



HAL
open science

Arithmétique floue phi-calcul : applications à la classification et à la commande

Hakim Lamara

► **To cite this version:**

Hakim Lamara. Arithmétique floue phi-calcul : applications à la classification et à la commande. Automatique / Robotique. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, UVHC, (France), 2007. Français. NNT : 2007VALE0038 . tel-02998162

HAL Id: tel-02998162

<https://uphf.hal.science/tel-02998162v1>

Submitted on 10 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



LAMIH
LABORATOIRE
D'AUTOMATIQUE
DE MECANIQUE ET
D'INFORMATIQUE
INDUSTRIELLES
ET HUMAINES

N° d'ordre : 07/38

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Mention Automatique

Spécialité Automatique et Génie Informatique

par

Hakim LAMARA

Ingénieur de l'Université de Tizi-Ouzou

**Arithmétique floue φ -calcul : applications à la
classification et à la commande**

Soutenue le 18 décembre 2007 devant la commission d'examen :

M.	Hichem	MAAREF	Pr., LSC, Université d'Evry Val d'Essonne	(rapporteur)
Mme.	Mylène	MASSON	Hdr., Université de Picardie Jules Verne	(rapporteur)
M.	Thierry Marie	GUERRA	Pr., Université de Valenciennes	(directeur)
M.	Bernard	RIERA	Pr., Université de Reims Champagne-Ardenne	(examineur)
M.	Dominique	ROGER	MdC., Université de Valenciennes	(co-directeur)
M.	Laurent	VERMEIREN	MdC., Université de Valenciennes	(co-directeur)

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES
ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Mention Automatique

Spécialité Automatique et Génie Informatique

Par

Hakim LAMARA

Ingénieur de l'Université de Tizi-Ouzou



Arithmétique floue ϕ -calcul : applications à la classification et à la commande

Soutenue le 18 décembre 2007 devant la commission d'examen :

M.	Hichem	MAAREF	Pr., LSC, Université d'Evry Val d'Essonne	(rapporteur)
Mme.	Mylène	MASSON	Hdr., Université de Picardie Jules Verne	(rapporteur)
M.	Thierry Marie	GUERRA	Pr., Université de Valenciennes	(directeur)
M.	Bernard	RIERA	Pr., Université de Reims Champagne-Ardenne	(examineur)
M.	Dominique	ROGER	MdC., Université de Valenciennes	(co-directeur)
M.	Laurent	VERMEIREN	MdC., Université de Valenciennes	(co-directeur)

À Yann, la plus belle chose qui m'est arrivée !

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord Patrick MILLOT, ancien directeur du L.A.M.I.H. (Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique, industrielles et Humaines) et actuel vice-président de l'Université de Valenciennes chargé de la recherche, d'avoir accepté de m'accueillir au sein du L.A.M.I.H.

Pour ces quelques années passées chez les ch'ti, je tiens à remercier vivement toute l'équipe MCS.

Commençons par les chefs :

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Dominique ROGER « le père » de l'arithmétique φ -calcul avec qui, en aussi peu de temps, j'ai appris plein de choses même sur ma culture d'origine (thinariwen et les histoires de djeha). Je profite de cette occasion pour faire un clin d'œil à Jean-Marc LECOMTE et Cyril LAULLIER, les initiés au φ -calcul que je n'ai pas connus.

Merci également à Monsieur Laurent VERMEIREN (« lolo » pour les stagiaires en Master recherche) le flamand belge ch'ti... et quoi encore, intraitable quant il s'agit d'informatique et de programmation, tout le temps souriant et optimiste. Mille merci pour ton aide précieuse, pour ton soutien permanent et ton optimisme dans les moments de doute (« oui c'est sûr ça va marcher, j'ai aucun doute la dessus, je suis convaincu, ... »).

Je remercie le Big Boss Thierry-Marie GUERRA (TMG), Professeur première classe s.v.p. (avec un « h number » qui va exploser dans les prochaines années, je n'en ai aucun doute), et directeur adjoint du L.A.M.I.H. de m'avoir accueilli dans son équipe. Sans lui cette thèse n'aurait sûrement jamais aboutie. Quel finish ! Merci pour ce sprint final impressionnant. Respect pour tes valeurs humaines et intellectuelles, j'ai beaucoup appris en te côtoyant.

Passons aux permanents :

Sébastien Delprat avec qui j'ai commencé ma thèse, merci pour toutes les idées que tu m'as donné en programmation, je t'appellerai toujours Monsieur Matlab Simulink, respect. A Jimmy, le fonctionnaire chercheur très efficace avec qui j'ai eu la chance de faire mon DEA. Sans oublier François le seul et l'unique, et Michel le futur chef. Je n'oublie pas tous ceux qui travaillent dans l'équipe et qui nous rendent nos tâches plus faciles, Richard, Gérard, Philippe, et les secrétaires Mélanie, Isabelle et Marie-Claude. Merci également à Salim Labiod, Maître de Conférences à l'Université de Jijel en Algérie.

Les docteurs (oh qu'ils sont nombreux !...) et la relève :

Pierrot, « le fou » et le beau gosse de l'équipe toujours bien habillé (la classe !), Alexandrovitch le matheux bien heureux au milieu de plein de matrices qui serviront (je l'espère) un jour à quelques chose de concret, mon compatriote Djamel l'éternel célibataire et joueur de scrabble (de préférence avec les filles), Jérôme, « djédjé le ouf » pour les intimes, je te dis bon courage pour ton exil suisse (tu paieras moins d'impôts c'est déjà ça de gagné !),

À Yann, la plus belle chose qui m'est arrivée !

enfin ceux qui ont pris la relève, El Hadi un autre compatriote, francisé « Gérard », merci au chef de t'avoir donné un prénom qui colle vraiment à ta personnalité (je suis presque sûr que si tu étais né en France tes parents t'auraient donné ce prénom), Souad la supportrice de l'Olympique Lyonnais ! C'est bizarre ! à Hichem qui commence tout juste, je te dis courage la route est encore longue mais tu es entre de bonnes mains, enfin à Mohammed mon capitaine (c'est vrai je ne rigole pas !).

J'ai faillit oublier le Mexicain Miguel, quelle connerie de ma part, je t'invite en Kabylie pour rencontrer plein de moutons héroïques à quatre cornes, ils aiment les mexicains !!!

Et puis les Fourmies :

Je ne peux oublier les stagiaires qui passent au fil des années au sein de l'équipe, dont Hamza avec qui j'ai bidouillé les premiers programmes de la thèse. Un clin d'œil particulier à l'équipe de choc, Sabrina la « méchante » (En réalité c'est la ch'ti la plus timide), Sébastien dit « Jésus » à cause de sa concentration permanente (il médite toute la journée). Que dire du phénomène Pernelle ! (Olive pour les intimes !) Je n'arrive pas à trouver des mots pour la remercier pour son humour décalé et unique pour une fille.

Sans oublier :

Les familles Guerra (Murielle et Jérémie, mille mercis pour votre gentillesse et votre accueil), les Delprat (Sonia et les petits), la tribu Lauber (Séverine, les enfants, et Jim, n'oublie pas de former un grand footballeur dans la famille, il paraît qu'un footballeur gagne beaucoup de tunes !), les Delmotte (Florence, et la petite qui arrive, d'avance toutes mes félicitations). Enfin, la famille Vermeiren, pour laquelle je présente ici mes sincères remerciements pour avoir supporté les rentrées tardives de Lolo (surtout les derniers mois de thèse).

