des portions de courbes ne possédant pas de points de discontinuité. Ainsi, nous prenons $\tau^L = 2$ jusqu'à $x_1 = 52$ puis $\tau^L = 2.2$ jusqu'à $x_1 = 100$ et enfin $\tau^L = 2.5$ jusqu'à $x_1 = 1000$. La courbe résultante n'est pas parfaitement continue puisqu'il existe encore un très léger

¹ Figure 98.

décrochement pour $x_1 = 52$. Cette fréquence étant loin de la fréquence d'étude de la diffusion, nous estimons que la courbe est correcte.

Lorsque $x_1 = 100$ nous sommes obligés d'utiliser pour chaque onde au moins un développement asymptotique de type Airy. Les trois ondes sont cependant situées dans la zone 10 vis-à-vis de x_1 . Ces trois ondes sont donc à cette fréquence de type ℓ_1 . Et, comme lors de l'étude du cylindre élastique, la T.G.D. n'est pas en toute rigueur applicable. De plus, contrairement à ce que nous montrions dans le chapitre précédent, ces trois ondes ne sont pas toujours de type ℓ_1 puisque, à très basse fréquence, les deux premières se situent à *droite* de x_1 .

Si nous comparons ces résultats à ceux obtenues dans l'étude du cylindre, nous constatons, pour une fréquence donnée, la présence de moins d'ondes circonférentielles. Ce nombre croît avec la fréquence mais reste limité. Alors que dans le cas du cylindre élastique et pour $x_1 = 30$, il était nécessaire de connaître le lieu de 7 pôles de type ℓ_1 , il suffit dans le cas du tube et pour $x_1 = 100$ de déterminer la valeur de trois pôles de type ℓ_1 . Le nombre de pôle à considérer est d'autant plus faible que la cavité interne du tube est grande. Ainsi, pour un tube de rapport $\frac{b}{a} = 0.95$, et pour $x_1 = 100$, seules les deux premières ondes de type ℓ_1 existent.

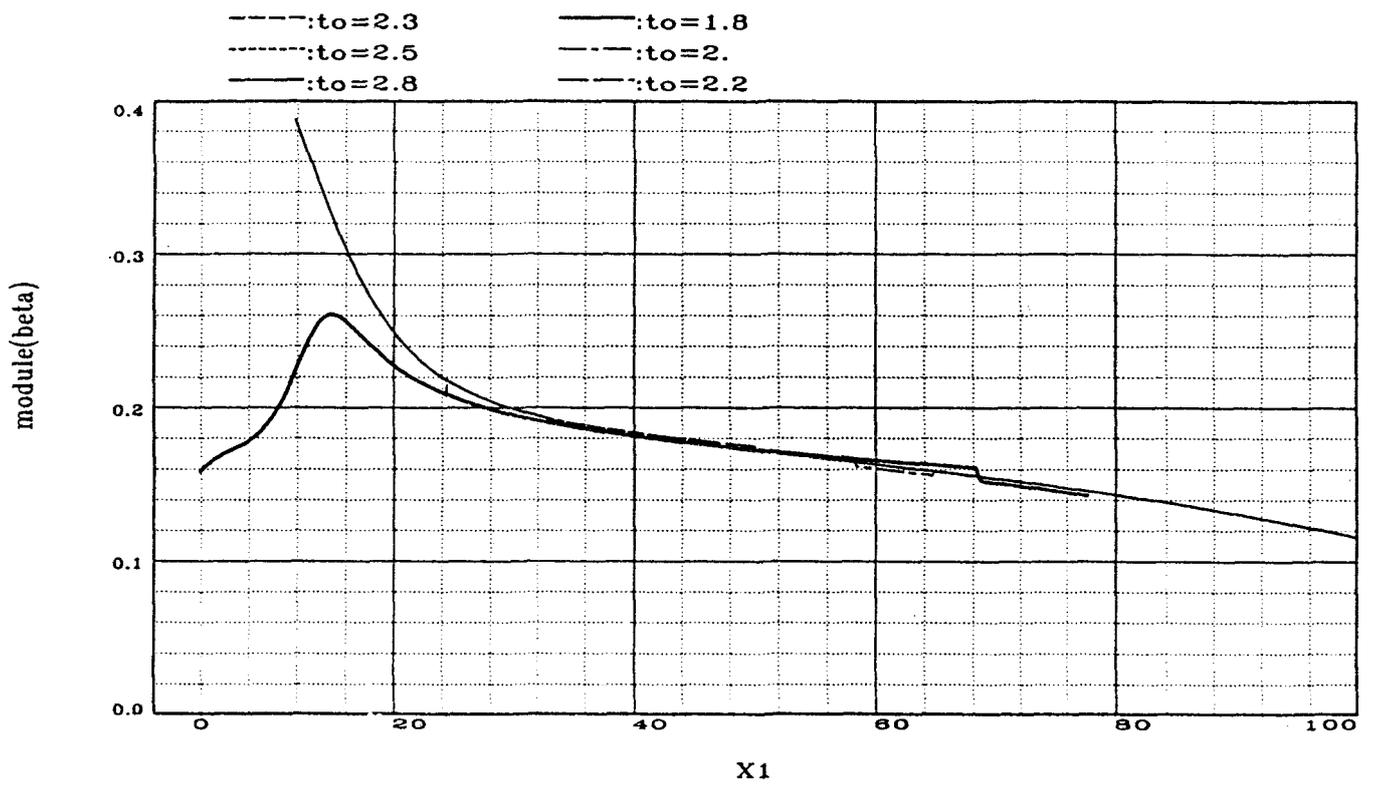


Figure 98: Tube élastique - Evolution de $|\beta|$ en fonction du paramètre τ .

II.4. Les ondes de type ℓ_2

II.4.1. Evolution des pôles de type ℓ_2 lorsque le rayon interne croît¹

Nous conservons dans cette étude les dénominations établies dans le chapitre 3 pour les ondes de type ℓ_2 . Le comportement des ondes de Franz en fonction du rayon interne est étudié à la fréquence $x_1 = 5$, celui de l'onde de Stoneley à la fréquence $x_1 = 1$.

Ceci nous permet de comparer la trajectoire de la première onde de Franz à celle obtenue par Rousselot². Elles sont en tout point identiques. L'allure générale de la trajectoire estimée pour l'onde de Stoneley à la fréquence $x_1 = 1$ est également semblable à celle obtenue par Rousselot pour $x_1 = 5$.

La trajectoire pour $x_1 = 1$ est calculée aussi bien en utilisant des développements convergents que des développements asymptotiques. Lorsque nous utilisons ces derniers, afin d'obtenir une trajectoire continue, nous changeons la valeur du paramètre du cercle d'Airy, τ^L , pour un rapport de rayon $\frac{b}{a} = 0.94$. Les tracés réalisés par ces deux méthodes étant superposables³ cette étude confirme qu'il est nécessaire de faire évoluer le paramètre τ^L lorsqu'il n'y a plus continuité de la trajectoire.

A la fréquence réduite $x_1 = 1$ et pour l'onde de Stoneley, le tableau récapitulatif des changements de zones est :

¹ Figures 99 à 103.

² J-L. Rousselot, *Analyse des conditions de rayonnement des ondes externes pour un objet cylindrique immergé, Colloque de Physique, Colloque C2, 51, février 1990.*

³ Figure 103.

$\frac{b}{a}$	x_1	x_ℓ	x_t	y_3	y_t	y_ℓ	τ^L
$0.04 \leq \frac{b}{a} < 0.15$	2	7	8	8	7	7	2
$0.15 \leq \frac{b}{a} < 0.20$	2	7	8	9	7	7	2
$0.20 \leq \frac{b}{a} < 0.807$	2	7	8	10	7	7	2
$0.8071 \leq \frac{b}{a} < 0.926$	2	7	8	10	8	7	2
$0.9261 \leq \frac{b}{a} < 0.9353$	2	7	8	10	7	7	2
$0.9353 \leq \frac{b}{a} < 0.9400$	2	7	7	10	7	7	2
$0.9400 \leq \frac{b}{a} < 0.9424$	2	7	7	10	7	7	3
$0.9424 \leq \frac{b}{a} < 0.9544$	2	7	7	10	7	7	3
$0.9544 \leq \frac{b}{a} \leq 0.9999$	8	7	7	10	7	7	3

Le comportement de cette onde est contraire à celui des ondes de Franz lorsque le rayon interne croît. En effet la partie imaginaire du pôle représentant cette onde dans le plan complexe tend vers 0 lorsque le tube devient d'épaisseur nulle alors que celles correspondant aux deux ondes de Franz deviennent supérieur à x^4 . Cette différence de comportement justifie pleinement le choix fait dans le chapitre précédent de considérer l'onde de Stoneley comme distincte des ondes de Franz.

Lorsque nous comparons l'ensemble de ces trajectoires à celles obtenues pour les ondes de type ℓ_1 , nous remarquons que dans les deux cas les trajectoires évoluent peu tant que le rayon interne est faible (inférieur à 0.90 pour les ondes de type ℓ_2) puis changent radicalement de comportement lorsque l'épaisseur du tube devient faible devant le rayon externe.

⁴ Figures 99 à 103.

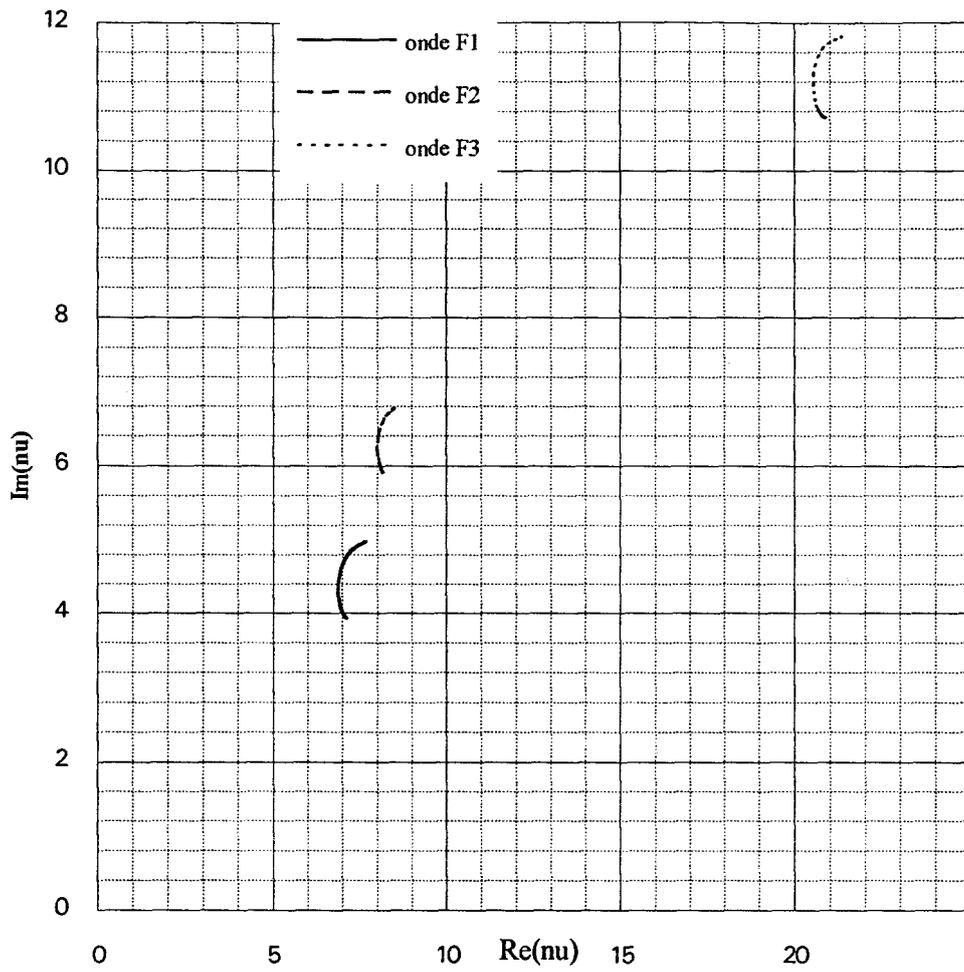


Figure 99 : Tube élastique - Trajectoire des ondes de Franz lorsque b/a varie $x_1=5$.

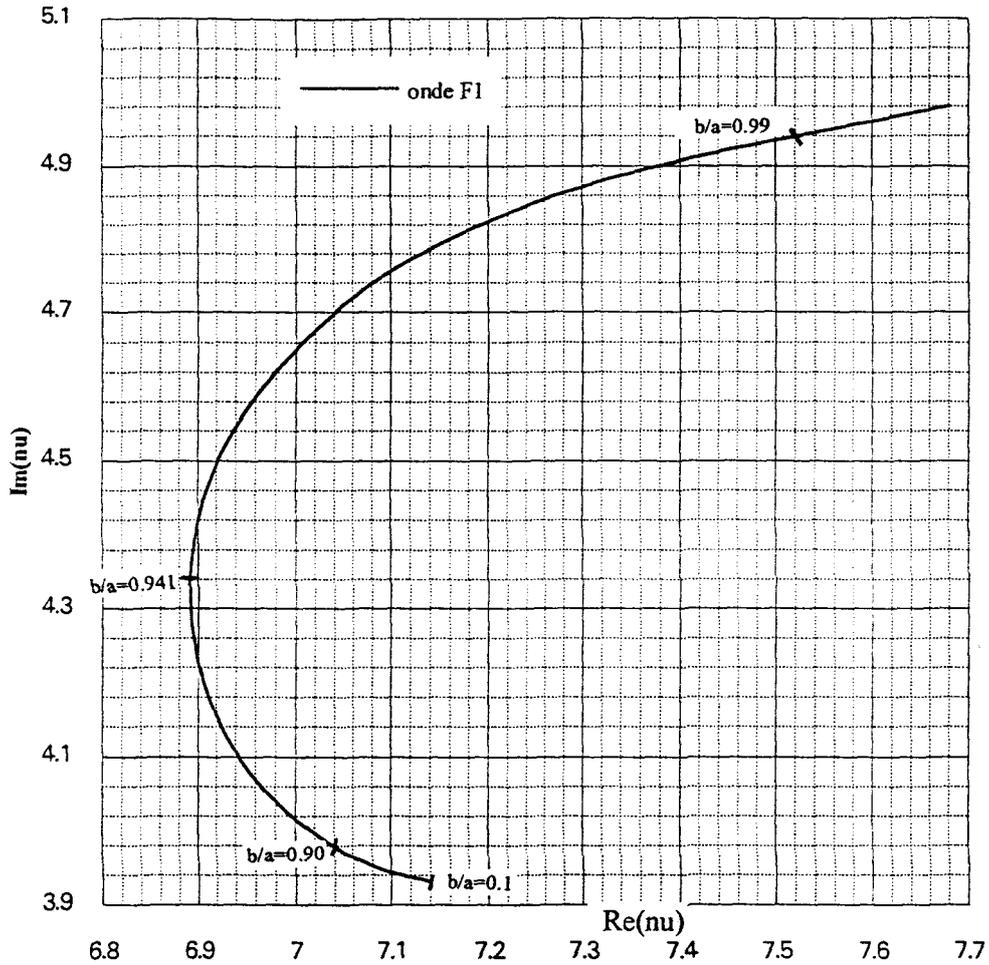


Figure 100 : Tube élastique : onde $F_1 - \nu(b/a) - x_1=5$

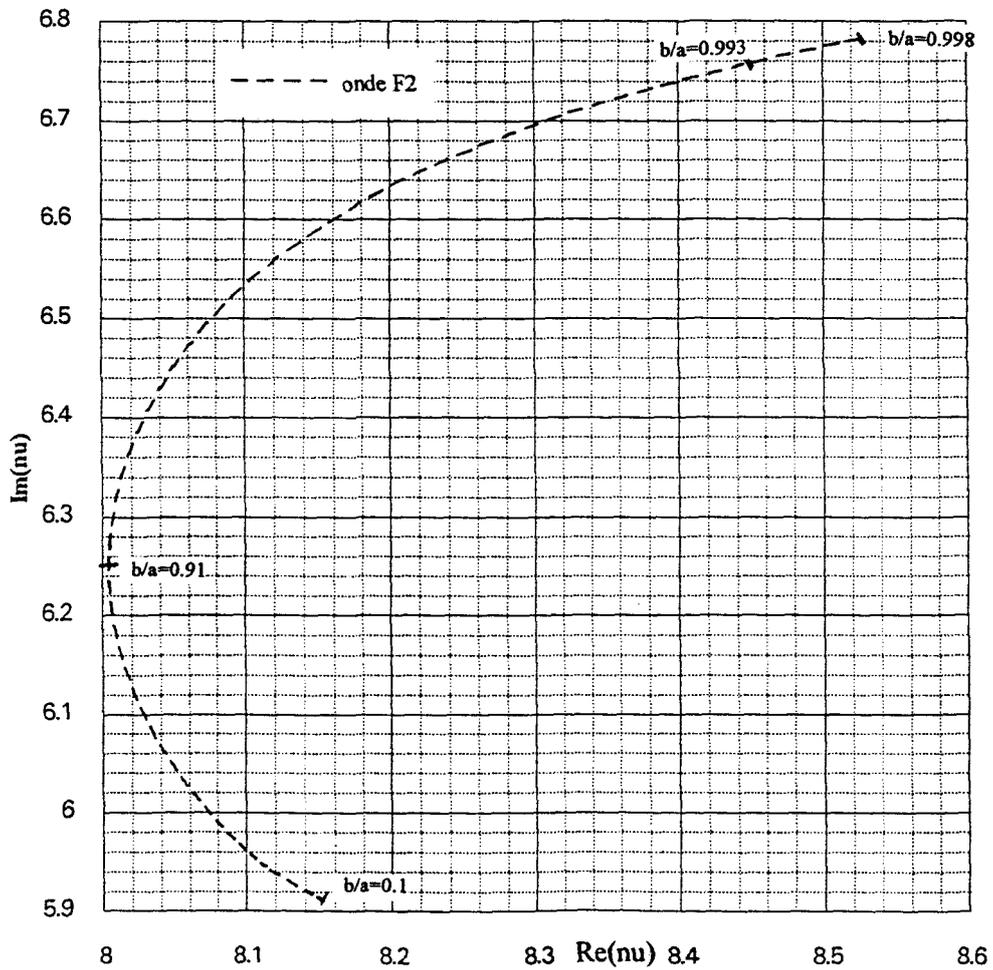


Figure 101 : Tube élastique - onde $F_2 - \nu(b/a) - x_1=5$

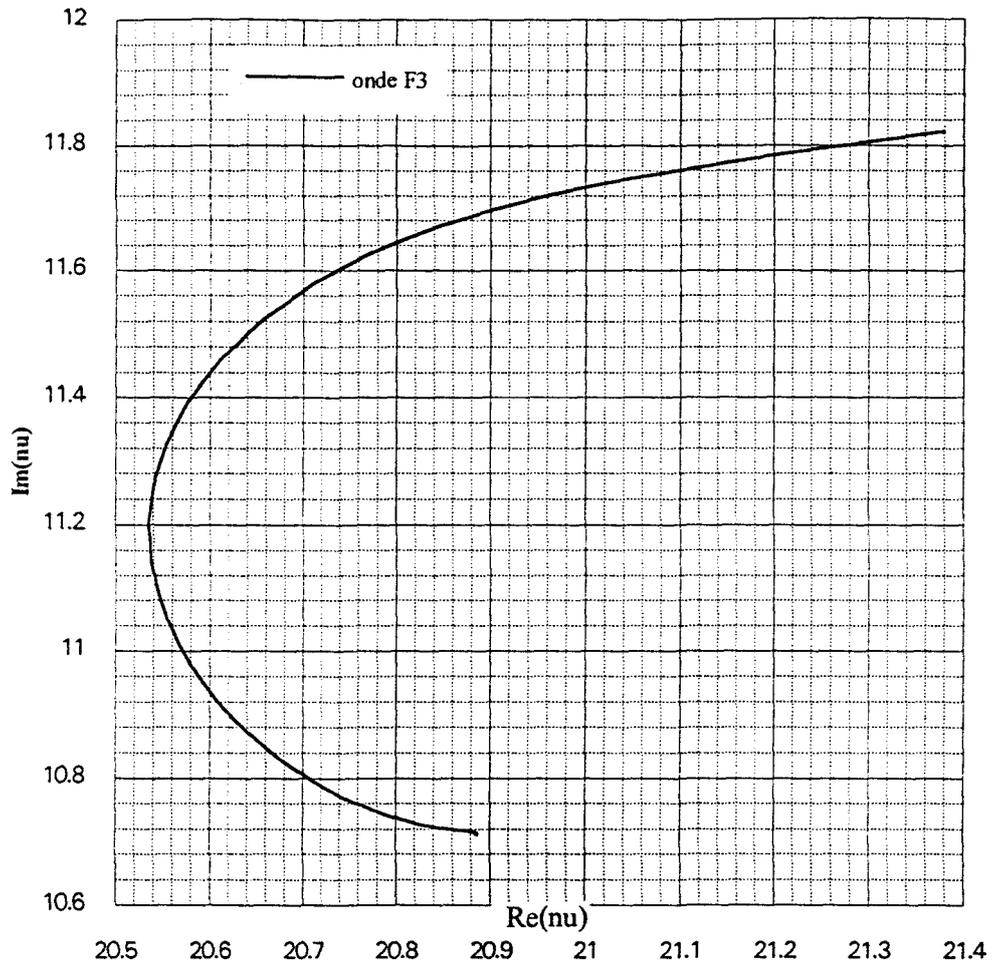


Figure 102 : Tube élastique - onde F_3 - $\nu(b/a)$ - $x_1=5$

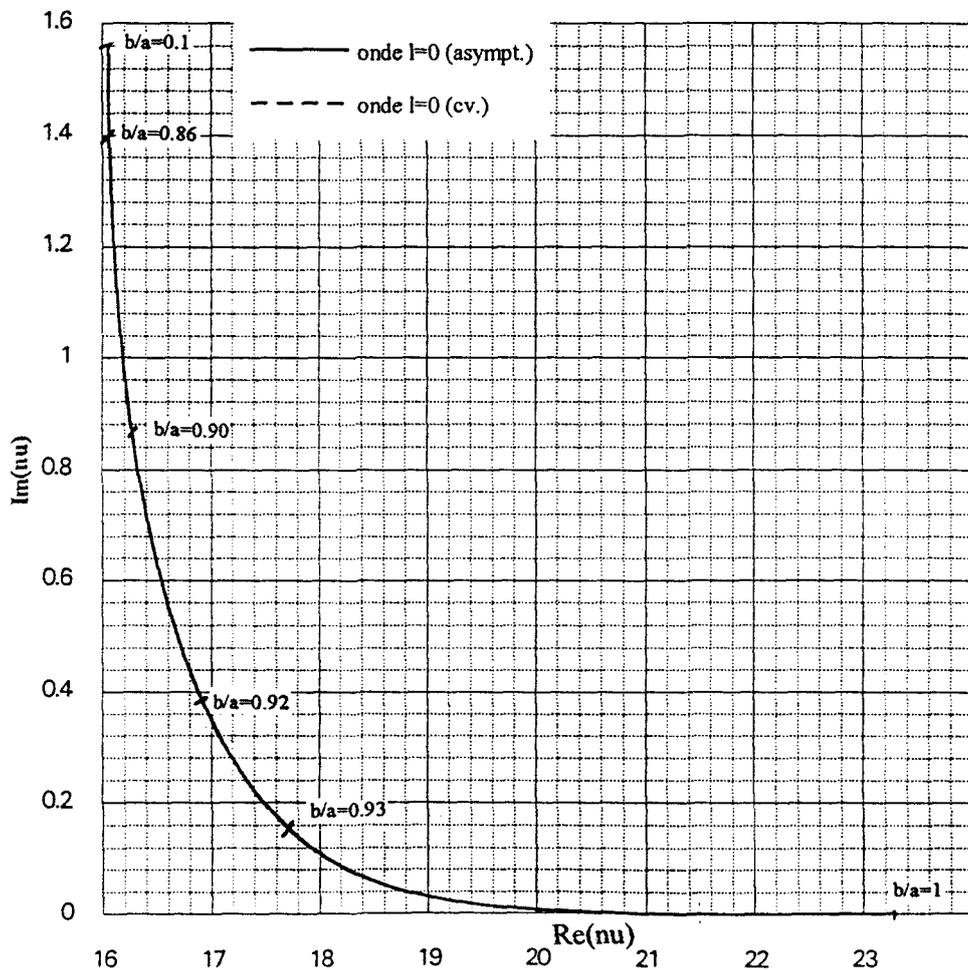


Figure 103 : Tube élastique - onde ℓ_0 - $\nu(b/a)$ - $x_1=15$

II.4.2. Comportement des pôles de type ℓ_2 en fonction de la fréquence réduite x_1 ⁵

Les courbes représentant les variations des parties imaginaires et réelles des pôles ν_{F_1} , ν_{F_2} et ν_{F_3} sont semblables à celles obtenues dans l'étude du cylindre élastique. Nous n'étudions pas les autres ondes de Franz car à la fréquence $x_1 = 100$, les contributions des trois premières sont suffisantes au calcul de la pression diffusée par le tube. Les lieux occupés relativement à chacune des fréquences réduites sont :

pour l'onde F_1 ,

x	x_1	x_ℓ	x_t	y_3	y_t	y_ℓ	τ^L
$4.1 \leq x_1 < 5.8$	8	8	8	10	8	8	3.2
$5.8 \leq x_1 < 6.4$	8	8	8	10	8	7	3.2
$6.4 \leq x_1 < 13.8$	8	7	8	10	8	7	3.2
$3.8 \leq x_1 < 14$	8	7	8	10	7	7	3.2
$4.0 \leq x_1 < 16.7$	8	7	8	10	7	7	2
$6.7 \leq x_1 < 64.8$	8	7	7	10	7	7	2
$64.8 \leq x_1 \leq 843$	8	7	7	9	7	7	2

pour l'onde F_2 ,

x	x_1	x_ℓ	x_t	y_3	y_t	y_ℓ	τ^L
$4.6 \leq x_1 < 5.$	8	8	8	10	8	7	3.2
$5.1 \leq x_1 < 11.6$	8	7	8	10	8	7	3.2
$1.6 \leq x_1 < 14.1$	8	7	8	10	7	7	3.2
$4.1 \leq x_1 < 15.0$	8	7	7	10	7	7	3.2
$5.0 \leq x_1 < 20.3$	8	7	7	10	7	7	2
$20.3 \leq x_1 < 837$	8	7	7	9	7	7	2

⁵ Figures 104 à 109.

et pour l'onde F_3 ,

x	x_1	x_ℓ	x_t	y_3	y_t	y_ℓ	τ^L
$4.3 \leq x_1 < 10.1$	8	7	8	10	8	7	3.2
$0.1 \leq x_1 < 10.5$	8	7	8	10	7	7	3.2
$0.5 \leq x_1 < 12.4$	8	7	8	9	7	7	3.2
$2.4 \leq x_1 < 15.0$	8	7	7	9	7	7	3.2
$5.0 \leq x_1 \leq 832$	8	7	7	9	7	7	3.2

Nous remarquons dans ces trois tableaux que l'étude n'est pas conduite jusqu'à $x_1 = 1000$. En effet, l'importance des parties imaginaires aux hautes fréquences provoque des dépassements de capacités numériques du calculateur. Nous constatons également que le lieu des pôles vis-à-vis des différentes fréquences réduites est relativement simple dès lors que $x_1 > 65$. Ainsi, lorsque $x_1 = 100$, les développements asymptotiques associés à la recherche de chacun de ces trois pôles permet d'appliquer en toute rigueur la T.G.D..

Le comportement du pôle $v_{\ell=0}$ se distingue des pôles de Franz par une partie imaginaire croissant très faiblement pour les fréquences inférieures à 5 (tangente confondu avec l'axe des abscisses à l'origine) évoluant nettement moins rapidement pour des fréquences supérieure à 100^6 . La courbe représentant la partie réelle de ce pôle en fonction de la fréquence est également différente de celles associées aux ondes de Franz puisqu'elle croise chacune de ces courbes relativement parallèles entre elles⁷. Cette différence de comportement est encore visible dans le plan réduit en ξ où la trajectoire du pôle $v_{\ell=0}$ possède un maximum pour $x_1 \approx 19.2$. La partie imaginaire représente à cette fréquence 0.07 fois x_1 .⁸

⁶ Figures 104 et 105.

⁷ Figures 106 et 107.

⁸ Figures 108 et 109.

Les lieux occupés par le pôle $v_{\ell=0}$ vis-à-vis des différentes fréquences réduites sont inscrits dans le tableau suivant :

x	x_1	x_ℓ	x_t	y_3	y_t	y_ℓ	τL
$4.4 \leq x_1 < 17.4$	2	7	8	10	8	7	3.2
$7.4 \leq x_1 < 21.0$	2	7	8	10	7	7	3.2
$21.0 \leq x_1 < 40.0$	2	7	7	10	7	7	3.2
$40.0 \leq x_1 \leq 849$	2	7	7	10	7	7	2

L'onde $\ell = 0$ ne vérifie jamais les hypothèses de la T.G.D. puisque le pôle associé à cette onde se situe quelque soit la fréquence en zone 2 vis-à-vis de x_1 . Dans le calcul de la pression diffusée, nous employons toujours les équations vérifiées par les ondes de type ℓ_2 dont le comportement peut être modélisé par la T.G.D., tout en sachant que théoriquement ce n'est pas correct.

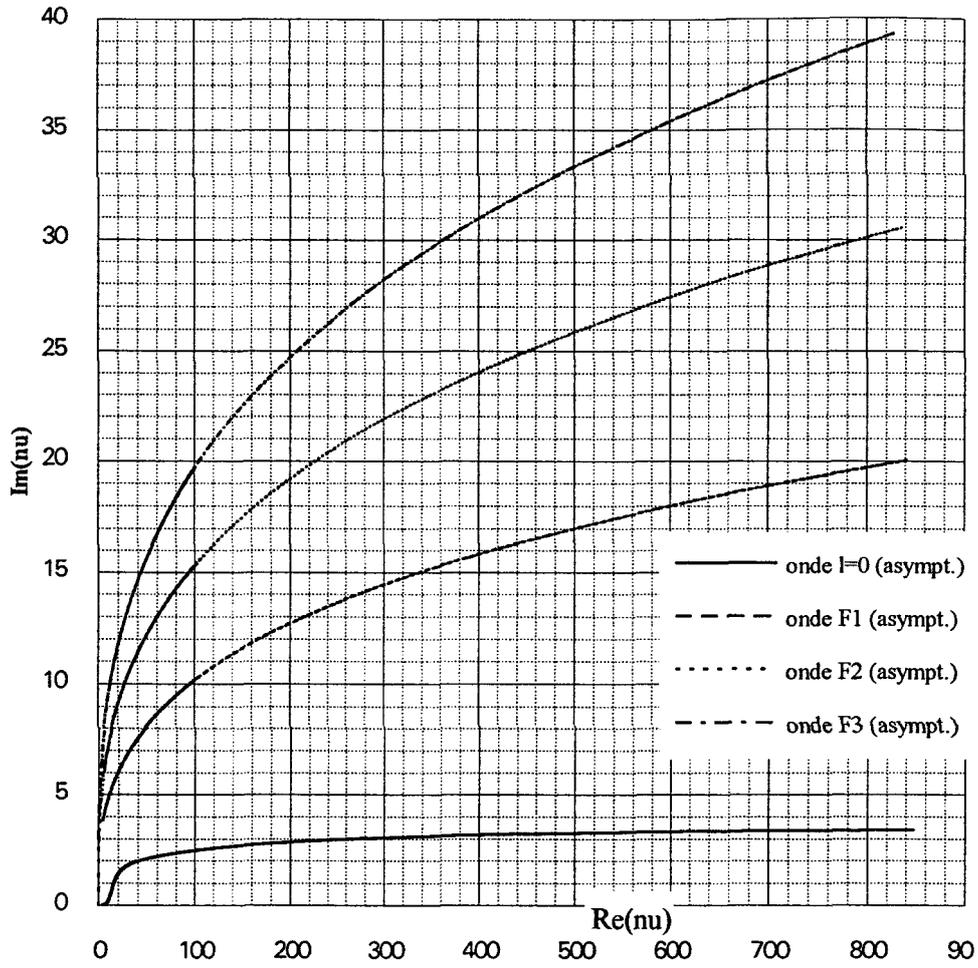


Figure 104 : Tube élastique - Ondes de type l_2 - $Im(\nu)(x_1)$.

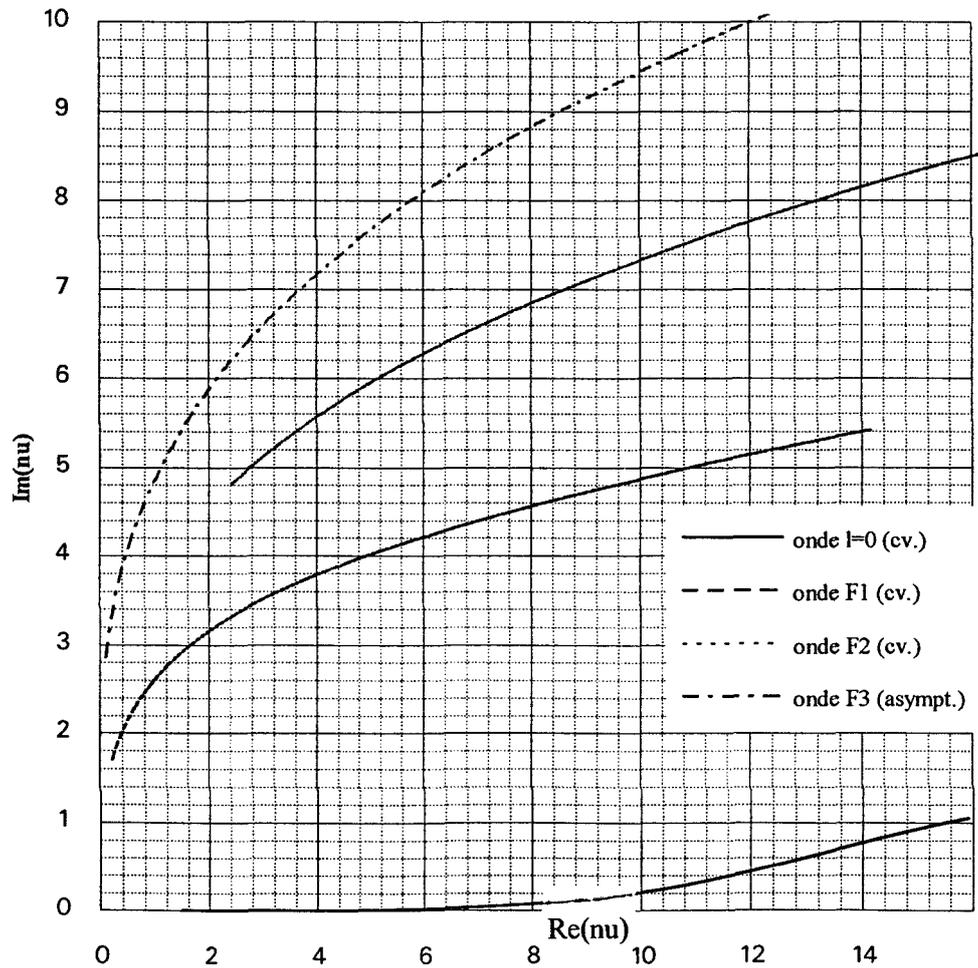


Figure 105 : Tube élastique - Ondes de type l_2 - $Im(\nu)(x_1) - x_1 < 16$.

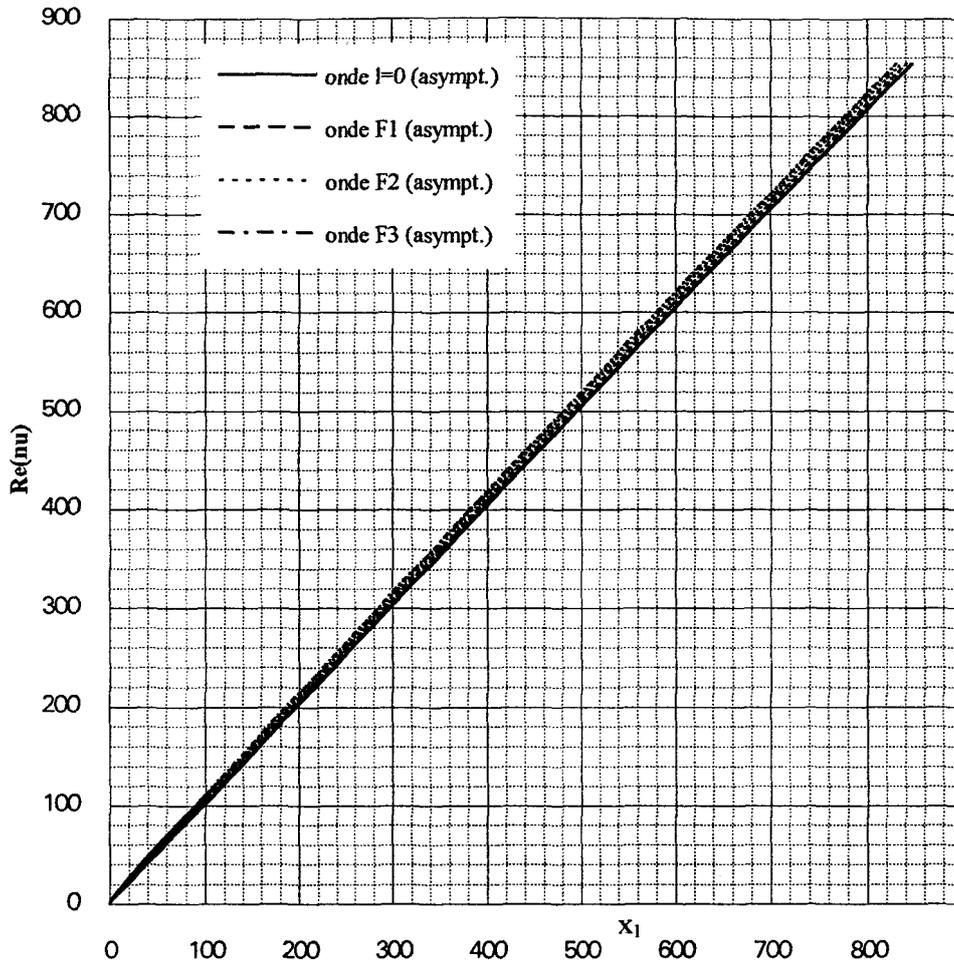


Figure 106 : Tube élastique - Ondes de type ℓ_2 - $Re(\nu)(x_1)$.

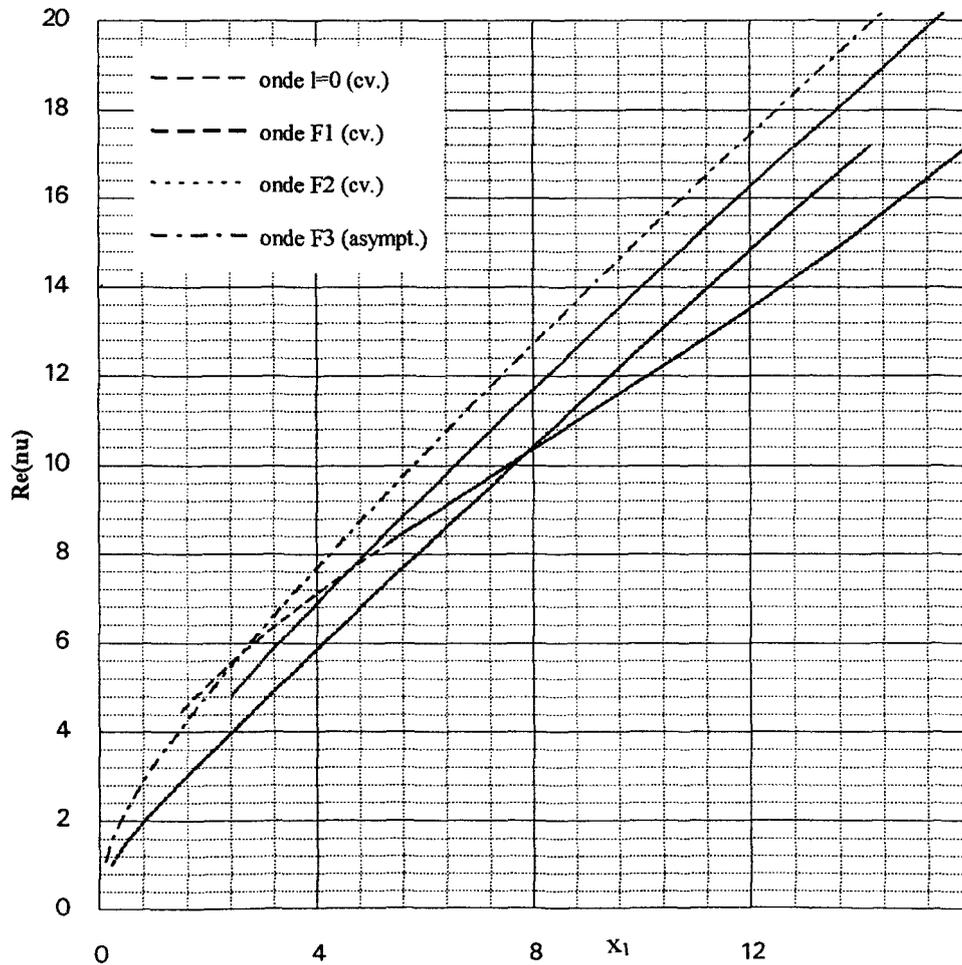


Figure 107 : Tube élastique - Ondes de type ℓ_2 - $Re(\nu)(x_1)$ - $x_1 < 16$.

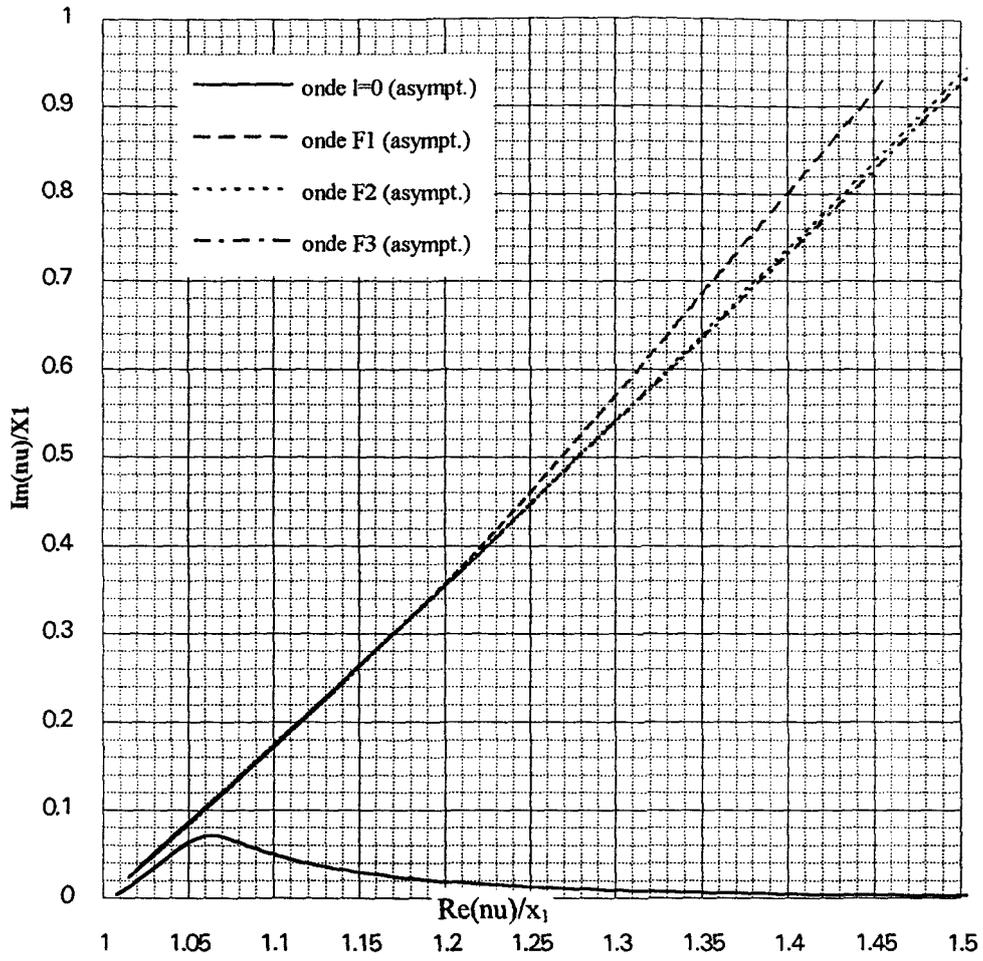


Figure 108 : Tube élastique - Ondes de type ℓ_2 - $[\text{Im}(v(x_1))](\text{Re}(v(x_1)))$.