Enfin :

Merci à tous mes amis, le clan des kamel ; Papa Fateh et sa famille (je n'oublierais jamais tout ce que tu as fait pour moi), Djamel (« nagh fihell ! ») et toute la famille, monsieur Zenine en voilà un autre célibataire ! Aberdache le nerveux, Mathieu l'amateur de schnaps comme moi, TNT qui tire sur tout ce qui bouge, et enfin Karim le futur sans papiers avec qui j'ai passé beaucoup de temps à Valenciennes.

Dédicace :

Enfin à celle qui a supporté mes absences et qui n'a cessé de me soutenir et de m'encourager tout au long de cette aventure. À mes parents, et à toute ma famille. Enfin, une pensée particulière et un grand hommage à mon grand père qui a tout fait pour que je vienne en France.

Table des matières

<i>Introduction générale</i>	- 10 -
<i>Chapitre 1 : Généralités sur les quantités floues</i>	- 14 -
1. Introduction	- 15 -
2. Modélisations des incertitudes et imprécisions	- 16 -
2.1. Modélisation par intervalles _____	- 17 -
2.2. Modélisation floue _____	- 19 -
2.3. Fuzzification/Défuzzification _____	- 29 -
3. Arithmétique des intervalles et des nombres flous	- 33 -
3.1. Arithmétique des intervalles _____	- 33 -
3.2. Arithmétique des nombres flous _____	- 36 -
4. Métrique sur les quantités incertaines et imprécises	- 38 -
4.1. Métrique dans \mathbb{IR} _____	- 39 -
4.2. Métrique floue _____	- 39 -
5. Fusion de données	- 40 -
5.1. Modèle probabiliste _____	- 41 -
5.2. Fusion floue et possibiliste _____	- 41 -
5.3. Modèle des fonctions de croyance _____	- 43 -
6. Conclusion	- 44 -
<i>Chapitre 2 : Arithmétique ϕ-calcul</i>	- 46 -
1. Introduction	- 48 -
2. Modélisation des nombres flous	- 49 -
2.1. Modélisation par une fonction de répartition _____	- 49 -
2.2. Réalisation et extension floue _____	- 51 -
3. Arithmétique ϕ-calcul	- 53 -
3.1. Opérations élémentaires _____	- 53 -
3.2. Arithmétique floue sous contraintes _____	- 63 -
3.3. Fonctions monotones réelles de variables floues _____	- 64 -
3.4. Exemple d'application _____	- 66 -
3.5. Recherche de solutions dites « approchées » ou « exactes » _____	- 68 -
4. Métrique sur Φ	- 71 -
4.1. Indices métriques _____	- 71 -
4.2. Quantité floue contenue dans un nombre flou _____	- 73 -

5. Fusion de quantités floues.....	- 76 -
5.1. Moyenne floue pondérée.....	- 76 -
5.2. Fusion floue pondérée.....	- 76 -
5.3. Exemple Fusion/moyenne floue pondérée.....	- 77 -
6. Conclusion.....	- 77 -
Chapitre 3 : ϕ-calcul et la classification.....	- 80 -
1. Introduction.....	- 81 -
2. Classification ascendante hiérarchique.....	- 82 -
2.1. Principe.....	- 82 -
3. Fuzzification et ordonnancement de données par le ϕ-calcul.....	- 84 -
4. Applications.....	- 89 -
4.1. Filtrage numérique du signal.....	- 89 -
4.2. Ordonnancement de listes.....	- 92 -
4.3. Fuzzification et classification de données du crâne humain.....	- 98 -
4.4. Fuzzification et classification d'étudiants.....	- 101 -
5. Conclusion.....	- 106 -
Chapitre4 : Applications à la commande à Modèle interne.....	- 108 -
1. Introduction.....	- 109 -
2. Modèles de récurrence flous pour les systèmes discrets.....	- 109 -
2.1. Modèles linéaires.....	- 110 -
2.2. Utilisation pour le calcul d'une loi de commande.....	- 113 -
2.3. Limitations de l'approche.....	- 116 -
3. Commande à Modèle Interne.....	- 117 -
3.1. Rappels.....	- 117 -
3.2. Analyse de la commande à modèle interne (CMI).....	- 118 -
3.3. Inversion de modèle.....	- 119 -
3.4. Calcul inversible « exact ».....	- 122 -
3.5. Commande à modèle interne flou.....	- 128 -
4. Exemple d'application en temps réel.....	- 129 -
4.1. Système étudié.....	- 129 -
4.2. CMI du système à deux cuves.....	- 130 -
5. Conclusion.....	- 134 -

Chapitre 5 : Vers d'autres applications	- 136 -
1. Introduction	- 137 -
2. Fonctions réelles de variables floues	- 137 -
2.1 Fonctions usuelles _____	- 138 -
2.2 Étude d'une fonction polynômiale _____	- 140 -
2.3 Les fonctions trigonométriques _____	- 141 -
3. Nombres complexes flous	- 145 -
3.1 Extension du calcul par intervalles aux nombres complexes _____	- 145 -
3.2 Extension du calcul flou aux nombres complexes _____	- 147 -
3.3 Nombres complexes flous et φ -calcul _____	- 148 -
3.4 Coordonnées polaires _____	- 149 -
3.5 Résolutions possibles d'une équation du second ordre _____	- 152 -
4. Conclusion	- 154 -
Conclusion Générale	- 156 -
Bibliographie	- 160 -
Table des Illustrations	- 174 -

Introduction générale

Les connaissances dont nous disposons sur une situation quelconque sont souvent imparfaites soit parce que nous avons un doute sur leur validité, elles sont alors *incertaines*, soit parce que nous éprouvons une difficulté à les exprimer clairement, elles sont alors *imprécises*.

Pour formaliser et prendre en charge ces imperfections dans les traitements, plusieurs techniques ont été développées depuis déjà des décennies. La première d'entre elles est sans doute la théorie des probabilités. Ont suivies, la théorie des intervalles [Moore, 1966], et celle des sous-ensembles flous [Zadeh, 1965] qui connaissent encore aujourd'hui des développements importants (applications industrielles et production scientifique liées à ces deux théories). La théorie des possibilités qui dérive de cette dernière (une distribution de possibilité peut être vue comme la fonction d'appartenance de l'ensemble flou des éléments possibles pour la solution cherchée), est présentée comme un cadre alternatif pour représenter des informations incertaines. Elle permet de représenter à la fois l'imprécision et l'incertitude d'un évènement, par l'intermédiaire de possibilités et de deux fonctions le caractérisant, à savoir, une mesure de possibilité et une mesure de nécessité [Dubois & Prade, 1988b]. Une autre théorie dite de Dempster-Shafer est la théorie de l'évidence [Shafer, 1976], pour laquelle une distribution de probabilité et une distribution de possibilité sont deux corps d'évidence particuliers.

Les travaux présentés dans ce mémoire sont basés essentiellement sur les ensembles et quantités floues, lesquels sont généralement représentés par une fonction d'appartenance. Cette dernière possède plusieurs formes différentes (triangle, trapèze, L-R, gaussienne, ...) dont le choix subjectif est souvent laissé à l'utilisateur. Dans ce cadre, plusieurs travaux existent et discutent du choix de la forme de la fonction d'appartenance la plus adéquate pour représenter l'incertitude et l'imprécision.

La proposition, faite et discutée, dans ce mémoire est de représenter un nombre, intervalle ou quantité floue, par une fonction de forme unique appelée fonction de répartition. Ce choix de représentation n'est pas fortuit, celle-ci est issue des fonctions en escalier utilisées couramment dans les statistiques classiques. Sans rentrer dans la discussion des liens qui existent entre la théorie des probabilités et celle des possibilités, nous proposons une arithmétique liée à cette représentation. Elle est cohérente avec celle des intervalles et du calcul flou utilisant des représentations usuelles.

Dans ce mémoire, pour faciliter la tâche des utilisateurs de la modélisation floue dans le choix d'une fuzzification (choix des fonctions d'appartenances) dans un certain nombre de problèmes pratiques, une proposition de fuzzification de données imprécises à l'aide d'un opérateur de fusion est faite et étayée par des exemples didactiques.

Cette thèse s'appuie sur une base théorique existante [Roger & al., 1998]. Elle a été améliorée par la proposition de nouveaux opérateurs, de calcul « exact » par exemple et de fusion. Elle a également abouti à la réalisation d'une bibliothèque complète associée à cette algèbre sous l'environnement MATLAB. Elle est organisée de la manière suivante :

Le premier chapitre concerne un rappel bibliographique d'un ensemble de travaux existants dans la littérature sur le sujet. Il est scindé en plusieurs paragraphes ; le premier, concerne un rappel détaillé de différentes modélisations des incertitudes et d'imprécisions les plus utilisées dans la littérature, de la modélisation par intervalles, de la modélisation floue à la théorie des possibilités. Le deuxième paragraphe, quant à lui, est réservé à la présentation des différentes arithmétiques de calcul utilisant ces genres de modélisation. Dans le troisième, on présente quelques indices et métriques associés. Enfin, dans la perspective de présenter un nouvel opérateur de fusion, le chapitre se termine par un rappel succinct des méthodes de fusion de données imprécises existantes dans la littérature.

Le deuxième chapitre garde la même trame que le premier, pour présenter une autre façon de modéliser les nombres et quantités floues appelées φ -calcul. La recherche de solutions approchées avant défuzzification sera également abordée pour faciliter le processus décisionnel à partir de résultats flous. Ce chapitre se termine par la présentation d'une technique de fusion de quantités floues. Cette dernière appelée fusion floue pondérée et notée *WFF* (Weighted Fuzzy Fusion) possède un double intérêt. Le premier concerne son utilisation comme opérateur de fusion de quantités floues représentées par leur fonction de répartition cumulée gardant ainsi la sémantique des unes et des autres. Le second concerne son utilisation comme opérateur de fuzzification afin de construire à partir de données réelles imprécises et incertaines, un nombre ou une quantité floue regroupant ainsi une distribution cohérente des différentes données.

Le chapitre 3 concerne des applications des outils de la métrique proposée à partir du φ -calcul et de la notion de fusion floue pondérée. Ces applications concernent une petite partie au filtrage et sont principalement utilisées pour l'analyse de données. Un ensemble d'exemples didactiques est donné avec des comparaisons de résultats obtenus par des

méthodes usuelles. Enfin, un exemple de traitement des données objectives et subjectives sera présenté, illustré par un exemple sous forme d'un questionnaire sur la mémoire.

Le chapitre 4 s'intéresse à la possibilité d'appliquer le φ -calcul à l'automatique au sens de la commande. Le premier point abordé est le passage d'une équation de récurrence à coefficients réels à des coefficients sous forme de nombres flous. À partir d'une synthèse classique de type RST on peut alors déterminer de façon aisée sa version floue par φ -calcul. Néanmoins cette approche « directe » entraîne des surestimations qui nous semblent injustifiées dans ce contexte. Ceci est dû à l'utilisation des opérations arithmétiques du φ -calcul. Pour éviter ces surestimations, une procédure de calcul dit « exact » est proposée, afin d'obtenir un modèle inverse « exact ». Cette procédure permet alors d'envisager toutes les techniques basées sur la commande à modèle interne. Différents exemples illustrent ces points et une application temps réel sur un système de cuves couplées est également décrite.

Le dernier chapitre propose alors des pistes pour l'extension du φ -calcul et quelques perspectives. Ces extensions concernent le calcul de l'image d'un nombre flou par des fonctions réelles à variables floues et la proposition d'une définition de nombres complexes flous.

Au cours de ce mémoire, à chaque fois que le contexte l'exigera, un bref rappel bibliographique sera présenté pour cerner d'une manière générale les travaux existants dans la littérature.

Chapitre 1 : Généralités sur les quantités floues

1. Introduction	- 15 -
2. Modélisations des incertitudes et imprécisions.....	- 16 -
2.1. Modélisation par intervalles	- 17 -
2.2. Modélisation floue.....	- 19 -
2.2.1. Notions de sous-ensembles flous.....	- 19 -
2.2.2. t-normes, t-conormes.....	- 25 -
2.2.3. Représentation des nombres flous	- 27 -
2.3. Fuzzification/Défuzzification	- 29 -
2.3.1. Fuzzification.....	- 30 -
2.3.2. Défuzzification.....	- 31 -
3. Arithmétique des intervalles et des nombres flous.....	- 33 -
3.1. Arithmétique des intervalles	- 33 -
3.1.1. Propriétés algébriques	- 33 -
3.1.2. Extension des fonctions élémentaires.....	- 35 -
3.1.3. Évaluation d'une expression.....	- 35 -
3.2. Arithmétique des nombres flous	- 36 -
3.2.1. La méthode du Principe d'extension flou.....	- 36 -
3.2.2. Arithmétique floue basée sur les intervalles	- 36 -
3.2.3. La méthode des fronts	- 37 -
4. Métrique sur les quantités incertaines et imprécises.....	- 38 -
4.1. Métrique dans \mathbb{IR}	- 39 -
4.2. Métrique floue.....	- 39 -
5. Fusion de données.....	- 40 -
5.1. Modèle probabiliste.....	- 41 -
5.2. Fusion floue et possibiliste	- 41 -
5.3. Modèle des fonctions de croyance	- 43 -
6. Conclusion.....	- 44 -

1. Introduction

Le raisonnement humain s'appuie fréquemment sur des connaissances et des données inexactes, incertaines ou imprécises. Si les outils de l'automatique ont permis de résoudre technologiquement un grand nombre de problèmes, il reste toujours des zones d'ombre. C'est notamment le cas quand l'Homme reste dans la boucle de commande et/ou quand les informations disponibles sont parcellaires, manquantes, incertaines ... Les outils standard sont alors souvent inadaptés au traitement de ces informations.

Les théories traitant l'imprécis et l'incertain peuvent être une bonne alternative pour prendre en compte ces différents problèmes. L'ensemble de la thèse se focalise sur l'utilisation d'une nouvelle arithmétique floue à différents problèmes allant de la classification à la commande. Ce chapitre essaye de faire un rapide tour d'horizon autour de la modélisation des incertitudes et des imprécisions. Il présente quelques méthodes de modélisation, de calcul, des métriques et des techniques de fusion de quantités floues existantes dans la littérature.

La structure proposée pour ce chapitre annonce celle du chapitre 2, lequel présente en détail les différents travaux réalisés dans le cadre de cette thèse. Ainsi, celui-ci est organisé de la manière suivante :

Le paragraphe 2 sera consacré au rappel des différentes modélisations conventionnelles : modélisation par la théorie des probabilités et la théorie possibiliste, par intervalles et la modélisation floue.