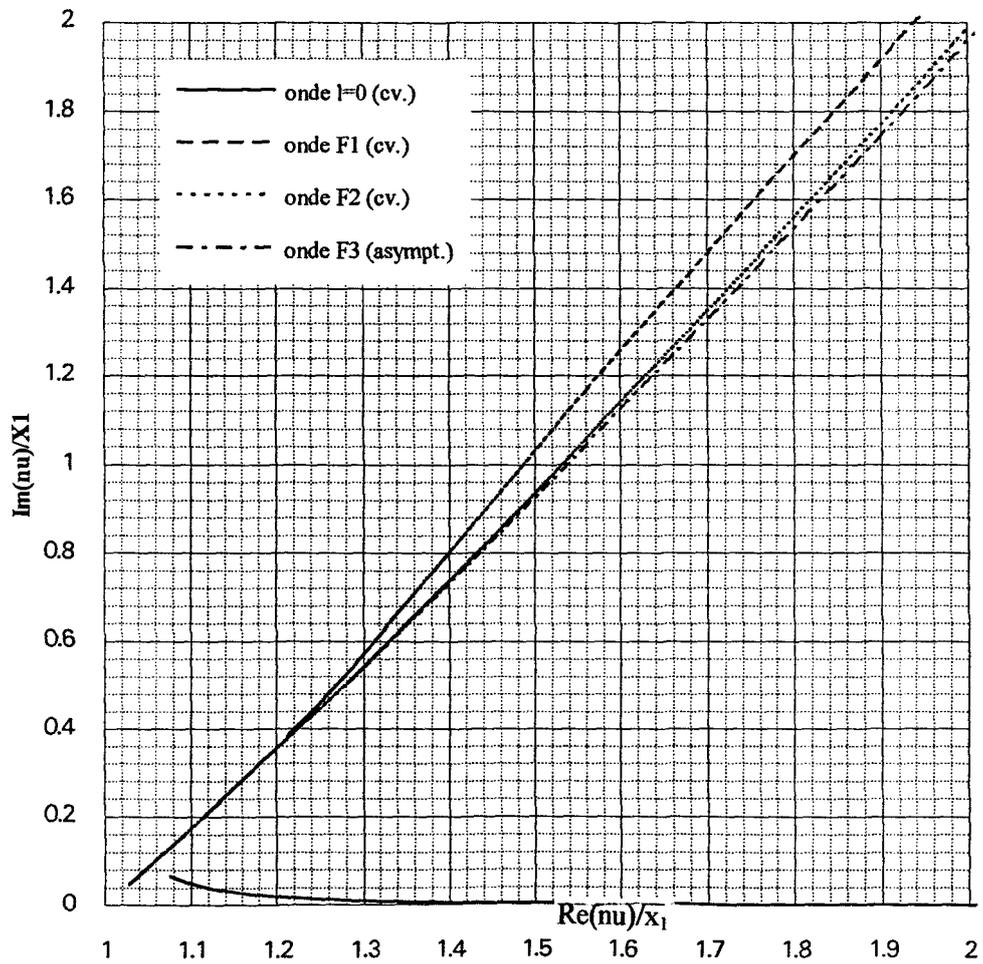


Figure 109 : Tube élastique - Ondes de type ℓ_2 - $[\text{Im}(v(x_1))](\text{Re}(v(x_1)))$ - (développement convergent).

III. PRESSION DIFFUSEE PAR LE TUBE ELASTIQUE

III.1. Contribution des ondes circonférentielles¹

A partir des résultats numériques précédents et du système d'équation (21), nous calculons les contributions de chacune des ondes circonférentielles à la pression diffusée par le tube en un point d'observation d'angle azimutal φ . Les valeurs du résidu β sont obtenues par le même algorithme que dans les deux chapitres précédents². L'étude de ces valeurs fait l'objet de l'annexe D.

La pression due à l'onde $\ell = 0$ est nettement plus importante que celles dues aux autres ondes circonférentielles tant que le point d'observation se situe dans l'ombre du tube. Les trois premières ondes de Franz apportent dans ce domaine angulaire des contributions semblables à celles des ondes de type ℓ ; chacune des pressions correspondantes est 10 fois moins importante que celle due à l'onde $\ell = 0$. Elles sont cependant nécessaires (et de plus suffisantes) au calcul de la pression diffusée³.

Lorsque le point d'observation se situe dans la zone éclairée du tube les pressions dues aux ondes de Franz sont négligeables. L'onde $\ell = 0$ contribue au calcul de la pression diffusée mais de façon moindre. Cependant, contrairement aux ondes de Franz, sa contribution ne peut être négligée tant que l'angle $\varphi < 60^\circ$. Ces remarques sont en tout point conformes aux conclusions exprimées dans l'étude du cylindre élastique. La

¹ Figures 110 et 115.

² Figures 110 à 113.

³ Figure 113 et 114.

présence d'une cavité interne influence donc peu le rôle joué par les ondes de type ℓ_2 .

Nous obtenons pour les ondes de type ℓ des pressions pour lesquels les représentations sont semblables à celles obtenues dans l'étude du cylindre élastique. Nous retrouvons, entre autres, une discontinuité lors du changement de méthode employée pour calculer la pression ; discontinuité d'autant plus marquée que la partie imaginaire du pôle est grande⁴.

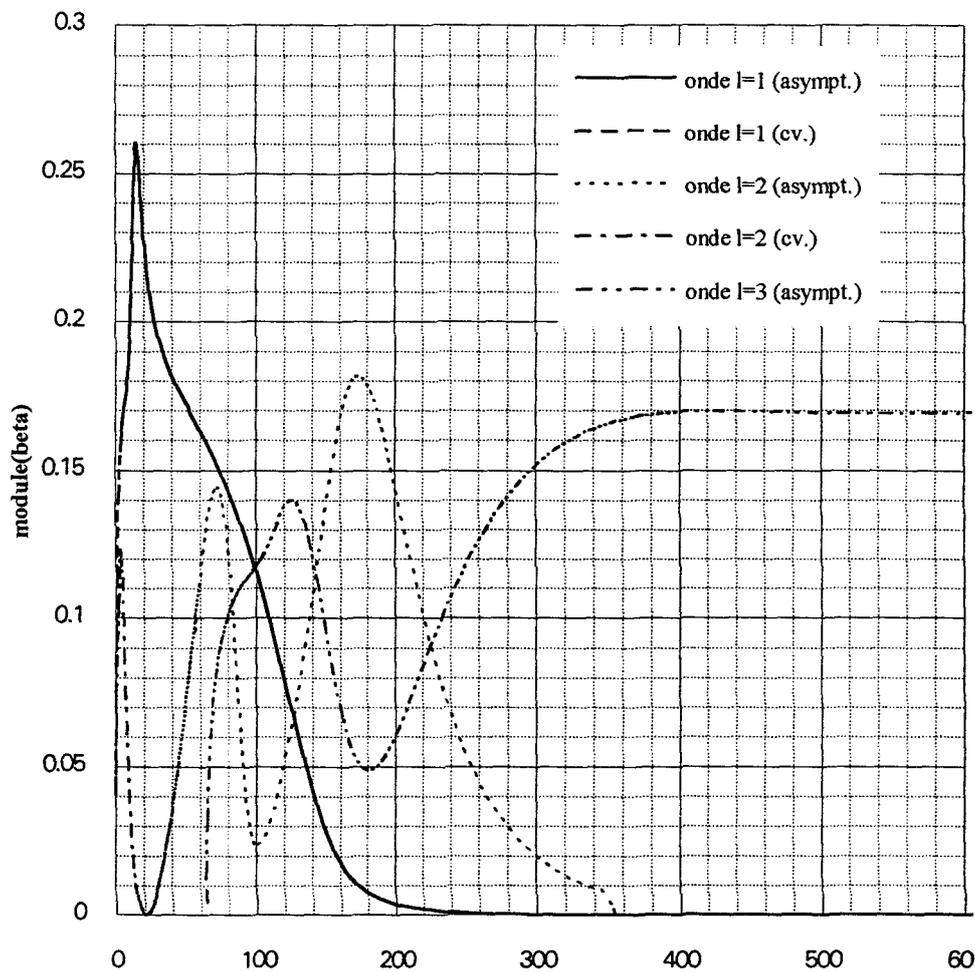


Figure 110 : Tube élastique -Ondes de type ℓ_1 - $\beta(x_1)$ - $x_1 < 600$.

⁴ Figure 114 et 115.

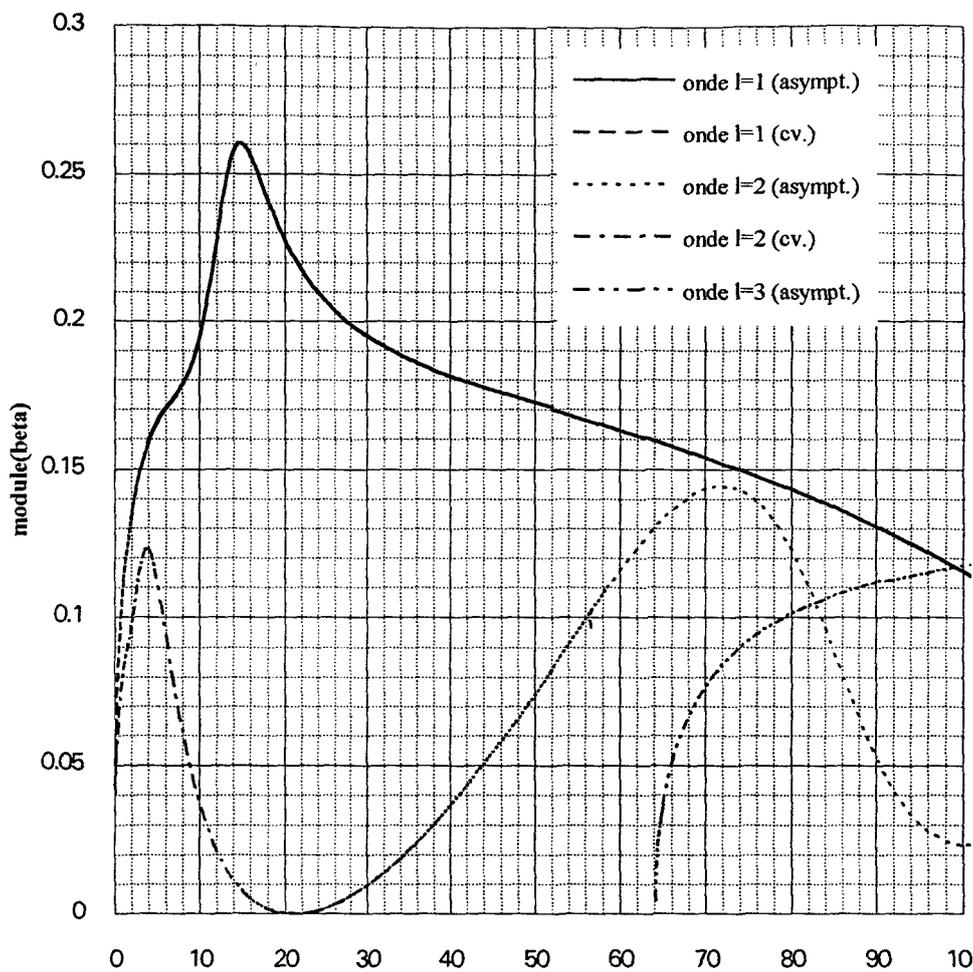


Figure 111 : Tube élastique -Ondes de type ℓ_1 - $\beta(x_1)$ - $x_1 < 100$.

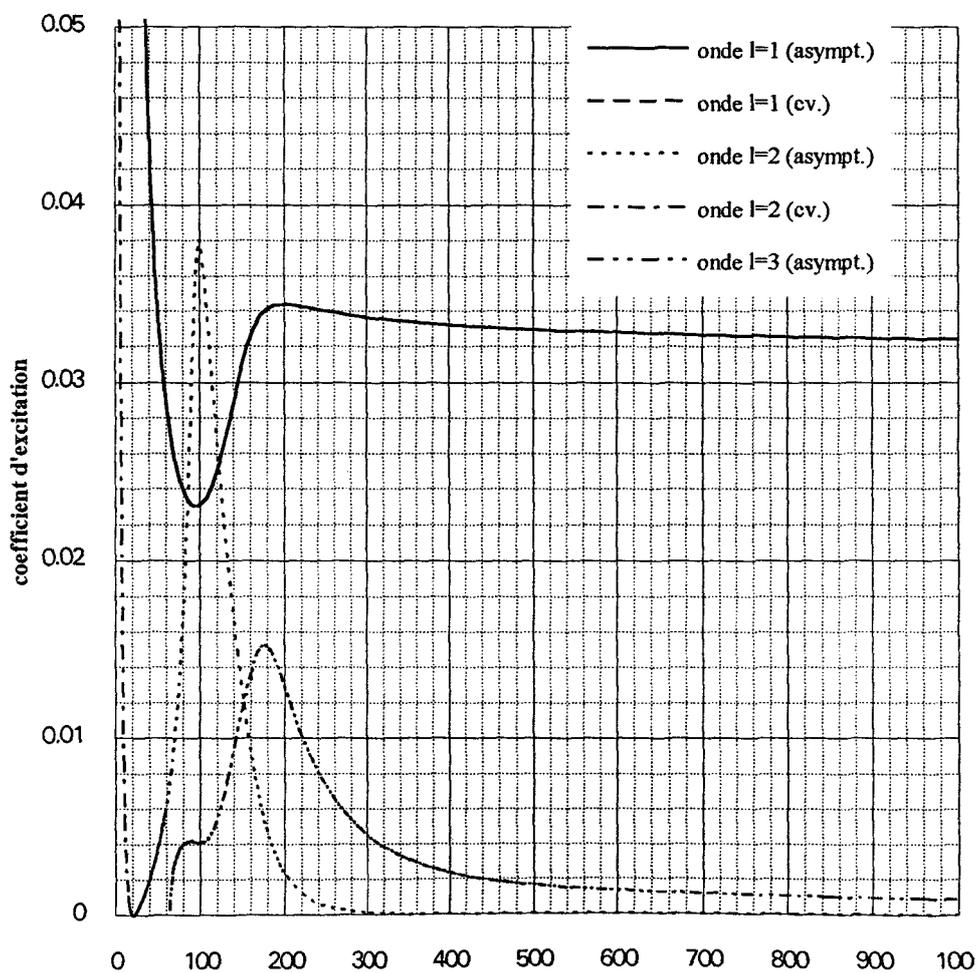


Figure 112 : Tube élastique -Ondes de type ℓ_1 - coeff. d'excitation(x_1) - $x_1 < 1000$.

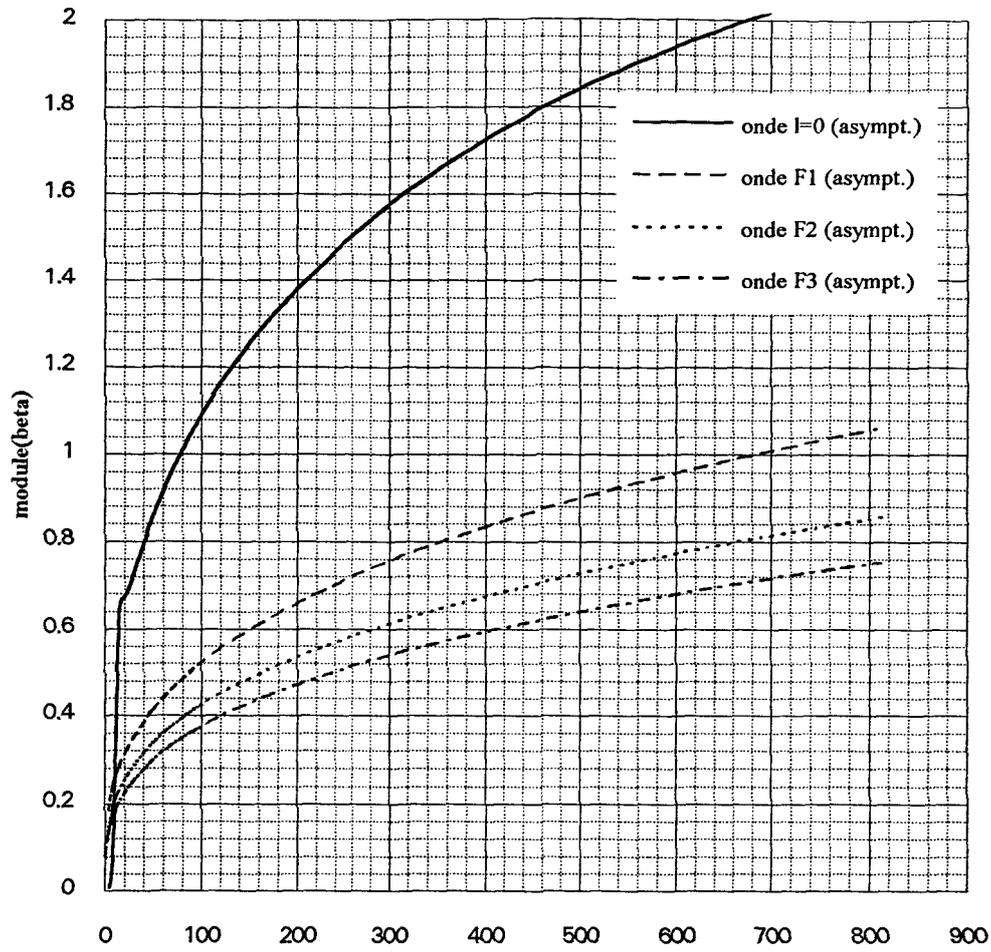


Figure 113 : Tube élastique - Ondes de type $\ell_2 - \beta(x_1)$.

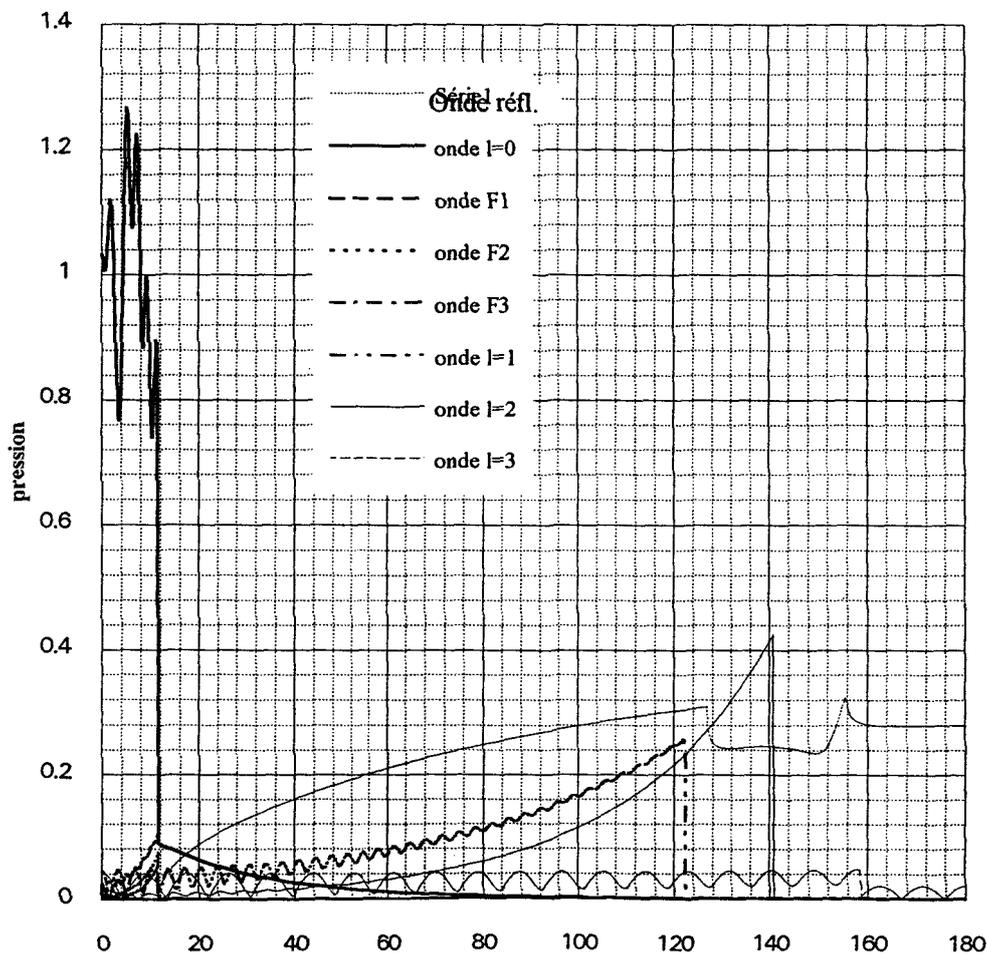


Figure 114 : Tube élastique : Ondes circonférentielles et onde réfléchie - $P(\varphi)$.

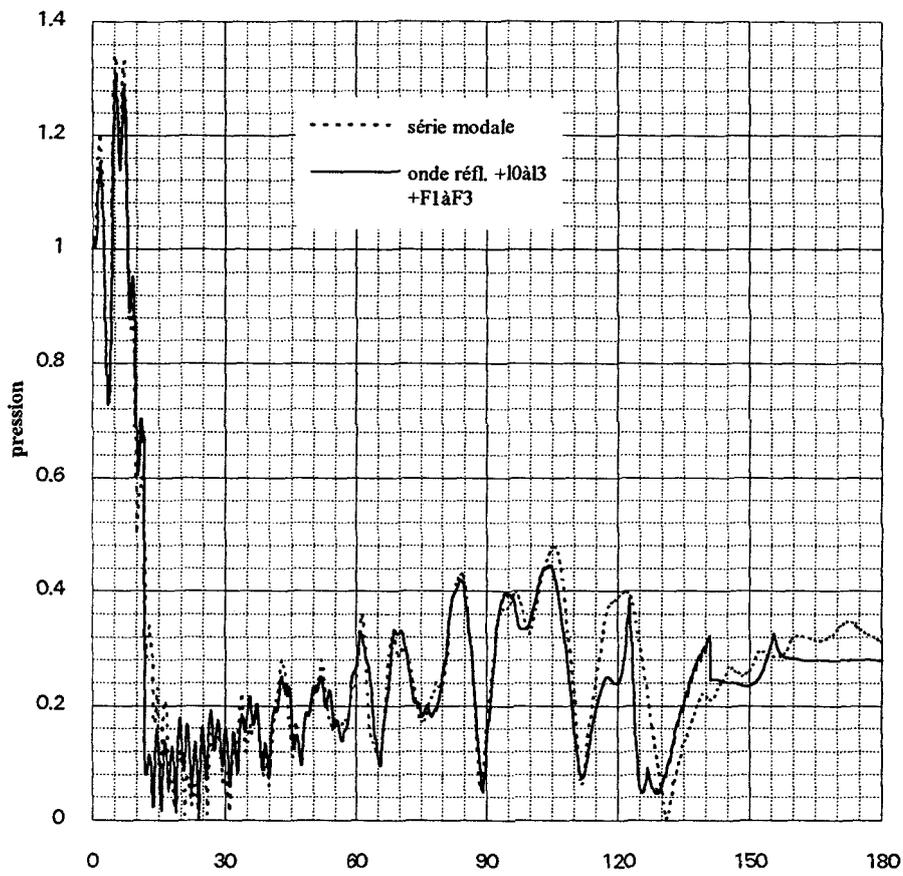


Figure 115 Tube élastique : Ondes circonférentielles + onde réfléchie - $P_{totale}(\varphi)$.

III.2. Valeurs numériques de la pression diffusée⁵

Après avoir additionné les pressions dues aux ondes circonférentielles et la pression diffractée par le tube, nous comparons le résultat obtenu à la pression calculé par série modale.

Dans la zone angulaire correspondant à la zone d'ombre du tube, nous trouvons une très bonne adéquation des deux méthodes.

Les deux courbes ont des allures également très voisines tant que l'angle caractérisant le point d'observation est inférieur à 100° . Ce résultat confirme l'intérêt d'évaluer la pression diffractée. En effet, nous obtenons dans l'étude du cylindre des courbes fortement distinctes dans le domaine angulaire où l'onde réfléchie et celles de type ℓ_2 n'étaient plus prépondérantes.

Dans le cas du tube, les deux courbes ne coïncident cependant pas parfaitement dans cette zone. L'utilisation de coefficient de réflexions et de transmissions ne tenant pas compte de la courbure du cylindre est une explication de ce problème.

C'est dans le domaine angulaire compris entre 100 et 160° , que les deux courbes sont les plus différentes. Nous trouvons dans ce domaine angulaire des problèmes dus aux différentes approximations utilisées : développements asymptotiques au premier ordre pour les coefficients de réflexions et de transmissions mais aussi domaine où les développements d'Airy sont les seuls corrects en théorie. La proximité des pôles et du contour

⁵ Figure 116 et 117.

d'intégration utilisé dans la méthode du col contribue également à accroître les erreurs numériques.

Au-delà du second angle critique les deux courbes reprennent des allures très voisines.

IV. CONCLUSION

Au début de ce chapitre, nous supposions pouvoir interpréter la pression $P_{\text{géo}}^{\text{tot}}$ comme la somme des contributions d'ondes géométriques diffractées par le tube. Les résultats obtenus dans la section précédente confirment cette hypothèse.

Si nous comparons la courbe obtenue pour les ondes géométriques seules à celle obtenues avec l'ensemble des ondes nous pouvons remarquer qu'elles sont du même ordre de grandeur. Pourtant dans la plupart des domaines angulaires c'est la courbe obtenue par l'ensemble des ondes qui est la meilleure approximation de la courbe obtenue par la série modale.

La figure 117 montre l'apport de précision due aux calculs de la pression diffractée par le tube. Dans presque toutes les zones angulaires, la pression est mieux calculées en considérant l'ensemble des ondes. Pourtant dans le voisinage de 100° , le calcul ne semble pas plus précis par l'ajout de la pression due aux ondes géométriques. Le nombre d'ondes géométriques considéré n'est peut-être pas suffisant.

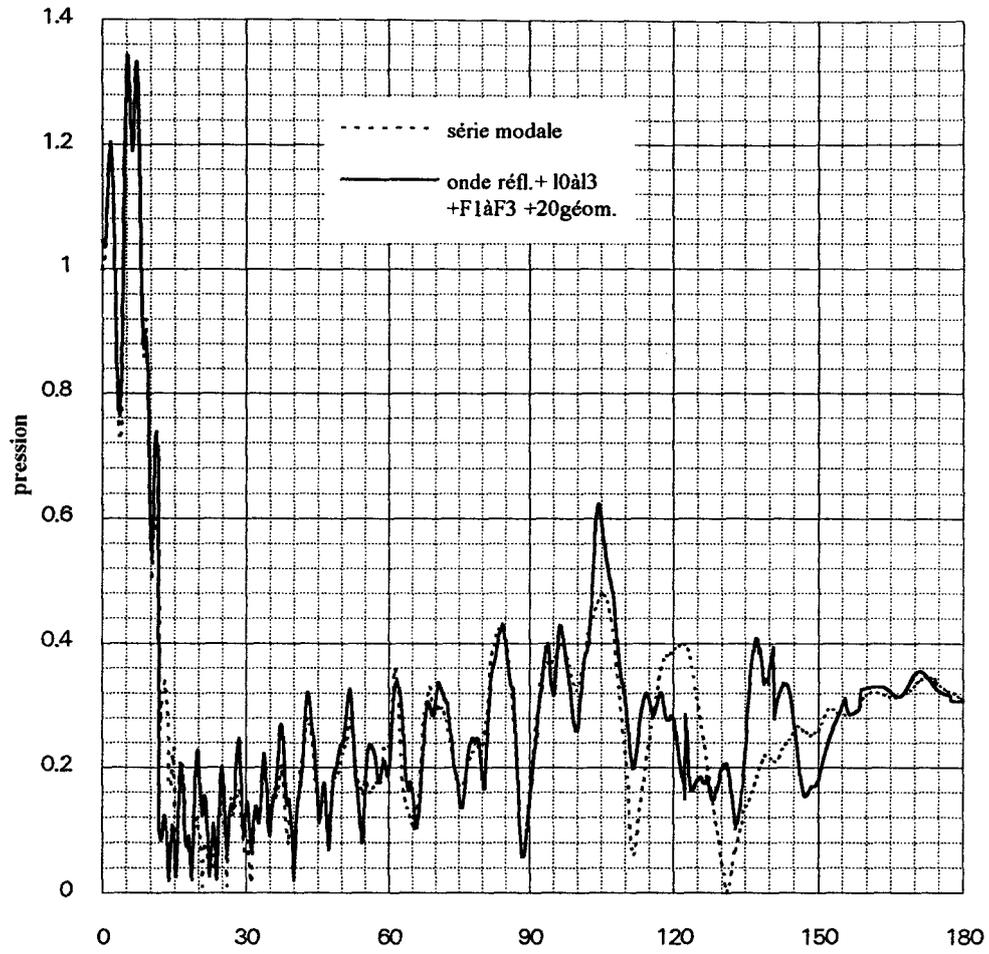


Figure 116 : Tube élastique - $P_{diff}(\varphi)$

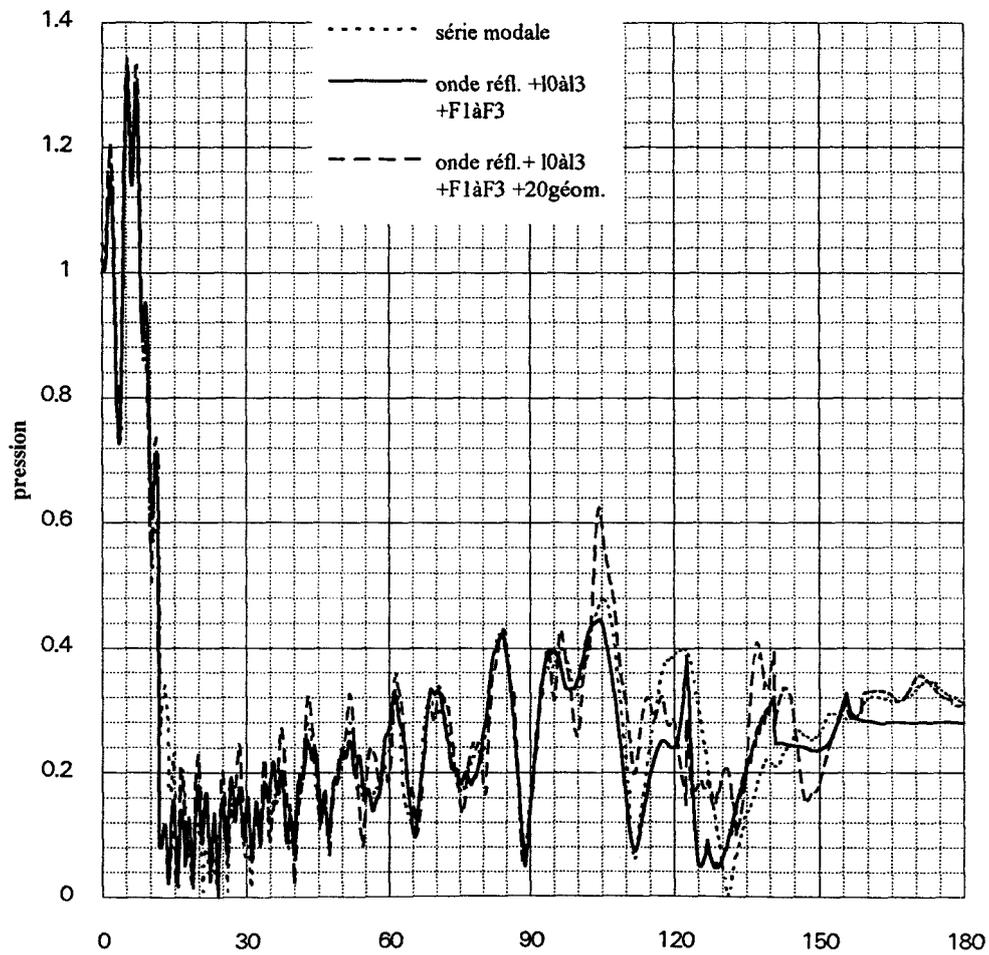


Figure 117 : Tube élastique - $P_{diff}(\varphi)$ avec et sans la pression due aux ondes géométriques.

Chapitre 5

Tube élastique : Etude des ondes axiales.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'observer la signature acoustique d'un tube élastique en recherchant les ondes pouvant se propager axialement à la surface du tube. Nous considérons pour cela que ces ondes s'amortissent en se propageant suivant l'axe du cylindre. Nous supposons que leur existence ne dépend que des caractéristiques physiques et géométriques du tube et de son environnement.

Pour réaliser cette étude, nous reprenons les principaux résultats établis dans le cadre de mon stage de DEA¹. Nous complétons cette recherche par des comparaisons, nous permettant de justifier l'apparition de certaines ondes à la surface du tube.

Nous essayons également de retrouver des comportements bien connus dans les études de propagation à la surface de plaques. Nous étudions pour cela l'évolution de certaines ondes lorsque l'épaisseur devient très faible.

Dans cette étude, les noms employés pour déterminer les différentes ondes sont indépendants de ceux utilisés pour identifier les ondes se propageant radialement à la surface d'un objet cylindrique². Nous tentons dans la dernière section de ce chapitre d'établir une correspondance entre les différentes ondes lorsque cela à un sens physique.

¹ P. Millerat, *Etude des caractéristiques des ondes axiales de surface pour un cylindre et un tube élastique immergés*, Rapport de stage de DEA, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 1992.

² Quatre premiers chapitre.

I. HYPOTHESES ET NOTATIONS DU CHAPITRE

Les hypothèses employées pour les différents milieux sont semblables à celles établies dans les chapitres précédents. Pourtant, afin d'éviter toute confusion nous les rappelons :

- le tube est supposé de longueur infinie,
- le matériau le constituant est élastique, linéaire homogène et isotrope,
- la propagation est harmonique,
- le milieu extérieur est de l'eau considérée comme homogène est non visqueuse,
- le milieu intérieur est soit de l'air soit de l'eau.

L'origine des repères orthonormés est prise au centre d'une section droite du tube, en un point noté O. L'axe du repère cylindrique est celui du tube¹.

¹ Figure 1.

Les trois milieux sont différenciés par les indices 1, 2 et 3, respectivement pour le milieu extérieur, le tube et pour le milieu intérieur.

Les autres notations utilisées sont les suivantes :

ω = pulsation du régime harmonique,

ρ_i = masse volumique du milieu i , avec $i \in \{1, 2, 3\}$

p_i = pression dans le milieu i avec $i \in \{1, 3\}$

λ et μ = coefficients de Lamé du milieu élastique,

ν = coefficient de Poisson du milieu élastique, $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$

E = module d'Young du milieu élastique, $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$

a = rayon externe du tube,

b = rayon interne du tube,

U_i = vecteur champ de déplacement dans le milieu i de coordonnées cylindriques $(u_{ir}, u_{i\theta}, u_{iz})$, avec $i \in \{1, 2, 3\}$,

ϕ_i = potentiel scalaire associé à U_i ,

$A = (A_r, A_\theta, A_z)$ = potentiel vectoriel associé à U_2 ,

$\sigma = (\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz})$ = vecteur contrainte sur une surface de normale radiale au tube,

c = célérité de l'onde se propageant à l'interface,

c_i = célérité de l'onde dans le milieu fluide i , avec $i \in \{1, 2, 3\}$

c_t = vitesse transversale caractéristique du milieu élastique,

c_ℓ = vitesse longitudinale caractéristique du milieu élastique,

k = nombre d'onde complexe associé à c , il s'exprime sous la forme $k = \frac{\omega}{c} + i\Gamma$ avec Γ un réel traduisant l'amortissement de

l'onde lors de sa propagation,

k_i = nombre d'onde réel associé à c_i avec $i \in \{1, 2, 3, T, L\}$,

$$\alpha = \frac{c_t}{c_\ell},$$

$$\delta = \frac{b c_t}{a c_3},$$

$$\gamma = \frac{c_t}{c_l},$$

$$x_t = k_t a,$$

$$x_\ell = k_\ell a,$$

$$y_t = k_t b,$$

$$x = ka,$$

$$p = \sqrt{k_\ell^2 - k^2},$$

$$q = \sqrt{k_t^2 - k^2},$$

$$s_i = \sqrt{k_i^2 - k^2},$$

$$x_p = pb,$$

$$x_q = qa,$$

$$x_{s_i} = s_i a,$$

$$y_p = pb,$$

$$y_q = qb,$$

$$y_{s_i} = s_i b,$$

β = angle entre la direction d'une onde incidente oblique et une normale au tube.

J_n et Y_n sont les fonctions de Bessel de première et deuxième espèces,

$H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ sont les fonctions de Hankel de première et

deuxième espèces.

Cette étude se fonde sur des résultats établis dans des laboratoires de mécanique (Gazis¹ en 1958 puis Heimann et Kolsky² en

¹ Denos C. Gazis, Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. I. Analytical Foundation, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 568-573, **31**, 1959.

² J. H. Heimann, H. Kolsky, The propagation of elastic waves in thin cylindrical shells, *The J. Mech. Phys. Solids*, **14**, pp. 121-130, 1966.

1966 et enfin Zemanek¹ en 1972). Nous employons comme eux les termes d'ondes radiales, axiales. Ainsi, nous appelons onde purement axiale une onde dont la direction de polarisation est la direction de propagation par opposition aux ondes radiales pour lesquelles la direction de polarisation est dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

¹ Joseph Zemanek, An Experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in Cylinder, *J. Acoust. Soc. Am.*, **51**, pp. 265-283, 1972.

II. DETERMINATION DES ONDES SE PROPAGEANT A LA SURFACE DU TUBE

II.1. Equations traduisant la propagation des ondes dans les différents milieux¹

La loi traduisant le mouvement d'une onde acoustique dans un milieu élastique s'écrit en fonction des potentiels élastiques A et ϕ_2 :

$$(109) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi_2 = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \\ \nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial t^2} \\ \nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2} A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial t^2} \\ \nabla^2 A_z = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

L'équation du mouvement dans le milieu fluide "i" s'écrit en fonction du potentiel ϕ_i :

$$(110) \quad \nabla^2 \phi_i = \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2}.$$

Nous n'étudions que la propagation dans le sens des "z" croissants en ne recherchant que les solutions pouvant être associées à des modes propres de vibrations. En outre, étant donnée la symétrie de révolution du tube, nous ne cherchons que des solutions dépendant périodiquement de l'angle azimutal θ .

¹ P. Millerat, rapport de DEA, pp. 5-15, 1992.

Les potentiels caractérisant la propagation dans le milieu élastique sont donc de la forme :

$$(111) \quad \begin{cases} \phi_2(r, \theta, z, t) = \left[A_1 H_n^{(1)}(pr) + B_1 H_n^{(2)}(pr) \right] \cos n\theta e^{i(kz - \omega t)} \\ A_z(r, \theta, z, t) = \left[A_2 H_n^{(1)}(qr) + B_2 H_n^{(2)}(qr) \right] \sin n\theta e^{i(kz - \omega t)} \\ A_r(r, \theta, z, t) = \left[A_3 H_{n+1}^{(1)}(qr) + B_3 H_{n+1}^{(2)}(qr) \right] \sin n\theta e^{i(kz - \omega t)} \\ A_\theta(r, \theta, z, t) = - \left[A_3 H_{n+1}^{(1)}(qr) + B_3 H_{n+1}^{(2)}(qr) \right] \sin n\theta e^{i(kz - \omega t)}. \end{cases}$$

Dans chaque milieu fluide, le potentiel ϕ_i a pour expression :

$$(112) \quad \phi_i(r, \theta, z, t) = D_i H_n^{(1)}(s_i r) \cos n\theta e^{i(kz - \omega t)}.$$

Lorsque nous étudions la propagation d'une onde dans l'un des milieux nous spécifions le lieu d'observation de cette onde ainsi que la durée écoulée depuis son passage à l'origine des temps. Dès lors, dans le système d'équation (111) et l'équation (112), nous ne considérons comme inconnues que les constantes d'intégration $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ et D_i ($i \in \{1, 3\}$) et le nombre d'onde caractéristique de l'onde notée "k".

II.2 Equations de continuité

Les coefficients $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ et D_i ($i \in \{1, 3\}$) dépendent uniquement des relations physiques liant les différents potentiels. Ces dernières s'obtiennent en résolvant les équations traduisant le phénomène de continuité à l'interface fluide-solide.

Comme les fluides intervenant sont non visqueux, seul le champ de déplacement normal à une section du tube est continu aux interfaces. Les contraintes imposées par ce type de fluide sont uniquement normales. Les équations de continuités sont donc :

$$(113) \quad \begin{cases} u_{2r}(a) = u_1(a) \\ \sigma_{rr}(a) = -p_1 \\ \sigma_{r\theta}(a) = 0 \\ \sigma_{rz}(a) = 0 \end{cases} \quad \text{à l'interface avec le milieu extérieur,}$$

et

$$(114) \quad \begin{cases} u_{2r}(b) = u_3(b) \\ \sigma_{rr}(b) = -p_3 \\ \sigma_{r\theta}(b) = 0 \\ \sigma_{rz}(b) = 0 \end{cases} \quad \text{à l'interface avec le milieu intérieur.}$$

II.3. Expressions implicites des solutions traduisant la propagation des ondes de surface.

Les contraintes locales des systèmes d'équations (5) et (6) peuvent être calculées à partir de l'expression des potentiels dans les différents milieux¹ Nous obtenons :

$$(115) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \cos n\theta e^{i(kz-\omega t)} \left\{ \left[-\lambda \frac{\omega^2}{c_L^2} Z_n(pr) + 2\mu \frac{d^2}{dr^2} Z_n(pr) \right] A \right. \\ \quad \left. + 2\mu \frac{n}{r} \left[\frac{d}{dr} Z_n(qr) - \frac{1}{r} Z_n(qr) \right] B + 2\mu ik \frac{d}{dr} Z_{n+1}(qr) C \right\} \\ \sigma_{r\theta} = \mu \sin n\theta e^{i(kz-\omega t)} \left\{ -\frac{2n}{r} \left[-\frac{1}{r} Z_n(pr) + \frac{d}{dr} Z_n(pr) \right] A \right. \\ \quad \left. + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} Z_n(qr) - \frac{n^2}{r^2} Z_n(qr) - \frac{d^2}{dr^2} Z_n(qr) \right] B + ik \left[\frac{d}{dr} Z_{n+1}(qr) - \frac{n+1}{r} Z_{n+1}(qr) \right] C \right\} \\ \sigma_{rz} = \mu \sin n\theta e^{i(kz-\omega t)} \left\{ 2ik \frac{d}{dr} Z_n(pr) A + \frac{n}{r} ik Z_n(qr) B \right. \\ \quad \left. + \left[\left(\frac{n+1}{r^2} - k^2 \right) Z_{n+1}(qr) - \frac{n+1}{r} \frac{d}{dr} Z_{n+1}(qr) - \frac{d^2}{dr^2} Z_{n+1}(qr) \right] C \right\} \end{array} \right.$$

avec $Z_n = H_n^{(1)} + dH_n^{(2)}$, "d" nombre dépendant de la constante (A, B ou C) à laquelle il est factorisé, et A, B et C trois coefficients constants ne dépendant que des constantes d'intégration des potentiels.

¹ P. Millerat, rapport de DEA, p. 11, 1992.

La connaissance de ces relations nous permet de transformer les systèmes (113) et (114) en un système de 6 équations à 7 inconnues. Ce système est linéaire vis à vis des 6 constantes d'intégration. Il est équivalent à l'équation matricielle :

$$(116) \quad \mathbf{D}_n(k)X = 0$$

avec X le vecteur ayant pour coordonnées les six constantes d'intégration du problème.

Ce vecteur étant non nul l'équation (116) permet de déterminer de façon implicite le complexe " k " :

$$(117) \quad D_n(k) = 0$$

avec D_n le déterminant de la matrice \mathbf{D}_n

Pour faciliter la recherche des solutions vérifiant l'équation (117), nous étudions dans un premier temps les ondes ne dépendant pas de l'angle de révolution θ . Lorsque l'entier " n ", paramètre de l'équation (117), est nul, le nombre " k " devient indépendant de l'angle θ . Ce mode est appelé par les mécaniciens mode symétrique. Il correspond à une dilatation ou une compression globale de l'objet cylindrique.

Dans ce cas, l'équation (117) s'écrit $D_1(k)D_2(k) = 0$. Le premier déterminant correspond aux ondes de torsion. Il est indépendant des milieux extérieurs et intérieurs au tube. Le second traduit la propagation des ondes axiales à la surface du tube¹.

Lorsque l'entier " n " est non nul, il n'est plus possible de factoriser l'équation (117). Pour identifier les solutions, nous procédons

¹ P. Millerat, rapport de DEA, pp. 19-23, 1992.

numériquement par comparaison avec des résultats obtenus dans l'étude de la propagation d'ondes de type axiale à la surface d'un cylindre¹.

¹ P. Millerat, rapport de DEA, p. 31, 1992.

III RECHERCHE NUMERIQUE DES ONDES AXIALES

Les caractéristiques numériques des différents milieux sont :

• $c_1 = 1470 \text{ ms}^{-1}$, $\rho_1 = 1 \text{ gcm}^{-3}$ pour le milieu extérieur (de l'eau),

• $c_3 = 330 \text{ ms}^{-1}$, $\rho_3 = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ gcm}^{-3}$ pour le milieu intérieur (de l'air),

et pour le milieu élastique $c_L = 6380 \text{ ms}^{-1}$, $c_T = 3100 \text{ ms}^{-1}$ et $\rho_2 = 2.7 \text{ gcm}^{-3}$.