Dans le paragraphe 3, différentes méthodes de calcul proposées, des plus anciennes comme le calcul par intervalles et le principe d'extension flou de Zadeh [Zadeh 1978] aux plus récentes comme la méthode des fronts [Dubois & al., 2004] sont présentées.

Le paragraphe 4, quant à lui, est consacré à la présentation des métriques associées au calcul par intervalle et au calcul flou. Enfin, le dernier paragraphe donne un aperçu succinct des méthodes de fusion de données imprécises. Ce point est développé au chapitre 2 avec l'arithmétique mise en œuvre.

2. Modélisations des incertitudes et imprécisions

Ce paragraphe propose un tour d'horizon des différents outils mathématiques permettant la modélisation des incertitudes et des imprécisions. Un rappel de ces deux notions est impératif du fait de la confusion qui existe souvent dans la littérature.

Par définition, la notion d'incertitude est un qualificatif qui s'applique à des éléments de connaissance ou à une information dont la valeur de vérité n'est pas exactement connue, et caractérise son degré de conformité à la réalité (l'incertitude fait référence à la véracité de l'information) [Dubois & Prade, 1988a].

Par contre la notion d'imprécision, par définition, s'applique à des éléments de connaissance dont le contenu est imprécis [Dubois & Prade, 1988a]. Lorsqu'on dit « *il fera probablement beau demain* » est une connaissance incertaine basée sur la prévision météorologique. En revanche, dire par exemple « *lolo mesure environ 180 cm* » est un élément de connaissance imprécis car cette information ne nous donne pas avec exactitude combien mesure lolo ? En combinant les deux exemples on obtient « *il est probable que lolo mesure 180 cm* », dans ce cas la notion mise en œuvre relève de l'incertain et pas de l'imprécis, ce qui rend ces deux notions liées [Firas, 1997].

Pour prendre en compte ces deux concepts, différentes approches ont été développées : l'approche probabiliste (raisonnement bayésien), la théorie des intervalles, la logique floue, et aussi la théorie des possibilités. La première est l'une des plus anciennes et est appliquée dans plusieurs domaines tels que le diagnostic et la prise de décision [Firas, 1997]. La dernière est liée en partie à la première en généralisant une probabilité par deux mesures, de possibilité et de nécessité. Le degré de possibilité peut être ainsi vu comme une borne supérieure d'une probabilité incertaine [Dubois, 2006]. La théorie des possibilités est bien évidemment liée à celle des nombres flous, qui occupe le cœur de nos recherches. Ce chapitre présente donc un aperçu des deux autres approches : la modélisation et le calcul par les intervalles d'une part et la modélisation et le calcul en utilisant les sous ensembles flous d'autre part. C'est sur cette dernière approche qu'est basée l'arithmétique ϕ -calcul présentée dans le cadre de ce travail (cf. chapitre 2).

Les deux approches présentées dans ce chapitre ont connu un essor considérable ces dernières années et connaissent encore un développement très important grâce notamment aux nouveaux moyens de calculs numériques et à la puissance des solveurs.

2.1. Modélisation par intervalles

Pour une grande partie de la communauté, c'est le Professeur Ramon E. Moore, en 1966 [Moore, 1966], après la publication des premiers travaux réalisés avec C.T. Yang en 1959 [Moore & Yang, 1959], qui mentionna et publia de façon détaillée l'approche de l'arithmétique par intervalles, en donnant une algèbre complète dédiée au calcul par intervalles. D'autres chercheurs citent aussi les travaux de T. Sunaga datés de 1958 [Sunaga, 1958], traitant également des fondements de l'arithmétique par intervalles, ou ceux de Rosalind Cecil Young qui aurait proposée cette arithmétique dans sa thèse de doctorat à l'Université de Cambridge en 1931 [Young, 1931 ; Hayes, 2003].

Dans la littérature, des travaux récents utilisent cette algèbre pour résoudre des problèmes divers. Par exemple en automatique : cette algèbre est utilisée dans les domaines de l'identification, de l'observation, de la commande et du diagnostic [Ragot et al., 2006]. Aujourd'hui, toute une communauté scientifique travaille dans ce domaine et développe de nouvelles méthodes de calcul ainsi que des logiciels (à titre d'exemple la boîte à outils Matlab intitulée INTLAB [Rump, 1999]) et de solveurs pour différentes applications y compris industrielles. Dans ce cadre, un Groupe de Travail sur les Méthodes Ensemblistes (GT MEA) du GDR MACS du CNRS existe depuis une dizaine d'année et a pour objet de proposer des outils et de les appliquer en particulier à l'automatique : analyse de la stabilité, estimation paramétrique, et aussi en sûreté de fonctionnement, pour le diagnostic et les systèmes dynamiques hybrides [Jaulin & Walter, 2005].

La représentation par intervalles ne manipule plus des nombres qui approchent plus ou moins fidèlement une valeur, mais des intervalles contenant cette valeur. Par exemple, il est possible de tenir compte d'une erreur de mesure en remplaçant une valeur mesurée x avec une imprécision par l'intervalle $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ (cf. définition 2.2). En effet, l'objectif de l'arithmétique par intervalles est de fournir des résultats qui contiennent à coup sûr la valeur ou l'ensemble cherché, souvent appelés résultats garantis, validés ou encore certifiés.

Comme cela a été implicitement admis jusqu'à présent, les intervalles sont des sous-ensembles fermés connexes de \mathbb{R} . On notera \mathbb{IR} l'ensemble des intervalles définis sur \mathbb{R} . Il est possible de les généraliser en plusieurs dimensions : un vecteur intervalle $x \in \mathbb{IR}^n$ est un vecteur dont les n composantes sont des intervalles et une matrice intervalle $A \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ est une matrice dont les composantes sont des intervalles. L'ensemble des principales définitions est rappelé ci-après.

Définition 2.1 [Moore, 1966] Un intervalle $[x]$ de \mathbb{IR} ou intervalle réel est un sous-ensemble connexe fermé et borné de \mathbb{R} , défini par :

$$[x] = \{x / x \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} \quad (1.1)$$

avec \underline{x} la borne inférieure et \bar{x} la borne supérieure.

Un nombre ordinaire a (ou nombre classique, ou exact) est identifié par l'intervalle $[a, a]$, l'ensemble des réels \mathbb{R} est un sous-ensemble de \mathbb{IR} .

Définition 2.2 La largeur ou le diamètre d'un intervalle est défini par :

$$w([x]) = \bar{x} - \underline{x} \quad (1.2)$$

Définition 2.3 Le centre *mid* d'un intervalle et son rayon *rad* sont définis par :

$$mid([x]) = \frac{\bar{x} + \underline{x}}{2} \quad (1.3)$$

$$rad([x]) = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2} = \frac{1}{2} w([x]) \quad (1.4)$$

Définition 2.4 [Boukezzoula et al., 2006] La fonction de dispersion relative (*Relative-extent function*) est définie par :

$$Rex([x]) = \frac{Rad([x])}{mid([x])} \quad (1.5)$$

L'intervalle $[x]$ permet une représentation en machine d'un réel x connu avec plus ou moins d'imprécision. Il suffit pour cela que $x \in [x]$. La longueur $w([x])$ de $[x]$ caractérise alors l'imprécision avec laquelle x est connu. Le calcul sur les intervalles permet de généraliser ceux faits sur les nombres réels, afin d'évaluer de façon rigoureuse l'imprécision avec laquelle les quantités manipulées sont connues.