Partant de résultats obtenus pour un cylindre placé dans le vide puis pour un cylindre entouré d'eau, nous pouvons de proche en proche identifier plusieurs ondes se propageant à la surface d'un tube entouré d'eau et contenant de l'air. Nous recherchons les ondes associées aux modes "n=0" et "n=1". Dans un premier temps, nous n'étudions que les tubes dont les rapports de rayons valent 0.1 et 0.9. Pour expliquer certains phénomènes, nous serons conduits à étudier l'évolution de certaines ondes lorsque le rapport des rayons évolue de 0.1 à 0.9.

Les ondes correspondant au mode symétrique "n=0" sont également appelée ondes longitudinales. Elles sont notées "L0i" avec "i" un nombre caractérisant l'ordre d'apparition de l'onde lorsque la fréquence croît. Lorsque cette onde ne possède pas de fréquence de coupure, la numérotation est effectuée par analogie avec les ondes trouvées lorsque les milieux externes sont formés par du vide¹.

¹ P. Millerat, rapport de DEA, annexe E, 1992.

Les ondes associées aux modes différents de 0 sont dites de flexions. Celles correspondant au premier mode de flexion sont notées "F1i", le nombre "i" étant défini comme précédemment.

Nous traçons les parties imaginaires et réelles de la fréquence réduite définie par le produit "ka" en fonction de la fréquence réduite x_r .¹

III.1. Etude du premier mode de flexion

Nous recherchons les trois premières ondes de ce mode. L'onde apparaissant aux fréquences les plus basses est notée F10. Le comportement de cette dernière est totalement différent de la première onde obtenue dans le vide ; l'onde se comportant de façon la plus proche de l'onde F11 obtenue dans le vide est identifiée ici par le même nom². L'existence de l'onde F10 semble liée à la présence d'un fluide entourant le tube. La célérité de cette onde est à haute fréquence voisine de celle du son dans l'eau. Des analogies existent donc entre le comportement de cette onde est l'onde de Stoneley mise en évidence en incidence normale dans la partie précédente.

Quelque soit le nombre d'onde associé à l'une de ces ondes, il possède une partie imaginaire non nulle absente dans l'étude conduite dans le vide. En outre la présence d'un fluide permet un amortissement de l'onde se propageant à la surface du tube, par diffusion de l'énergie dans les milieux extérieurs. Il paraît justifier d'associer la partie imaginaire du nombre d'onde à l'amortissement comme nous l'avons déjà réalisé dans les quatre premiers chapitres en associant la partie imaginaire d'un pôle à l'amortissement³.

¹ Figures 118 à 128.

² Figures 120, 121, 126 et 127.

³ Annexe C : Etude du résidu β

Afin de comparer cette étude avec des résultats expérimentaux, nous reprenons la recherche de l'onde F11 pour un rapport $\frac{b}{a} = 0.84$. Les résultats expérimentaux obtenus au Havre¹ mettent en évidence une onde d'incidence oblique se propageant d'une façon similaire à l'onde F11. Ce résultat nous permet de conclure que l'onde F11 peut être excitée par une onde incidente oblique. Un résultat analogue existe pour les ondes F23 et F21.

Une méthode a été développée au L.C.T.A.R² par Conoir permettant de rechercher d'un point de vue théorique les ondes d'incidence oblique se propageant à la surface d'un tube³. Cette méthode utilise des propriétés de la fonction S⁴. La mise au point de programme utilisant les résultats de cette méthode nous permet d'identifier pour $\frac{b}{a} = 0.9$ la trajectoire de l'onde F11 à celle de la première onde dite "guidée hélicoïdale"⁵, notée "p=1"⁶. Cette onde est lorsque $\frac{b}{a} = 0.1$ l'onde F12. L'onde F13 est également identifiée par le programme de recherche des ondes d'incidence oblique mais elle ne correspond pas à une onde de type "p". Elle est certainement une onde de type "l".

¹ F. Léon, F. Lecroq, D. Décultot, G. Maze, Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite hollow cylindrical shell, *J. Acoust. Soc. Am.*, **91**, pp. 1388-1397, 1992.

² Le Centre Thomson d'Application Radar.

³ J-M. Conoir, Etude des résonances d'un tube élastique basée sur les propriétés de la dérivée de la phase de la matrice de diffusion, *J. Acoustique*, **4**, pp. 485-508, 1991.

⁴ Chapitre 2 section 2.

⁵ L'appellation "guidée hélicoïdale" se justifie parcequ'elle s'amortie faiblement au cours de sa propagation tout en se propageant de façon hélicoïdale à la surface du tube

⁶ Figures 126 et 127.

III.2. Etude du mode symétrique "n=0"

Nous recherchons les trois premières ondes de ce mode. Pour $\frac{b}{a} = 0.1$, nous mettons en évidence les ondes L01, L02 et L03¹. Les nombres d'onde "k" associés à chacune de ces ondes sont complexes alors qu'ils ne l'étaient pas lorsque le tube était situé dans le vide. Nous justifions ainsi pour le mode "n=0" l'existence d'une relation entre l'amortissement d'une onde est cette partie imaginaire.

Alors que nous trouvons pour $\frac{b}{a} = 0.1$ trois ondes longitudinales L01, L02 et L03, nous n'obtenons plus qu'une onde notée L01 pour $\frac{b}{a} = 0.9$. En comparant cette onde avec celles obtenues lorsque les milieux externes sont du vide² nous constatons que les courbes correspondant aux ondes L01 et L02 du vide se superposent avec celle obtenue pour l'onde L01 étudiée ici. La superposition est possible sur l'intervalle de fréquences $[0, 1.5]$ pour l'onde L01 du vide et sur l'intervalle de fréquences $[1.5, 7]$ pour l'onde L02 du vide (la borne maximale 7 est la limite haute de l'étude numérique dans ce cas). Cette zone de fréquences voisine de $x_t = 1.5$ correspond également au maximum de la partie imaginaire. Il existe peut-être un couplage des deux ondes L01 et L02 lorsque l'épaisseur du tube diminue. Ce couplage serait dû à la présence de milieux fluides externes au tube. Un phénomène similaire a déjà été mis en évidence dans l'étude des ondes de Lamb conduites par Duclos, Lenoir, Conoir et Izbicki³.

¹ Figures 118 et 119.

² P. Millerat, rapport de DEA, .p. 30, 1992. Figures 122 à 124

³ J. Duclos, O. Lenoir, J-M. Conoir et J-L. Izbicki, Description des ondes de Lamb en termes d'ondes évanescentes et de résonances, in *Journal de Physique*, 2, colloque n°1, suppl. J.P.III, n°4 ,pp. 691-704, 1992.

III.3. Evolution des ondes L01 et L02 lorsque l'épaisseur du tube varie

Afin d'étudier le phénomène mis en évidence précédemment, nous essayons de comprendre l'évolution du comportement des ondes L01 et L02 lorsque le rapport $\frac{b}{a}$ varie de 0.1 à 0.9. Dans ce but et pour différentes valeurs du rapport $\frac{b}{a}$, nous traçons l'évolution en fonction de la fréquence réduite x_1 de la célérité "c" ainsi que la partie imaginaire de "k.a"¹.

Pour simplifier la présentation de l'étude comparée de l'évolution de ces ondes avec l'épaisseur du tube, nous appelons C_c la courbe caractéristique de l'évolution de la célérité "c" en fonction de la fréquence réduite x_1 et C_{ka} qui est caractéristique de l'évolution de la partie imaginaire de ka, notée "Im(ka)", en fonction de la fréquence réduite x .

III.3.1. Evolution du comportement des ondes L01 et L02 en fonction de l'épaisseur et de la fréquence

Lorsque $\frac{b}{a} = 0.1$ pour $x_1 = 0$, la célérité de l'onde L01 est égale à la vitesse de barre $c_b = \sqrt{\frac{E}{\rho_2}} = 4996.8 \text{ ms}^{-1}$ avec E le module d'Young du

milieu élastique ; lorsque la fréquence tend vers l'infini, elle tend vers la célérité de l'onde de Rayleigh $c_R = 2870 \text{ ms}^{-1}$. Pour un tube de même épaisseur, la célérité de l'onde L02 correspondant à $x_1 = 0$ est nulle ; lorsque x tend vers l'infini la célérité tend vers c_t .

Pour $\frac{b}{a} = 0.1$, la partie imaginaire de "k.a", associée à l'onde L01², reste inférieure à 0.1 quelque soit la fréquence. Dès que l'épaisseur du

¹ Figures 129 à 148.

² Figures 131 et 132.

tube diminue, elle croît et cela principalement au voisinage de la fréquence $x_1 = 4.1$. La courbe C_{ka} est donc croissante jusqu'en $x_1 = x_s$ voisin de 4.1 puis décroissante. Soit β l'angle formé par l'axe des abscisses et la demi-tangente à gauche prise au sommet x_s de la courbe C_{ka} . Tant que l'épaisseur du tube est importante, cet angle est voisin de 0. Lorsque $\frac{b}{a}$ croît son amplitude augmente. Lorsqu'il atteint 90° , il change de signe : la courbe C_{ka} devient essentiellement décroissante. Ce changement de comportement se situe pour $\frac{b}{a} = \frac{b^{(L)}}{a}$ avec $\frac{b^{(L)}}{a}$ compris entre 0.62 et 0.64. Au passage de cette épaisseur limite, seule l'allure de la courbe pour $x_1 < x_s$ change. Cette fréquence réduite x_s correspond à l'abscisse du sommet de la courbe C_{ka} lorsque $\frac{b}{a} > \frac{b^{(L)}}{a}$ et à l'abscisse du point d'inflexion de la courbe C_{ka} dans le cas contraire.

La courbe C_c est soumise à un changement de comportement dans la même zone de fréquence réduite : essentiellement décroissante la courbe devient croissante puis décroissante pour des fréquences supérieures à x_s . Ce changement de comportement se déroule également pour un rapport de rayon compris entre 0.62 et 0.64. Le rapport $\frac{b^{(L)}}{a}$ correspond donc également au changement de comportement.

Ainsi l'onde L01 change de comportement uniquement lorsque $\frac{b}{a} > \frac{b^{(L)}}{a}$ et pour des fréquences inférieures à x_s .

Lorsque le rapport $\frac{b}{a}$ croît, l'évolution des caractéristiques de l'onde L02¹ pour x voisin de x_s est semblable à l'évolution des caractéristiques de l'onde L01 lorsque le rapport $\frac{b}{a}$ décroît. Lorsque

¹ Figures 129 et 130.

$\frac{b}{a} > \frac{b(L)}{a}$, le basculement de la demi-tangente à droite au point d'abscisse $x_1 = x_s$ induit un changement de comportement de l'onde L02 aux fréquences inférieures à x_s . Ainsi pour les tubes de faibles épaisseurs la fréquence x_s correspond à l'abscisse du sommet de la courbe C_{ka} . Pour les tubes épais, cette fréquence est l'abscisse du point d'inflexion de la courbe C_{ka} . Elle est également l'abscisse du premier point d'inflexion de la courbe C_c .

III.3.2. Comparaison de l'évolution des ondes L01 et L02

Afin d'étudier les similitudes existant entre les ondes L01 et L02, nous présentons sur une même figure les courbes correspondant aux ondes L01 et L02 pour des rapports $\frac{b}{a}$ valant 0.62 et 0.64.¹ Nous mettons ainsi en évidence une interversion de comportement entre les deux ondes.

Si nous étudions la vitesse de groupe correspondant à chacune des ondes à la fréquence x_s nous trouvons une voie d'explication du phénomène. Cette vitesse est définie en fonction de la fréquence x et de la célérité c par la relation :

$$(118) \quad v_g = c \left(1 - \frac{x_1}{c} \frac{dc}{dx_1} \right)^{-1}$$

Lorsque la tangente au voisinage de x_s devient verticale, le rapport $\frac{dc}{dx_1}$ devient infini. Ainsi, la vitesse de groupe v_g est nulle au point d'abscisse x_s . Bien que la relation liant cette vitesse à la propagation de l'énergie n'ait pas été clairement démontrée, il semble qu'à la fréquence x_s , il y a une accumulation d'énergie. La relative similarité des deux ondes au voisinage de

¹ Figures 133 et 134.

cette fréquence et pour un rapport de rayons voisin de $\frac{b}{a}^{(L)}$ provoque un couplage entre les deux ondes ou plutôt une interaction des comportements : les courbes C_{ka} et C_c correspondant à chacune des ondes semblent "attirées" par la courbe homologue.

Afin d'étudier l'importance du milieu dans ce type d'interaction, nous considérons que le milieu interne est de l'eau¹. Nous obtenons de nouveau deux types de comportement selon que le tube est de faible épaisseur ou non. Le type de milieu intervient légèrement sur la valeur du rapport $\frac{b}{a}$ à laquelle se produit l'inversion des comportements entre les ondes L01 et L02. En effet, lorsque le milieu intérieur est de l'eau, $\frac{b}{a}^{(L)}$ est compris entre 0.64 et 0.66.

Une autre différence de comportement apparaît pour l'onde L02. Lorsque la fréquence croît la vitesse décroît irrégulièrement passant par des paliers voisins de la vitesse de plaque $c_p=5236 \text{ ms}^{-1}$, ou augmentant localement.

III.3.3. Comportement de l'onde L02 lorsque le tube devient excessivement fin²

Un palier en vitesse existe également pour un tube contenant de l'air. L'évolution de la courbe C_c étant relativement plus simple dans ce cas, nous essayons de comprendre le comportement de l'onde L02 pour de très faibles épaisseurs du tube en étudiant un tube contenant de l'air.

¹ Figures 135 à 144.

² Figures 141, 142, 145, 146, 147 et 148.

Pour un tube environné de vide, Heimann et Kolsky¹ ont montré que lorsque l'épaisseur du tube devient fortement négligeable devant la longueur d'onde, la vitesse c tend vers la vitesse de plaque.

La vitesse de plaque est la vitesse de propagation d'une onde plane à la surface d'une plaque infiniment mince placée entre deux milieux identiques. Elle dépend uniquement du matériau constituant la plaque. Elle est définie par la relation :

$$(119) \quad c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho_2} (1 - \nu^2)^{-2}}$$

avec E le module d'Young de la plaque élastique et ν le coefficient de Poisson correspondant.

Numériquement, le palier en vitesse tend à s'accroître lorsque l'épaisseur du tube diminue : limité pour $\frac{b}{a} = 0.8$, il apparaît de la fréquence $x_1 =$ à une fréquence supérieure à 40 pour $\frac{b}{a} = 0.999$. Parallèlement à l'établissement de ce palier, les courbes C_{ka} se décalent vers l'axe $x_1 = 0$; la valeur moyenne de $\text{Im}(ka)$, ainsi que sa valeur maximale, diminue lorsque $\frac{b}{a}$ augmente.

A haute fréquence ce comportement s'explique puisque le tube devient l'analogie acoustique d'une plaque plane. Aux basses fréquences ce comportement se justifie moins : la longueur d'onde étant très grande, le tube est considéré par l'onde comme une simple barre.

En fait, dans le domaine des faibles épaisseurs, l'onde ne change pas de comportement. En effet, les courbes C_c sont toujours successivement décroissantes, croissantes puis de nouveau décroissantes. Elles possèdent

¹ J. H. Heimann, H. Kolsky, The propagation of elastic waves in thin cylindrical shells, *The J. Mech. Phys. Solids*, **14**, pp. 121-130, 1966.

toutes deux points d'inflexion, le second point correspondant au maximum des courbes C_{ka} . De plus, elles admettent toutes la même limite $c = c_b$ lorsque x s'annule et c_t lorsque x tend vers l'infini. La zone de fréquence où la vitesse est voisine de c_p devenant de plus en plus importante, les limites inférieures et supérieures d'autant plus difficilement que l'épaisseur du tube est faible.

IV. ONDES CIRCONFÉRENTIELLES ET LES ONDES AXIALES

Par définition, les ondes axiales n'ont a priori aucun rapport avec les ondes circonférentielles. Pourtant lorsque nous recherchons les ondes "axiales" correspondant au mode symétrique et pour $k=0$ nous obtenons une équation qui correspond à celle des ondes d'incidence normale associée à un pôle de partie réelle nulle.

Les fréquences de coupure à partir desquels une onde axiale se propage à la surface d'un cylindre vérifie l'équation suivante :

$$(120) \quad \left(x_t J_0(x_t) + 2J_0'(x_t) \right) \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} x_1 H_0^{(1)}(x_1) (x_t^2 J_0(x_\ell) + 2x_\ell J_0'(x_\ell)) - x_\ell x_t^2 J_0'(x_\ell) H_0^{(1)}(x_1) \right] J_1(x_t) = 0$$

Le dernier facteur ne se retrouve pas dans l'équation caractéristique des ondes d'incidence normale, il correspond d'après Zemanek aux ondes purement axiales ce qui justifie son absence dans cette équation. Le premier facteur correspond aux ondes de torsion le second aux ondes radiales¹. Nous considérons de plus que les fréquences d'apparition d'une onde (ou cutoff) sont relativement indépendantes du milieu extérieur. Nous pouvons dès lors comparer les cutoffs correspondant aux ondes axiales avec la valeur de la fréquence pour laquelle les ondes circonférentielles sortent du bruit de fond (passage des pôles dans le premier cadran du plan complexe).

¹ P. Millerat, rapport de DEA, p. 16, 1992.

Les fréquences de coupure correspondant aux ondes radiales se propageant à la surface d'un cylindre de caractéristiques celles des quatre premiers chapitres sont :

$$(121) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 9.433 \\ x_1 = 23.38 \\ x_1 = 36.99 \end{cases}$$

Les fréquences de coupure correspondant aux ondes de torsion sont :

$$(122) \quad \begin{cases} x_1 = 10.457 \\ x_1 = 17.1389 \\ x_1 = 23.66 \\ x_1 = 30.127 \end{cases}$$

Les ondes de Brekhovskikh se propageant à la surface d'un cylindre élastique apparaissent pour les fréquences suivantes :

$$(123) \quad \begin{cases} B_1 : x_1 = 0 \\ B_2 : x_1 \in]9.416, 9.417[\text{ avec } \tilde{\nu}_{B_2} = 5.86 \cdot 10^{-2} \\ B_3 : x_1 \in]10.456, 10.457[\\ B_4 : x_1 \in]17.138, 17.139[\\ B_5 : x_1 \in]23.659, 23.660[\\ B_6 : x_1 \in]23.374, 23.375[\text{ avec } \tilde{\nu}_{B_6} = 5.57 \cdot 10^{-2} \\ B_7 : x_1 \in]30.127, 30.128[\end{cases}$$

Nous pouvons ainsi sans aucune ambiguïté conclure que les quatre premières ondes de torsion correspondent aux ondes B_3 , B_4 , B_5 et B_7 . Les ondes B_2 et B_6 correspondent aux ondes L03 et L06. Ces deux ondes sont radiales. Il est difficile d'associer l'onde L01 à la première onde de Brekhovskikh étant donné que cette dernière apparaît en même temps que l'onde de Rayleigh. L'évolution de l'onde L01 aux hautes fréquences est cependant assez proche de celle de l'onde de Rayleigh plane.

Les ondes L02, L04 et L05 sont purement axiales. Elles ne peuvent correspondre à une onde circonférentielle.

V. CONCLUSION

Cette étude confirme les résultats obtenus pour l'obtention du DEA. : valeur théorique des déterminants, formes des ondes mises en évidence. Elle permet de plus de comprendre les comportements relatifs des ondes L01 et L02 se propageant à la surface d'un tube. L'interversion des courbes au-delà d'une certaine épaisseur et d'une certaine fréquence met en évidence la difficulté d'identifier une onde pour toutes les fréquences et les épaisseurs. Le modèle que nous concevons pour décrire le comportement physique ne semble pas correctement adapté au phénomène.

Nous mettons également en évidence les différents comportements asymptotiques de la célérité de l'onde L02 fonction de la fréquence et de l'épaisseur du tube. Pour l'onde L02, ce dernier est semblable à une barre infinie à très basse fréquence tout en restant semblable à une plaque pour de très faibles épaisseurs du tube.

Une étude expérimentale est actuellement conduite par Maze au laboratoire d'acoustique ultrasonore et d'électronique du Havre. Les premières expériences conduites dans ce laboratoire semblent confirmer l'ensemble des résultats.

tube eau/air n=0 b/a=0.1

---: L03
- - - : L02
—: L01

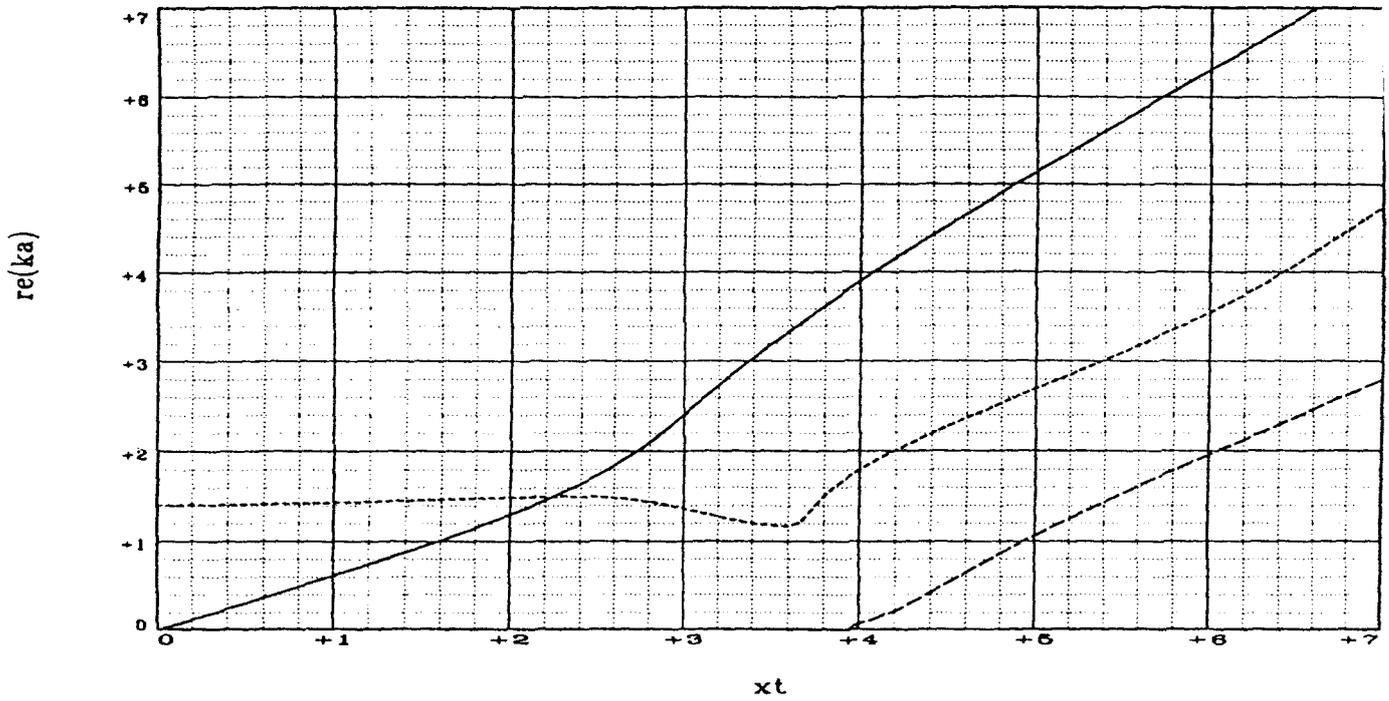


Figure 118.

tube eau/air n=0 b/a=0.1

---: L03
- - - : L02
—: L01

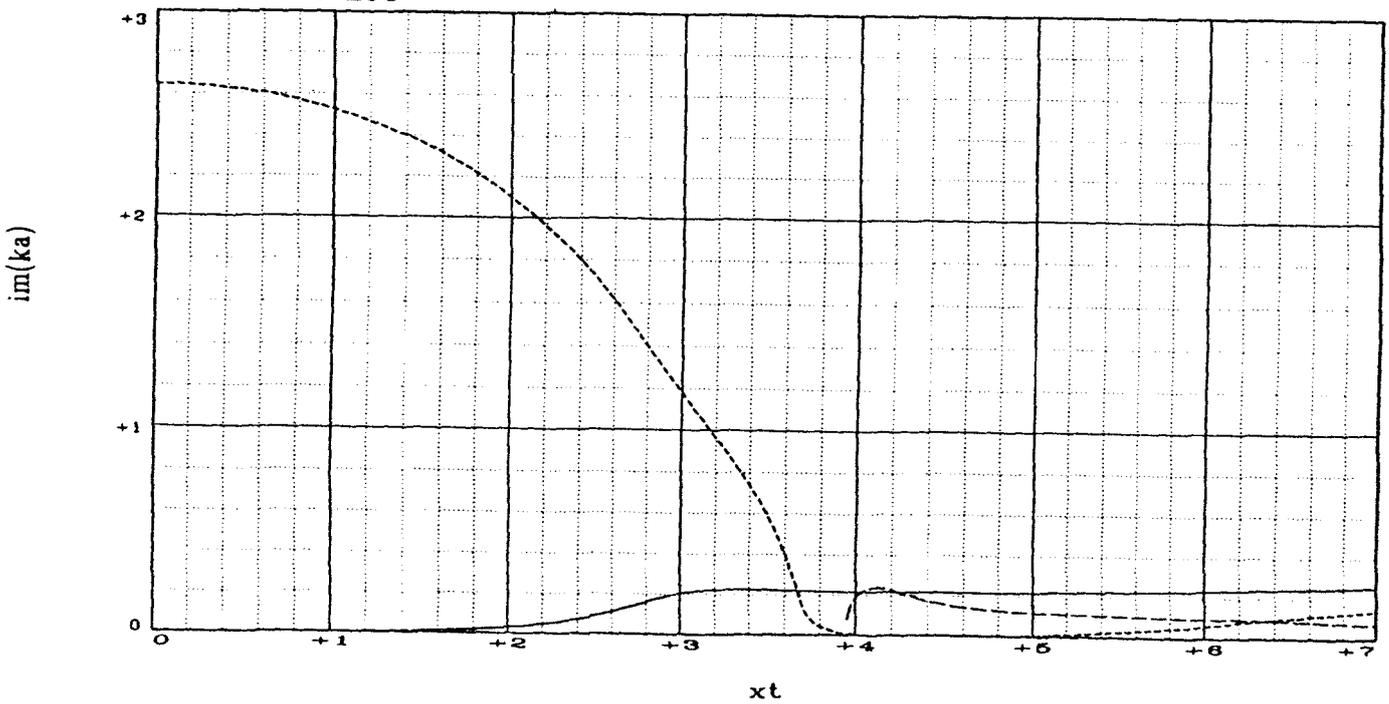


Figure 119.

tube eau/air n=1 b/a=0.1

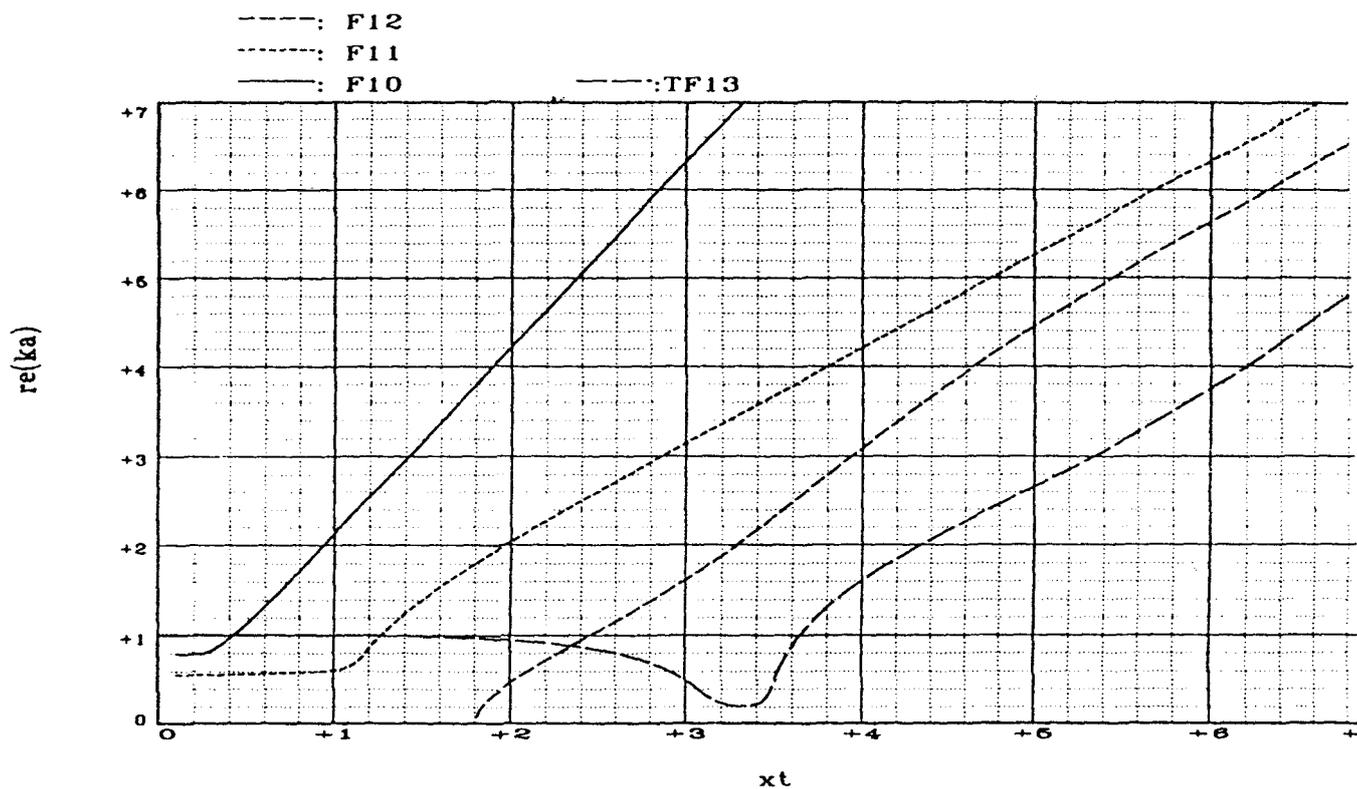


Figure 120.

tube eau/air n=1 b/a=0.1

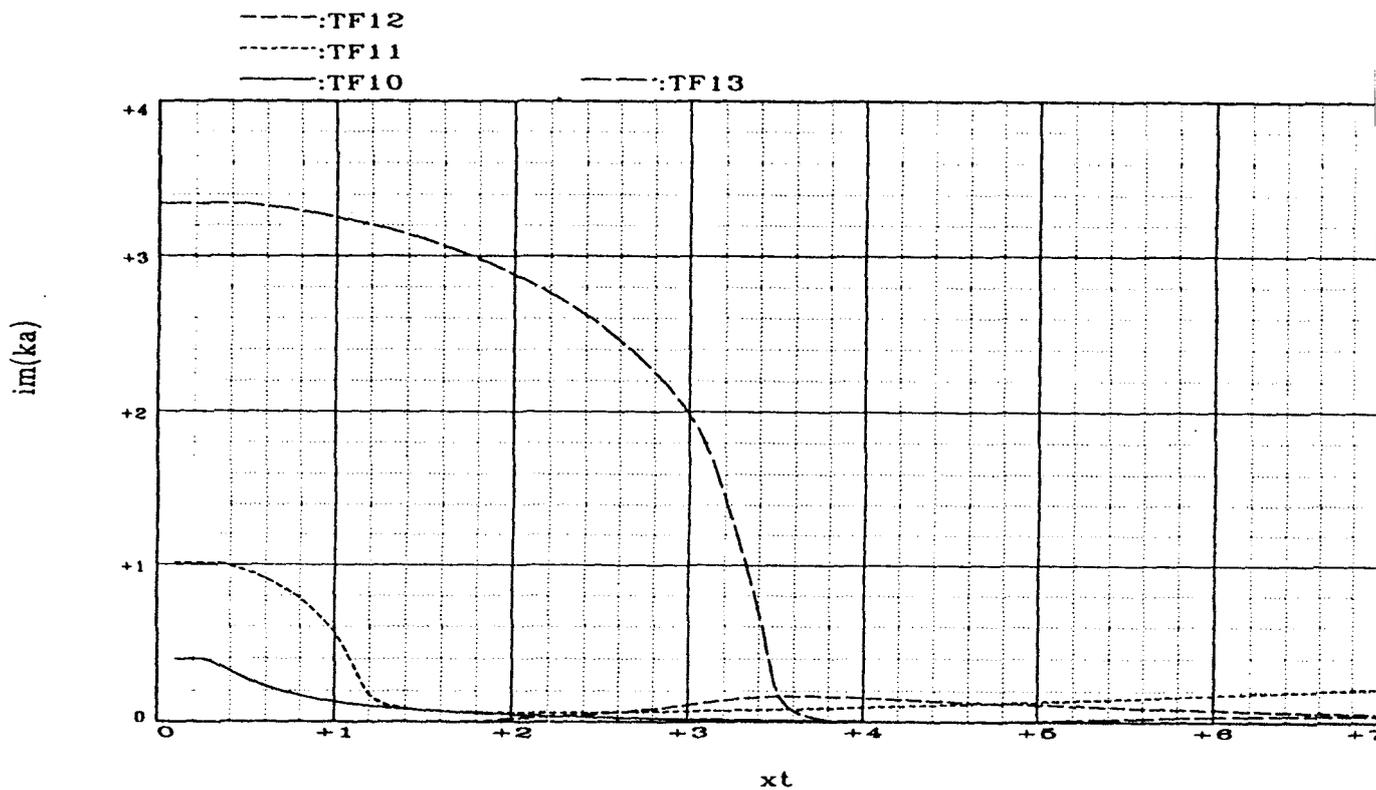


Figure 121.

tube vide/vide n = 0 b/a = 0.

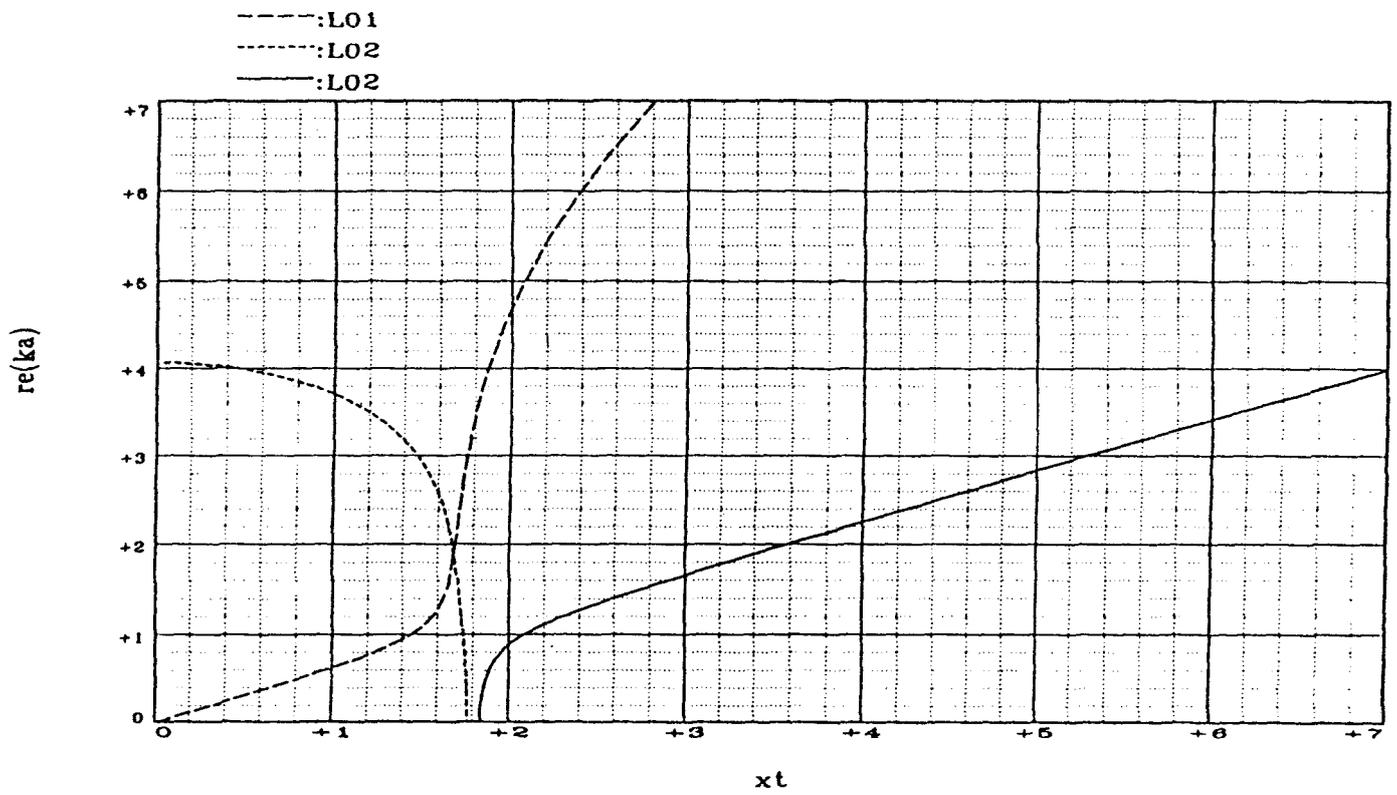


Figure 122.

tube eau/air $n=0$ $b/a=0.9$

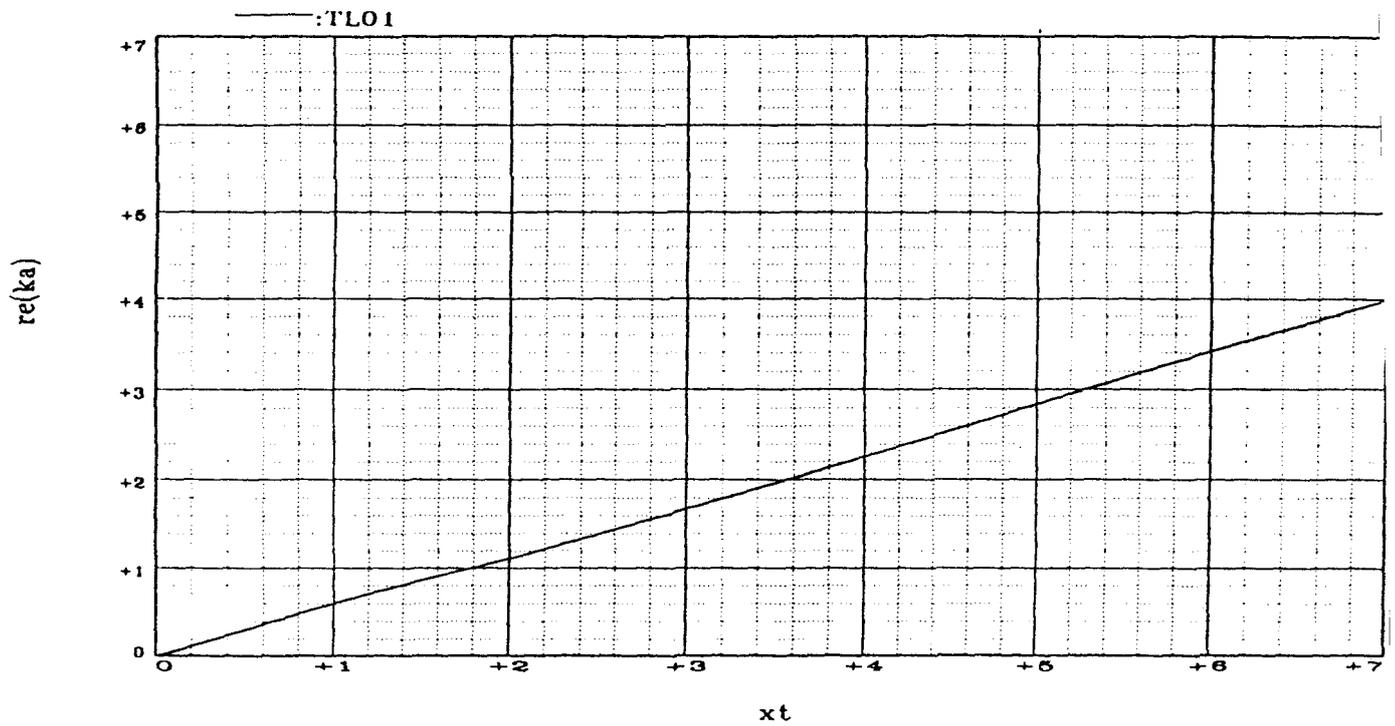


Figure 123.

tube eau/air $n=0$ $b/a=0.9$

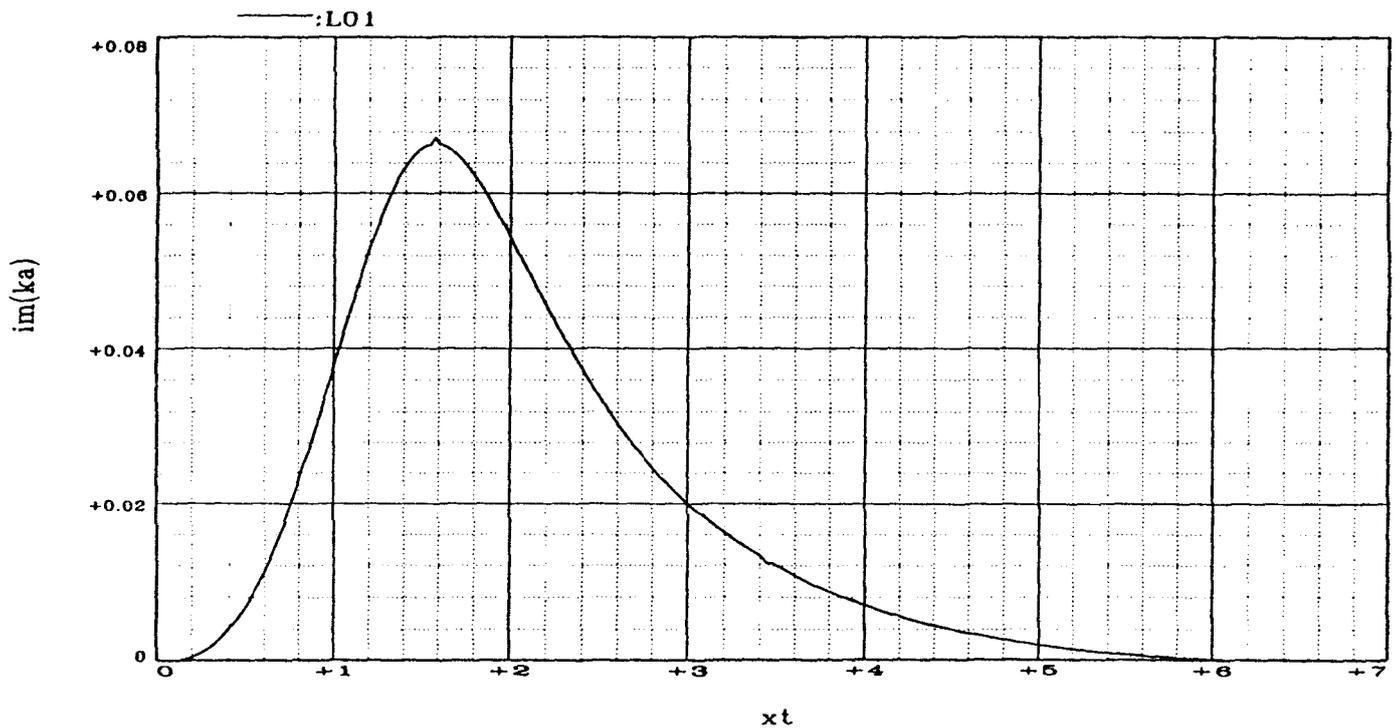


Figure 124.

tube eau/air $n = 2$ $b/a = 0.84$

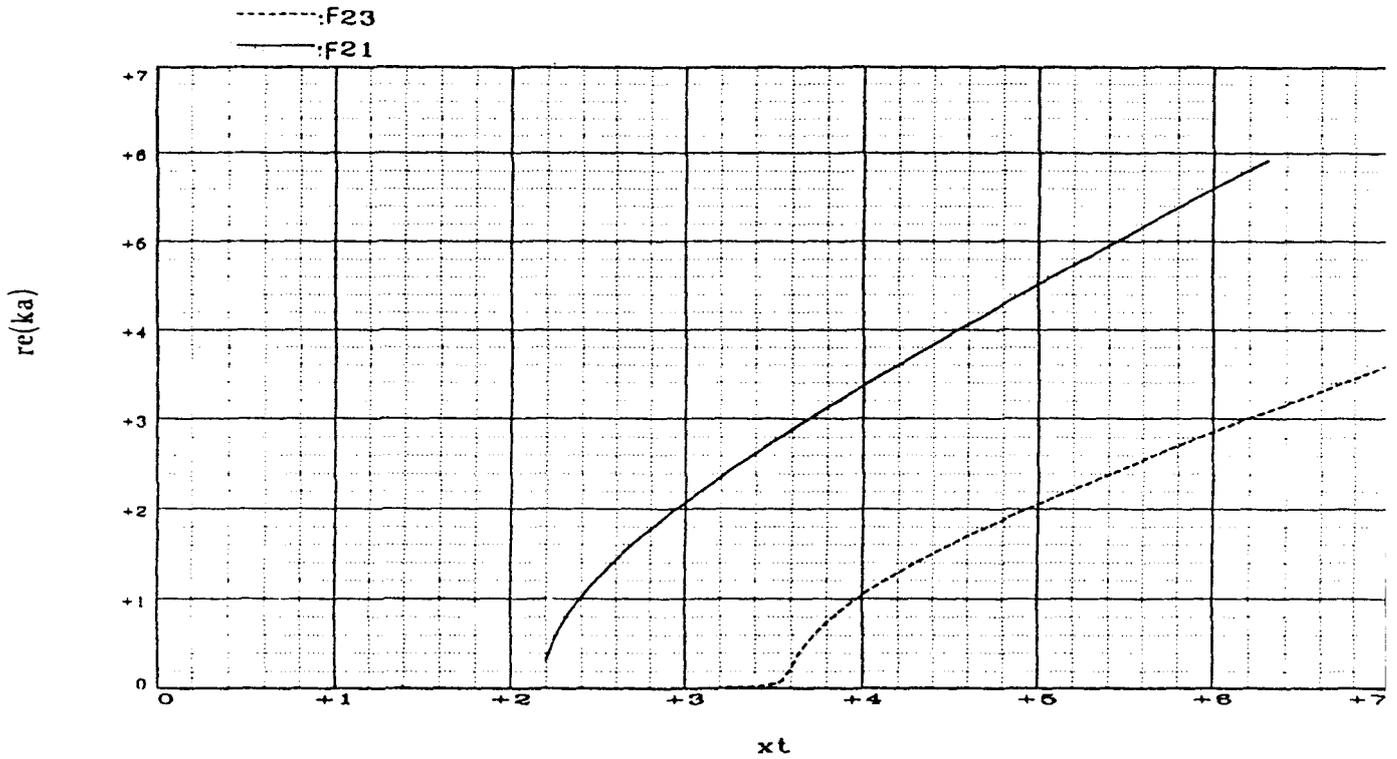
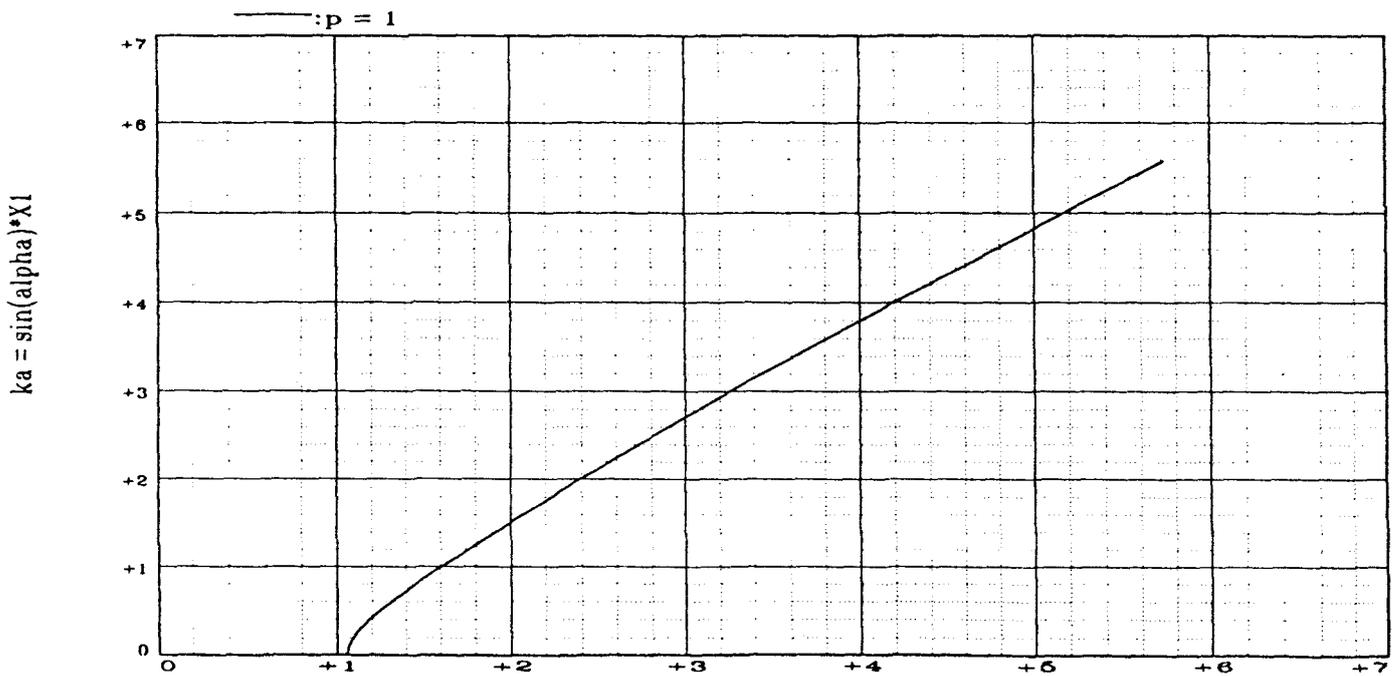


Figure 125.

$n = 1$ $p = 1$ $b/a = 0.93$



$c1/ct * X1 = xt$

Figure 126.

tube eau/air n = 1 b/a = 0.9

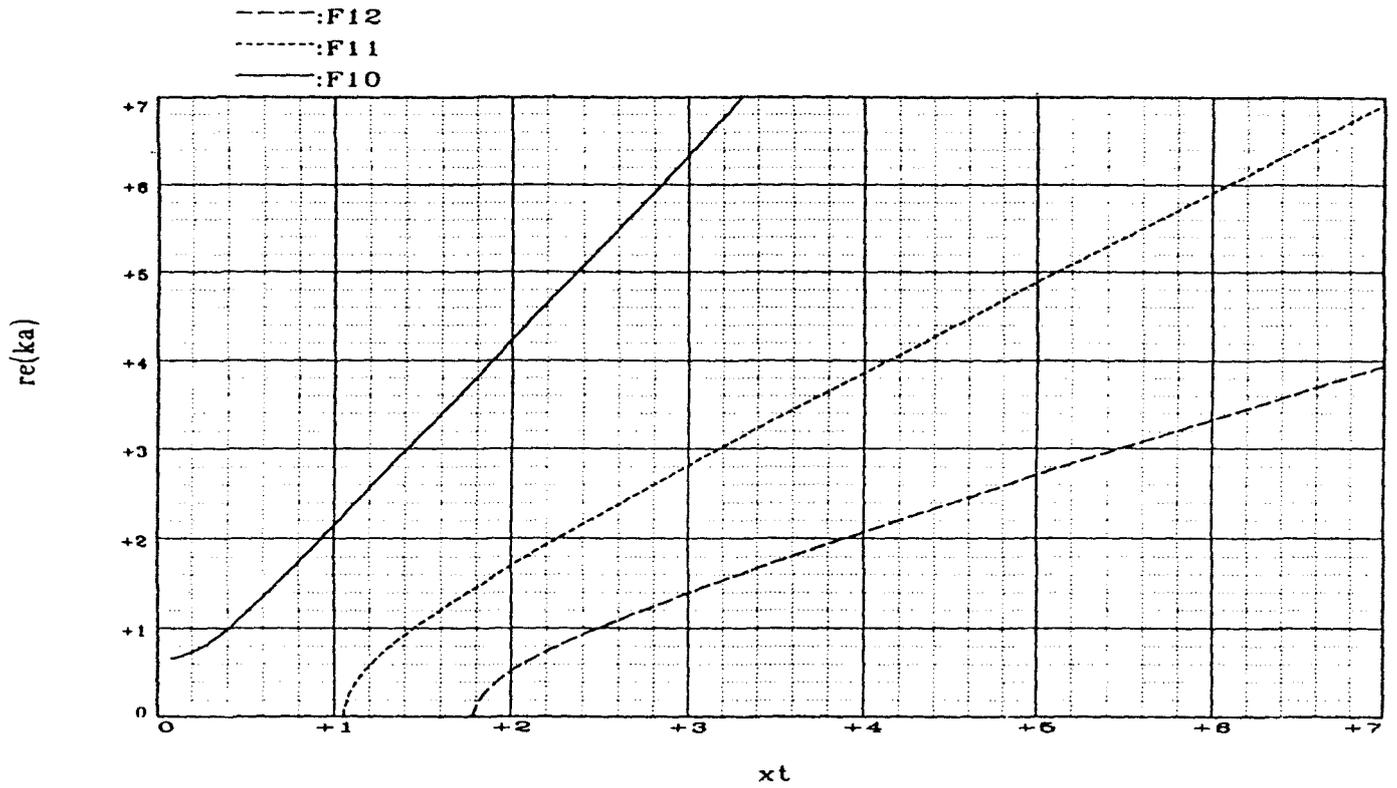


Figure 127.

tube eau/air n = 1 b/a = 0.9

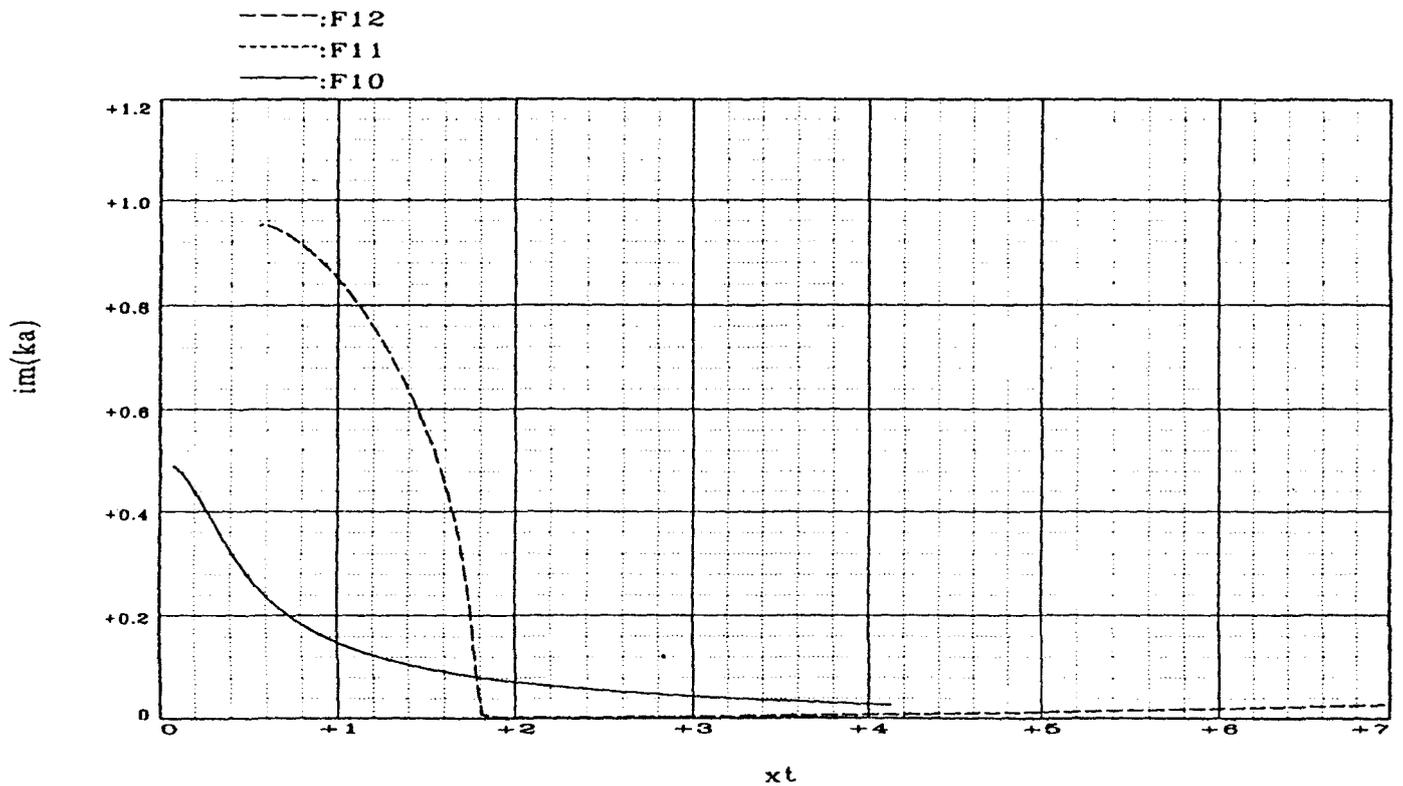


Figure 128.

tube eau/air L(0,2)

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| -----: $b/a = 0.60$ | -----: $b/a = 0.65$ | -----: $b/a = 0.80$ |
| -----: $b/a = 0.50$ | -----: $b/a = 0.64$ | -----: $b/a = 0.70$ |
| -----: $b/a = 0.10$ | -----: $b/a = 0.62$ | -----: $b/a = 0.68$ |

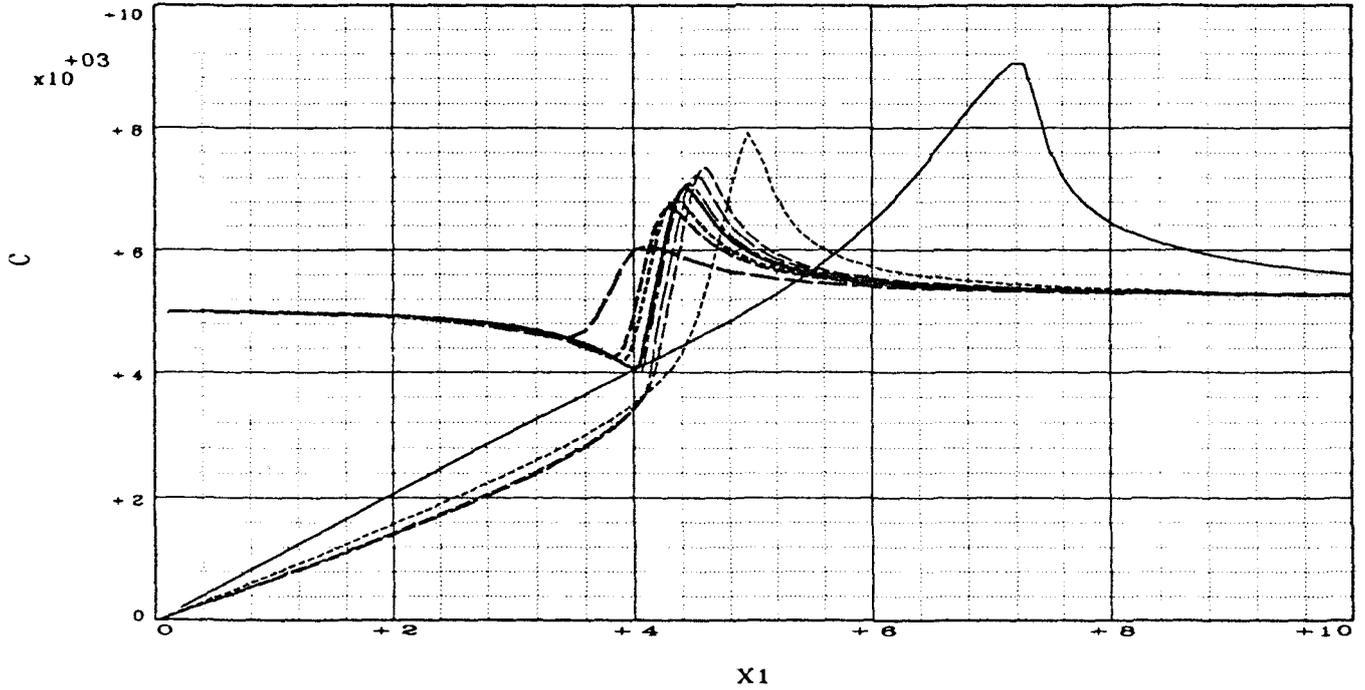


Figure 129.

tube eau/air L(0,2)

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| -----: $b/a = 0.60$ | -----: $b/a = 0.65$ | -----: $b/a = 0.80$ |
| -----: $b/a = 0.50$ | -----: $b/a = 0.64$ | -----: $b/a = 0.70$ |
| -----: $b/a = 0.10$ | -----: $b/a = 0.62$ | -----: $b/a = 0.68$ |

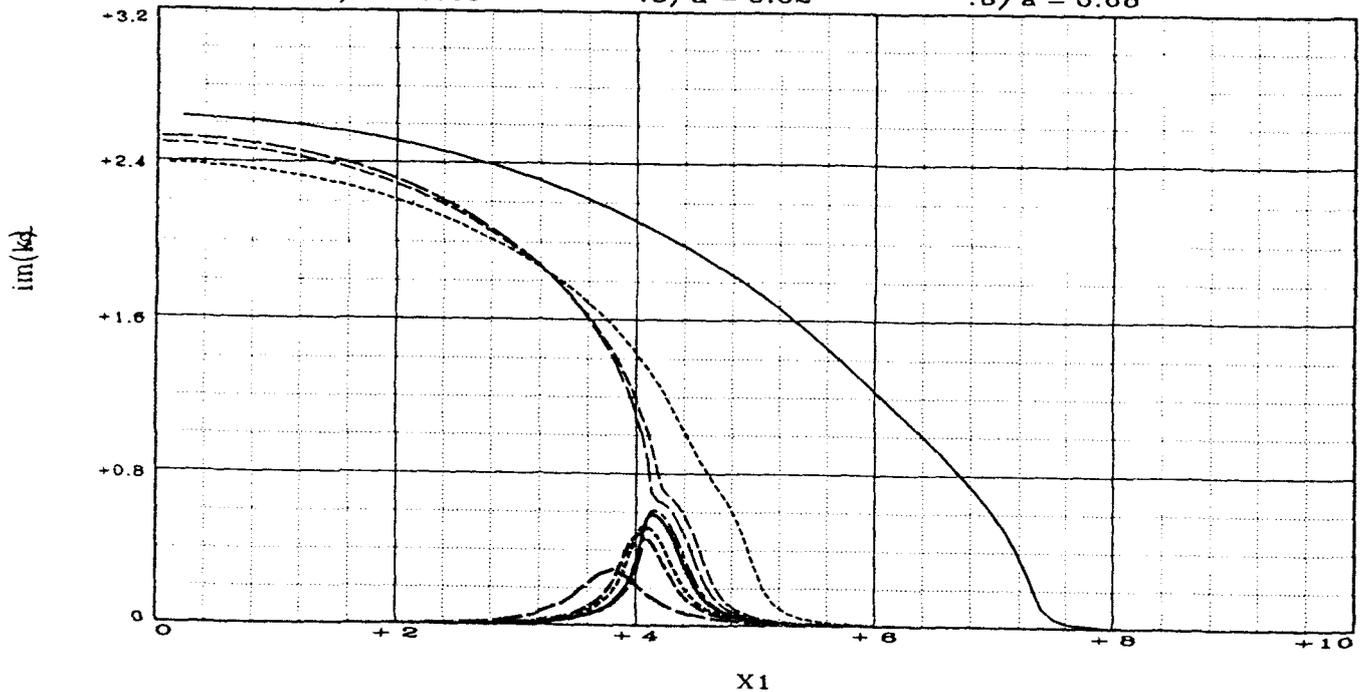


Figure 130.

tube eau/air L(0,1)

-----: $b/a = 0.60$	-----: $b/a = 0.65$	-----: $b/a = 0.80$
-----: $b/a = 0.50$	-----: $b/a = 0.64$	-----: $b/a = 0.70$
-----: $b/a = 0.10$	-----: $b/a = 0.62$	-----: $b/a = 0.68$

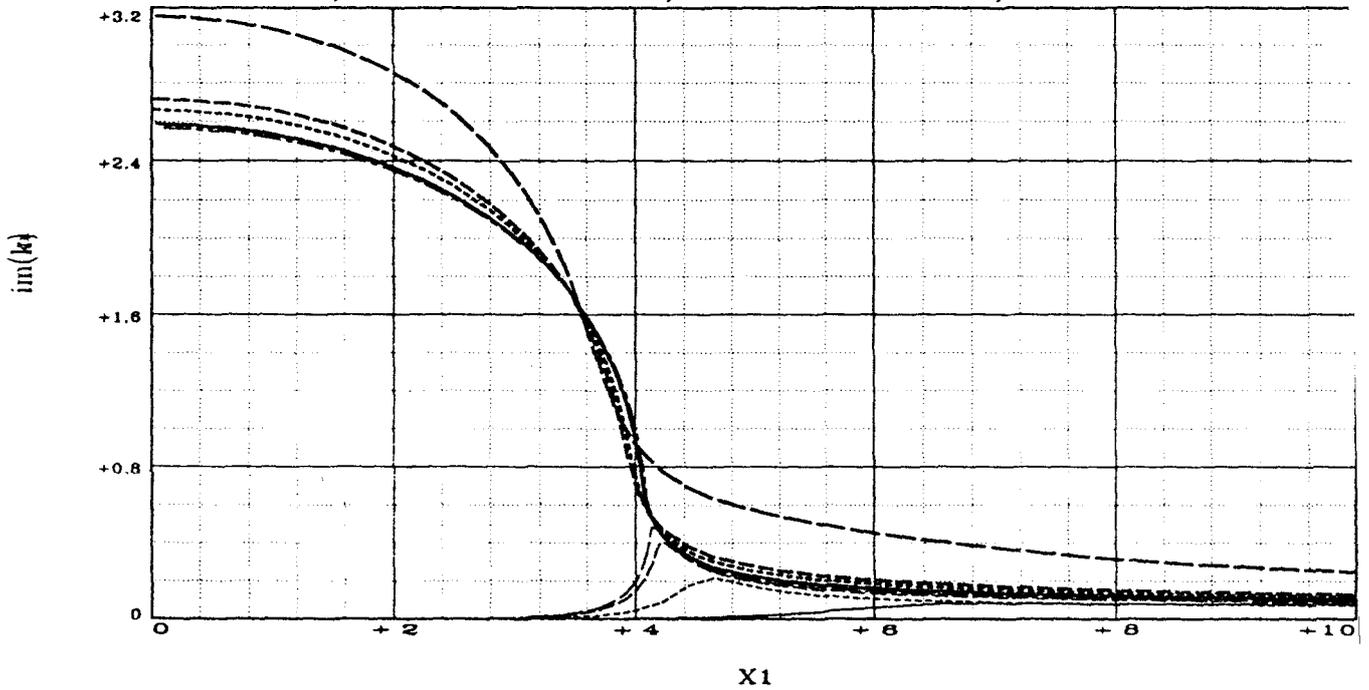


Figure 131.

tube eau/air L(0,1)

-----: $b/a = 0.60$	-----: $b/a = 0.65$	-----: $b/a = 0.80$
-----: $b/a = 0.50$	-----: $b/a = 0.64$	-----: $b/a = 0.70$
-----: $b/a = 0.10$	-----: $b/a = 0.62$	-----: $b/a = 0.68$

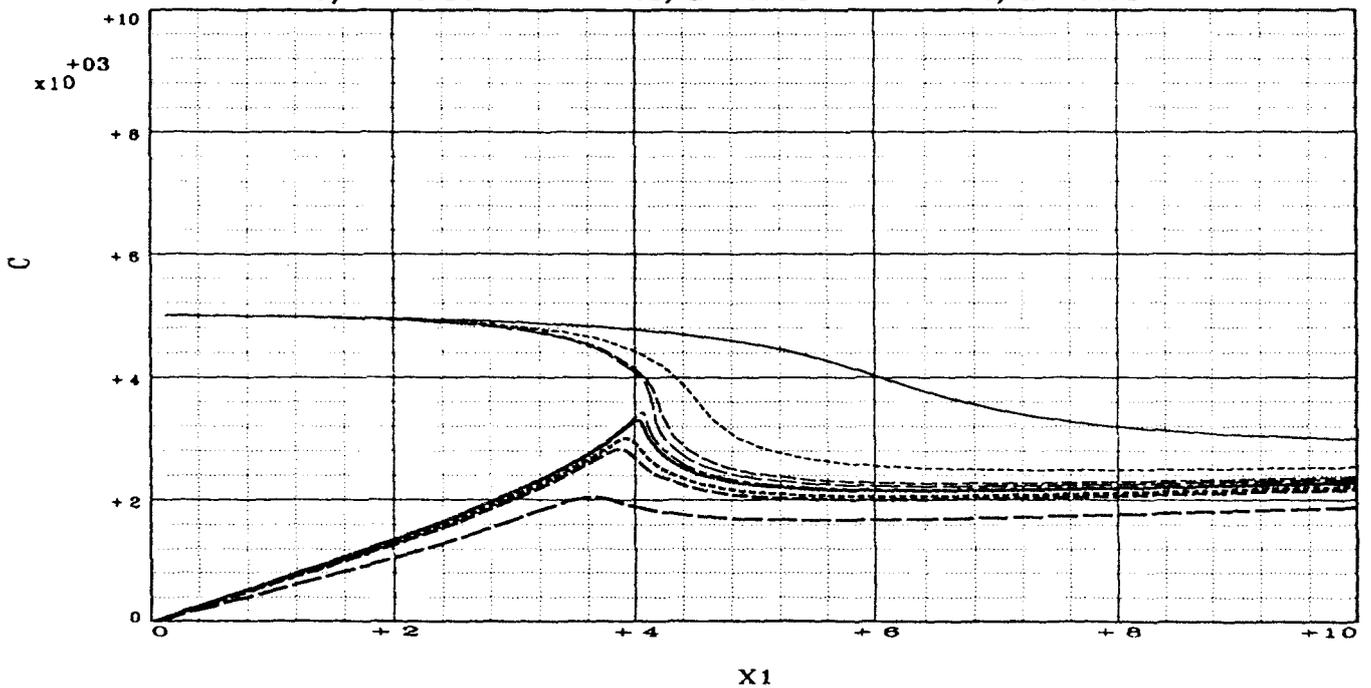


Figure 132.

tube eau/air L(0,1) et L(0,2)

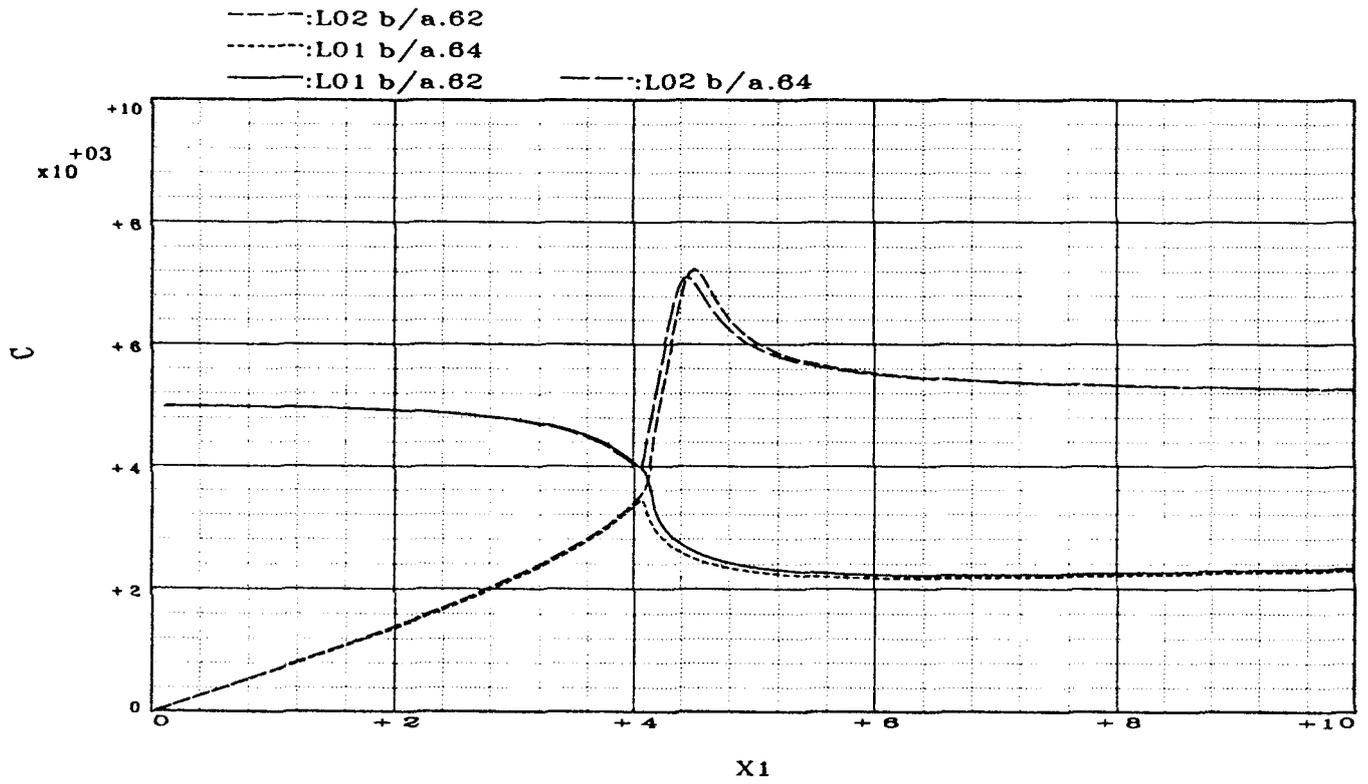


Figure 133.

tube eau/air L(0,1) et L(0,2)

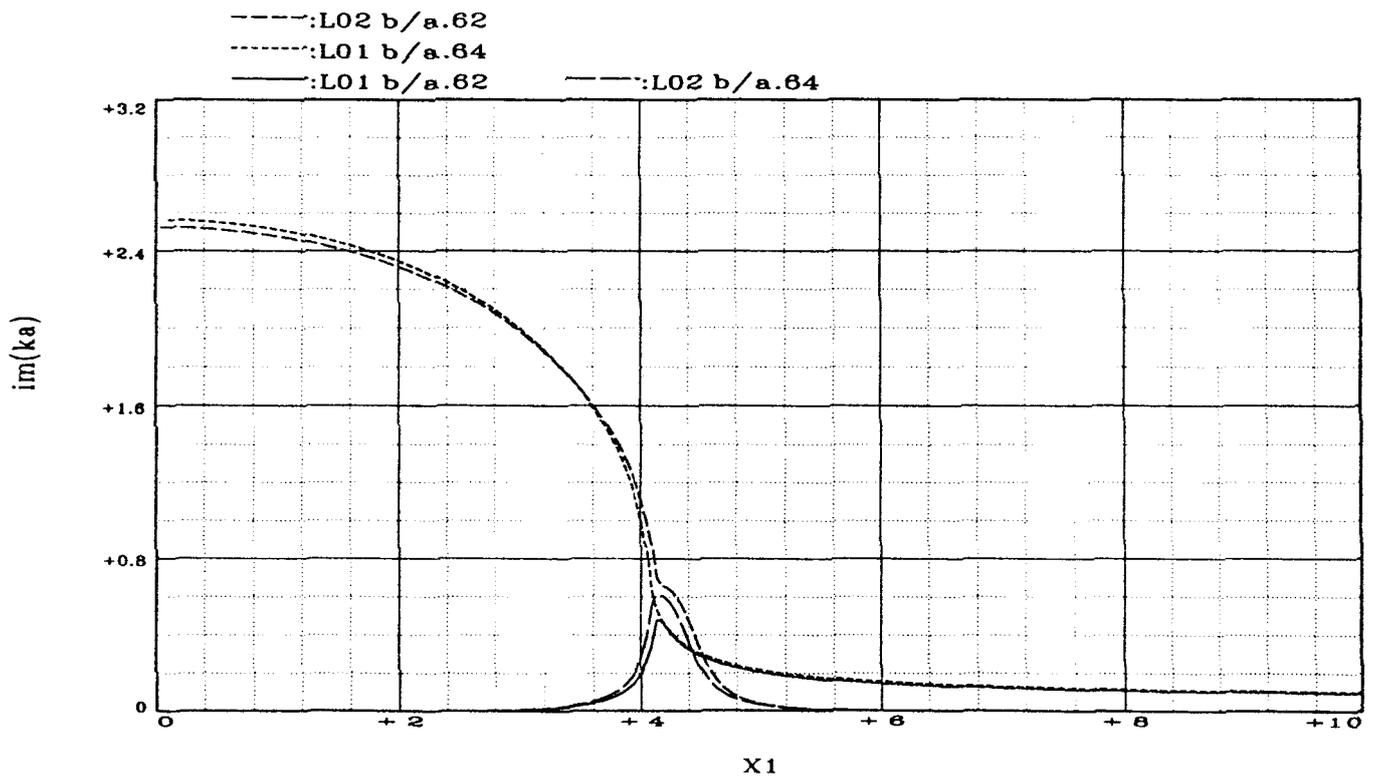


Figure 134.

tube ear/ear L(0,2)

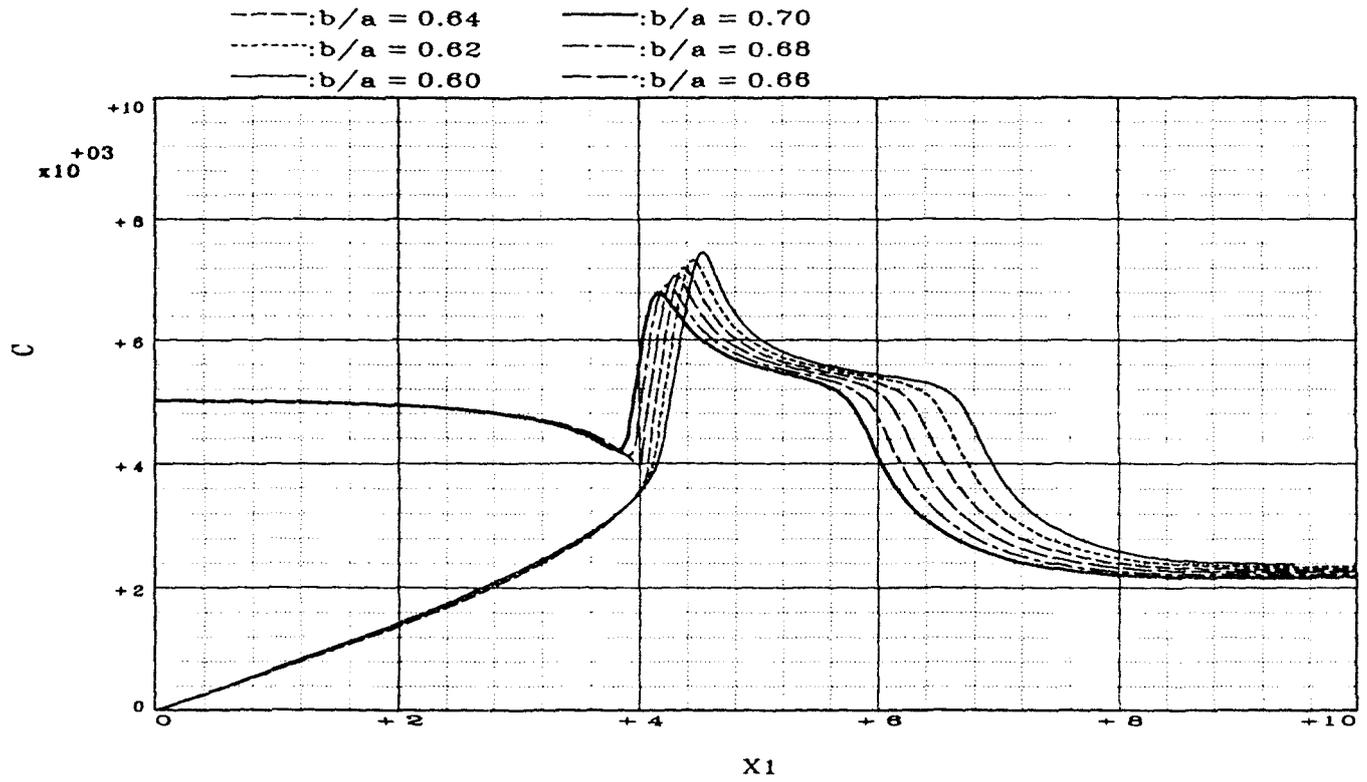


Figure 135.

tube ear/ear L(C,2)

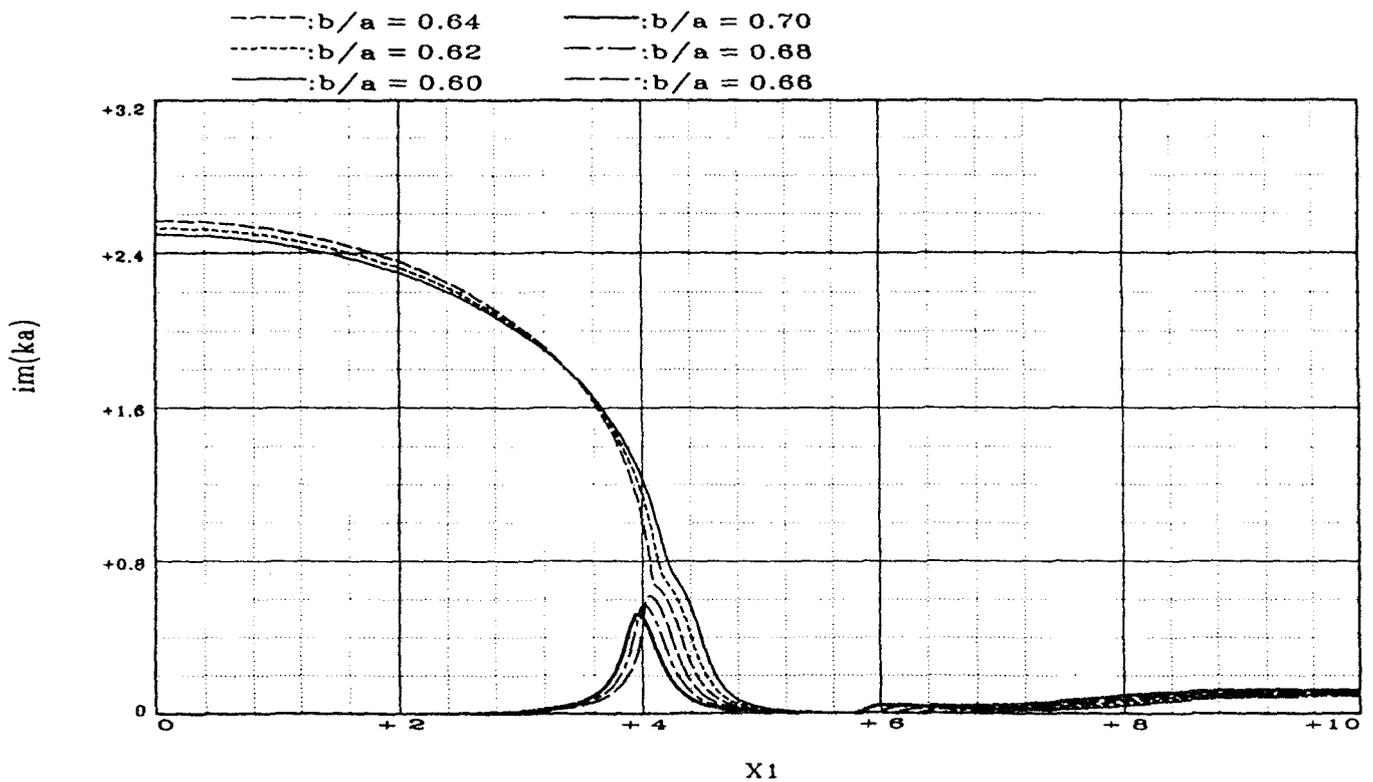


Figure 136.

tube ear/ear L(0,2)

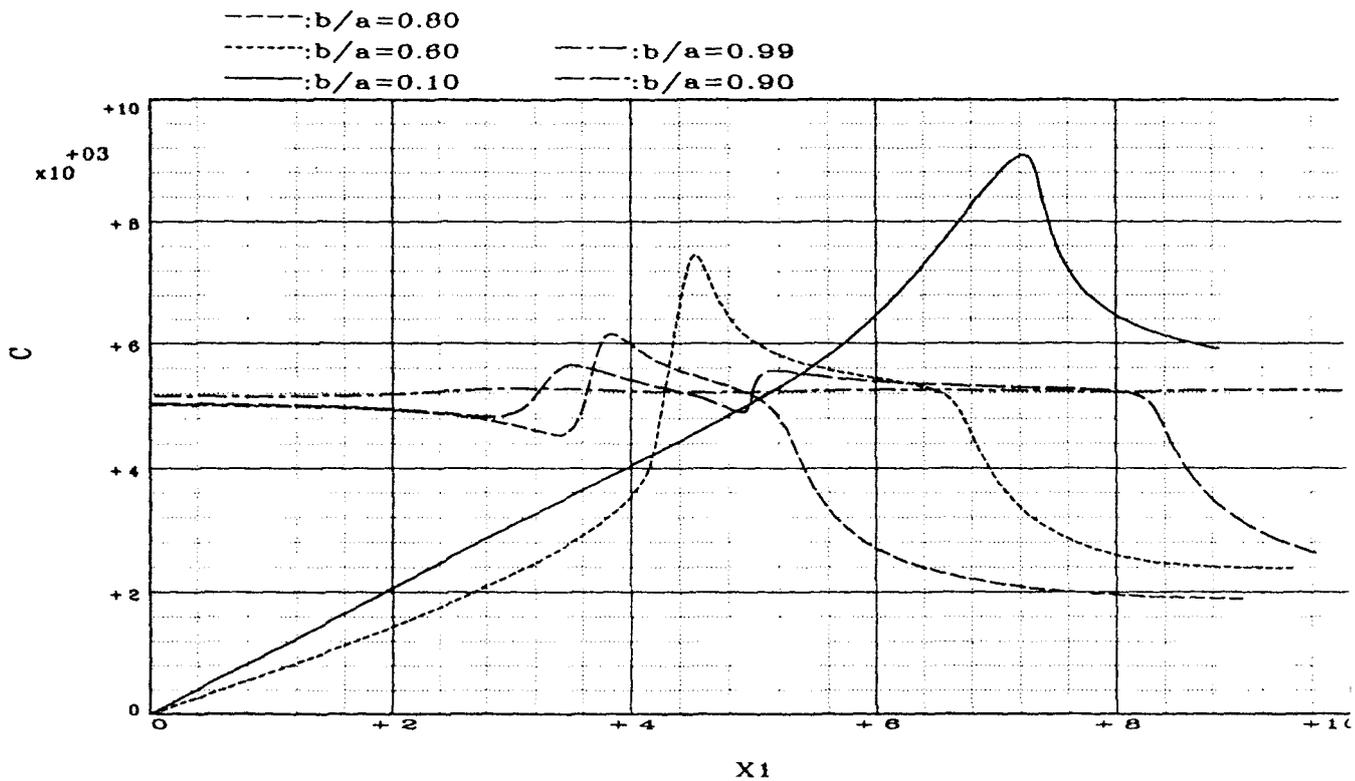


Figure 137.

tube ear/ear L(0,2)

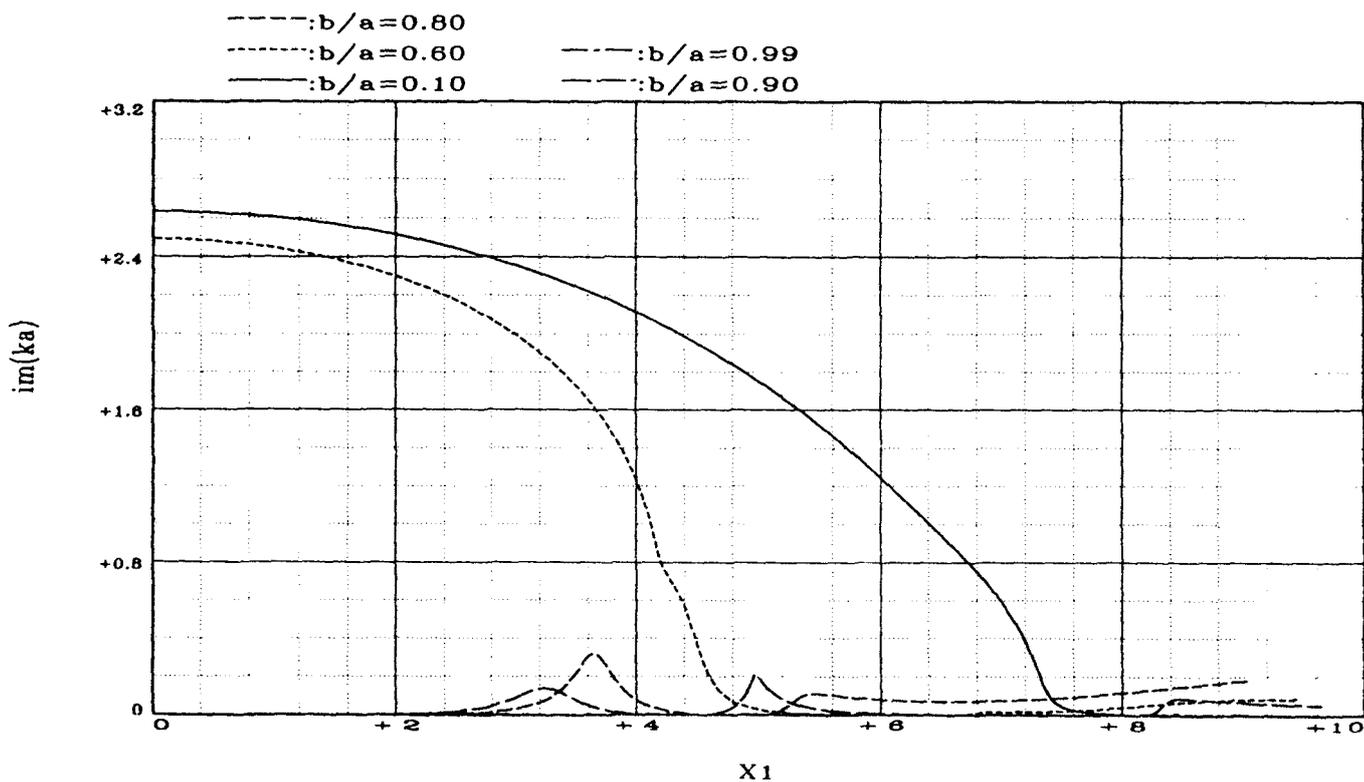


Figure 138.