2.2. Modélisation floue

Une autre approche permettant de prendre en compte de manière formelle l'imprécision et l'incertain est la théorie des ensembles flous proposée par Lofti A. Zadeh, en 1965 [Zadeh, 1965]. L'idée originale était de pouvoir adapter à la théorie classique des ensembles des notions vagues et imprécises, rencontrées dans le monde réel. Ces notions sont exprimées en langage naturel comme par exemple les attributs suivants : « souvent », « plusieurs », « le grand », « jeune », etc. « Pour cela, il a introduit la notion de sous-ensemble flou, à partir de l'idée d'appartenance partielle à une classe, de catégorie aux limites mal définies, de gradualité dans le passage d'une situation à une autre, dans une généralisation de la théorie classique des ensembles admettant des situations intermédiaires entre le tout et le rien » [Bouchon Meunier & Marsala, 2003 ; Rocacher, 2005]. Une communauté scientifique s'est constituée dans le monde autour de cette nouvelle théorie, essayant ainsi de développer de nouvelles recherches basées sur les sous-ensembles flous et ses applications. Aujourd'hui, une production scientifique très importante est disponible à travers de nombreux congrès (FUZZ-IEEE, IPMU, IFAC AFNC...) et revues internationales (IEEE Trans. On Fuzzy Systems, Fuzzy Sets and Systems, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems ...). En France, depuis 1992, une manifestation scientifique a lieu et a pour but de débattre des avancées les plus récentes (Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications).

2.2.1. Notions de sous-ensembles flous

Dans la théorie des ensembles, un sous-ensemble A d'un référentiel Ω est classiquement défini par les objets qui le composent. La proposition logique « un objet x appartient au sous ensemble A » est soit vraie, soit fausse (l'objet x appartient ou n'appartient pas à A).

Un sous-ensemble flou est un cadre général qui permet de nuancer cette notion d'appartenance d'un élément à un ensemble. L'objet x est alors membre du sous-ensemble

flou A avec un degré d'appartenance $\mu_A(x) : \Omega \rightarrow [0,1]$. Cette fonction est appelée fonction caractéristique de A et exprime le degré d'appartenance d'un élément quelconque x au sous-ensemble flou A , que l'on note $\mu_A(x)$. Par abus de langage, il est courant de désigner le sous-ensemble A par le terme d'ensemble flou. Un ensemble flou est alors utilisé pour modéliser l'incertitude et les imprécisions dans la connaissance [Dubois & Prade, 1994 ; Dubois & Prade, 1988a] :

- *Incertain* : la fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ est utilisée pour indiquer le degré de vérité de la proposition « x est A ». Dans ce cas, on connaît la valeur de x mais on ne connaît pas à quel ensemble elle appartient; en effet x peut appartenir à plusieurs ensembles avec différents (ou mêmes) degrés d'appartenance. L'ensemble flou modélise alors ici l'aspect *incertain* de la connaissance.
- *Imprécision* : la fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ est une distribution de possibilité dans l'espace de toutes les valeurs possibles de x . Dans ce cas, on connaît l'ensemble (ou les ensembles) auquel appartient x mais on ne connaît pas la valeur exacte de x ; $\mu_A(x')$ représente la possibilité pour que $x = x'$. L'ensemble flou modélise alors ici l'aspect *imprécis* de la connaissance.

La suite donne un bref rappel sur les propriétés et les caractéristiques des sous-ensembles flous.

Définition 2.5 Un ensemble flou \tilde{a} sur un univers du discours X (qui est un intervalle fini ou infini dans lequel l'ensemble flou peut prendre une valeur) est défini par :

$$\tilde{a} = \{(x, \mu_{\tilde{a}}(x)) / x \in X, \mu_{\tilde{a}}(x) \in [0,1]\} \quad (1.6)$$

avec $\mu_{\tilde{a}}(x)$ appelée fonction d'appartenance, donnant le degré d'appartenance de l'élément x à l'ensemble flou \tilde{a} :

- $\mu_{\tilde{a}}(x) = 0$: l'élément x n'appartient pas à l'ensemble flou \tilde{a} .
- $\mu_{\tilde{a}}(x) = 1$: l'élément x appartient totalement à l'ensemble flou \tilde{a} .

Dans le cas où la fonction d'appartenance se réduit aux valeurs $\{0,1\}$, l'ensemble obtenu devient un ensemble « ordinaire » (classique, précis, exact). Les définitions 2.6 à 2.9 rappellent les principales caractéristiques des sous-ensembles flous.

Définition 2.6 Le *support* de \tilde{a} , noté $Supp(\tilde{a})$, désigne l'ensemble des valeurs pour lesquelles $\mu_{\tilde{a}}(x) \neq 0$:

$$Supp(\tilde{a}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{a}}(x) \neq 0\} \quad (1.7)$$

Définition 2.7 La hauteur de \tilde{a} , notée $h(\tilde{a})$, est la valeur maximale de $\mu_{\tilde{a}}$ sur X :

$$h(\tilde{a}) = \max_{x \in Supp(\tilde{a})} [\mu_{\tilde{a}}(x)] \quad (1.8)$$

Un sous-ensemble flou de hauteur 1 est dit normalisé.

Définition 2.8 Le *noyau* de \tilde{a} , noté $Ker(\tilde{a})$, est l'ensemble des valeurs pour lesquelles $\mu_{\tilde{a}}(x) = 1$:

$$Ker(\tilde{a}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{a}}(x) = 1\} \quad (1.9)$$

Tout élément du noyau de \tilde{a} est appelé *valeur modale* de \tilde{a} :

- La *borne inférieure* de \tilde{a} : $\underline{a} = x_{\min}$
- La *borne supérieure* de \tilde{a} : $\bar{a} = x_{\max}$

Définition 2.9 Le cardinal de \tilde{a} est par définition :

$$Card(\tilde{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{a}}(t) dt \quad (1.10)$$

Dans le cas d'un support borné, le sous-ensemble flou est de cardinal fini puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{a}}(t) dt$ converge. Cette remarque sera reprise dans les chapitres suivants, notamment dans la modélisation proposée dans le cadre du ϕ -calcul.

La définition suivante évoque la notion de convexité d'un sous-ensemble flou. Celle-ci est très importante, surtout lorsque les α -coupes (définition 2.11), encore appelés coupes de niveau α ou sous-ensembles de niveau α , sont utilisées.

Définition 2.10 \tilde{a} est dit *convexe* si et seulement si sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{a}}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall (u, v), \forall w \in [u, v], \mu_{\tilde{a}}(w) \geq \text{Min}[\mu_{\tilde{a}}(u), \mu_{\tilde{a}}(v)] \quad (1.11)$$

Définition 2.11 On appelle α -coupe de \tilde{a} l'intervalle noté a_{α} de fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{a}}$ et qui vérifie la relation suivante :

$$a_{\alpha} = \{x \in X / \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\} \quad (1.12)$$

Le sous-ensemble flou \tilde{a} est *semi-continu supérieurement* si et seulement si toutes ses α -coupes a_{α} sont des intervalles fermés.

La définition 2.12 montre qu'un sous-ensemble flou \tilde{a} peut être représenté par ses α -coupes sur l'intervalle $[0, 1]$.