tube ear/ear L(0,1)

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| -----: $b/a = 0.62$ | ————: $b/a = 0.68$ | -----: $b/a = 0.80$ |
|: $b/a = 0.60$ | -----: $b/a = 0.66$ |: $b/a = 0.70$ |
| ————: $b/a = 0.10$ | -----: $b/a = 0.64$ | |

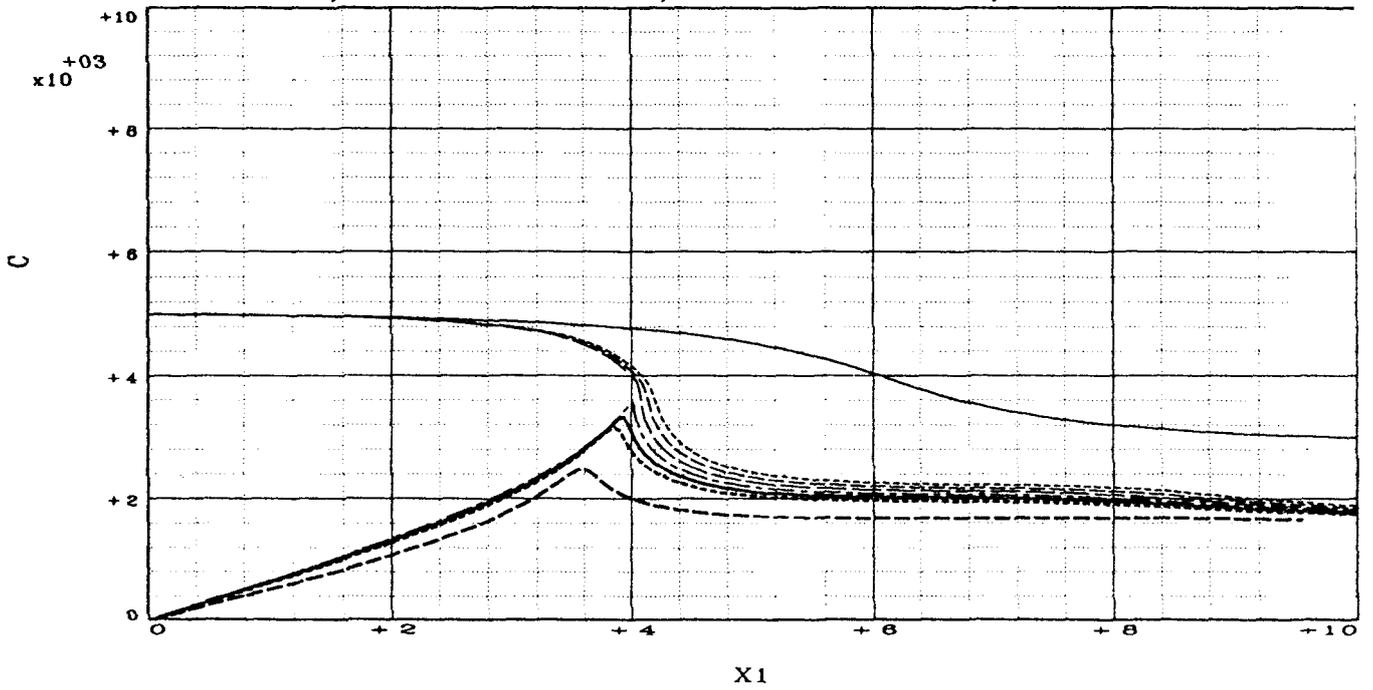


Figure 139.

tube ear/ear L(0,1)

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| -----: $b/a = 0.62$ | ————: $b/a = 0.68$ | -----: $b/a = 0.80$ |
|: $b/a = 0.60$ | -----: $b/a = 0.66$ |: $b/a = 0.70$ |
| ————: $b/a = 0.10$ | -----: $b/a = 0.64$ | |

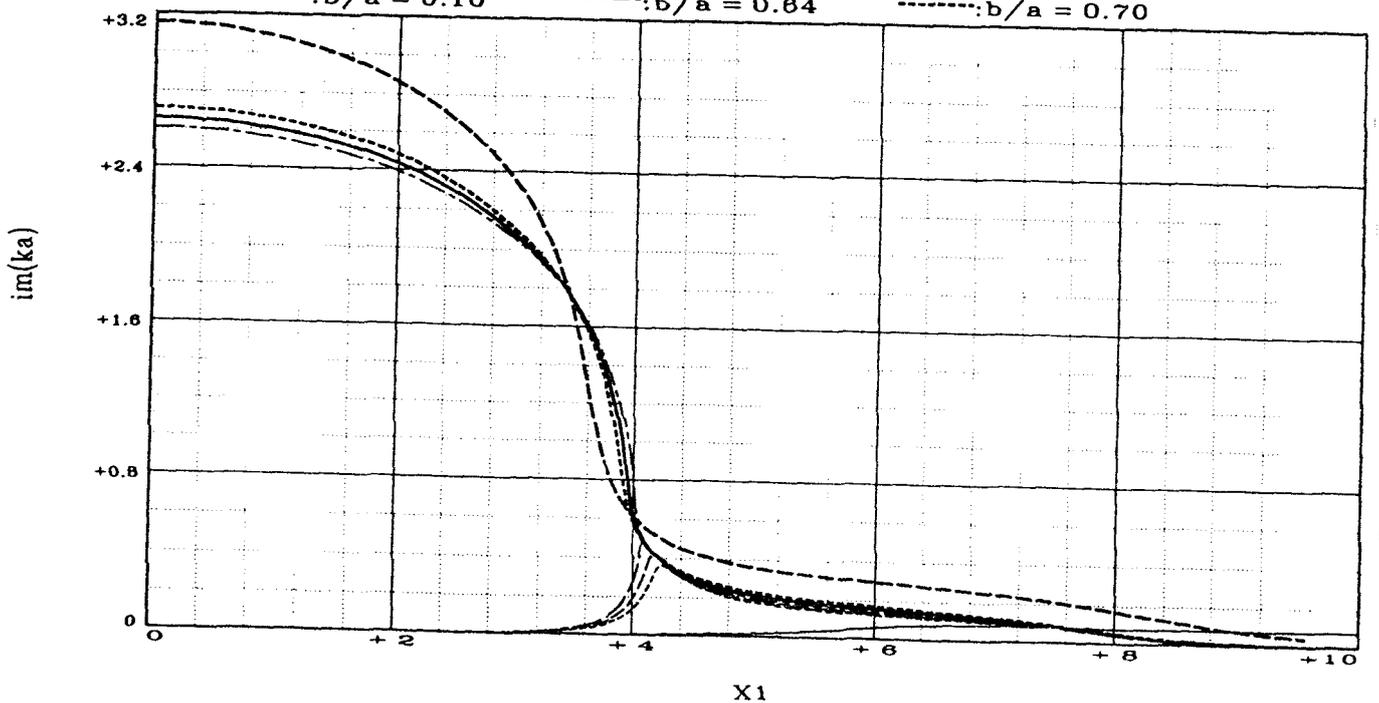


Figure 140.

Onde L02

$n = 0$

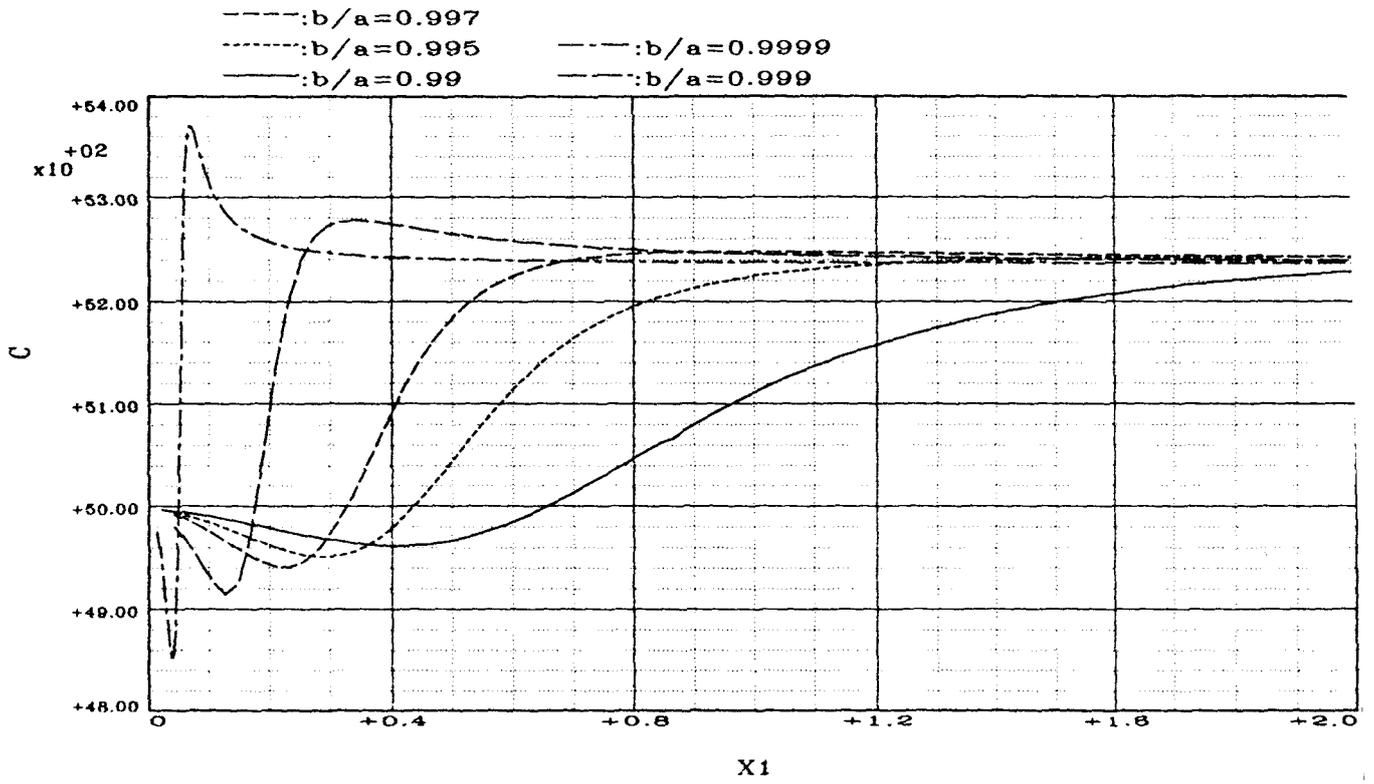


Figure 141.

Onde L02

$n = 0$

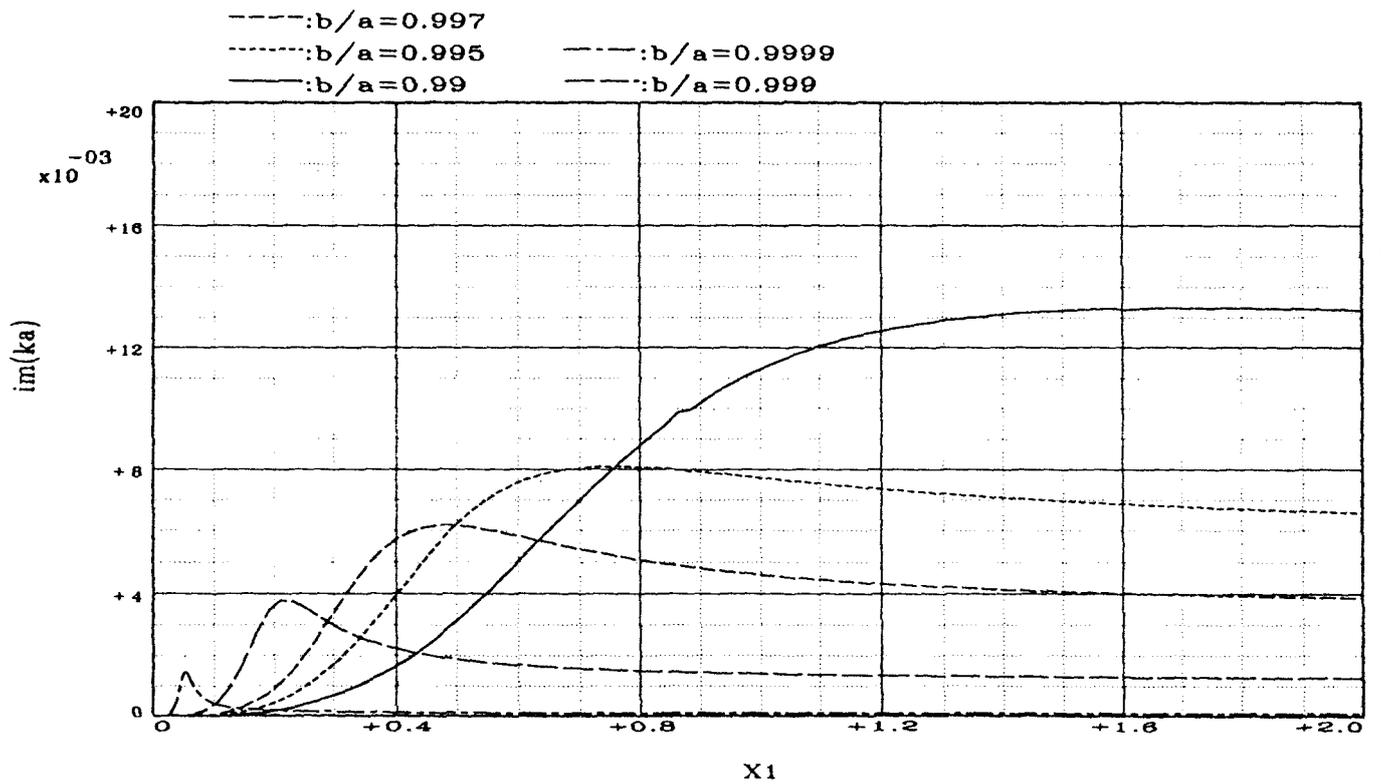


Figure 142.

tube eau/eau L(0,1) et L(0,2)

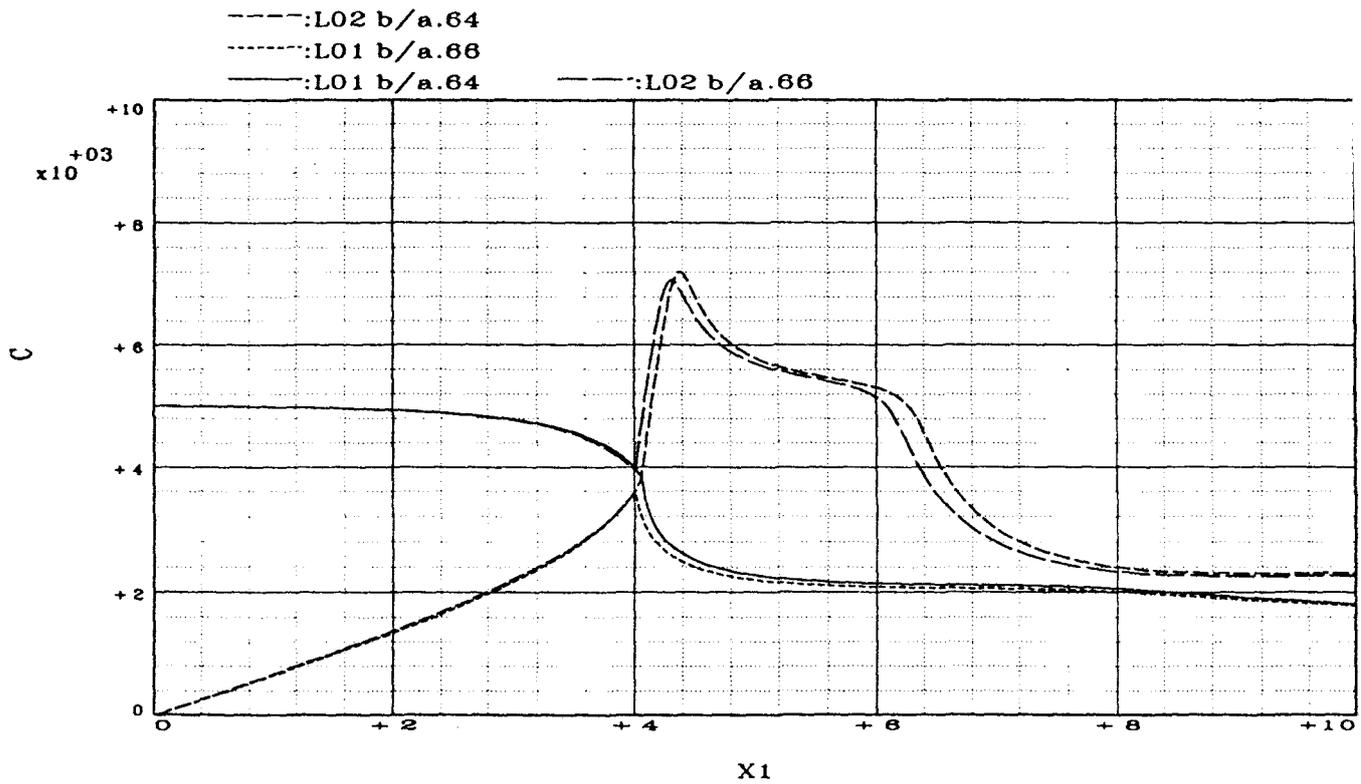


Figure 143.

tube eau/eau L(0,1) et L(0,2)

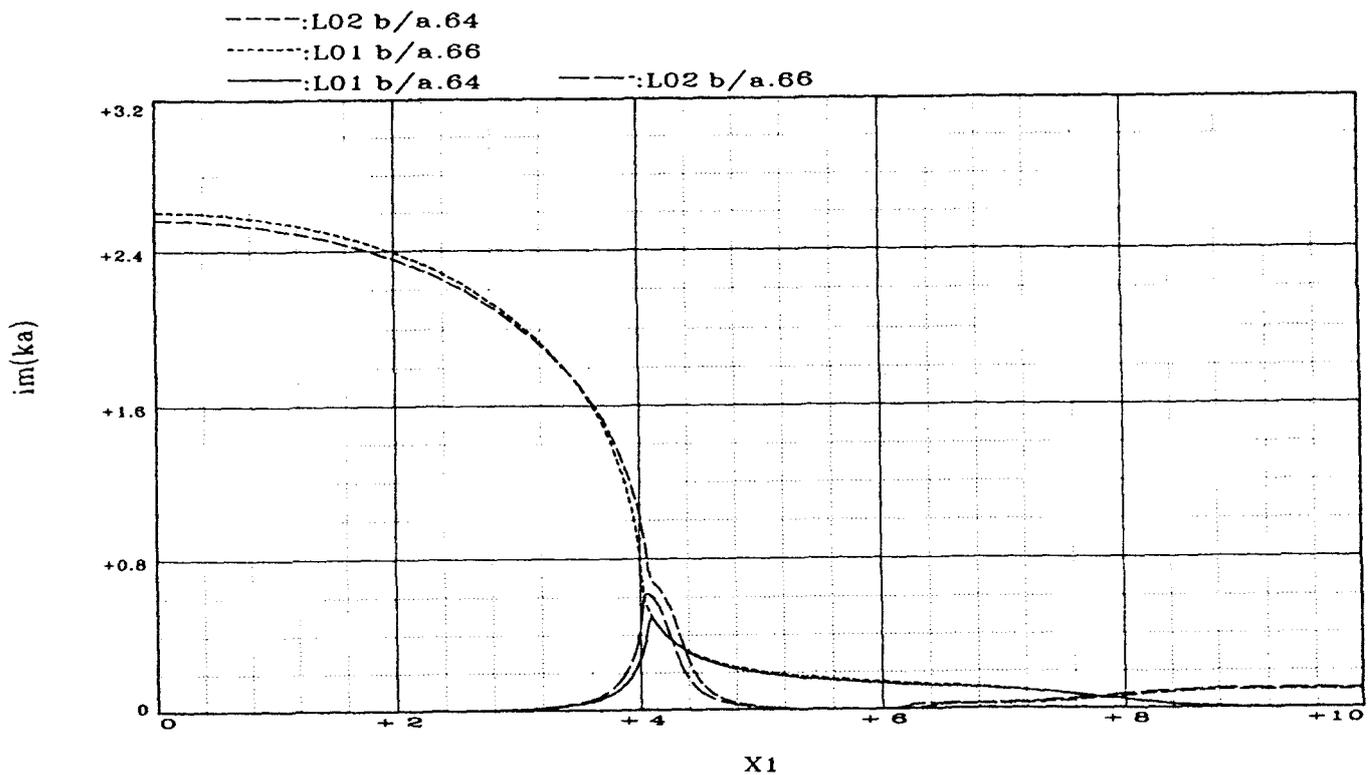


Figure 144.

Onde L02

$r_2 = 0$

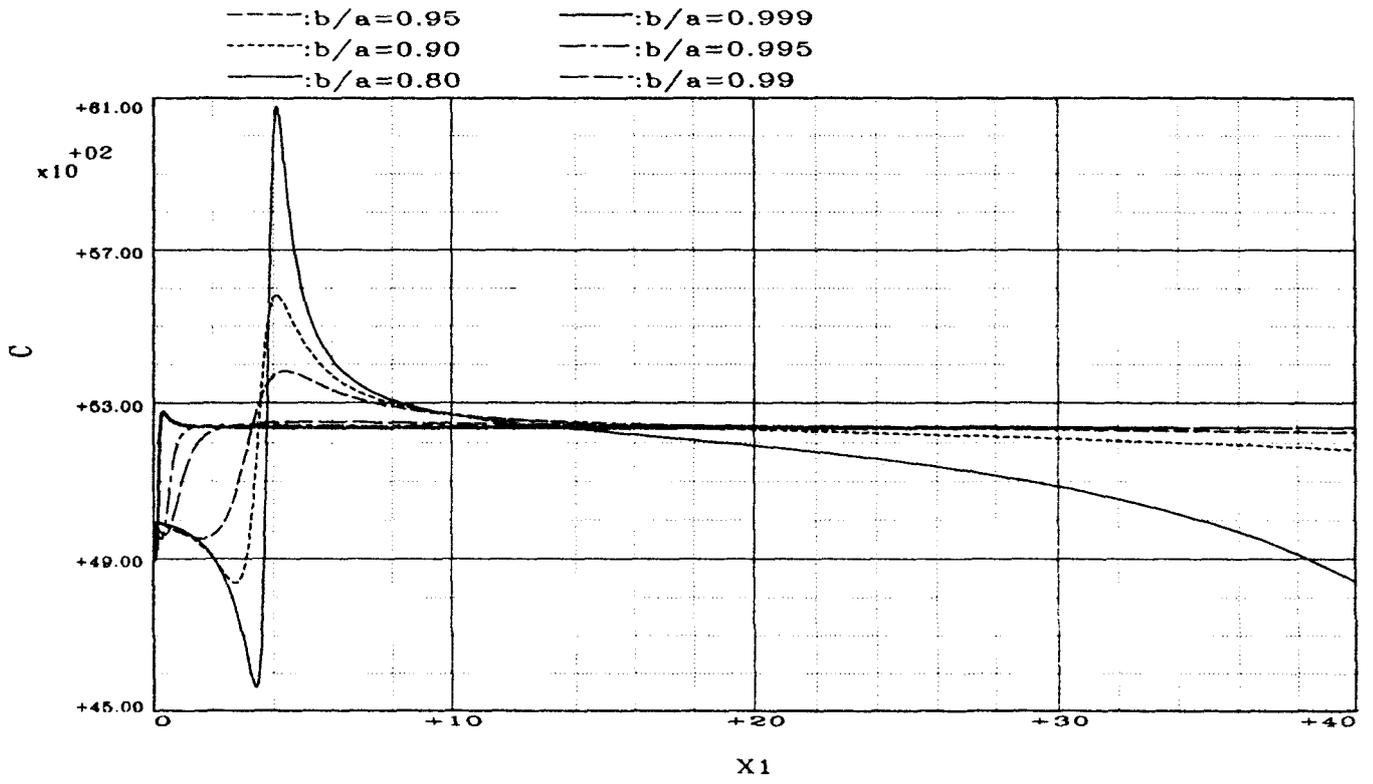


Figure 145.

Onde L02

$r_2 = 0$

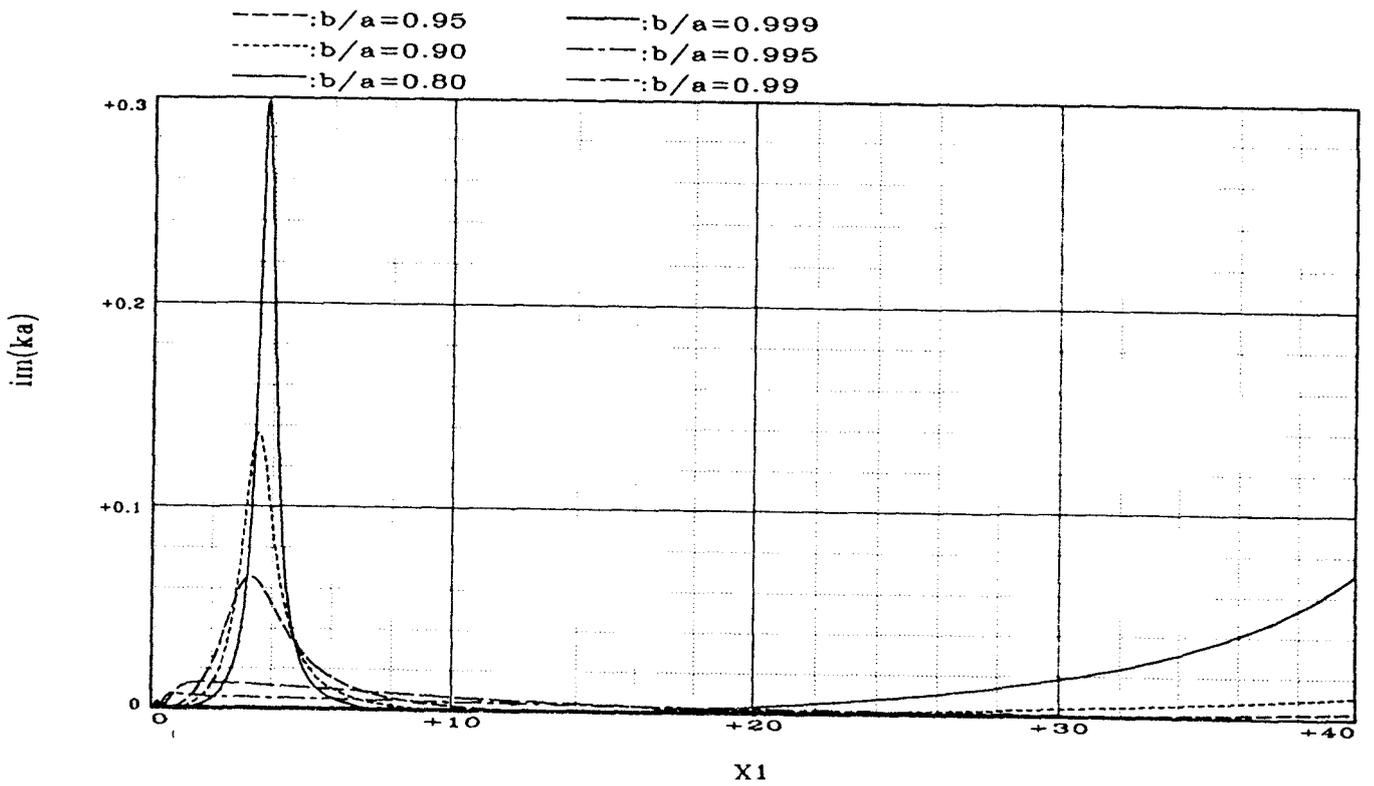


Figure 146.

Onde L02

$n = 0$

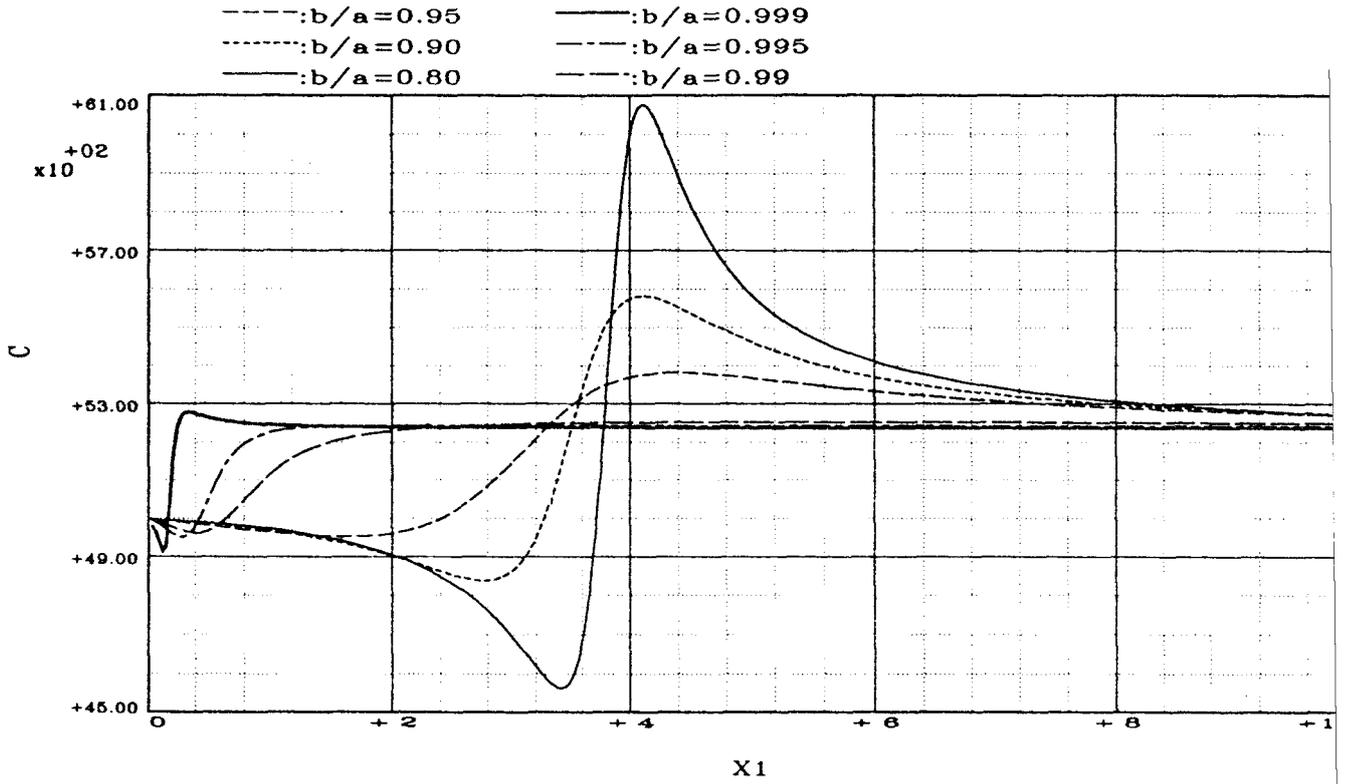


Figure 147.

Onde L02

$n = 0$

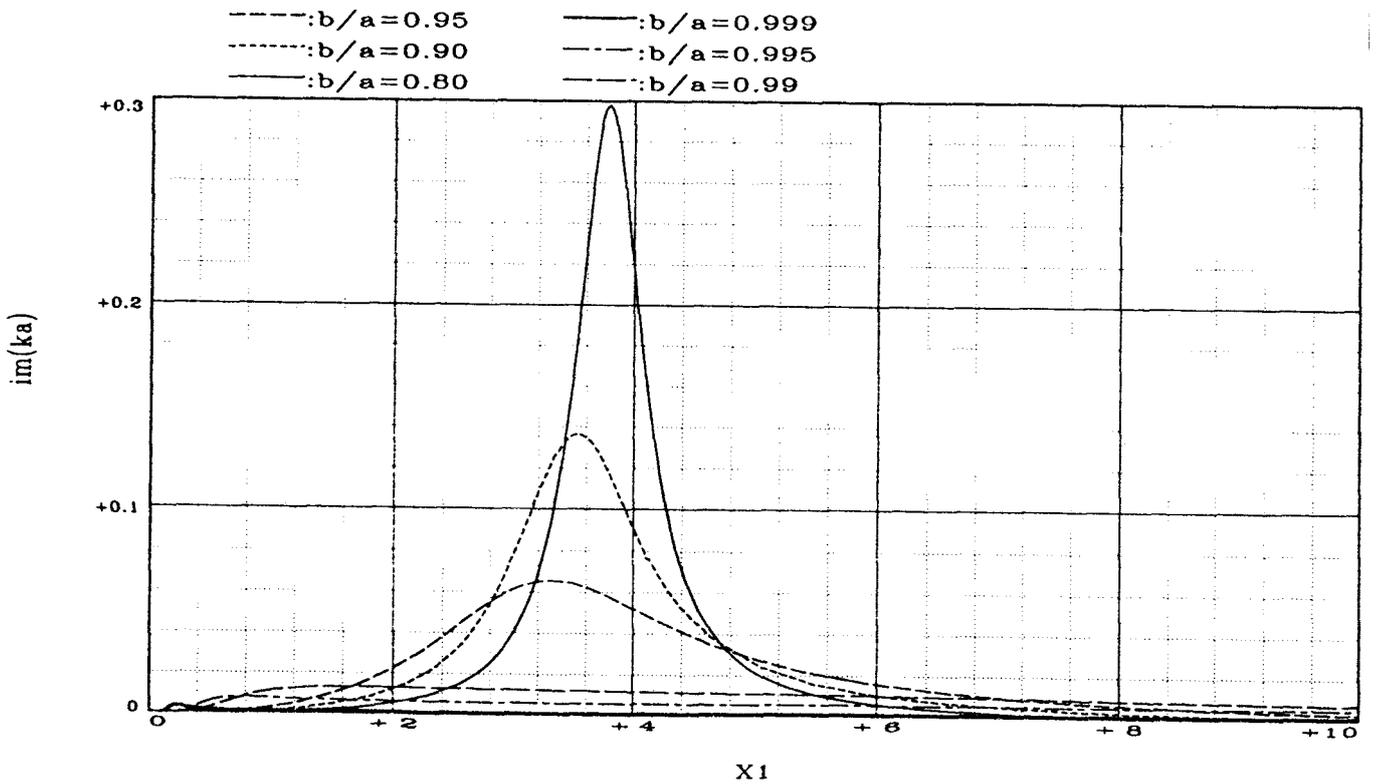


Figure 148.

Conclusion

Lorsque l'objet responsable de la diffusion acoustique est cylindrique, une modélisation du phénomène fondée sur une décomposition en ondes géométriques est possible et cela indépendamment des matériaux constituant l'objet ou les milieux extérieurs. Cette modélisation justifie la notion d'onde se propageant à la surface de l'objet cylindrique. Deux types de propagations sont mises en évidence : celle correspondant à une onde atteignant la surface du cylindre sous une incidence quelconque et celle correspondant à une onde atteignant la surface du cylindre de façon tangentielle.

En étudiant les comportements de ces ondes, nous justifions numériquement l'utilisation de la transformée d'Imai en montrant que le non-emploi de cette transformation entraîne une divergence des pressions dues aux ondes circonférentielles, ce qui n'a aucun sens physique.

Un certain nombre de problèmes est absent d'un exposé purement théorique. Ainsi, une étude numérique de la pression diffusée par un cylindre fluide montre qu'il est difficile de tenir compte des ondes géométriques. En effet, les conditions mathématiques nécessaires pour démontrer l'existence de ces ondes ne sont jamais strictement vérifiées pour des fréquences de l'ordre de 30. De plus, la série correspondant aux ondes géométriques converge excessivement lentement.

Si nous ne tenons compte que de l'onde réfléchie et des ondes circonférentielles, l'erreur numérique que l'on commet sur le calcul de la pression diffusée est relativement faible en dehors d'une zone d'une dizaine de degrés correspondant au passage du point d'observation P de *l'ombre* à la *lumière*. Il n'est donc pas nécessaire d'étudier de façon plus approfondie les ondes géométriques se propageant à travers un cylindre fluide.

L'étude des ondes circonférentielles dans le cas d'un cylindre fluide permet la différenciation des trajectoires des pôles de Wait de celles de Franz ainsi que le calcul de la pression due à ces ondes. La non-continuité due au changement de modèles numériques (transformation d'Imai) est visible sur les courbes de pression sans pour autant être préjudiciable au tracé complet des courbes.

Afin de rendre les résultats les plus indépendants possibles des conditions d'observation, nous établissons l'expression de l'indice de réflectivité. Nous retrouvons ainsi numériquement que les ondes de Franz n'ont d'influence qu'en champ proche.

En étudiant d'un point de vue théorique la diffusion acoustique par un cylindre élastique, nous démontrons qu'il existe des ondes géométriques se propageant à travers un cylindre élastique à haute fréquence et cela quelque soit l'angle d'incidence. En outre, nous établissons les expressions des coefficients cylindriques de réflexion et de transmission indépendamment de la fréquence. En obtenant ces expressions, nous démontrons l'existence sous certaines conditions d'ondes évanescentes dans le cylindre. Les ondes longitudinales entre les deux angles critiques continuent d'être générées, mais elles sont trop amorties entre deux contacts avec une interface pour être visibles.

Etant donné les difficultés numériques introduites dans le cas d'un cylindre fluide, nous ne tenons pas compte des ondes géométriques dans le calcul de la pression diffusée par le cylindre élastique.

Quatre types d'ondes circonférentielles sont mises en évidence et pour des fréquences réduites comprises entre 1 et 800 : les ondes de Brekhovskikh, Rayleigh, Stoneley et Franz. Elles semblent être suffisantes

pour décrire la diffusion acoustique, dès lors que l'on connaît l'influence des ondes géométriques.

Le tracé des trajectoires des pôles associés aux ondes circonférentielles se fait en identifiant pour chaque fréquence le type de développement asymptotique utilisé. Ceci nous permet de déterminer les domaines de fréquence où la T.G.D. est en toute rigueur applicable. Il faut ainsi atteindre des fréquences réduites supérieures à 300 pour vérifier l'ensemble des hypothèses. Numériquement il suffit d'avoir une fréquence réduite supérieure à 10 pour que l'erreur sur le calcul par développement asymptotique soit négligeable.

Parallèlement à la détermination des zones de développements asymptotiques, nous obtenons les trajectoires des 16 premières ondes circonférentielles pour des fréquences réduites comprises entre 1 et 800 : l'onde Rayleigh, les sept premières ondes de Brekhovskikh, l'onde de Stoneley ainsi que les sept premières ondes de Franz.

Le calcul de la pression due à ces ondes et à l'onde réfléchie tend à montrer qu'elles sont suffisantes pour représenter le phénomène physique en dehors des zones identifiées au préalable dans l'étude effectuée avec un cylindre fluide. L'utilisation de développement asymptotique pour calculer la pression due à l'onde réfléchie entraîne une erreur numérique au voisinage de l'angle correspondant au changement de zone pour l'onde de Rayleigh. Nous retrouvons par cette erreur le fait que pour une certaine incidence l'onde réfléchie compense exactement l'onde de Rayleigh.

Ayant dégagé dans le cas du cylindre les limites numériques de la modélisation employée, l'étude du tube élastique permet d'introduire dans le calcul de la pression diffusé l'influence des ondes géométriques. Pour cela, nous établissons l'expression de la pression résultante du passage d'une onde

géométrique à travers le tube. Il est nécessaire de tenir compte de toutes les ondes réalisant au plus 19 réflexions à l'intérieur du tube avant de ressortir. L'erreur sur la pression commise en s'arrêtant à l'influence de ces 19 ondes est inférieure à 10%.

L'obtention de la pression due à une onde géométrique est réalisée en considérant que les lois de Descartes, mises en évidence dans l'étude d'un cylindre élastique sont encore vérifiées ici. Par des considérations purement géométriques nous calculons les coefficients associés aux trajets de chaque type d'ondes à l'intérieur du tube.

Pour étudier les ondes circonférentielles, nous reprenons les trajectoires obtenues pour le cylindre élastique et nous *creusons* ce cylindre. Nous obtenons ainsi le comportement des ondes circonférentielles en fonction de l'épaisseur du tube. Pour un rapport de rayons de 0.9, nous suivons ensuite le comportement de ces ondes en fonction de la fréquence.

L'étude en fonction du rapport des rayons montre que l'onde de Stoneley est bien totalement différente des ondes de Franz. De même, nous pouvons suivre l'évolution de l'onde de Rayleigh par rapport à celle des ondes de Brekhovskikh.

La recherche de ces trajectoires utilise des développements asymptotiques. Si nous voulons respecter en toute rigueur la théorie, il n'est pas possible d'utiliser ces développements pour calculer la pression diffusée par le tube. Pourtant numériquement l'erreur effectuée est minime.

L'ensemble de ces résultats nous permet de conclure que la T.G.D. est relativement intéressante à utiliser pour modéliser la réponse acoustique d'un objet cylindrique. Elle permet de concevoir la propagation d'une onde à la surface de l'objet. La pression diffusée n'est plus conçue

comme un tout mais comme la somme de pressions dues à des ondes géométriques ou circonférentielles.

Le domaine de validité de cette théorie est en toute rigueur relativement restreint. Pourtant numériquement il est possible d'appliquer cette théorie dès que la fréquence réduite est supérieure à 10.

Les limites de cette théorie résident dans le calcul des ondes géométriques et dans la discontinuité introduite lors de l'utilisation de la transformation d'Imai.

En effet, lorsque l'objet est un tube, il faut tenir compte d'un nombre considérable d'ondes géométriques pour obtenir un résultat satisfaisant. De plus, les calculs nécessaires à l'obtention de la contribution de ces ondes sont relativement lourds à effectuer.

La discontinuité introduite lors de l'utilisation de la transformation d'Imai est gênante. Il serait intéressant de recalculer au voisinage d'un pôle la pression diffusée en utilisant une méthode du col adaptée à ces nouvelles conditions.

Avant d'approfondir cette démarche il faudrait comparer les courbes de la pression diffusée par un objet cylindrique avec des courbes expérimentales. En effet, il n'est pas nécessaire d'alourdir la théorie par un surcroît de détails s'il n'est pas possible de les distinguer expérimentalement.

Afin de construire un modèle simple à utiliser, nous établissons une relation liant le résidu associé à un pôle avec la partie imaginaire de ce pôle. L'utilisation de cette relation permettrait par la suite de limiter considérablement le calcul de la pression diffusée. Il serait ainsi possible de calculer cette pression sans qu'il soit nécessaire d'introduire les fonctions cylindriques. Ceci nous permettrait d'utiliser nos résultats dans des modèles

plus complexes (associations de différents solides par exemple) en limitant les temps de calculs.

La propagation à la surface d'un cylindre ne suivant pas uniquement une direction orthogonale à l'axe de ce dernier, nous démontrons qu'il existe des ondes se propageant à la surface d'un objet cylindrique et de direction l'axe du cylindre : les ondes de flexion, et les ondes associées au mode $n=0$. Nous trouvons que la première onde de flexion, notée F10, a un comportement voisin de l'onde de Stoneley. Les ondes F11, F23 et F21 ont été retrouvées expérimentalement. L'onde F11 est la première onde guidée hélicoïdale. L'onde F12 est une onde de type ℓ .

Un lien existe entre ces ondes et les ondes circonférentielles dès lors que l'on étudie ce qu'elles deviennent dans le cas limite où elles ne se propagent plus suivant l'axe du cylindre. Nous montrons ainsi que les ondes B_3 , B_4 , B_5 et B_7 correspondent à des ondes de torsion, que les ondes B_2 et B_6 correspondent aux deux ondes radiales L03 et L06.

D'autre part, nous étudions le comportement des ondes L01 et L02. Ces ondes *intervertissent* leur comportement pour un tube de rapport des rayons compris entre 0.62 et 0.64 lorsque le milieu intérieur est de l'air et compris entre 0.64 et 0.66 lorsque le milieu intérieur est de l'eau.

Lorsque le tube devient excessivement fin et pour l'onde L02, le tube devient semblable à une barre infinie aux très basses fréquences tout en restant semblable à une plaque pour de très faibles épaisseurs du tube.

La suite logique de ce travail serait d'étudier la propagation d'ondes à la surface d'un objet cylindrique et cela indépendamment de la direction de propagation de ces ondes. Nous pourrions ainsi établir les

relations complètes entre les différentes ondes se propageant à la surface d'un objet cylindrique...

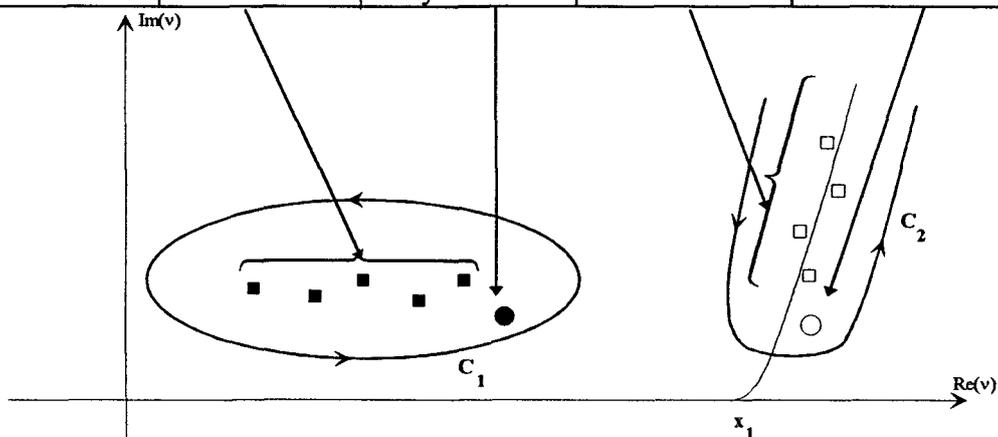
ANNEXE A

**Dénominations des ondes
circonférentielles**

DENOMINATION DES DIFFERENTES ONDES SUIVANT LE TYPE D'INTERFACE :

Nous écrivons en gras la dénomination adoptée dans les chapitres 1 à 4.

type d'interface	ondes de type ℓ_1 ou ondes de surface externes notées ℓ_1		ondes de type ℓ_2 ou ondes de surface internes ou onde rampantes notées ℓ_2	
fluide/ fluide	ondes de Wait notées W_i ($i \in \{1,2,\dots,N\}$)		ondes de Franz notées F_i ($i \in \mathbb{N}^*$)	l'onde F_1 est très proche de l'onde de Stoneley du cylindre élastique
solide/ fluide	ondes de Brekhovskik h ou de galerie à écho ou <i>whispering gallery</i> notées B_i	onde de Rayleigh	ondes de Franz notées F_i	onde de Stoneley ou onde de Scholte - Stoneley
fluide/ solide/ fluide	ondes de type ℓ_1 ondes $\ell=2,3,..$	onde $\ell=1$ l'onde $\ell=1$ correspond à l'onde de rayleigh dans le cas d'un cylindre.	ondes de Franz notées F_i	onde de Stoneley notée $\ell=0$



position des pôles correspondant aux ondes circonférentielles

ANNEXE B
Méthode du col

I INTRODUCTION

Nous présentons ici les grandes lignes de la "méthode du col". Cette méthode permet de donner le développement asymptotique de certaines fonctions à variable réelle définies par intégrale. Ces fonctions se présentent sous la forme :

$$(B.1) \quad I: \zeta \mapsto I(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} e^{\zeta w(z)} \phi(z) dz$$

Nous insistons particulièrement sur les hypothèses mathématiques nécessaires à l'application de cette méthode.

II HYPOTHESES

Pour faciliter la démonstration; nous décomposons la fonction à variable complexe w :

$$(B.2) \quad \begin{aligned} w(z) &= U(z) + iV(z) = u(x, y) + iv(x, y) \\ &\text{avec } U \text{ et } V \text{ les parties réelle et imaginaire de } w, \\ &u \text{ et } v \text{ deux fonctions réelles} \\ &\text{et } z = x + iy \end{aligned}$$

Les hypothèses sur la fonction w sont les suivantes :

- Il est possible de définir la dérivée w' de la fonction w par rapport à la variable complexe z . Plus précisément, les fonctions u et v vérifient le système d'équations :

$$(B.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Elles sont de plus à dérivées partielles continues ;

- Il existe un nombre complexe $z_0 = x_0 + iy_0$ pour lequel la fonction w' s'annule ;

- $U''(z_0) < 0$;

- la fonction u décroît autour du point d'affixe z_0 très rapidement (le développement limité en x au voisinage de x_0 de la fonction u est de la forme $u(x, y) \approx u(x_0, y) - k(y)x^2$)

Les hypothèses sur le contour d'intégration C sont :

- Le contour C est défini au voisinage du point d'affixe z_0 par l'équation :

$$(B.4) \quad v(x, y) = \text{constante}$$

- Il est possible de déformer le contour C pour qu'il contienne le point d'affixe z_0 .

Nous supposons de plus les fonctions w et ϕ décomposables en série entière.

III. ELEMENTS CLES DE LA DEMONSTRATION¹

Soit S la surface d'équation $u = u(x, y)$ dans l'espace (x, y, u) .

Comme w est dérivable par rapport à z , nous pouvons écrire :

$$(B.5) \quad w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Comme $w'(z_0) = 0$, le point $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ est un point de la surface S où le plan tangent est horizontal.

Comme les dérivées partielles de la fonction u sont continues, $\Delta u = 0$. Le point $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ est ni un minimum ni un maximum de S : c'est un point selle.

D'après le système d'équation (B.3), les courbes d'équation $u = \text{constante}$ et $v = \text{constante}$ sont orthogonales. Les courbes d'équation $v = \text{constante}$ sont donc les lignes de plus grandes pentes de la surface S . Plus particulièrement, la courbe d'équation $v = v(x_0, y_0)$ est la courbe de plus grande pente passant par le point selle.

Comme $U''(z_0) < 0$, la fonction U possède un maximum local en z_0 . Ainsi, comme nous recherchons une expression asymptotique de la fonction I , nous supposons ζ suffisamment grand pour que le facteur $e^{\zeta w}$ décroissent très rapidement au voisinage du point selle et suivant la ligne de plus grande pente $v = \text{constante}$.

Comme la fonction U décroît rapidement au voisinage du point selle, et que v est constant sur le contour d'intégration, ce dernier aura pour équation :

¹ Leonid M. Brekhovskikh, *Waves in layered media*, pp. 245-250, 1960.

M. Lavrentiev, B. Chabat, *Méthodes de la Théorie des Fonctions d'une Variable Complexe*, Editions MIR, traduction française, p. 485 et suivantes, 1977.

$$(B.6) \quad w(z) = w(z_0) - s^2$$

avec $s \in \mathbf{R}$.

s est l'abscisse curviligne comptée à partir du point selle et correspondant à un point de la ligne de plus grande pente.

Le terme $I(\zeta)$ s'écrit avec cette transformation :

$$(B.7) \quad I(\zeta) = e^{\zeta w(z_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta s^2} \phi(z) \frac{dz}{ds} ds$$

Comme ϕ et w sont décomposables en série entière, et comme ζ est supposé suffisamment grand, nous pouvons écrire :

$$(B.8) \quad I(\zeta) = e^{\zeta w(z_0)} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta s^2} \Phi^{(n)}(0) \frac{s^n}{n!} ds$$

avec $\Phi(s) = \phi(z) \frac{dz}{ds}$

Comme

$$(B.9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{\zeta}} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta s^2} s^2 ds = \sqrt{\frac{\pi}{\zeta^3}},$$

l'équation (B.8) devient :

$$(B.10) \quad I(\zeta) \approx e^{\zeta w(z_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\zeta}} \left[\Phi(0) + \frac{1}{4\zeta} \Phi''(0) + \dots \right]$$

IV. CALCUL DES PREMIERS TERMES DU DEVELOPPEMENT EN SERIE DE LA FONCTION Φ

Connaissant le développement en série entière de w et l'équation

(B.6), nous pouvons écrire :

$$(B.11) \quad -s^2 = -Az^2 + Bz^3 + Cz^4 + \dots$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} -A = -\frac{1}{2} w''(z_0) \\ B = \frac{1}{6} w'''(z_0) \\ C = \frac{1}{4!} w^{(4)}(z_0) \\ \dots \end{array} \right.$

Si nous considérons z comme une fonction de s décomposable en

série entière, nous pouvons écrire :

$$(B.12) \quad z = a_0 s \left(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots \right)$$

Les équation (B.11) et (B.12) nous permettent de connaître les expressions des coefficients a_i ($i \in \mathbb{N}$). Nous obtenons pour les trois premiers termes :

$$(B.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2} w''(z_0)}} \\ a_1 = \frac{w'''(z_0)}{12 \sqrt{-\frac{1}{2} w''(z_0)}} \\ a_2 = \frac{5}{8} \left(\frac{w'''(z_0)}{\sqrt{-\frac{1}{2} w''(z_0)}} \right)^2 - \frac{1}{24} \frac{w^{(4)}(z_0)}{w''(z_0)} \end{array} \right.$$

D'après l'équation (B.6),

$$(B.14) \quad \frac{dz}{ds} = \frac{-2s}{w'(z)}$$

Par définition, $\Phi(s) = \phi(z) \frac{dz}{ds}$. Connaissant l'équation (B.14),

l'expression de Φ devient :

$$(B.15) \quad \Phi(s) = \frac{-2s\phi(z)}{w'(z)}$$

En prenant pour développement en série de la fonction ϕ ,

$$(B.16) \quad \phi(z) = \phi(z_0) \left[1 + Pz + Qz^2 + \dots \right],$$

avec $P = \frac{\phi'(z_0)}{\phi(z_0)}$, $Q = \frac{\phi''(z_0)}{2\phi(z_0)}$, ...

nous obtenons pour la fonction Φ :

$$(B.17) \quad \Phi(s) = -2s\phi(z_0) \frac{1 + Pz + Qz^2 + \dots}{-2Az + 3Bz^2 + 4Cz^3 + \dots}$$

A partir des équations (B.12), (B.13) et (B.17), nous obtenons

les premiers termes du développement en série entière de la fonction Φ :

$$(B.18) \quad \Phi(s) = \frac{\phi(z_0)}{\sqrt{A}} \left[1 + \left(\frac{P}{\sqrt{A}} + \frac{B}{A^{\frac{3}{2}}} \right) s + \left(\frac{Q}{A} + \frac{7B^2}{8A^3} + \frac{3C}{2A^2} + \frac{3BP}{2A^2} \right) s^2 + \dots \right]$$

Connaissant les expressions des coefficients A, B, C, P et Q, nous obtenons :

$$(B.19) \quad \Phi(0) = \frac{\phi(z_0)}{\sqrt{-\frac{1}{2}w''(z_0)}};$$

$$\Phi'(0) = \Phi(0) \left[-\frac{\phi'(z_0)}{\phi(z_0)w''(z_0)} + \frac{w^{(3)}(z_0)}{[w''(z_0)]^2} \frac{\phi'(z_0)}{\phi(z_0)} - \frac{5 [w^{(3)}(z_0)]^2}{12 [w''(z_0)]^3} + \frac{1 w^{(4)}(z_0)}{4 [w''(z_0)]^2} \right]$$

V. EXPRESSION ASYMPTOTIQUE DE L'INTEGRALE $I(\zeta)$

Si nous considérons uniquement le développement asymptotique au premier ordre de la fonction I, nous pouvons écrire :

$$(B.20) \quad I(\zeta) \approx e^{\zeta w(z_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\zeta}} \left[\frac{\phi(z_0)}{\sqrt{-\frac{1}{2}w''(z_0)}} \right]$$

Dans les sections utilisant la méthode du col, la fonction w peut s'écrire sous la forme $w(z) = if(z)$ avec f une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{R} . L'intégrale $I(\zeta)$ s'écrit dès lors :

$$(B.21) \quad I(\zeta) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\zeta}} \left[\frac{\phi(z_0)}{\sqrt{\varepsilon f''(z_0)}} \right] e^{i \left(\zeta f(z_0) + \varepsilon \frac{\pi}{4} \right)},$$

avec $\begin{cases} \varepsilon = 1 \text{ si } f''(z_0) > 0 \\ \varepsilon = -1 \text{ si } f''(z_0) < 0 \end{cases}$

ANNEXE C
Etude du résidu β

Lorsque nous étudions les ondes de Brekhovskikh, nous constatons que chaque courbe donnant la partie imaginaire d'un pôle en fonction de la fréquence réduite x présente de nombreuses similarités avec la courbe représentant l'évolution du résidu β en fonction de x_1 ¹ : minima pour des fréquences très voisines, comportement aux hautes fréquences identique. Seul l'échelle est différente.

¹ Figures 54 et 65.

I. EXPRESSION SIMPLIFIEE DU RESIDU β

Pour tenter d'expliquer ces analogies nous revenons à l'équation définissant la pression diffusée à partir de la fonction S_n restriction de la fonction S à l'ensemble des entiers naturels ¹ :

$$(C.1) \quad P_{\text{diff}} = \frac{P_0 e^{-i\omega t}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n i^n \{S_n(\omega, a) H_n^{(1)}(k_1 r) + H_n^{(2)}(k_1 r)\} \cos n\varphi$$

avec

$$S_n(\omega, a) = 1 + 2 \frac{D_n^{[1]}(\omega, a)}{D_n(\omega, a)}$$

et ε le facteur de Neumann défini par
$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}^*, \varepsilon_n = 2. \end{cases}$$

¹ Chapitre 1 paragraphe I.1.

Dans le cas du cylindre élastique, et en utilisant les propriétés de la matrice S dont S_n est un des éléments, Derem¹ décompose S_n en deux facteurs $S_n^{(*)}$ et $S_n^{(r)}$. $S_n^{(*)}$ renferme les pôles à variation rapide de S_n , $S_n^{(r)}$ correspond à la diffusion par un cylindre rigide ; elle est définie par :

$$(C.2) \quad S_n^{(r)}(x_1) = -\frac{H_n^{(2)}(x_1)}{H_n^{(1)}(x_1)}$$

Avec ces deux fonctions l'équation (C.1) devient :

$$(C.3) \quad P_{\text{diff}} = P_{\text{rig}} + P_{\text{rés}}$$

avec

$$P_{\text{rig}} = P_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \frac{S_n^{(r)}(x_1) - 1}{2} H_n^{(1)}(k_1 r) \cos n\varphi$$

et

$$P_{\text{rés}} = P_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \frac{S_n^{(*)}(x_1) - 1}{2} S_n^{(r)}(x_1) H_n^{(1)}(k_1 r) \cos n\varphi$$

Reprenant la définition des déterminants $D^{[1]}(v, x_1)$ et $D(v, x_1)$, Derem montre également que $S_n^{(*)}$ peut se mettre sous la forme :

$$(C.4) \quad S_n^{(*)}(x_1) = \frac{p_n(x_1) - q_n(x_1) + ir_n(x_1)}{p_n(x_1) - q_n(x_1) - ir_n(x_1)}$$

où p_n , q_n et r_n sont des fonctions réelles.

Par définition, une fréquence de résonance dans le mode d'indice "n" est la fréquence pour laquelle la fonction $S_n^{(*)}(x_1)$ devient numériquement très grande. Notée ici $x_1^{(*)}$, Elle est définie comme une solution de l'équation réelle :

$$(C.5) \quad p_n(x_1^{(*)}) - q_n(x_1^{(*)}) = 0$$

¹ A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson, in N. Gespa., pp. 247-249.

Au voisinage de l'une de ces fréquences, en réalisant un développement de Taylor limité au premier ordre on obtient :

$$(C.6) \quad \frac{p_n(x_1) - q_n(x_1)}{r_n(x_1)} \approx \frac{2}{\Gamma} \left(x_1^{(*)} - x_1 \right)$$

où Γ est appelée "largeur de la résonance".

En utilisant ce développement limité, $S_n^{(*)}(x_1)$ s'écrit :

$$(C.7) \quad S_n^{(*)}(x_1) \approx \frac{x_1 - x_1^{(*)} + i \frac{\Gamma}{2}}{x_1 - x_1^{(*)} - i \frac{\Gamma}{2}},$$

formulation dite de "Breit-Wigner"

Cette expression de $S_n^{(*)}(x_1)$ nous permet d'obtenir une valeur approchée des racines complexes du déterminant $D_n(\omega, a)$ dès lors qu'elles se situent au voisinage de la résonance $x_1^{(*)}$. Nous obtenons :

$$(C.8) \quad \omega_{n\ell} = \frac{c_1}{a} x_{n\ell} - i \frac{c_1}{a} \frac{\Gamma_{n\ell}}{2}$$

avec $x_{n\ell}$ la $\ell^{\text{ème}}$ résonance solution de l'équation (C.4)

et $\Gamma_{n\ell}$ la largeur de cette résonance.

Überall, Dragonette et Flax ont étudié la relation liant les trois premiers pôles de type ℓ à la fréquence de résonance définie pour un mode d'indice "n"¹. Ils démontrent que lorsque la partie réelle d'un de ces pôles devient entière il se produit une résonance. La condition $\text{Re}(v_\ell(x_1)) = n$, avec $n \in \mathbb{N}$, implique donc $x_1 = x_{n\ell}$. La $\ell^{\text{ème}}$ onde de surface de type ℓ correspond à la $\ell^{\text{ème}}$ résonance.

En revenant à l'interprétation géométrique donnée dans la première section paragraphe IV, ce résultat nous permet de considérer la résonance comme un phénomène physique dû à l'enroulement, autour du

¹ H. Überall, L.R. Dragonette, L. Flax, "Relation between creeping waves and normal modes of vibration of curved body", *J. Acoust. Soc. Am.*; **61**, pp.711-715, 1977.

cylindre et en sens opposé, de deux ondes de surface identiques. Lors de chacun des tours réalisés par ces ondes les maxima et minima de pression se produisent pour les mêmes valeurs angulaires. Nous obtenons bien une "mise en résonance" de l'objet cylindrique.

La pression $P_{rés}$ est, par définition, la pression résultante de la contribution de l'ensemble des résonances. Connaissant l'approximation faite sur la fonction $S_n^{(*)}$ au voisinage de l'une d'entre elles, l'expression de $P_{rés}$ devient :

$$(C.9) \quad P_{rés} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\ell} p_{n\ell}.$$

avec

$$p_{n\ell} = \varepsilon_n i^{n+1} \frac{\frac{\Gamma_{n\ell}}{2}}{x_{n\ell} - x_1 - i \frac{\Gamma_{n\ell}}{2}} S_n^{(r)}(x_1) H_n^{(1)}(k_1 r) \cos n\varphi P_0 e^{-i\omega t}$$

$p_{n\ell}$ est la pression diffusée par le cylindre pour des fréquences voisines de la $\ell^{\text{ème}}$ résonance associée au mode n.

D'autre part, nous connaissons l'expression de la pression due à une onde de surface¹. Elle s'écrit pour un angle d'observation voisin de l'angle nul :

$$(C.10) \quad p_{v_\ell} = -2\pi \frac{\cos v_\ell \varphi}{\sin \pi v_\ell} H_{v_\ell}^{(1)}(k_1 r) e^{-i \frac{\pi}{2} v_\ell} \beta(v_\ell, x_1) P_0 e^{-i\omega t}$$

Ainsi, lorsque la partie réelle du pôle v_ℓ devient égale à n, et pour $\varphi = 0$, nous pouvons identifier p_{v_ℓ} à $p_{n\ell}$ au voisinage de la fréquence de résonance².

¹ Equation (21)

² Comme le résidu β est indépendant de l'angle d'observation φ , nous établissons des relations entre ces deux pressions uniquement pour φ nul.

Les dénominateurs de ces deux pressions sont ainsi proportionnels. Au voisinage de cette fréquence, en réalisant un développement de Taylor limité au premier ordre le pôle ν_ℓ s'écrit :

$$(C.11) \quad \nu_\ell = n + i\tilde{\nu}_\ell + (x_1 - x_{n\ell}) \left. \frac{d(\tilde{\nu}_\ell + i\tilde{\nu}_\ell)}{dx_1} \right|_{x_1=x_{n\ell}}$$

Dès lors, l'expression de $\sin \pi \nu_\ell$ prend la forme approchée suivante :

$$(C.12) \quad \sin \pi \nu_\ell \approx (-1)^n \sin \pi \left(i\tilde{\nu}_\ell + (x_1 - x_{n\ell}) \left. \frac{d(\tilde{\nu}_\ell + i\tilde{\nu}_\ell)}{dx_1} \right|_{x_1=x_{n\ell}} \right)$$

Si nous supposons $\tilde{\nu}_\ell \ll \frac{1}{\pi}$ et $\left. \frac{d(\tilde{\nu}_\ell + i\tilde{\nu}_\ell)}{dx_1} \right|_{x_1=x_{n\ell}}$ bornée lorsque x tend

vers $x_{n\ell}$, nous obtenons dans un voisinage de la fréquence de résonance :

$$(C.13) \quad \sin \pi \nu_\ell \approx (-1)^n \pi \left(i\tilde{\nu}_\ell + (x_1 - x_{n\ell}) \left. \frac{d(\tilde{\nu}_\ell + i\tilde{\nu}_\ell)}{dx_1} \right|_{x_1=x_{n\ell}} \right)$$

Si nous supposons de plus que $\frac{d\tilde{\nu}_\ell}{dx_1} \gg \frac{d\tilde{\nu}_\ell}{dx_1}$, nous obtenons la relation

(C.17) au voisinage de la fréquence de résonance. (les courbes donnant le lieu des pôles confirment cette hypothèse¹).

$$(C.14) \quad x_{n\ell} - x_1 - i \frac{\Gamma_{n\ell}}{2} \approx x_{n\ell} - x_1 - \frac{i\tilde{\nu}_\ell}{\left. \frac{d\tilde{\nu}_\ell}{dx_1} \right|_{x_1=x_{n\ell}}}$$

Nous obtenons ainsi une expression de la largeur de résonance :

$$(C.15) \quad \frac{\Gamma_{n\ell}}{2} \approx \frac{\tilde{\nu}_\ell}{\left. \frac{d\tilde{\nu}_\ell}{dx_1} \right|_{x_1=x_{n\ell}}}$$

¹ Figure 18, 19, 52, 53, 90 et 91

En utilisant la relation liant les deux pressions et l'équation (C.15) l'expression approchée du résidu $\beta(v_\ell, x_1)$ au voisinage de la $\ell^{\text{ème}}$ résonance du mode n s'écrit :

$$(C.16) \quad \beta(v_\ell, x_1) \approx \frac{\varepsilon_n i^{n+1}}{-2\pi} e^{i\frac{\pi}{2}v_\ell} S_n^{(r)}(x_1) \frac{H_n^{(1)}(k_1 r)}{H_{v_\ell}^{(1)}(k_1 r)} (-1)^{n+1} \pi \tilde{v}_\ell$$

Lorsque l'observateur se situe loin de l'objet cylindrique nous utilisons l'approximation suivante :

$$(C.17) \quad e^{i\frac{\pi}{2}v_\ell} \frac{H_n^{(1)}(k_1 r)}{H_{v_\ell}^{(1)}(k_1 r)} \approx e^{-i\frac{\pi}{2}(n-2v_\ell)}$$

A l'ordre zéro en fonction de la fréquence, cette expression s'écrit d'après l'équation (C.11)

$$(C.18) \quad e^{i\frac{\pi}{2}v_\ell} \frac{H_n^{(1)}(k_1 r)}{H_{v_\ell}^{(1)}(k_1 r)} \approx i^n e^{-\pi \tilde{v}_\ell}$$

Nous obtenons ainsi une expression simple du résidu β au voisinage de la fréquence de résonance :

$$(C.19) \quad \beta(v_\ell, x_1) \approx i \frac{\varepsilon_n}{2} \tilde{v}_\ell e^{-\pi \tilde{v}_\ell} S_n^{(r)}(x_1)$$

Cette expression se fonde sur des résultats établis dans le cas du cylindre élastique. Afin d'utiliser l'équation (C.19) dans le cas du tube élastique nous devons préciser une hypothèse : la fonction S_n correspondant au déterminant établi pour le tube se décompose en deux fonctions $S_n^{(*)}$ et $S_n^{(r)}$ associées respectivement aux pôles à variation rapides et à ceux associés au fond non résonant. Tant que la rigidité du tube permet de l'assimiler en première approximation à un cylindre rigide, cette hypothèse est correcte.

En supposant le tube suffisamment rigide, nous pouvons utiliser l'ensemble des résultats démontrés précédemment.

II. INTERPRETATION DES RESULTATS NUMERIQUES

Pour vérifier numériquement les résultats obtenus précédemment, nous traçons, en fonction de la fréquence, les courbes décrites par le module et la phase du résidu β associé à chaque pôle de partie imaginaire faible devant $\frac{1}{\pi}$. Ces pôles sont essentiellement ceux correspondant aux ondes de type ℓ obtenus dans l'étude du cylindre fluide, du cylindre élastique ainsi que du tube élastique¹.

L'étude de ces courbes confirme la relation (C.19) tant que l'ensemble des hypothèses est vérifiée. Cette relation devient de moins en moins correcte lorsque la fréquence croît. En effet, la partie imaginaire de chaque pôle est élevée aux hautes fréquences. Dès lors qu'elle est supérieure à $\frac{1}{\pi}$ la relation (C.19) n'est plus correcte, seule l'allure générale du résidu est inchangée. Ainsi la valeur approchée du résidu β n'est correcte à aucune fréquence pour l'onde de Rayleigh ainsi que pour l'onde $\ell = 1$ du tube².

Afin de vérifier l'égalité $p_{v_\ell} = p_{n\ell}$ au voisinage des fréquences de résonances, nous représentons les pressions p_{v_ℓ} et $p_{n\ell}$ rétrodiffusées en fonction de la fréquence³. La première pression est obtenue par l'équation (C.10), la seconde par les équations (C.9) et (C.16) valables uniquement au voisinage de la fréquence de résonance. Les courbes obtenues confirment l'égalité entre les deux expressions de la pression dans la limite des hypothèses de l'étude. Elles confirment entre autre la présence de résonance lorsque la partie réelle du pôle est entière aussi bien pour le cylindre que le tube élastique.

¹ Figures C.1 à C.19.

² Figures C.5 à C.10.

³ Figure D.15 à D.19.

Lorsque la partie réelle du pôle est nulle l'égalité entre les deux expressions de la pression n'est plus vérifiée¹. Il semble numériquement y avoir exactement un rapport 2 entre $p_{v\ell}$ et $p_{n\ell}$. Aucune explication simple ne justifie ce rapport. Dans la première section, nous insistons sur l'établissement, au voisinage de l'origine, du contour d'intégration utilisé dans la transformation de Sommerfeld-Watson afin de montrer que le problème ne réside pas dans un mauvais calcul de ce contour. Par contre aucun résultat n'établit la valeur du fond non résonant au voisinage de l'origine ; nous pouvons envisager qu'au voisinage de l'origine le phénomène de résonance est plus complexe que lorsque la partie réelle du pôle est entière et strictement positive.

¹ Figure D.15.

ondes de Wait

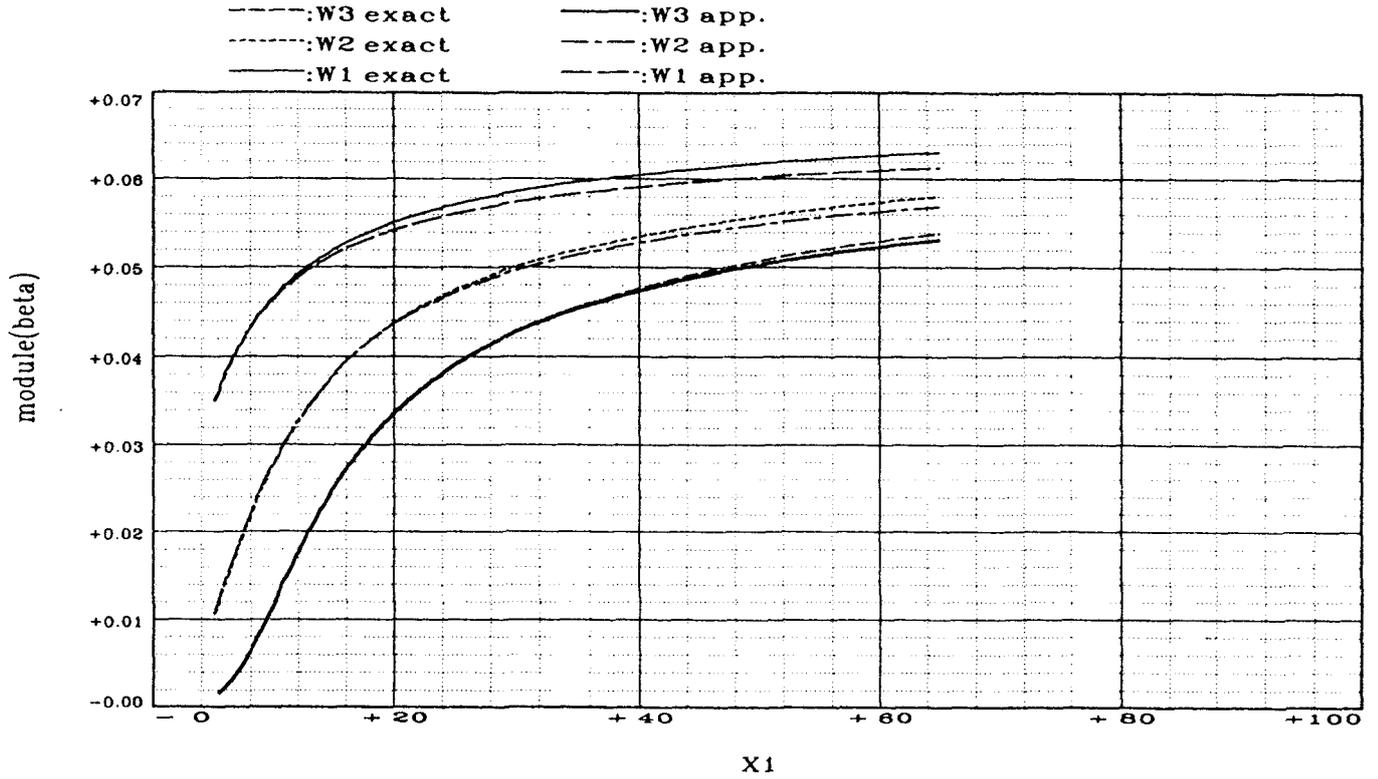


Figure C.1.

ondes de Wait

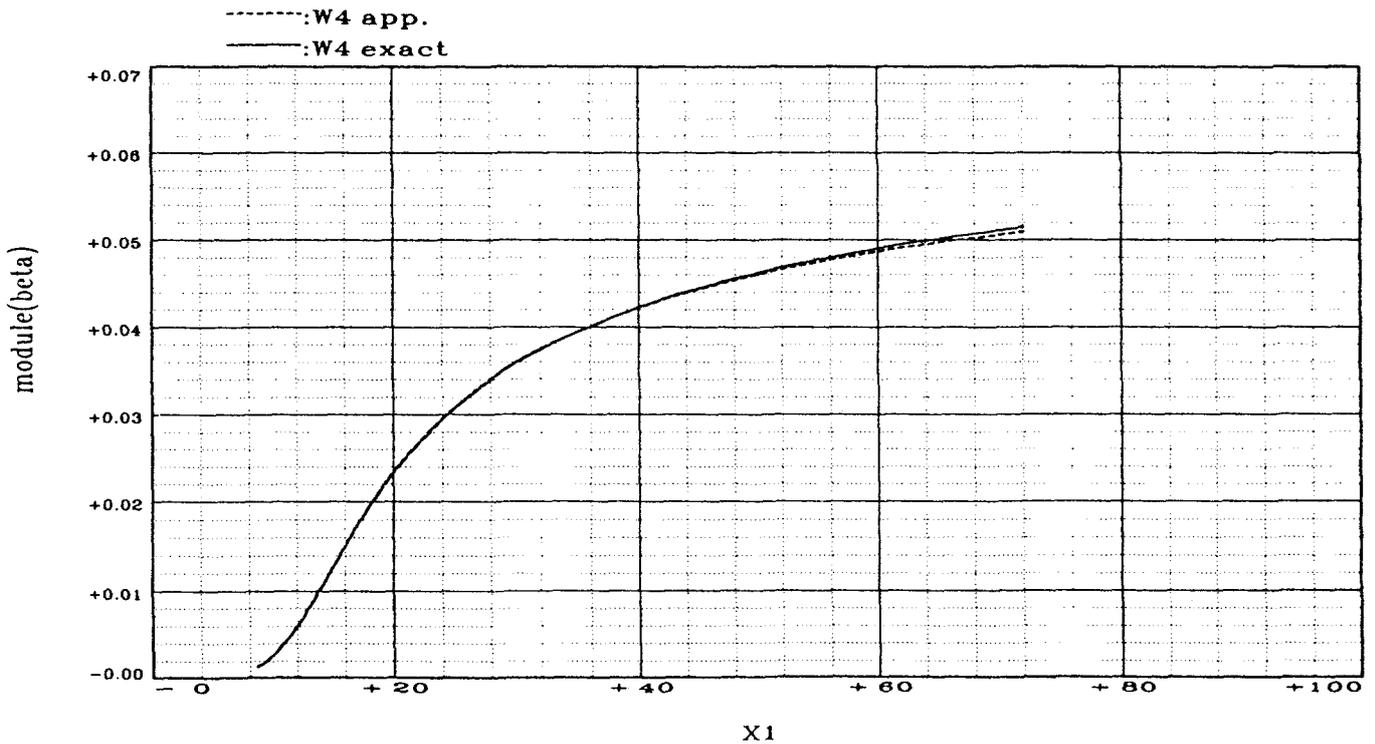


Figure C.2.

ondes de Wait

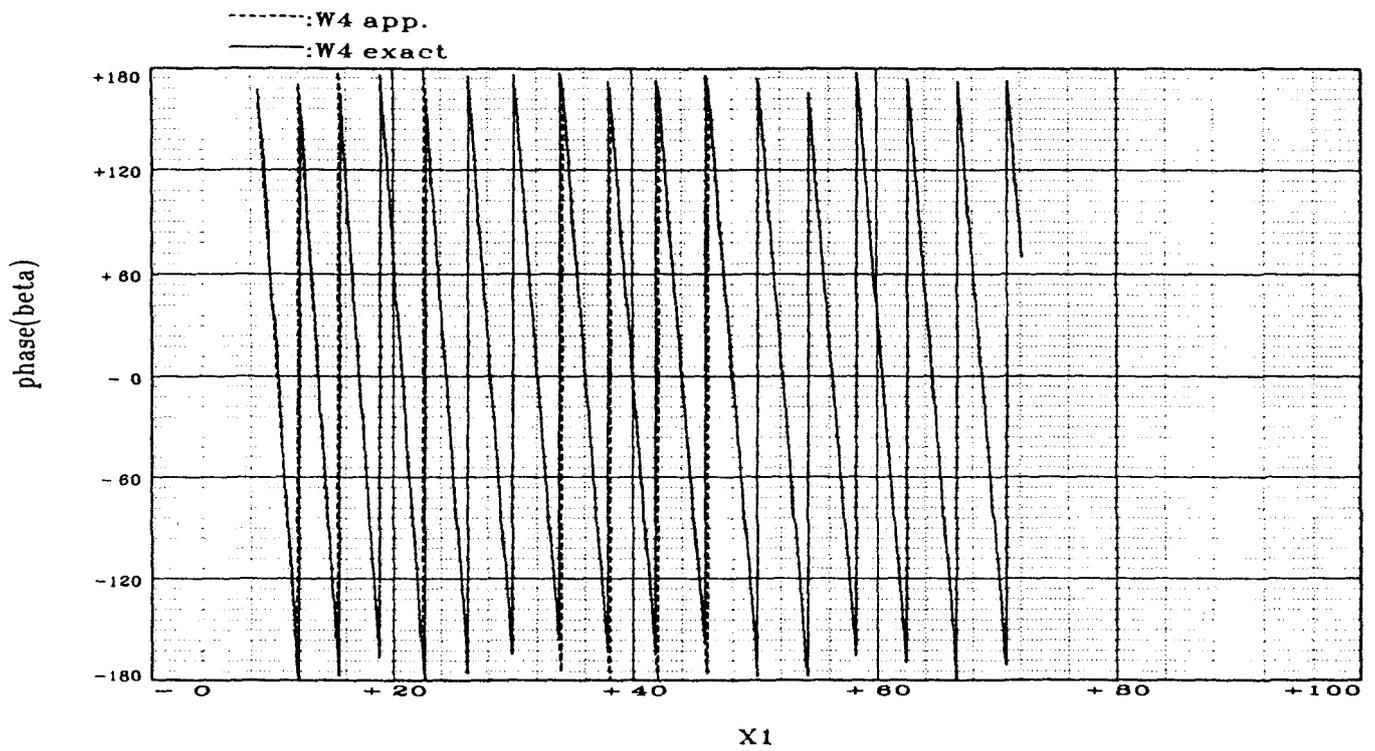


Figure C.3.

ondes de Brekhovskikh

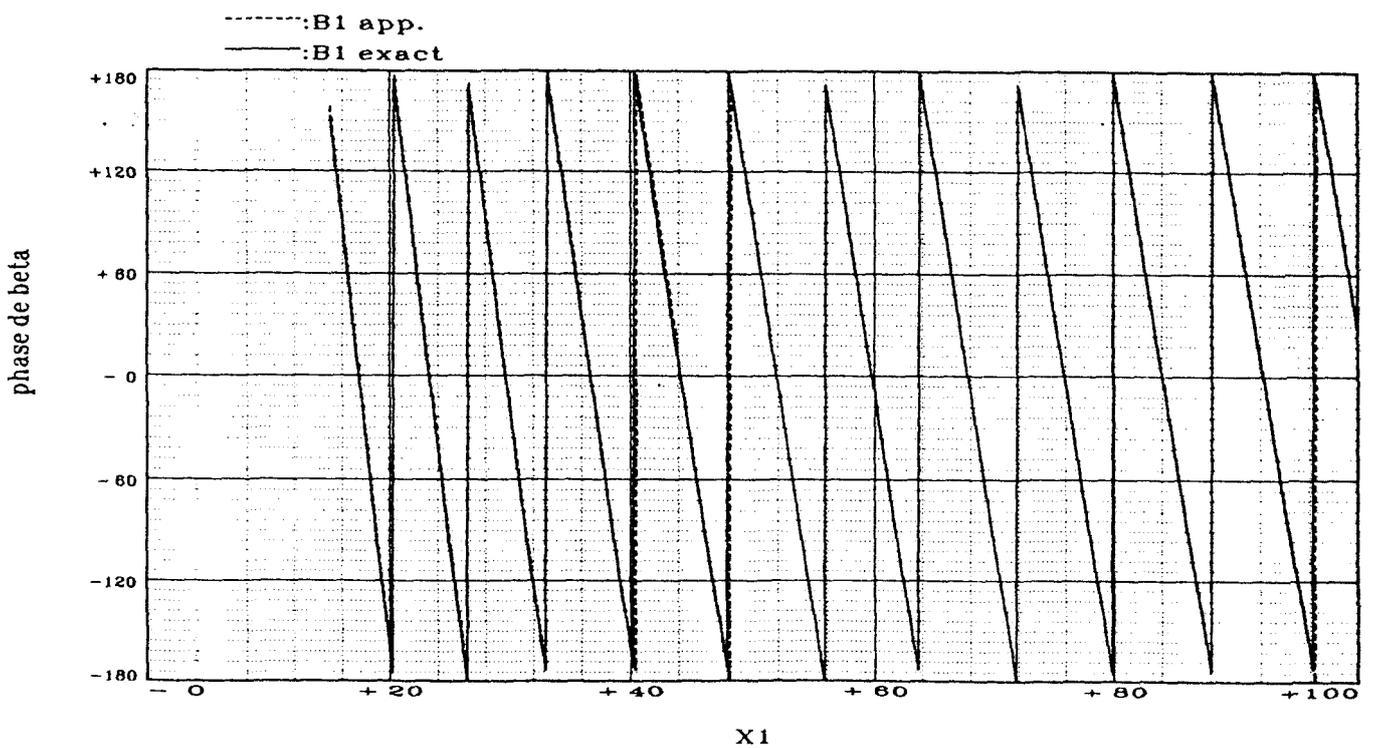


Figure C.4.

onde de Rayleigh

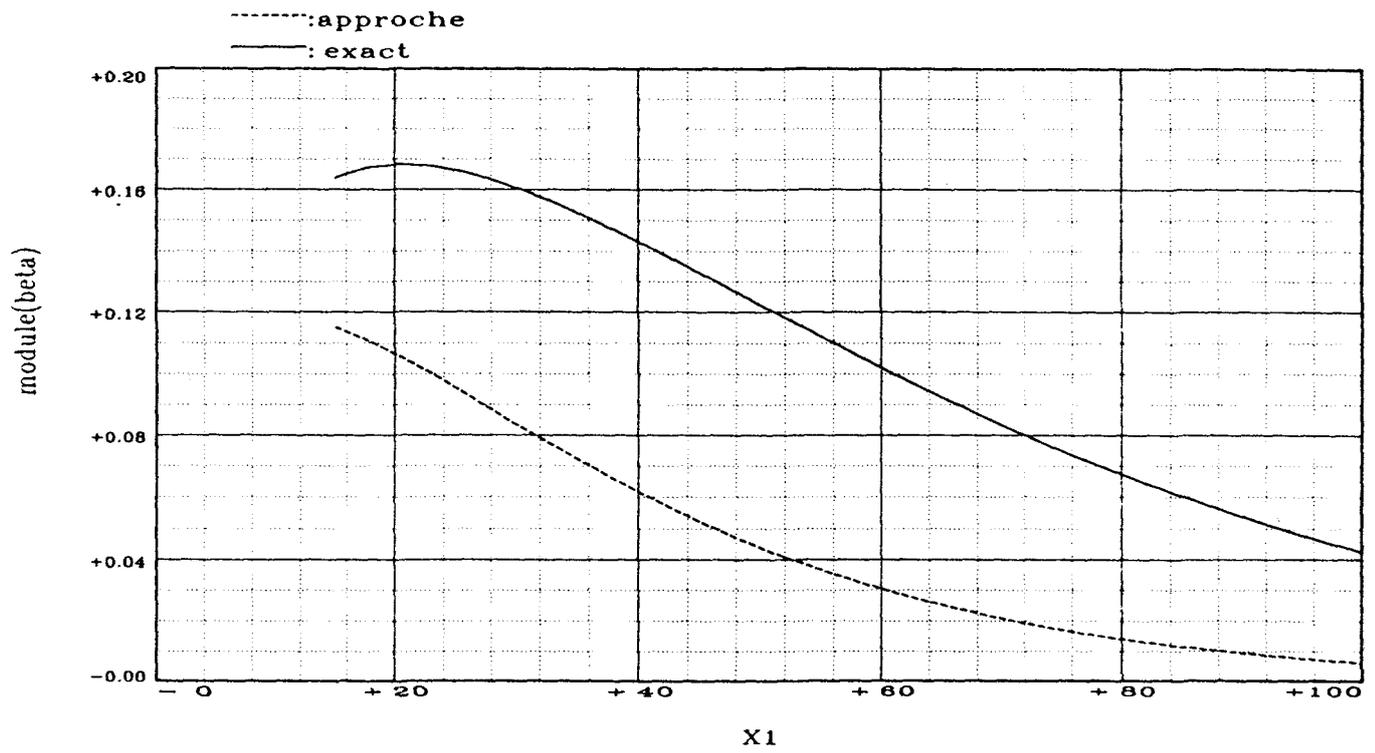


Figure C.5.

onde de Rayleigh

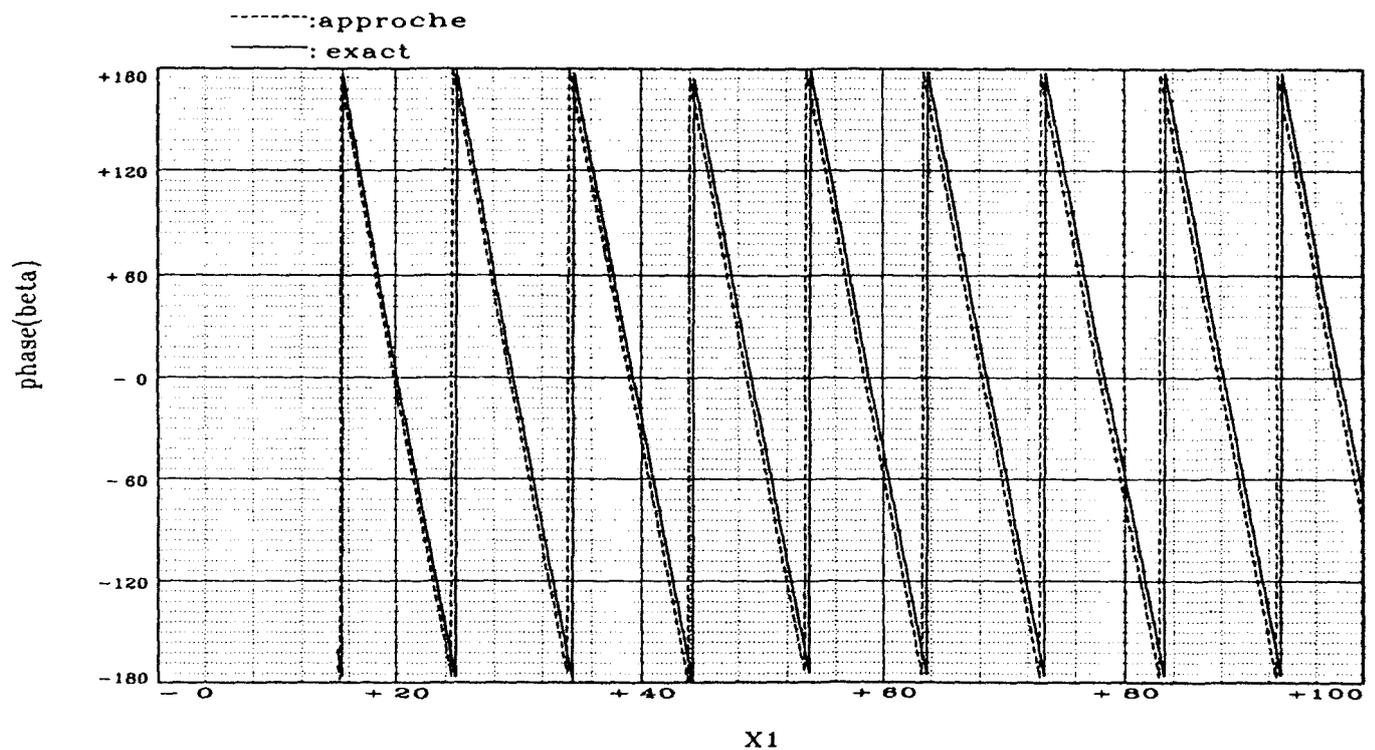


Figure C.6.