Définition 2.12 Tout sous-ensemble flou \tilde{a} peut être représenté à partir de l'expression de ses α -coupes de la manière suivante :

$$\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{a}}(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \{\alpha \cdot a_{\alpha}\} \quad (1.13)$$

Quelques notions supplémentaires concernant les intervalles flous sont rappelées ci-après [Dubois & Prade, 1988a] :

Une *quantité floue* Q est un sous-ensemble flou de \mathbb{R} , c'est-à-dire une application μ_Q de \mathbb{R} dans $[0, 1]$. Tout nombre réel appartenant au noyau d'une quantité floue Q est appelé une valeur modale de Q .

Il est également montré qu'une quantité floue convexe (définition 2.10) est équivalente à une quantité floue dont les α -coupes sont convexes, c'est-à-dire sont des intervalles (bornés ou non).

Un *intervalle flou* généralise la notion classique d'intervalle, et peut être vu comme une quantité floue convexe. Les intervalles fermés sont étendus à des intervalles flous dont les fonctions d'appartenance sont semi-continues supérieurement.

Un *nombre flou* [Dubois & Prade, 1988a] est un intervalle flou à support compact ne possédant qu'une seule valeur modale. Le terme « nombre flou » est souvent utilisé par abus de langage pour désigner des intervalles flous [Giachetti & Young, 1997]. Les nombres flous sont une façon de décrire l'imprécision et l'incertitude des données. Le concept d'un nombre flou a été employé la première fois dans [Nahmias, 1976] et repris dans [Dubois & Prade, 1978].

La définition 2.13 propose une manière générale de représenter ces intervalles ou nombres flous.

Définition 2.13 [Klir & Yuan, 1995] Un intervalle flou \tilde{a} est représenté par la forme canonique suivante, avec $x \in \mathbb{R}$:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} f_{\tilde{a}}(x) & \text{pour } x \in [a, b[, \\ 1 & \text{pour } x \in [b, c], \\ g_{\tilde{a}}(x) & \text{pour } x \in]c, d], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.14)$$

où $f_{\tilde{a}}$ est une fonction à valeurs réelles, croissante et continue à droite, $g_{\tilde{a}}$ est une fonction à valeurs réelles, décroissante et continue à gauche, et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b \leq c \leq d$ [Klir & Yuan, 1995]. Quand $b = c$, \tilde{a} est un nombre flou.

Les α -coupes d'un intervalle flou \tilde{a} donné par sa forme canonique (1.14) sont pour tout $\alpha \in]0, 1]$:

$$a_{\alpha} = \begin{cases} [f_{\tilde{a}}^{-1}(\alpha), g_{\tilde{a}}^{-1}(\alpha)] & \text{pour } \alpha \in]0, 1], \\ [b, c] & \text{pour } \alpha = 1, \end{cases} \quad (1.15)$$

avec $f_{\tilde{a}}^{-1}$ et $g_{\tilde{a}}^{-1}$ respectivement les fonctions inverses de $f_{\tilde{a}}$ et $g_{\tilde{a}}$.

En résumé, la figure 1 présente quelques illustrations des différentes définitions données ci-dessus.

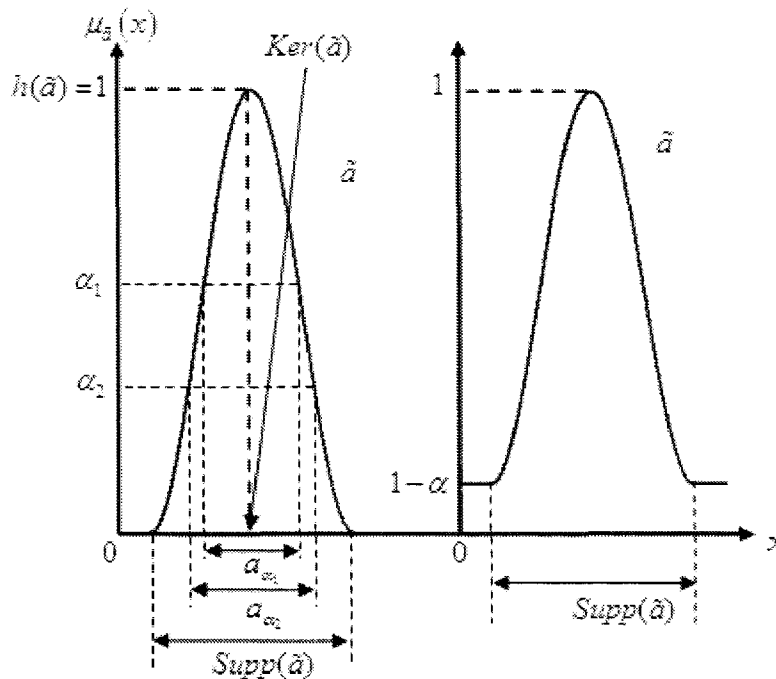


Figure 1 : Caractéristiques d'un ensemble flou et prise en compte d'une incertitude de degré α .

Par référence aux notions d'incertitude et d'imprécision introduites plus haut, il est possible de quantifier l'incertitude d'un ensemble flou qui, par défaut, représente une imprécision pure. Soit une fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{a}}(x)$ à laquelle il faut rajouter de l'incertitude. $\mu_{\tilde{a}}(x)$ est supposée certaine à un degré $\alpha \in [0,1]$. Alors il est possible d'obtenir une fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{a}'}(x)$ qui résume les deux informations. Plusieurs transformations sont possibles, parmi laquelle la transformation de Yager [Dubois & Prade, 1988d] :

$$\alpha \in [0,1], \mu_{\tilde{a}'}(x) = \alpha \cdot \mu_{\tilde{a}}(x) + 1 - \alpha \tag{1.16}$$

Le support de la fonction d'appartenance devient l'ensemble X .

Une forme paramétrique équivalente proposée dans [Ma & al., 1999] est donnée par la définition 2.14. Elle permet de caractériser un nombre flou par deux fonctions définies sur

l'intervalle $[0,1]$ [Goetschel & Voxman 1986]. Il y a bien entendu une équivalence entre les deux définitions, l'idée mise en avant pour la deuxième définition est une réduction de la complexité des calculs [Ma & al. 1999].

Définition 2.14 [Ma & al., 1999] Un nombre flou \tilde{u} est représenté dans sa forme paramétrique par la paire (\underline{u}, \bar{u}) de fonctions $\underline{u}(r)$, $\bar{u}(r)$, $0 \leq r \leq 1$ telles que les conditions suivantes soient satisfaites :

- $\underline{u}(r)$ est une fonction continue à gauche monotone croissante bornée
- $\bar{u}(r)$ une fonction continue à gauche monotone décroissante bornée
- $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r)$, $0 \leq r \leq 1$

Il est alors possible de retrouver la paramétrisation précédente en utilisant :

$$\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{u}}(x) = \sup_{r \in [0,1]} \{r \mid \underline{u}(r) \leq x \leq \bar{u}(r)\}$$

L'aspect de la logique floue et des opérateurs logique n'est pas traité dans ce mémoire. Cependant, sans trop rentrer dans les détails, il est impératif de rappeler quelques définitions et notions sur les t-normes et t-conormes utilisées dans le calcul flou.

2.2.2. t-normes, t-conormes

Les *normes/conormes triangulaires* (encore appelées t-normes/t-conormes) constituent les fondements de l'extension du couple intersection/union aux ensembles-flous dont la contrepartie logique est la paire conjonction/disjonction (et/ou) [Klir & Yuan, 1995 ; Rocacher, 2005]. Quiconque peut développer ses propres t-normes/t-conormes en suivant la procédure donnée dans [Kaufmann, 1983].

Définition 2.15 Dans l'intervalle $[0,1]$, une t-norme \wedge est un opérateur binaire qui satisfait au moins les axiomes suivants :

- associativité : $\wedge(x, \wedge(y, z)) = \wedge(\wedge(x, y), z)$;
- commutativité : $\wedge(x, y) = \wedge(y, x)$;

- monotonie : si $x_1 < x_2$ alors $\wedge(x_1, y) \leq \wedge(x_2, y)$;
- 1 est élément neutre : $\wedge(1, x) = \wedge(x, 1) = x$;
- 0 est élément absorbant : $\wedge(0, y) = \wedge(x, 0) = 0, \forall y, \forall x$.

Il existe une infinité de t-normes satisfaisant ces cinq axiomes de base [Rocacher, 2005]. Par exemple, une famille de normes générique notée \wedge_p , avec $p \in \mathbb{R}^*$ peut-être définie par : $\wedge_p(x, y) = \max\left(0, (x_p + y_p - 1)^{1/p}\right)$. [Schweizer & Sklar, 1963].

Définition 2.16 Dans l'intervalle $[0, 1]$, une t-conorme \vee est un opérateur binaire qui satisfait au moins les axiomes suivants :

- associativité : $\vee(x, \vee(y, z)) = \vee(\vee(x, y), z)$;
- commutativité : $\vee(x, y) = \vee(y, x)$;
- monotonie : si $x_1 < x_2$ alors $\vee(x_1, y) \leq \vee(x_2, y)$;
- 0 est élément neutre : $\vee(0, x) = \vee(x, 0) = x$.

Les propriétés des t-normes et des t-conormes montrent que celles-ci peuvent être considérées comme duales et les principaux opérateurs sont repris dans le

tableau 1.

t-norme	Dénomination	t-conorme associée
$\wedge(x, y) = \min(x, y)$	Zadeh (ou standard)	$\vee(x, y) = \max(x, y)$
$\wedge(x, y) = x \cdot y$	Probabiliste	$\vee(x, y) = x + y - x \cdot y$
$\wedge(x, y) = \max(0, x + y - 1)$	Lukasiewicz	$\vee(x, y) = \min(x + y, 1)$
$\wedge(x, y) = 1 - \min\left(\left[\left(1-x\right)^p + \left(1-y\right)^p\right]^{1/p}, 1\right)$	Yager ($p > 0$)	$\vee(x, y) = \min\left(\left[\left(x+y\right)^p\right]^{1/p}, 1\right)$
$\wedge(x, y) = \max\left(0, \frac{x+y-1+\lambda \cdot x \cdot y}{1+\lambda}\right)$	Weber ($\lambda > -1$)	$\vee(x, y) = \min(x + y + \lambda \cdot x \cdot y, 1)$

Tableau 1 : Principales t-normes et t-conormes

Après ces différents rappels concernant les caractéristiques des sous-ensembles flous, le paragraphe suivant traitera des différentes représentations de la fonction d'appartenance de ces sous-ensembles flous. Dès lors, dans la suite du mémoire, il ne sera plus question de sous-ensembles flous mais de nombres flous ou intervalles flous.

La forme de la fonction d'appartenance est, en partie, liée à la confiance des utilisateurs dans l'imprécision de la variable représentée. Il existe dans la littérature plusieurs formes, le choix d'une forme ou d'une autre est souvent effectué subjectivement. Il est dicté essentiellement par la simplicité des calculs informatiques effectués pour résoudre un problème donné [Giachetti & Young, 1997]. Les plus utilisées et les plus connues font l'objet de la partie suivante.

2.2.3. Représentation des nombres flous

L'équation (1.14) de la définition 2.13 a un caractère général et se prête mal à des calculs pratiques. Pour y remédier, plusieurs formes particulières sont proposées dans la littérature afin de manipuler les nombres et intervalles flous.

Parmi la multitude de formes de la fonction d'appartenance des nombres et intervalles flous, celles qui ont un intérêt particulier et qui sont souvent utilisées dans le cadre de l'arithmétique floue [Hanss, 2005] sont les nombres flous LR (Left Right) [Dubois & Prade, 1980], les nombres flous TrFN (trapezoidal Fuzzy Numbers) et TFN (Triangular Fuzzy Numbers) [Pedrycz, 1994 ; Giachetti & Young, 1997].

a. Représentations TrFN et TFN

Une représentation des intervalles et des nombres flous, la plus utilisée, consiste à représenter la fonction d'appartenance par une fonction trapézoïdale ou triangulaire [Pedrycz, 1994 ; Giachetti & Young, 1997].

Définition 2.17 Un nombre flou \tilde{a} défini par le quadruplet (a, b, c, d) est appelé nombre flou trapézoïdale noté *TrFN* si sa fonction d'appartenance est donnée par l'expression suivante :

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b[\\ 1 & \text{si } x \in [b, c] \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } x \in]c, d] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.17)$$

Un nombre flou de type *TFN* (triangulaire) est défini pour le cas où $b = c = m$, avec la valeur m appelée valeur modale du *TFN* et $a < m < b$. Dans le cas où $m - a = b - m$, le nombre flou devient symétrique avec la fonction d'appartenance exprimée comme suit :

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{si } x \in [a, m] \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{si } x \in [m, b] \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases} \quad (1.18)$$

La figure 2 illustre un exemple de deux nombres flous, le premier trapézoïdal et le second triangulaire.

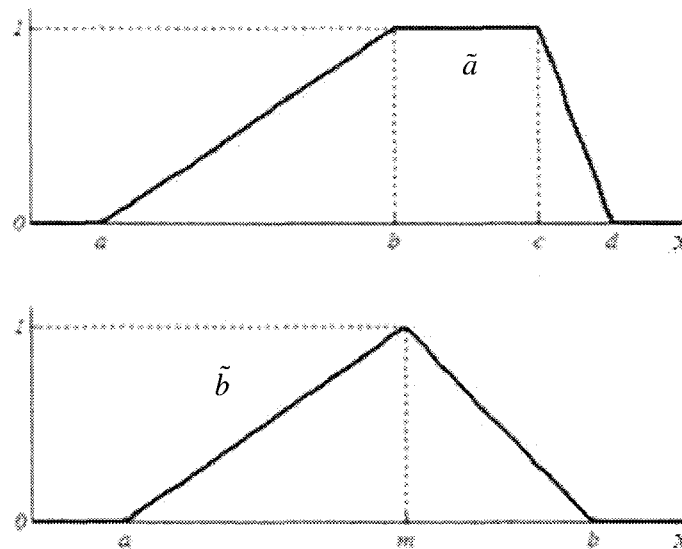


Figure 2 : Nombres flous trapézoïdal et triangulaire

b. Représentation LR

Une généralisation peut-être effectuée pour des fonctions non affines. Certaines classes de nombres flous ont été définies à l'aide d'une représentation paramétrique dite "L-R" [Dubois & Prade, 1988a].

Définition 2.18 Soit $L, R: [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues, inversibles dans $[0, 1]$, symétriques non décroissantes et satisfaisantes : $L(0) = R(0) = 1$, $L(1) = R(1) = 0$ et $L(+\infty) = R(+\infty) = 0$. Un nombre flou, représenté à l'aide de quatre paramètres $(a^-, a^+, \gamma, \beta)_{LR}$ avec $(\gamma, \beta \geq 0)$ est alors défini de la manière suivante :

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a^- - x}{\gamma}\right), & \text{si } x \leq a^- \\ 1 & \text{si } a^- \leq x \leq a^+ \\ R\left(\frac{x - a^+}{\beta}\right), & \text{si } x \geq a^+ \end{cases} \quad (1.19)$$

Les fonctions L et R les plus courantes sont des fonctions exponentielles qui permettent de construire des nombres flous de type gaussien. Evidemment quand elles sont linéaires, on retrouve les *TFN* et les *TrFN*.