ondes de Brekhovskikh

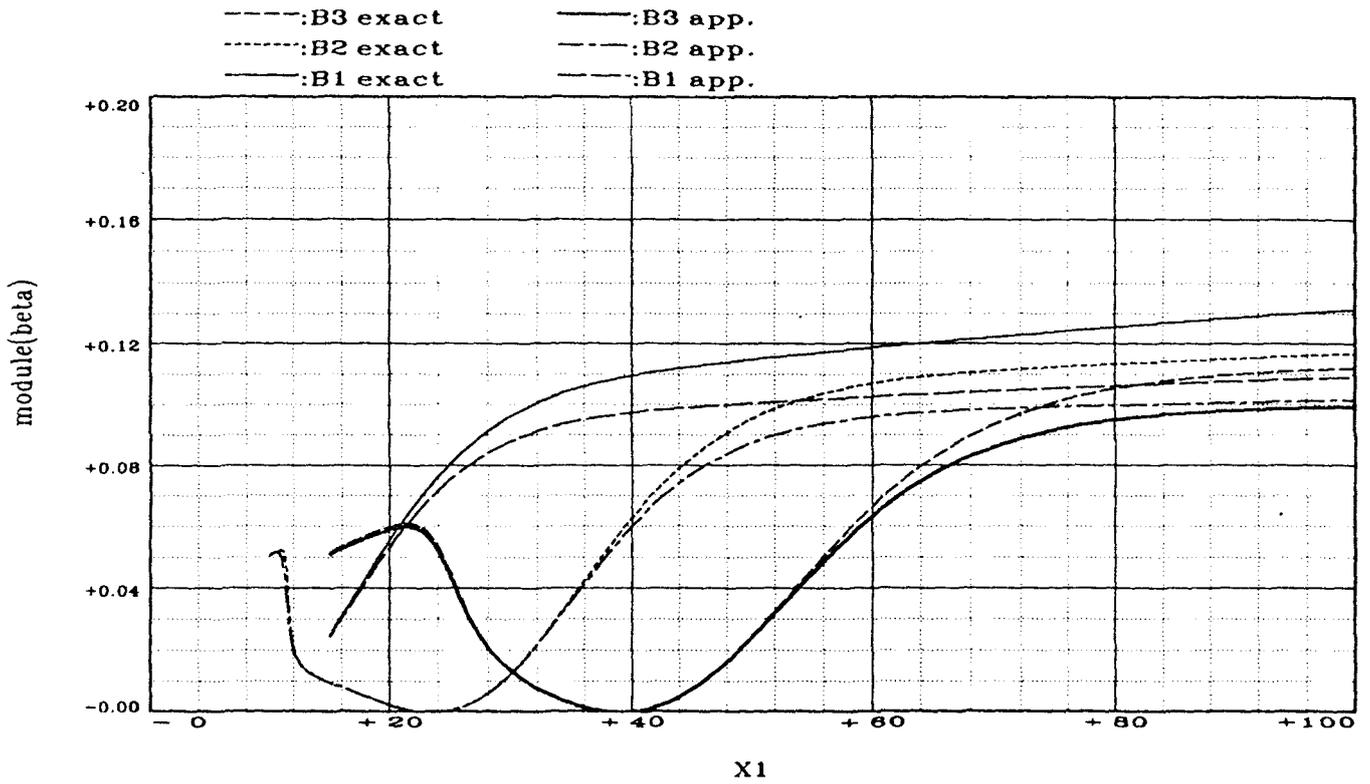


Figure C.7.

ondes de Brekhovskikh

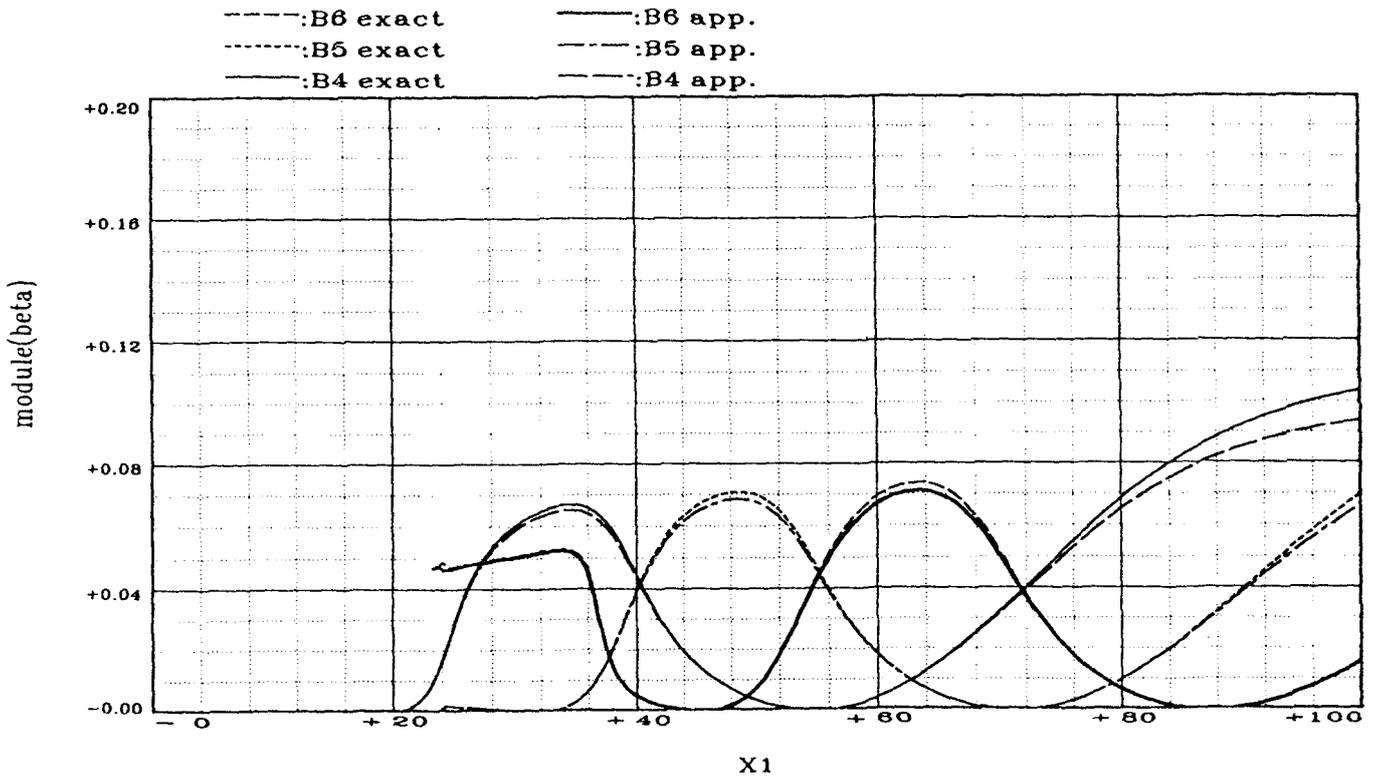


Figure C.8.

ondes de Brekhovskikh

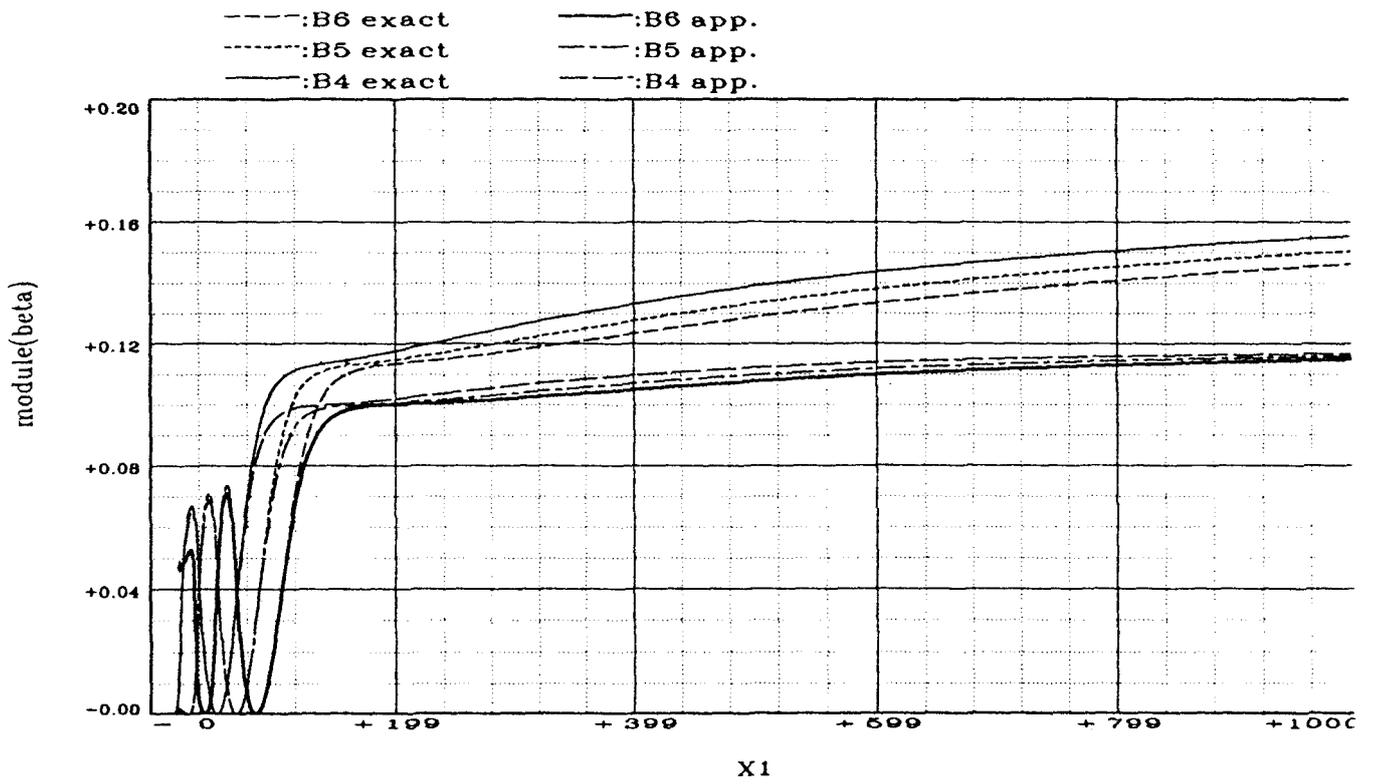


Figure C.9.

ondes de Brekhovskikh

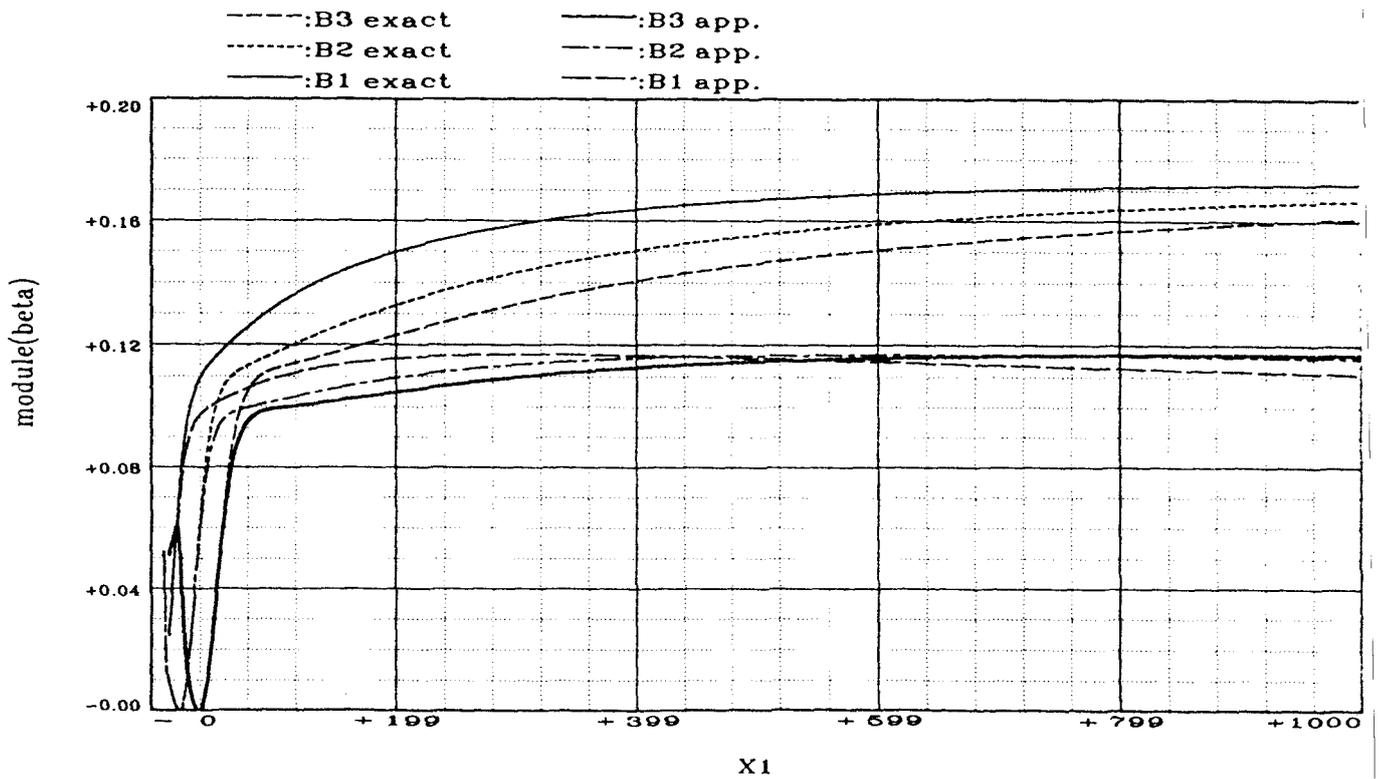


Figure C.10.

TUBE : onde $l = 1$

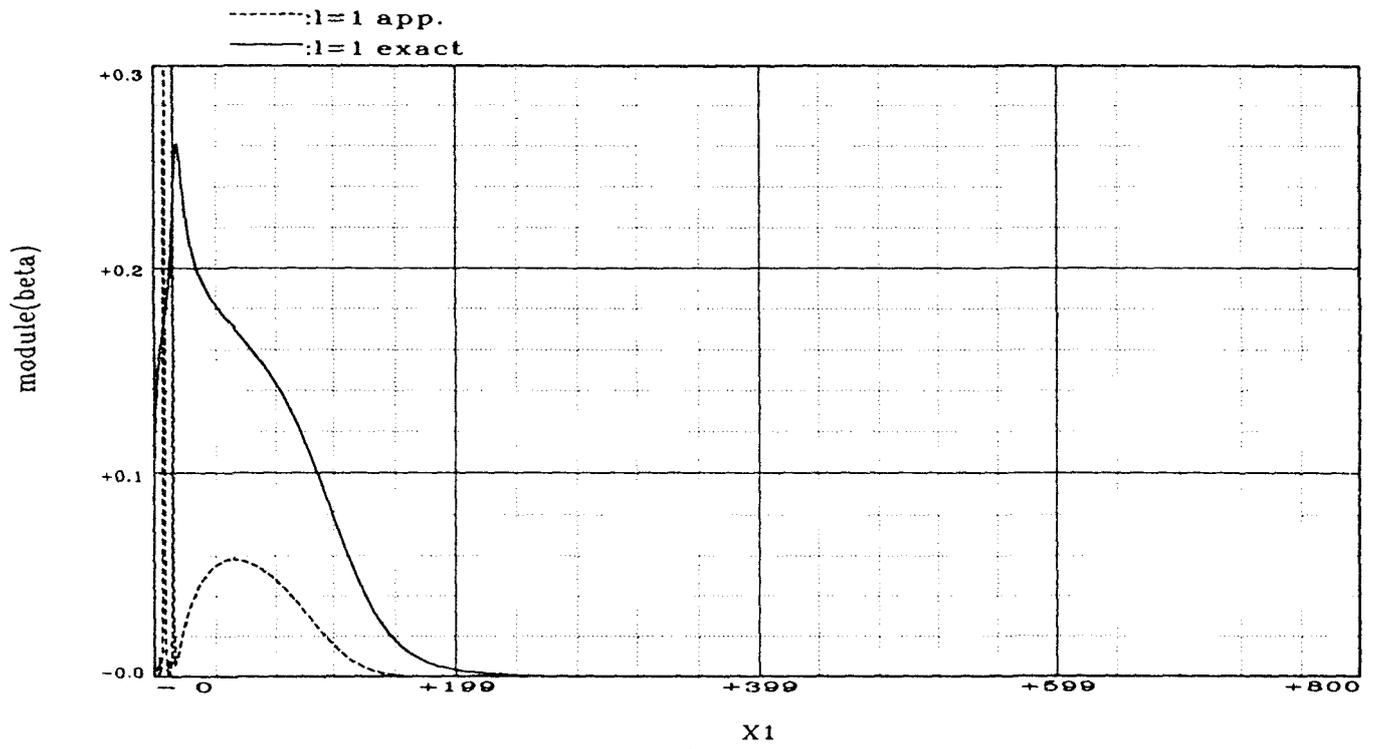


Figure C.11.

TUBE : onde $l = 1$

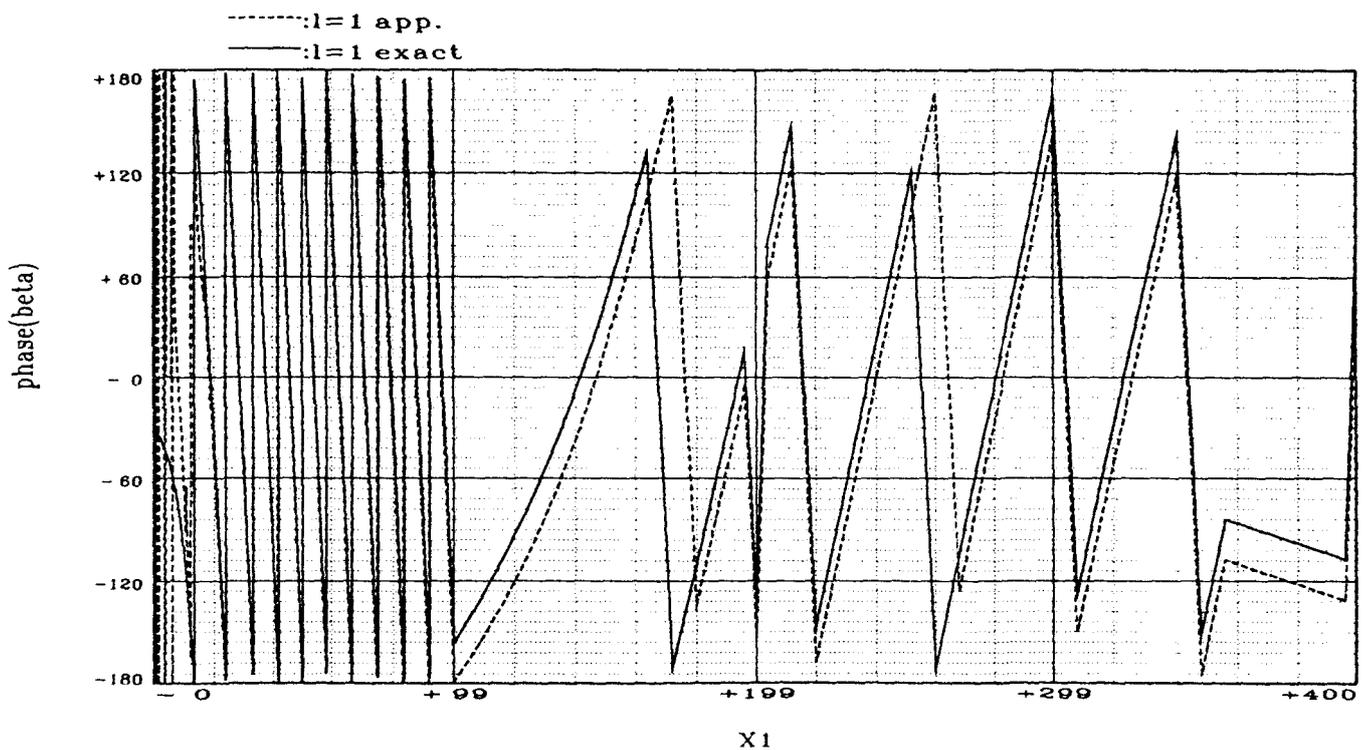


Figure C.12.

TUBE : onde $l = 2$

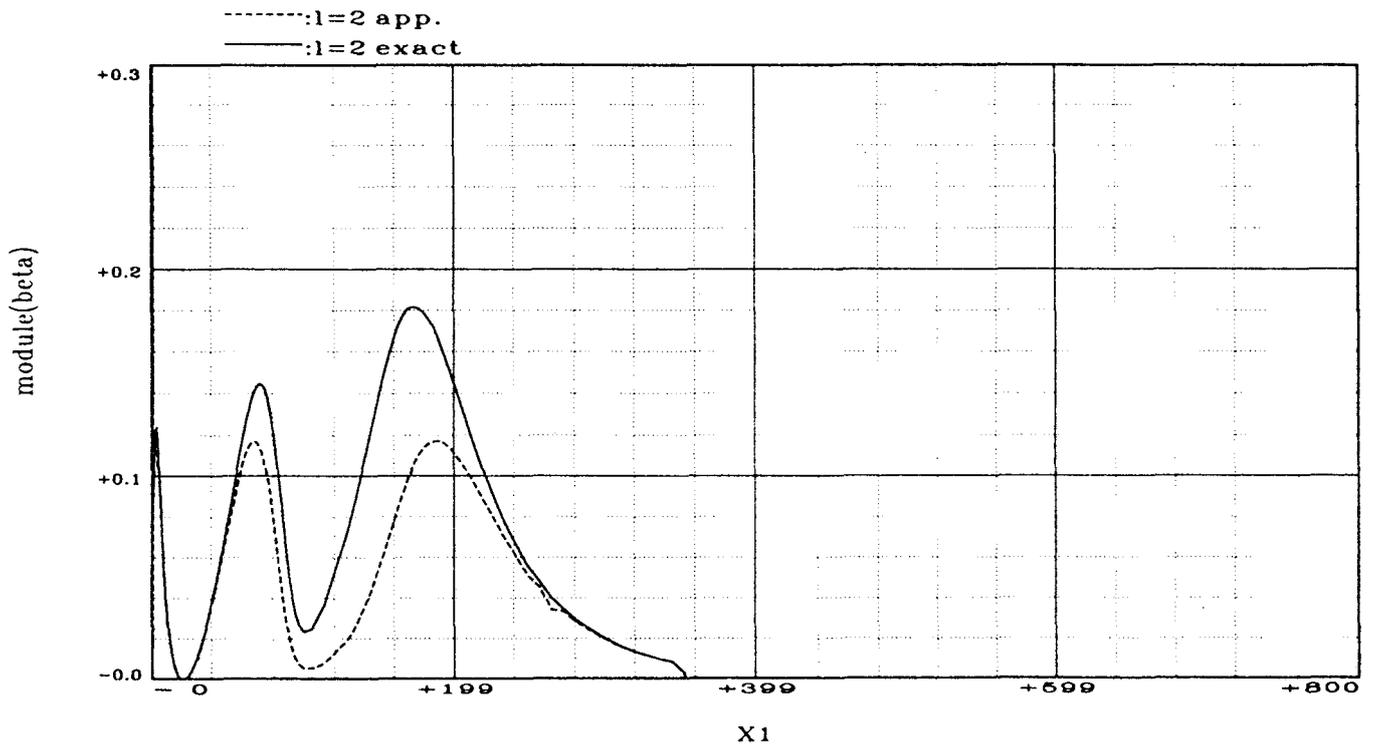


Figure C.13.

TUBE : onde $l = 3$

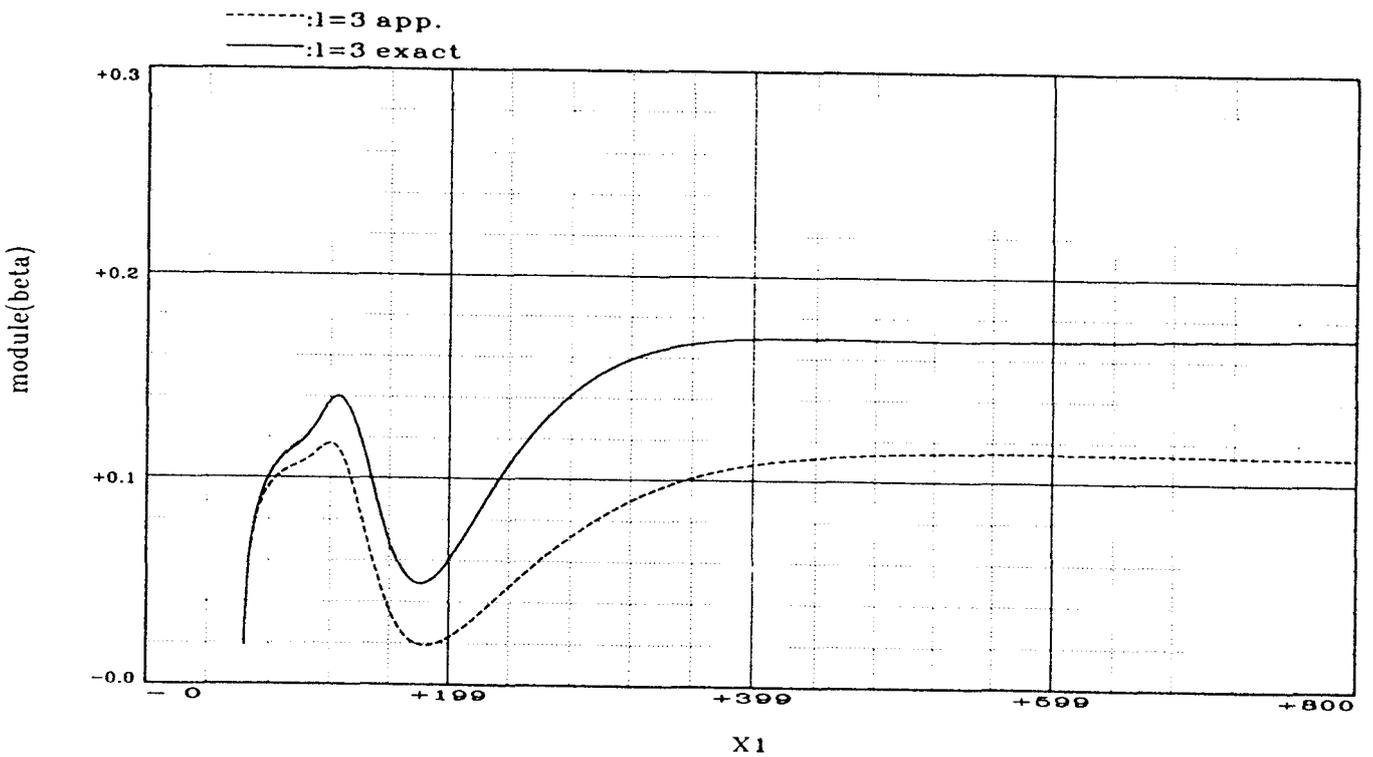


Figure C.14.

Cyl. fluide pres. en $P(r,0)$

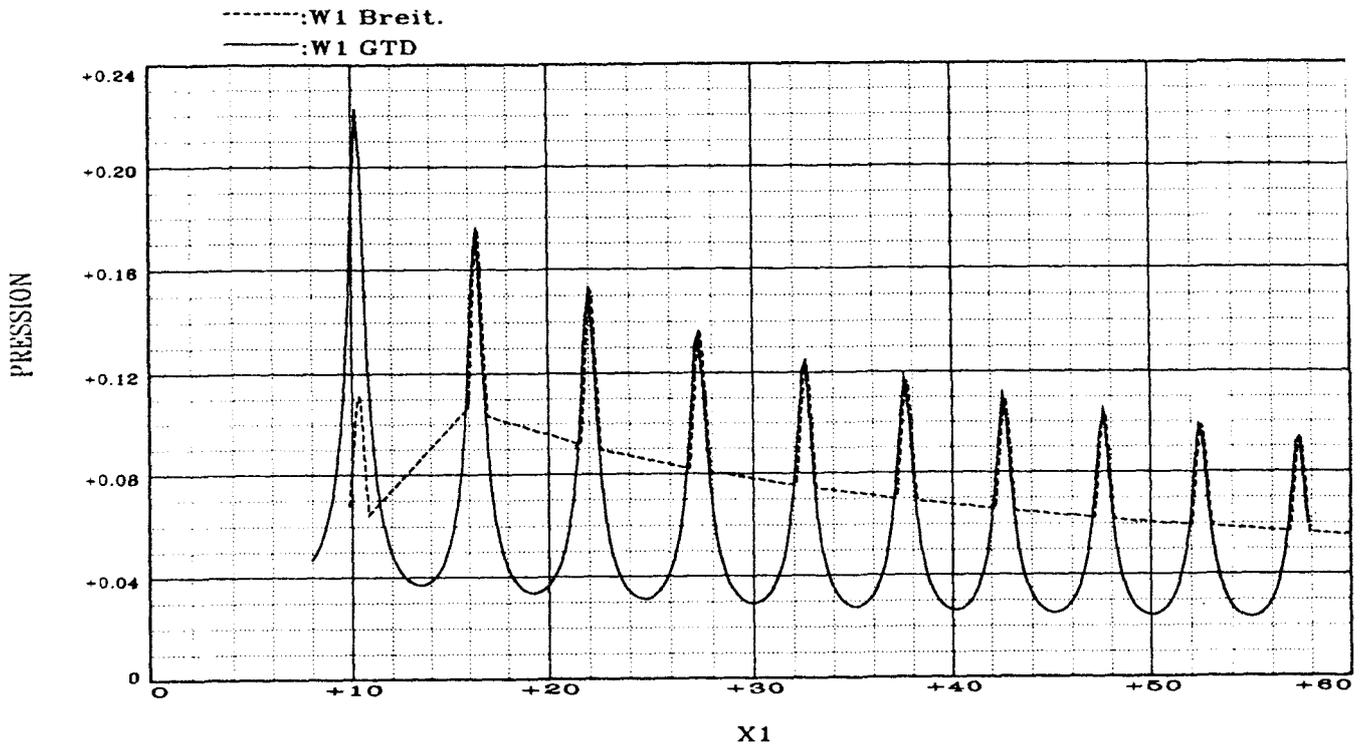


Figure C.15.

Tube elast. pres. en $P(r,0)$

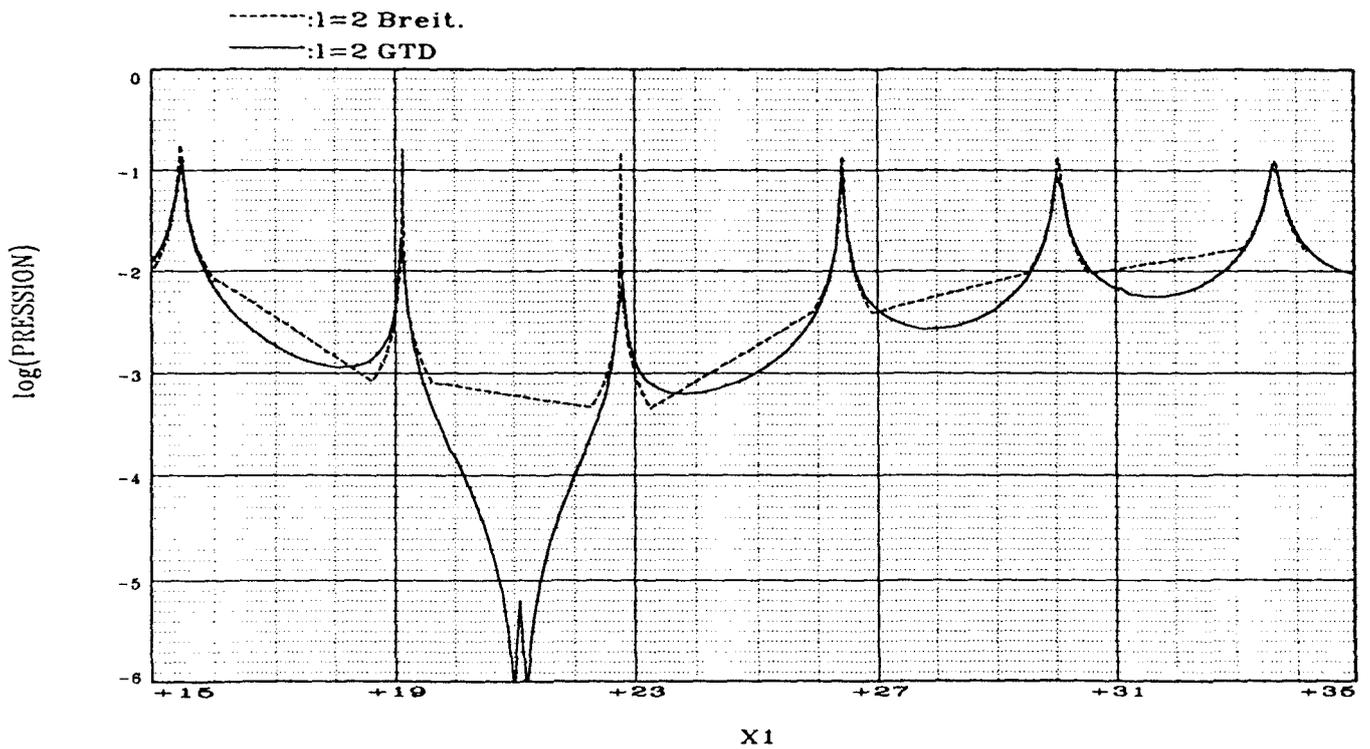


Figure C.16.

Cyl. elast. pres. en $P(r,0)$

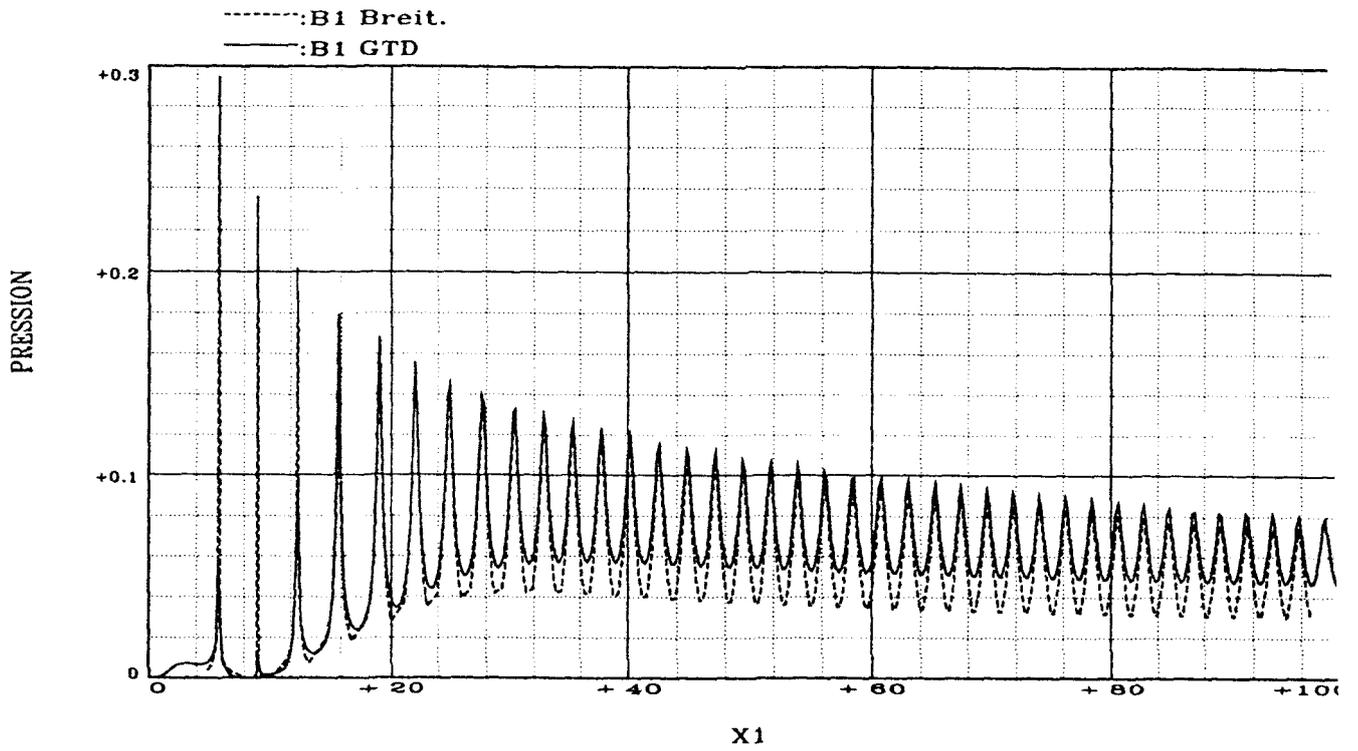


Figure C.17.

cyl. elast. pres. en $P(r,0)$

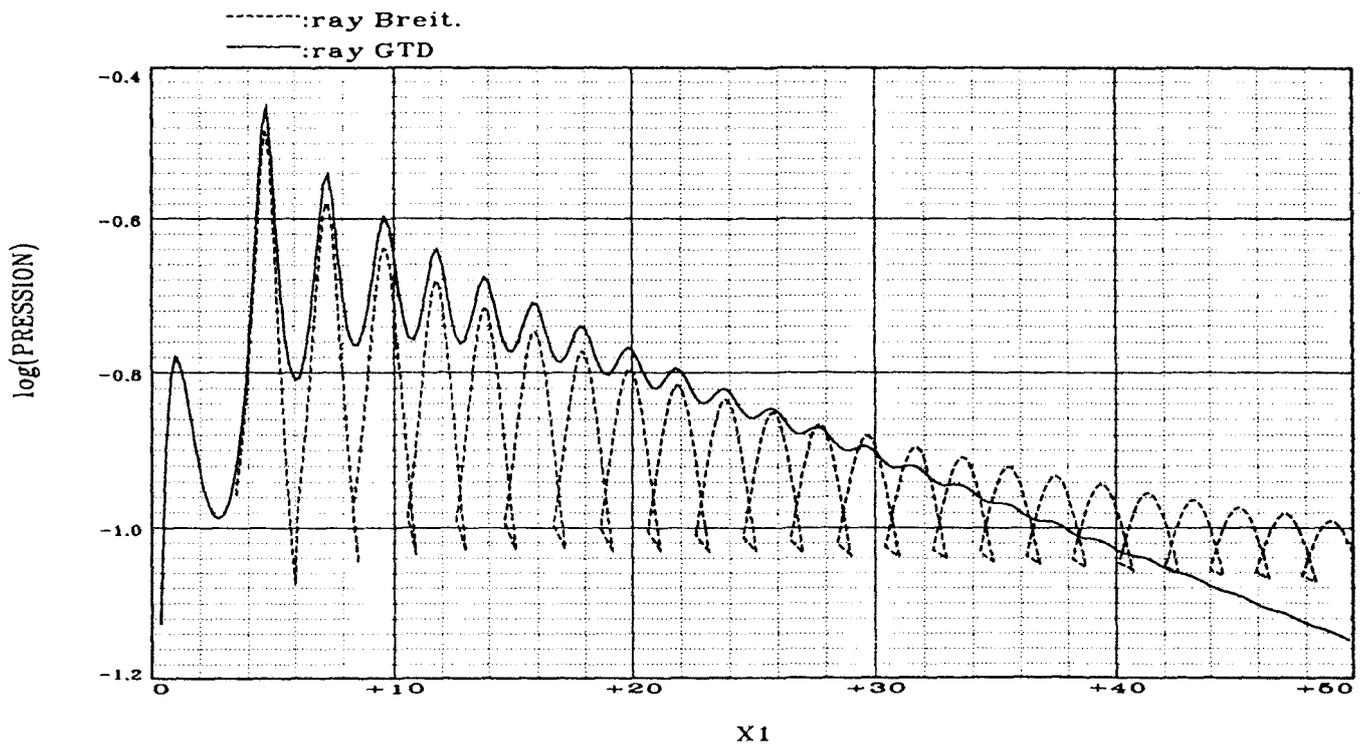


Figure C.18.

TUBE elast. pres. en $P(r,0)$

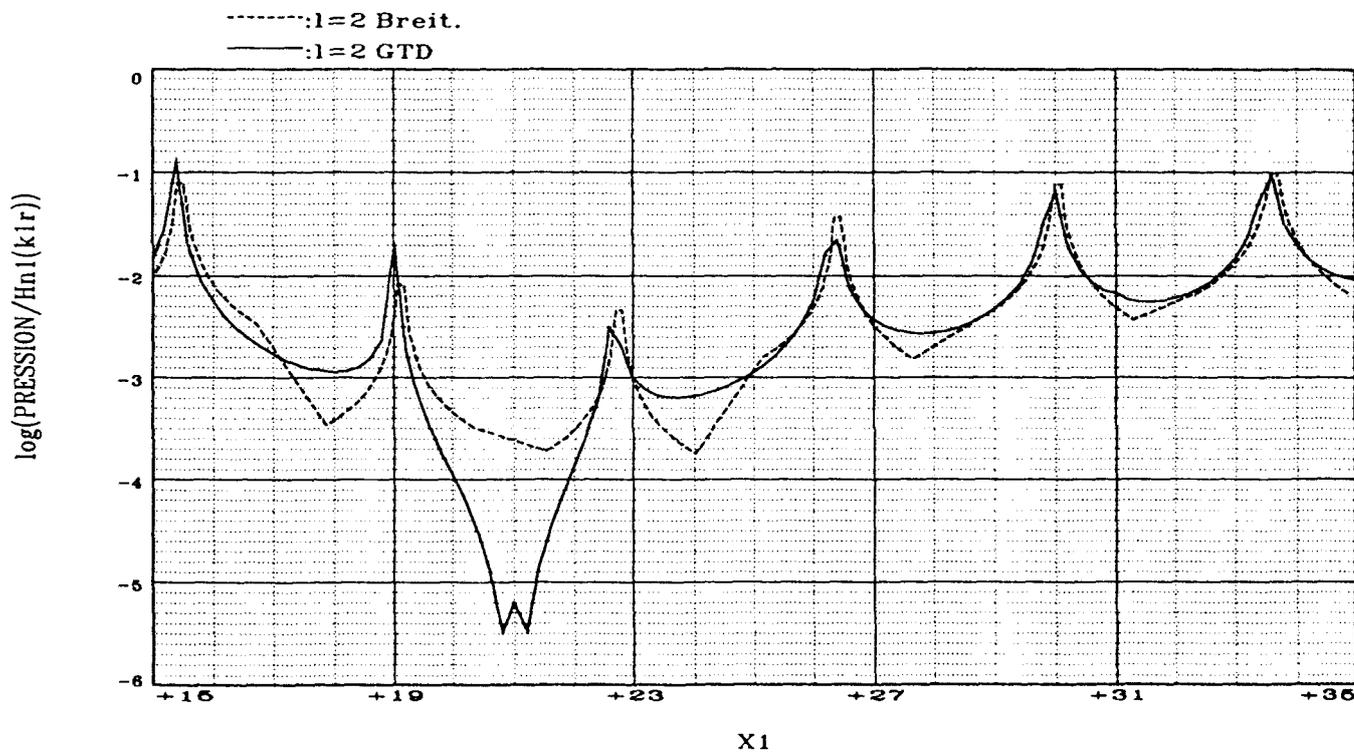


Figure C.19.

ANNEXE D

**Détails de calcul associés au
chapitre 4 section 1.**

**RECHERCHE DE L'EXPRESSION DE $G_{n,m}^2(\alpha)$ DANS
L'INTERVALLE ANGULAIRE I_2**

Nous utilisons les notations énoncées dans le paragraphe I.4.5 du chapitre 4

a. lemme

Soit U_n^r le nombre de r -uplets dont la somme des éléments est égale à n et dont aucun élément n'est nul. Soit E_n^r l'ensemble de ces r -uplets.

Par définition,

$$(D.1) \quad \forall (n,r) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* / r \leq n, \left\{ \begin{array}{l} E_n^r = \{(i_1, i_2, \dots, i_r)\}_i \\ \text{avec} \\ \forall j \in \{1, \dots, r\}, i_j \in \mathbf{N}^* \text{ et } \sum_{j=1}^r i_j = n. \end{array} \right.$$

Une relation de récurrence lie les cardinaux U_n^r des ensembles E_n^r . En effet,

$$(D.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_n^r = \left\{ \left(1, j_1, \dots, j_{r-1} \right) \right\}_j \cup \left\{ \left(2, k_1, \dots, k_{r-1} \right) \right\}_k \cup \dots \cup \left\{ \left(n-(r-1), m_1, \dots, m_{r-1} \right) \right\}_m \\ \text{avec } \forall q \in \{1, \dots, r-1\}, \\ \left(j_q, k_q, \dots, m_q \right) \in \left(\mathbf{N}^* \right)^{n-(r-1)} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{q=1}^{r-1} j_q = n-1 \\ \sum_{q=1}^{r-1} k_q = n-2 \\ \vdots \\ \sum_{q=1}^{r-1} m_q = n-(n-(r-1)) = r-1, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

d'où

$$(D.3) \quad \forall (n, r) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* / r \leq n, \\ \text{Card}(E_n^r) = \text{Card}(E_{n-1}^{r-1}) + \text{Card}(E_{n-2}^{r-1}) + \dots + \text{Card}(E_{r-1}^{r-1}).^1$$

Ainsi,

$$(D.4) \quad \forall (n, r) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* / r \leq n, \\ \left\{ \begin{array}{l} (n \geq 2 \text{ et } r \geq 2) \Rightarrow U_n^r = U_{n-1}^{r-1} + U_{n-2}^{r-1} + \dots + U_{r-1}^{r-1} \\ U_r^r = 1 \\ U_n^1 = 1. \end{array} \right.$$

En reprenant cette relation, nous pouvons écrire

$$(D.5) \quad \forall (n, r) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* / r \leq n \text{ et } n \geq 2, U_n^r = U_{n-1}^{r-1} + U_{n-2}^{r-1} + \dots + U_{r-1}^{r-1} \\ = U_{n-1}^{r-1} + U_{n-1}^r.$$

¹ "Card" est la fonction cardinale.

Démontrons que $U_n^r = C_{n-1}^{r-1}$ avec C_n^r le nombre de combinaisons de "r" éléments parmi "n".

Soient les propositions logiques

$$(D.6) \quad P(n) \text{ et } P(n,r), \left\{ \begin{array}{l} \forall (n,r) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* / r \leq n, P(n,r) \Leftrightarrow [U_n^r = C_{n-1}^{r-1}] \\ \forall n \in \mathbf{N}^*, P(n) \Leftrightarrow [\forall r \in \mathbf{N}^* / r \leq n, P(n,r)]. \end{array} \right.$$

$P(1,1)$ est vraie car $U_1^1 = 1 = C_0^0$. $P(1)$ est donc vraie également.

Démontrons que $\forall n \in \mathbf{N}^*, [[\forall j \in \mathbf{N}^* / j \leq n, P(j) \text{ vraie}] \Rightarrow P(n+1) \text{ vraie}]$.

Pour cela supposons que pour un n donné, $[\forall j \in \mathbf{N}^* / j \leq n, P(j) \text{ vraie}]$ soit vraie. Par définition,

$$(D.7) \quad U_{n+1}^{n+1} = 1 = C_n^n$$

La relation (D.7) implique

$$(D.8) \quad \begin{aligned} U_{n+1}^n &= U_n^{n-1} + U_{n-1}^{n-1} \\ &= C_{n-1}^{n-2} + C_{n-2}^{n-2} \\ &= n-1+1 = n \\ &= C_n^{n-1} \end{aligned}$$

En utilisant la relation (D.8) nous obtenons

$$(D.9) \quad \forall r \in \mathbf{N}^* / r < n, U_{n+1}^r = U_n^{r-1} + U_{n-1}^r \\ = C_{n-1}^{r-2} + C_{n-1}^{r-1}.$$

Or

$$(D.10) \quad \forall r \in \mathbf{N} / r < n, C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_n^{r+1},$$

d'où

$$(D.11) \quad \forall r \in \mathbf{N} / r < n, U_{n+1}^r = C_n^{r-1}.$$

Ainsi,

$$(D.12) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \left[\left[\forall j \in \mathbb{N}^* / j \leq n, P(j) \text{ vraie} \right] \Rightarrow P(n+1) \text{ vraie} \right]$$

Cette démonstration par récurrence permet d'établir le résultat

$$(D.13) \quad \forall (n, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / r \leq n, U_n^r = C_{n-1}^{r-1}.$$

b. Expression de $\sum_{A \mapsto B}^2$ avec $(A, B) \in \{L, T\}^2$

Avant d'expliciter la démonstration aboutissant à la formule (44), étudions un exemple simple. Soit l'ensemble des rayons possédant 3 trajets longitudinaux et 2×3 trajets transversaux (le premier et le dernier trajet étant transversaux) nous obtenons les mots suivants : "T².T².L.L.L.T²", "T².L.T².L.L.T²", "T².L.L.T².L.T²", "T².L.L.L.T².T²". La somme des produits des coefficients de réflexion correspondant à chacun de ces mots est

$$(D.14) \quad \sum_{T \mapsto T}^2 = T_{12}^T T_{21}^T \left[R_{TT}^3 R_{TT}^1 R_{TT}^3 R_{TL}^1 R_{LL}^1 R_{LL}^1 R_{LT}^1 R_{TT}^3 \right. \\ + R_{TT}^3 R_{TL}^1 R_{LT}^1 R_{TT}^3 R_{TL}^1 R_{LL}^1 R_{LT}^1 R_{TT}^3 \\ + R_{TT}^3 R_{TL}^1 R_{LL}^1 R_{LT}^1 R_{TT}^3 R_{TL}^1 R_{LT}^1 R_{TT}^3 \\ \left. + R_{TT}^3 R_{TL}^1 R_{LL}^1 R_{LL}^1 R_{LT}^1 R_{TT}^3 R_{TT}^1 R_{TT}^3 \right]$$

Si nous regroupons les termes identiques nous obtenons :

$$(D.15) \quad \sum_{T \mapsto T}^2 = T_{12}^T T_{21}^T \left[\left(R_{TT}^3 R_{TT}^1 \right)^{2-1} R_{TT}^3 R_{TL}^1 \left(R_{LL}^1 \right)^{3-1} \right. \\ \cdot R_{LT}^1 \left(R_{TT}^3 R_{TT}^1 \right)^{1-1} R_{TT}^3 \\ + 2 \left(R_{TT}^3 R_{TT}^1 \right)^{1-1} R_{TT}^3 R_{TL}^1 \left(R_{LL}^1 \right)^{2-1} R_{LT}^1 \left(R_{TT}^3 R_{TT}^1 \right)^{1-1} \\ \cdot R_{TT}^3 R_{TL}^1 \left(R_{LL}^1 \right)^{1-1} R_{LT}^1 \left(R_{TT}^3 R_{TT}^1 \right)^{1-1} R_{TT}^3 \\ \left. + \left(R_{TT}^3 R_{TT}^1 \right)^{1-1} R_{TT}^3 R_{TL}^1 \left(R_{LL}^1 \right)^2 R_{LT}^1 \left(R_{TT}^3 R_{TT}^1 \right)^{2-1} R_{TT}^3 \right]$$

Les exposants des coefficients de réflexion présents dans cette équation sont écrits de façon à rendre plus aisé la comparaison de cette expression avec le résultat général donné au paragraphe b.1.

Nous allons chercher à obtenir ce résultat en suivant une démarche généralisable à "n" trajets. Dans l'exemple étudié ici le nombre de séquences " $T^2.L$ ", noté l , varie entre 1 pour le premier et le dernier mots et 2 pour les deux autres mots. En adoptant une écriture plus compacte nous obtenons les mots : " $T^{2 \times 2}.L^3.T^2$ ", " $T^2.L.T^2.L^2.T^2$ ", " $T^2.L^2.T^2.L.T^2$ ", " $T^2.L^3.T^{2 \times 2}$ ". Les exposants de "L" et de " T^2 " sont liés par les relations suivantes :

- pour $r = 1$: $\sum_{m=1}^{l+1} t_m = 3$ et $\sum_{m=1}^1 i_m = 9 - 6 = 3$
- pour $r = 2$: $\sum_{m=1}^{2+1} t_m = 3$ et $\sum_{m=1}^2 i_m = 9 - 6 = 3$

Dans ces équations, les variables t_m et i_m correspondent, respectivement, aux valeurs du $m^{\text{ème}}$ exposant de " T^2 " et de "L". Lorsque nous recherchons l'ensemble des variables entières positives et non nulles vérifiant ces équations nous trouvons $(r+1)$ -uplets contenant les exposants de " T^2 " et r -uplets contenant ceux de "L". La place de l'exposant dans le $(r+1)$ -uplets (ou r -uplet) correspond à son ordre d'apparition dans le mot ; ainsi au mot " $T^{2 \times 2}.L^3.T^2$ " correspond le couple d'exposants de " T^2 " (2,1) et le singleton (3) comme exposant de "L". Les $(r+1)$ -uplets associés à " T^2 " sont pour $r = 1$ les couples (2,1) et (1,2), pour $r = 2$ le triplé (1,1,1). Ceux contenant les exposants de "L" sont pour $r = 1$ le singleton (3) et pour $r = 2$ les couples (1,2) et (2,1).

Ainsi, $\sum_{T \rightarrow T}^2$ vérifie la relation :

$$(D.16) \quad \sum_{T \rightarrow T}^2 = \sum_{r=1}^2 \sum_{(i,t) \in R_{T \rightarrow T}^r} \text{coeff} \left(" \prod_{m=1}^r (T^{t_m} \cdot L^{i_m}) T^{t_{r+1}} " \right),$$

avec $\text{coeff}("X")$ l'expression du produit des coefficients de réflexion correspondant au mot "X", et $R_{T \rightarrow T}^r$ l'ensemble des couples (i_m, t_m) précédemment cités.

Connaissant les produits des coefficients de réflexion des mots " T^{t_m} " et " L^{i_m} " $(R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{t_m-1} R_{TT}^3 R_{TL}^1$ et $(R_{LL}^1)^{i_m-1} R_{LT}^1$, nous retrouvons une expression de $\sum_{T \rightarrow T}^2$ semblable à celle donnée par la relation

(D.15)

$$(D.17) \quad \sum_{T \rightarrow T}^2 = T_{12}^T T_{21}^T \sum_{r=1}^2 \sum_{(i,t) \in R_{T \rightarrow T}^r} \prod_{m=1}^r \left[(R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{t_m-1} R_{TT}^3 R_{TL}^1 (R_{LL}^1)^{i_m-1} R_{LT}^1 \right] (R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{t_{r+1}-1} R_{TT}^3.$$

b.1 Expression de $\sum_{T \rightarrow T}^2$

Soit "r" le nombre de séquences " $T^2.L$ " dans le mot correspondant à un rayon quelconque composé de "n-2p" trajets longitudinaux et de "2p" trajets transversaux. Ce mot s'écrit " $T^{2t_1} \cdot L^{i_1} \cdot T^{2t_2} \cdot L^{i_2} \dots T^{2t_r} \cdot L^{i_r} \cdot T^{2t_{r+1}}$ " avec les restrictions suivantes sur les exposants :

$$(D.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall m \in \{1, \dots, r+1\}, (t_m, i_m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{r+1} t_m = p \\ \sum_{m=1}^r i_m = n - 2p \end{array} \right. \\ \forall m > r+1, i_m = t_m = i_{r+1} = 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des couples de suite $(i_m, t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ vérifiant ces restrictions est noté " $R_{T \rightarrow T}^r$ ". Étant donné ces restrictions, le nombre "r" est élément de

l'intervalle $[1 ; \inf(p-1, n-2)]$. Le coefficient résultant " $\sum_{T \rightarrow T}^2$ " est ainsi défini

par la relation :

$$(D.19) \quad \sum_{T \rightarrow T}^2 = T_{12}^T T_{21}^T \sum_{r=1}^{\inf(p-1, n-2p)} \sum_{(i,t) \in R_{T \rightarrow T}^r} \text{coeff} \left(\prod_{m=1}^r (T^{t_m} \cdot L^{i_m}) T^{t_{r+1}} \right)$$

La notation "inf (a,b)" est prise pour désigner le plus petit nombre entre "a" et "b". En supposant les " t_m " trajets transversaux suivis d'un trajet longitudinal et réciproquement les " i_m " trajets longitudinaux suivis d'un trajet transversal, nous pouvons écrire de même que précédemment :

$$(D.20) \quad \sum_{T \rightarrow T}^2 = T_{12}^T T_{21}^T \sum_{r=1}^{\inf(p-1, n-2p)} \sum_{(i,t) \in R_{T \rightarrow T}^r} \prod_{m=1}^r \left[(R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{t_m-1} R_{TT}^3 R_{TL}^1 (R_{LL}^1)^{i_m-1} R_{LT}^1 \right] \\ (R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{t_{r+1}-1} R_{TT}^3.$$

En regroupant les coefficients identiques nous obtenons

$$(D.21) \quad \sum_{T \rightarrow T}^2 = T_{12}^T T_{21}^T \sum_{r=1}^{\inf(p-1, n-2p)} \sum_{(i,t) \in R_{T \rightarrow T}^r} (R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{\sum_{m=1}^{r+1} t_m-1} (R_{TT}^3)^{r+1} (R_{TL}^1 R_{LT}^1)^r \\ (R_{LL}^1)^{\sum_{m=1}^r i_m-1}.$$

Comme nous avons U_p^r façons d'obtenir le nombre "p" par la somme de "r" termes entiers positifs non nuls nous pouvons écrire que pour un nombre "r" et une suite "i" donnés, nous avons U_p^{r+} suites $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ (avec $(i_m, t_m)_{m \in \mathbb{N}} \in R_{T \rightarrow T}^r$) donnant lieu à un même coefficient de réflexion-réfraction. De même, pour une suite "t" donnée, nous avons U_{n-2p}^r suites $(i_m)_{m \in \mathbb{N}}$ (avec $(i_m, t_m)_{m \in \mathbb{N}} \in R_{T \rightarrow T}^r$) qui correspondent à un même coefficient.

L'expression définitive de $\sum_{T \rightarrow T}^2$ est de ce fait :

$$(D.22) \quad \sum_{T \rightarrow T}^2 = T_{12}^T T_{21}^T \sum_{r=1}^{\inf(p-1, n-2p)} U_p^{r+1} U_{n-2p}^r (R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{p-r-1} (R_{TT}^3)^{r+1} (R_{TL}^1 R_{LT}^1)^r (R_{LL}^1)^{n-2p-r}$$

L'exemple précédemment développé confirme ce résultat.

b.2 Expression de $\sum_{T \rightarrow L}^2$

Nous adoptons les mêmes conventions d'écriture et la même démarche que précédemment.

Le mot étudié ici correspond aux rayons composés de "2p" trajets transversaux et de "n-2p" trajets longitudinaux. Le premier trajet de chaque rayon est transversal ; le dernier est longitudinal. Le mot correspondant à ce type de rayon est " $T^{2t_1} \cdot L^{i_1} \cdot T^{2t_2} \cdot L^{i_2} \dots T^{2t_r} \cdot L^{i_r}$ " avec :

$$(D.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall m \in \{1, \dots, r\}, (t_m, i_m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \text{ et } \begin{cases} \sum_{m=1}^r t_m = p \\ \sum_{m=1}^r i_m = n - 2p \end{cases} \\ \forall m > r, i_m = t_m = 0. \end{array} \right.$$

L'ensemble des couples de suite $(i_m, t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ vérifiant ces restrictions est noté " $R_{T \rightarrow L}^r$ ". Etant donné ces restrictions, le nombre "r" est élément de l'intervalle $[1 ; \inf(p, n-2)]$. et le coefficient résultant " $\sum_{T \rightarrow L}^2$ "

vérifie la relation

$$(D.24) \quad \sum_{T \rightarrow L}^2 = T_{12}^T T_{21}^L \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p)} \sum_{(i,t) \in R_{T \rightarrow L}^r} \text{coeff} \left(\prod_{m=1}^r (T^{t_m} \cdot L^{i_m}) \right)$$

Ainsi,

$$(D.25) \quad \sum_{\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{L}}^2 = \mathbb{T}_{12}^T \mathbb{T}_{21}^L \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p)} \sum_{(i,t) \in \mathbb{R}_{\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{L}}^r} \prod_{m=1}^r \left[\left(\mathbb{R}_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^3 \mathbb{R}_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^1 \right)^{t_{m-1}} \mathbb{R}_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^3 \mathbb{R}_{\mathbb{T}\mathbb{L}}^1 \left(\mathbb{R}_{\mathbb{L}\mathbb{L}}^1 \right)^{i_{m-1}} \mathbb{R}_{\mathbb{L}\mathbb{T}}^1 \right] \mathbb{R}_{\mathbb{L}\mathbb{T}}^1{}^{-1}.$$

En regroupant les coefficients identiques et en utilisant le nombre U_p^r nous obtenons

$$(D.26) \quad \sum_{\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{L}}^2 = \mathbb{T}_{12}^T \mathbb{T}_{21}^L \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p)} U_p^r U_{n-2p}^r \left(\mathbb{R}_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^3 \mathbb{R}_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^1 \right)^{p-r} \left(\mathbb{R}_{\mathbb{T}\mathbb{T}}^3 \right)^r \mathbb{R}_{\mathbb{T}\mathbb{L}}^1 \left(\mathbb{R}_{\mathbb{T}\mathbb{L}}^1 \mathbb{R}_{\mathbb{L}\mathbb{T}}^1 \right)^{r-1} \left(\mathbb{R}_{\mathbb{L}\mathbb{L}}^1 \right)^{n-2p-r}.$$

b.3 Expression de $\sum_{\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}}^2$

$\sum_{\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}}^2$ vérifie la relation :

$$(D.27) \quad \sum_{\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}}^2 = \mathbb{T}_{12}^L \mathbb{T}_{21}^L \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p-1)} \sum_{(i,t) \in \mathbb{R}_{\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}}^r} \text{coeff} \left(\prod_{m=1}^r \left(\mathbb{L}^{i_m} \cdot \mathbb{T}^{t_m} \right) \cdot \mathbb{L}^{i_{r+1}} \right)$$

Avec " $R_{L \mapsto L}^r$ " l'ensemble des couples de suites (i, t) défini par

$$(D.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall m \in \{1, \dots, r\}, (t_m, i_m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^r t_m = p \\ \sum_{m=1}^r i_m = n - 2p \end{array} \right. \\ \forall m > r, i_m = t_m = 0. \end{array} \right.$$

Connaissant les expressions des coefficients élémentaires de réflexion-réfraction, l'expression de $\sum_{L \mapsto L}^2$ devient

$$(D.29) \quad \sum_{L \mapsto L}^2 = \sum_{L \mapsto L}^2 \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p-1)} \sum_{(i,t) \in R_{L \mapsto L}^r} \prod_{m=1}^r \left[(R_{LL}^1)^{i_m-1} R_{LT}^1 (R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{t_m-1} R_{TT}^3 R_{TL}^1 \right] R_{LL}^1{}^{i_{r+1}-1}.$$

et donc,

$$(D.30) \quad \sum_{L \mapsto L}^2 = \sum_{L \mapsto L}^2 \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p-1)} U_p^r U_{n-2p}^{r+1} (R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{p-r} (R_{TT}^3)^r (R_{TL}^1 R_{LT}^1)^r (R_{LL}^1)^{n-2p-r-1}.$$

b.4 Expression de $\sum_{L \rightarrow T}^2$

Pour "n" et "p" donnés, le coefficient résultant de tous les rayons dont le premier trajet est longitudinal et le dernier est transversal vérifie :

$$(D.31) \quad \sum_{L \rightarrow T}^2 = T_{12}^L T_{21}^T \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p)} \sum_{(i,t) \in R_{L \rightarrow T}^r} \text{coeff} \left(\prod_{m=1}^r (L^{i_m} \cdot T^{t_m}) \right)$$

avec " $R_{L \rightarrow T}^r$ " l'ensemble des couples de suites (i,t) défini par

$$(D.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall m \in \{1, \dots, r\}, (t_m, i_m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^r t_m = p \\ \sum_{m=1}^r i_m = n - 2p \end{array} \right. \\ \forall m > r, i_m = t_m = 0. \end{array} \right.$$

Connaissant les expressions des coefficients élémentaires de réflexion-réfraction, nous obtenons :

$$(D.33) \quad \sum_{L \rightarrow T}^2 = T_{12}^L T_{21}^T \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p)} \sum_{(i,t) \in R_{L \rightarrow T}^r} \prod_{m=1}^r \left[(R_{LL}^1)^{i_m-1} R_{LT}^1 (R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{t_m-1} R_{TT}^3 R_{TL}^1 \right] R_{TL}^1{}^{-1}.$$

et donc,

$$(D.34) \quad \sum_{L \rightarrow T}^2 = T_{12}^L T_{21}^T \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p)} U_p^r U_{n-2p}^r (R_{TT}^3 R_{TT}^1)^{p-r} (R_{TT}^3)^r R_{TL}^1 (R_{TL}^1 R_{LT}^1)^{r-1} (R_{LL}^1)^{n-2p-r}.$$

c. Conclusion

$\forall n > 2p+1$ avec $p > 1$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (D.35) \quad G_{n,p}^2(\alpha) = & T_{12}^T T_{21}^T \sum_{r=1}^{\inf(p-1, n-2p)} U_p^{r+1} U_{n-2p}^r \left(R_{TT}^3 R_{TT}^1 \right)^{p-r-1} \left(R_{TT}^3 \right)^{r+1} \\
 & \left(R_{TL}^1 \right)^r \left(R_{LT}^1 \right)^r \left(R_{LL}^1 \right)^{n-2p-r} \\
 & + T_{12}^T T_{21}^L \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p)} U_p^r U_{n-2p}^r \left(R_{TT}^3 R_{TT}^1 \right)^{p-r} \left(R_{TT}^3 \right)^r \\
 & \left(R_{TL}^1 \right)^r \left(R_{LT}^1 \right)^{r-1} \left(R_{LL}^1 \right)^{n-2p-r} \\
 & + T_{12}^L T_{21}^L \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p-1)} U_p^r U_{n-2p}^{r+1} \left(R_{TT}^3 R_{TT}^1 \right)^{p-r} \left(R_{TT}^3 \right)^r \\
 & \left(R_{TL}^1 \right)^r \left(R_{LT}^1 \right)^r \left(R_{LL}^1 \right)^{n-2p-r-1} \\
 & + T_{12}^L T_{21}^T \sum_{r=1}^{\inf(p, n-2p)} U_p^r U_{n-2p}^r \left(R_{TT}^3 R_{TT}^1 \right)^{p-r} \left(R_{TT}^3 \right)^r \\
 & \left(R_{TL}^1 \right)^{r-1} \left(R_{LT}^1 \right)^r \left(R_{LL}^1 \right)^{n-2p-r}.
 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

M. Abramowitz, I A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, New-York, 1965.

A. Angot, *Compléments de Mathématiques*, 1972.

M. De Billy, Determination of the resonance spectrum of elastic bodies via the use of short pulses and Fourier transform theory, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 219-221, **79**, 1986.

L.M. Brekhovskikh, *Waves in Layered Media*, 1960.

D. Brill, H. Überall, *Acoustic Waves Transmitted through Solid Elastic Cylinders*, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 921-939, **50**, 1971.

R. Burvingt, J-L. Rousselot, A. Derem, G. Maze, J. Ripoché, *Réponse résonnante de cylindres élastiques*, *CETHEDEC*, pp. 73-93, **78**, 1984.

A. Cand, G. Quentin, Identification des résonances et algorithme A^* : application à l'identification d'un diffuseur élastique cylindrique immergé dans un fluide, *Colloque de Physique C2*, pp. 387-390, **51**, 1990.

J-M. Conoir, *Diffusion acoustique par un cylindre. Théorie modale et approximation de l'acoustique géométrique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 1987.

Notation abrégée :

J-M. Conoir, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 1987.

J-M. Conoir, A. Gérard, A. Derem, Ondes acoustiques transmises et séries de Debye généralisées. I. Traitement des interfaces planes, *J. Acoustique*, **4**, pp. 159-200, 1991.

J-M. Conoir, Etude des résonances d'un tube élastique basée sur les propriétés de la dérivée de la phase de la matrice de diffusion, *J. Acoustique*, **4**, pp. 485-508, 1991.

A. Derem, *Formulaire pour les développements asymptotiques des fonctions cylindriques d'indice complexe*, Rapport LCT., PL. 806 618 (diffusion interne), 1980.

A. Derem, Diffusion des ondes acoustiques par des cylindres métalliques immergés : remarques concernant l'interprétation des phénomènes, *CETHEDEC.*, **72**, 1982 .

A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson dans la Diffusion Acoustique, in N. Gespa, *La Diffusion Acoustique*, chap. 9, CEDOCAR., pp. 189-279, 1987.

Notation abrégée :

A. Derem, Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson, in N. Gespa.

A. Derem, *Cylindre Elastique Solide, Ondes de Surface Interne*, Notes manuscrites, LCTAR., 1989-1993.

J.W. Dickey, G.V. Frisk, H. Überall, Whispering Gallery wave modes on elastic cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.*, **59**, pp. 1339-1346, 1976.

J.W. Dickey, H. Überall, Acoustic high-frequency scattering by elastic cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.*, **66**, pp. 275-283, 1979.

R. D. Doolittle, H. Überall, P. Ugincius, Sound Scattering by Elastic Cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 1-14, **43**, 1968.

J. Duclos, O. Lenoir, J-M. Conoir et J-L. Izbicki, Description des ondes de Lamb en termes d'ondes évanescentes et de résonances, *in Journal de Physique*, 2, Colloque n°1, suppl. J.P.III, n°4 ,pp. 691-704, 1992.

M. Fekikh, *thèse de troisième cycle*, Université de Paris VII, 1982.

M. Fekikh, G. Quentin, Présentation et interprétation des expériences de diffusion par les cylindres élastiques aux valeurs élevées de ka , *CETHEDEC*, pp. 91 - 101, 72, 1982.

L. Flax, L. R. Dragonette, H. Überall, Theory of elastic resonance excitation by sound scattering, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 723-731, 63, 1978.

W. Franz, Theorie der Beugung Elektromagnetischer Wellen, *Springer-Verlag*, 1957.

Denos C. Gazis, Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. I. Analytical Fundation, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 568-573, 31, 1959.

A. Gérard, J-L. Rousselot, J-L. Izbicki, G. Maze, J. Ripoche, Résonances d'ondes d'interface de coques cylindriques minces immergées : détermination et interprétation, *Revue Phys. Appl.*, pp. 289-299, 23, 1988.

J. H. Heimann, H. Kolsky, The propagation of elastic waves in thin cylindrical shells, *The J. Mech. Phys. Solids*, 14, pp. 121-130, 1966.

J-L. Izbicki, G. Maze, J. Ripoche, Influence of the free modes of vibration on the acoustic scattering of circular cylindrical shell, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 1215-1219, 80, 1986.

J-L. Izbicki, G. Maze, J. Ripoche, Diffusion acoustique par un plan, Onde de Rayleigh, in N. Gespa, *La Diffusion Acoustique*, chap. 2, pp. 50-62, 1987.

M. Lavrentiev, B. Chabat, *Méthodes de la Théorie des Fonctions d'une Variable Complexe*, Editions MIR, traduction française, p. 485 et suivantes, 1977.

F. Léon, F. Lecroq, D. Décultot, G. Maze, Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite hollow cylindrical shell, *J. Acoust. Soc. Am.*, **91**, pp. 1388-1397, 1992.

F. Luppé, *Contribution à l'étude de l'onde de Scholte-Stoneley à différentes interfaces fluide parfait/solide élastique*, Thèse de doctorat d'état es sciences physiques, Université Paris 7, 1987.

G. Maze, B. Taconet, J. Ripoche, Etude expérimentale des résonances de tubes cylindriques immergés dans l'eau, *CETHEDEC*, **72**, 1982.

P. Millerat, *Etude des caractéristiques des ondes axiales de surface pour un cylindre et un tube élastique immergés*, Rapport de stage de DEA, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 1992.

Notation abrégée :

P. Millerat, rapport de DEA, 1992.

P. Pareige, P. Rembert, J-L. Izbicki, G. Maze, J. Ripoche, Excitation acoustique impulsionnelle d'une inclusion cylindrique liquide, *Colloque de Physique C2*, pp. 390-393, **51**, 1990.

Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 2nd edition, 1896.

J-L. Rousselot, Comportement acoustique d'un tube cylindrique mince en basse fréquence, *Acoustica*, **58**, p. 294, 1985.

J-L. Rousselot, Diffusion acoustique par un cylindre fluide : résonances et ondes de surface, *Acoustica*, **64**, 1987.

J-L. Rousselot, Analyse des conditions de rayonnement des ondes externes pour un objet cylindrique immergé, *Colloque de Physique C2*, **51**, février 1990.

J-L. Rousselot, Champ diffusé par un cylindre fluide : comparaison entre la théorie géométrique de la diffraction et la théorie modale, *Acoustica*, **79**, 1993.

J-L. Rousselot, P. Millerat, Champ diffusé par un tube élastique : comparaison entre la théorie géométrique de la diffraction et le formalisme modal, *Colloque C5, supplément au Journal de Physique III, Volume 4*, pp. 853-856, 1994.

M. Talmant, G. Quentin, J-L. Rousselot, Acoustic resonances of thin cylindrical shells and the resonance scattering theory, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 681-688, **84**, 1988.

H. Überall, L.R. Dragonette, L. Flax, "Relation between creeping waves and normal modes of vibration of curved body", *J. Acoust. Soc. Am.*; **61**, pp.711-715, 1977.

P. Ugincius, H. Überall, Creeping-Wave Analysis of Acoustic Scattering by Elastic Cylindrical Shells, *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 1025-1035, **43**, 1968.

P.J. Welton, M. De Billy, A. Hayman, G. Quentin, Backscattering of short ultrasonic pulses by solid elastic cylinders at large ka , *J. Acoust. Soc. Am.*, pp. 470-476, **67**, 1980.

Joseph Zemanek, An Experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in Cylinder, *J. Acoust. Soc. Am.*, **51**, pp. 265-283, 1972.

Notations abrégées de certaines revues :

Revue du CETHEDDEC - Ondes et Signals : CETHEDDEC

The Journal of the Acoustical Society of America : J. Acoust. Soc. Am.

Colloque de Physique, Colloque C2, 1^{er} congrès Français d'Acoustique 1990,
supplément au n° 2 : Colloque de Physique C2.

Revue de Physique Appliquée : Revue Phys. Appl.

Journal d'Acoustique : J. Acoustique.

Table des figures

Figure 1: Repère et notations.	17
Figure 2 : Position du domaine D	26.
Figure 3 : Position du contour $C(\delta)$	27
Figure 4 : Position du contour C.....	29
Figure 5 : Position des contours C_1 et C_2	31
Figure 6 : Lieu des développements asymptotiques des fonctions cylindriques.....	34
Figure 7 : Position des contours C'_1 et C'_2	41
Figure 8 : Introduction du contour $C_{géo}$	44
Figure 9 : Cylindre élastique - onde de Rayleigh- $[\log(\text{pression})](\varphi)$	46
Figure 10 : Cylindre élastique - onde B_1 - $[\log(\text{pression})](\varphi)$	46
Figure 11 : Tube élastique - onde $\ell=1$ - $[\log(\text{pression})](\varphi)$	46
Figure 12 : Trajet d'une onde de type ℓ_1 lorsque la condition (31) est vérifiée.	48
Figure 13 : Trajet d'une onde de type ℓ_1 lorsque la condition (31) n'est pas vérifiée.....	49
Figure 14: Trajet d'une onde de type ℓ_2 lorsque la condition (34) est vérifiée.....	51
Figure 15: Trajet d'une onde de type ℓ_2 lorsque la condition (34) n'est plus vérifiée.....	52
Figure 16 : Trajet d'une onde géométrique.....	63
Figure 17 : Position des cols en fonction de l'angle φ	68
Figure 18 : Cylindre fluide - Ondes de Wait- $\text{Re}(v(x_1))$	72
Figure 19 : Cylindre fluide -Ondes de Wait - $\text{Im}(v(x_1))$	72
Figure 20 : Cylindre fluide - Ondes de Wait - $[\text{Im}(v)/x_1](\text{Re}(v)/x_1)$	73
Figure 21 : Cylindre fluide - Ondes de Franz - $\text{Re}(v(x_1))$	73
Figure 22 : Cylindre fluide - Ondes de Franz - $\text{Im}(v(x_1))$	74
Figure 23 : Cylindre fluide -Ondes de Franz- $[\text{Im}(v)/x_1](\text{Re}(v)/x_1)$	74
Figure 24 : Limites angulaires - $j=1, m=0$, région 1.....	80

Figure 25 : Limites angulaires - $j=2, m=0$, région 1.....	80
Figure 26 : Limites angulaires - $j=3, m=0$, région 1.....	80
Figure 27 : Limites angulaires - $j=3, m=1$, région 2.....	81
Figure 28 : Limites angulaires - $j=4, m=1$, région 1.....	81
Figure 29 : Limites angulaires - $j=3, m=1$, région 1.....	81
Figure 30 : Cylindre fluide $\log(P_{géo})(\varphi)$ -Ondes se réfléchissant moins d'une fois.....	84
Figure 31 : Cylindre fluide $\log(P_{géo})(\varphi)$ -Ondes se réfléchissant moins de deux fois.....	84
Figure 32 : Cylindre fluide $\log(P_{géo})(\varphi)$ -Ondes se réfléchissant moins de trois fois.....	84
Figure 33 : Cylindre fluide - Coefficient $\sigma_{\ell}R_{21}$	85
Figure 34 : Cylindre fluide - Ondes de Wait - $ \beta (x_1)$	88
Figure 35 : Cylindre fluide - Ondes de Franz - $ \beta (x_1)$	88
Figure 36 : Cylindre fluide - P_{diff} - réfl., W1, W2, F1, F2, R=5, $x_1=30$...	93
Figure 37 : Cylindre fluide - P_{diff} - réfl., W1, W2, F1 à F4, R=5, $x_1=30$	93
Figure 38 : Cylindre fluide - P_{diff} - réfl., W1, W2, F1 à F4, R=10, $x_1=30$.	94
Figure 39 : Cylindre fluide - P_{diff} - réfl., W1 à W3, F1 à F4, R=10, $x_1=50$	94
Figure 40: Cylindre fluide - P_{diff} - réfl., W1 à W4, F1 à F4, R=10, $x_1=50$	95
Figure 41: Cylindre fluide - P_{diff} - réfl., W1 à W4, F1 à F4, R=5, $x_1=54.8$	95
Figure 42 : Cylindre fluide - P_{diff} - réfl., W1, W2, F1 à F4, R=5, $x_1=30$. Décalage de l'angle correspondant au passage d'un pôle de 0.07°	96
Figure 43 : Cylindre fluide - P_{diff} - réfl., W1, W2, F1 à F4, R=5, $x_1=30$. Décalage de l'angle correspondant au passage d'un pôle de 0.1°	96
Figure 44: Cylindre fluide - $\text{Ind}(P_{diff})$ - réfl., $R \rightarrow \infty$, $x_1=30$	102
Figure 45: Cylindre fluide - $\text{Ind}(P_{diff})$ - réfl., W1, W2, F1 à F4, R=10, $x_1=30$	102

Figure 46: Cylindre fluide -Ind(P_{diff})- réfl., W_1, W_2, F_1 à $F_8, R \rightarrow \infty, x_1=30$	103
Figure 47 : Cylindre élastique - Onde de Rayleigh- $Im(v(x_1)) - x_1 \in [0;1000]$	137
Figure 48 : Cylindre élastique - Onde de Rayleigh- $(Im(v)/x_1)[Re(v)/x_1]$	137
Figure 49 : Cylindre élastique - Ondes de type ℓ_1 - $Re(v(x_1)) x_1 \in [0;30]$	138
Figure 50 : Cylindre élastique - Ondes de type ℓ_1 - $Re(v(x_1)) x_1 \in [0;100]$	138
Figure 51 : Cylindre élastique - Ondes de type ℓ_1 - $Re(v(x_1)) - x_1 \in [0;1000]$	139
Figure 52 : Cylindre élastique - Ondes de Brekhovskih- $Im(v(x_1)) - x_1 \in [0;100]$	139
Figure 53 : Cylindre élastique - Ondes de Brekhovskih- $Im(v(x_1)) - x_1 \in [0;1000]$	140
Figure 54 : Cylindre élastique - Ondes de Brekhovskikh- $(Im(v)/x_1)[Re(v)/x_1]$	140
Figure 55 : Cylindre élastique - Onde de Rayleigh- $E^{(e)}(x_1)$	141
Figure 56 : Cylindre élastique -Ondes de type $\ell_2 - Re(v(x_1))$	148
Figure 57 : Cylindre élastique -Ondes de type $\ell_2 - Im(v(x_1))$	149
Figure 58 : Cylindre élastique -Ondes de type $\ell_2 - [Im(v)/x_1]/(Re(v)/x_1)$	149
Figure 59 : Comparaison cylindre élastique, cylindre fluide -Ondes de type $\ell_2 - Re(v(x_1))$	151
Figure 60 : Comparaison cylindre élastique, cylindre fluide -Ondes de type $\ell_2 - Im(v(x_1))$	151
Figure 61 : Cylindre élastique 4 premières ondes de type $\ell_2 - P_{\ell_2}(\varphi)$ $x_1=30, r/a=5$	157
Figure 62 : Cylindre élastique - Ondes F_2 à $F_7 - P_{\ell_2}(\varphi) - x_1=30, r/a=5$...	157

Figure 63 : Cylindre élastique - Ondes de Rayleigh, B1, B2 et B3 - $ \beta (x_1)$, $x_1 \in [0;100]$	157
Figure 64 : Cylindre élastique - B4, B5, B6 et B7 - $ \beta (x_1)$, $x_1 \in [0;100]$	158
Figure 65 : Cylindre élastique - Ondes de type ℓ_1 - $ \beta (x_1)$, $x_1 \in [0;1000]$	158
Figure 66 : Cylindre élastique - Ondes réfléchie, de Rayleigh, B1, B4 et B6 - $P_{\ell_1}(\varphi)$ $x_1=30$, $r/a=5$	159
Figure 67 : Cylindre élastique - Ondes B2, B3 et B5 - $P_{\ell_1}(\varphi)$ $x_1=30$, $r/a=5$	159
Figure 68 : Cylindre élastique - Pression résultante - $x_1=30$, $r/a=5$	160
Figure 69 : Cylindre élastique - Pression résultante de la somme des ondes réfléchie et de Rayleigh - $x_1=30$, $r/a=5$	162
Figure 70 : Cylindre élastique - Pression d'onde réfléchie (coefficients plan et cylindrique), $x_1=30$, $r/a=5$	164
Figure 71 : Cylindre élastique - Coefficient de réflexion $x_1=30$	165
Figure 72 : Cylindre élastique - Coefficient de réflexion $x_1=50$	165
Figure 73 : Cylindre élastique - Coefficient de réflexion $x_1=100$	166
Figure 74 : Cylindre élastique - Coefficient de réflexion $x_1=1000$	166
Figure 75 : Cylindre élastique - Pression résultante (calculée avec un coefficient de réflexion cylindrique) - $x_1=30$, $r/a=5$	167
Figure 76 : Cylindre élastique - Pression résultante - $x_1=15$, $r/a=5$	168
Figure 77 : Cylindre élastique - Indice de réflectivité - $x_1=30$ - $r/a=5$. 170	
Figure 78 : Trajet d'une onde géométrique - notations.	178
Figure 79: Trajet d'une onde géométrique - $\alpha \in I_1$	179
Figure 80 : Trajet d'une onde géométrique - $\alpha \in I_2$	182
Figure 81: Trajet d'une onde géométrique - $\alpha \in I_4$	184
Figure 82 : Tube élastique : Coefficient de dispersion.	188

Figure 82 : Tube élastique - Pression due aux ondes géométriques - $x_1 = 100$ - $r/a=5$	201
Figure 83 : Tube élastique - pression diffractée par le tube.....	203
Figure 84 : Tube élastique - Onde $\ell=1$ - $v(b/a)$ - $x_1=15$	220
Figure 85 : Tube élastique - Onde $\ell=1$ - $v(b/a)$ - $x_1=100$	220
Figure 86: Tube élastique - Onde $\ell=2$ - $v(b/a)$ - $x_1=15$	221
Figure 87 : Tube élastique - Onde $\ell=2$ - $v(b/a)$ - $x_1=100$	221
Figure 88 : Tube élastique - Onde $\ell=3$ - $v(b/a)$ - $x_1=15$	222
Figure 89 : Tube élastique - Onde $\ell=3$ - $v(b/a)$ - $x_1=100$	222
Figure 90 : Tube élastique - Ondes de type ℓ_1 - $\text{Re}(v(x_1))$	227
Figure 91: Tube élastique - Ondes de type ℓ_1 - $\text{Im}(v(x_1))$	227
Figure 92 : Tube élastique - Ondes de type ℓ_1 - $[\text{Im}(v)/x_1](\text{Re}(v)/x_1)$. .	228
Figure 93 : Tube élastique - Onde $\ell = 1$ - $[\text{Im}(v)/x_1](\text{Re}(v)/x_1)$	228
Figure 94 : Tube élastique - Onde $\ell = 2$ - $[\text{Im}(v)/x_1](\text{Re}(v)/x_1)$	229
Figure 95 : Tube élastique - Onde $\ell = 3$ - $[\text{Im}(v)/x_1](\text{Re}(v)/x_1)$	229
Figure 96 : Tube élastique - Onde $\ell = 1$ - $\text{Im}(v)(x_1)$	230
Figure 97 : Tube élastique - Onde $\ell = 2$ - $\text{Im}(v)(x_1)$	230
Figure 98: Tube élastique - Evolution de $ \beta $ en fonction du paramètre τ^L	234
Figure 99 : Tube élastique - Trajectoire des ondes de Franz lorsque b/a varie $x_1=5$	237

Figure 100 : Tube élastique : onde $F_1-v(b/a) - x_1=5$	238
Figure 101 : Tube élastique - onde $F_2 - v(b/a) - x_1=5$	238
Figure 102 : Tube élastique - onde $F_3 - v(b/a) - x_1=5$	239
Figure 103 : Tube élastique - onde $\ell_0 - v(b/a) - x_1=15$	239
Figure 104 : Tube élastique - Ondes de type $\ell_2 - \text{Im}(v)(x_1)$	243
Figure 105 : Tube élastique - Ondes de type $\ell_2 - \text{Im}(v)(x_1) - x_1<16$	243
Figure 106 : Tube élastique - Ondes de type $\ell_2 - \text{Re}(v)(x_1)$	244
Figure 107 : Tube élastique - Ondes de type $\ell_2 - \text{Re}(v)(x_1) - x_1<16$	244
Figure 108 : Tube élastique - Ondes de type $\ell_2 -$ [$\text{Im}(v(x_1))$]($\text{Re}(v(x_1))$)	245
Figure 109 : Tube élastique - Ondes de type $\ell_2 - [\text{Im}(v(x_1))](\text{Re}(v(x_1))) -$ (développement convergent)	245
Figure 110 : Tube élastique -Ondes de type $\ell_1 - \beta(x_1) - x_1<600$	247
Figure 111 : Tube élastique -Ondes de type $\ell_1 - \beta(x_1) - x_1<100$	248
Figure 112 : Tube élastique -Ondes de type $\ell_1 - \text{coeff. d'excitation}(x_1) -$ $x_1<1000$	248
Figure 113 : Tube élastique - Ondes de type $\ell_2 - \beta(x_1)$	249
Figure 114 : Tube élastique : Ondes circonférentielles et onde réfléchie - $P(\varphi)$	249
Figure 115 Tube élastique : Ondes circonférentielles + onde réfléchie - $P_{\text{totale}}(\varphi)$	250
Figure 116 : Tube élastique - $P_{\text{diff.}}(\varphi)$	254
Figure 117 : Tube élastique - $P_{\text{diff.}}(\varphi)$ avec et sans la pression due aux ondes géométriques.....	254
Figure 118.....	281
Figure 119.....	281
Figure 120.....	282
Figure 121.....	282

Figure 122.....	283
Figure 123.....	284
Figure 124.....	284
Figure 125.....	285
Figure 126.....	285
Figure 127.....	286
Figure 128.....	286
Figure 129.....	287
Figure 130.....	287
Figure 131.....	288
Figure 132.....	288
Figure 133.....	289
Figure 134.....	289
Figure 135.....	290
Figure 136.....	290
Figure 137.....	291
Figure 138.....	291
Figure 139.....	292
Figure 140.....	292
Figure 141.....	293
Figure 142.....	293
Figure 143.....	294
Figure 144.....	294
Figure 145.....	295
Figure 146.....	295
Figure 147.....	296
Figure 148.....	296

Bibliothèque Universitaire de Valenciennes



00904892