Un cas particulier se produit lorsque $L = R$, on parle alors de nombres *LL* qui ont un intérêt dans l'arithmétique floue [Dubois & Prade, 1988a].

À présent, deux étapes importantes permettant de transformer des variables ordinaires en des variables floues et réciproquement sont décrites dans la partie suivante.

2.3. Fuzzification/Défuzzification

Dans toutes les applications, les entrées et sorties d'un système flou sont des valeurs réelles plus au moins précises. Pour utiliser la théorie des sous-ensembles flous, il est impératif de fuzzifier les entrées et de défuzzifier les sorties. Ce paragraphe est consacré à la définition de ces deux notions et à la présentation de quelques méthodes existantes dans la littérature [Wang, 1997].

2.3.1. Fuzzification

La fuzzification est définie comme une application de $\mathbb{R} \rightarrow F_{\mathbb{R}}$, avec $F_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des sous-ensembles flous définis sur \mathbb{R} . Un point à valeur réelle $x^* \in X \subset \mathbb{R}$ est transformé en un sous-ensemble flou \tilde{a} dans $F_{\mathbb{R}}$.

La phase de fuzzification doit respecter un certain nombre de propriétés :

- L'ensemble flou obtenu après fuzzification doit avoir une valeur d'appartenance maximale au point x^* .
- Il est souhaitable que la fuzzification effectue un « filtrage » en éliminant d'éventuels bruits qui peuvent affecter les entrées.
- Il est important que les résultats de la fuzzification permettent des calculs sur les quantités qui soient « simples ».

Les méthodes de fuzzification les plus rencontrées dans la littérature sont les suivantes. On considère un univers du discours $X \subset \mathbb{R}$. On assimile alors le nom associé à la fuzzification aux fonctions employées.

a. Fuzzification en singleton

La fuzzification en singleton transforme une valeur réelle $x^* \in X$ en un singleton flou \tilde{a} dans $F_{\mathbb{R}}$ ayant une valeur d'appartenance 1 au point x^* et 0 en tout autres points appartenant à l'ensemble X comme suit :

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.20)$$

b. Fuzzification gaussienne

En considérant des fonctions d'appartenance gaussiennes $e^{-\left(\frac{x_j - x}{a_i}\right)^2}$ avec x_i les centres et $a_i > 0$ les dispersions ($i \in \{1, \dots, n\}$) distribuées sur l'univers du discours $X \subset \mathbb{R}$, la fuzzification par une gaussienne transforme une valeur réelle $x^* \in X$ en un intervalle flou \tilde{a} dans $F_{\mathbb{R}}$ avec la fonction d'appartenance :

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = e^{-\left(\frac{x_1 - x^*}{a_1}\right)^2} \wedge \dots \wedge e^{-\left(\frac{x_n - x^*}{a_n}\right)^2} \quad (1.21)$$

avec « \wedge » une t-norme, souvent le produit algébrique ou l'opérateur « min ».

c. Fuzzification triangulaire

La fuzzification triangulaire transforme une valeur réelle $x^* \in X$ en un singleton flou \tilde{a} dans X avec la fonction d'appartenance triangulaire:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x_1 - x_1^*|}{b_1}\right) \wedge \dots \wedge \left(1 - \frac{|x_n - x_n^*|}{b_n}\right) & \text{si } |x_i - x_i^*| \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.22)$$

2.3.2. Défuzzification

Le résultat de l'étape de défuzzification est une valeur réelle, obtenue à partir de quantités floues. Elle est définie comme une application de $F_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$. Un ensemble flou $\tilde{b} \in F_{\mathbb{R}}$ défini sur l'univers $Y \subset \mathbb{R}$ est transformé en un point à valeur réelle $y^* \in Y$. Concrètement, la question posée est : quel est le point de l'ensemble qui représente au mieux l'ensemble flou \tilde{b} ?

Pour cela, il existe trois critères de choix pour la méthode de défuzzification :

- Plausibilité : le point y^* devrait représenter \tilde{b} d'un point de vue intuitif, par exemple, il doit être approximativement au milieu du support de \tilde{b} , ou avoir un degré d'appartenance à \tilde{b} élevé.
- Simplicité de calcul : ce critère peut être particulièrement important dans le cadre d'applications temps réel (commande par exemple).
- Sensibilité : une petite variation dans l'ensemble flou \tilde{b} ne doit pas avoir de conséquence majeure sur le point y^* .

Plusieurs stratégies de défuzzification plus au moins complexes sont développées dans la littérature, les plus utilisées sont citées ci-dessous [Driankov & al., 1996 ; Patel & Mohan, 2002 ; Ma & al. 2000] :

a. Défuzzification par centre de gravité

Elle est donnée par :

$$y^* = \frac{\int y \cdot \mu_b(y) \cdot dy}{\int \mu_b(y) \cdot dy} \quad (1.23)$$

b. Défuzzification modale

Une approximation de (1.23), permettant de simplifier les calculs, peut être obtenue en réalisant une interpolation sur les maximum de chaque sous-ensemble flou. Avec M le nombre de sous-ensembles flous, en considérant les points maximum de chacun des sous-ensembles, i.e. $\bar{y}_i = \max\{y \mid \forall x \in X, \mu_i(y) \geq \mu_i(x)\}$ et la hauteur pour ces points notée ω_i :

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^M \bar{y}_i \omega_i}{\sum_{i=1}^M \omega_i} \quad (1.24)$$

Indépendamment de ces stratégies, une méthode généralisée de défuzzification par l'intermédiaire de transformation de la distribution de possibilité en distribution de probabilité existe [Filev & Yager, 1991 ; Yager & Filev, 1993]. Elle considère la valeur de la probabilité comme la valeur défuzzifiée de la distribution de possibilité. Un principe basé sur la sensibilité a aussi été proposé dans [Mabuchi, 1993]. Le procédé de défuzzification est basé sur l'analyse de sensibilité de manière à ce que la valeur obtenue réduise au minimum cette sensibilité dans les pires des cas possibles.

Après avoir vu les différentes modélisations des incertitudes et imprécisions, le paragraphe suivant présente les différentes algèbres possibles basées sur ces modélisations.

3. Arithmétique des intervalles et des nombres flous

Plusieurs auteurs proposent une arithmétique floue basée sur le calcul des intervalles à partir des α -coupes. En effet, un nombre flou peut être défini comme étant une collection d' α -coupes, permettant ainsi d'utiliser le calcul par intervalles proposé par R.E. Moore sur ces nombres. Dans le but de faire le lien avec cette approche, ce paragraphe rappelle brièvement les principes du calcul par intervalles.

3.1. Arithmétique des intervalles

Les opérations arithmétiques de base (addition, soustraction, multiplication et division), sont étendues aux intervalles [Moore & Yang, 1959 ; Boche, 1963 ; Moore, 1966 ; Jaulin & al., 2001] de la manière suivante :

Définition 3.1 Soient $*$ $\in \{+, -, \times, / \}$ et $X, Y \in \mathbb{IR}$ (l'opération $/$ est définie pour Y vérifiant $0 \notin Y$). Alors,

$$X * Y = \{x * y \in \mathbb{R} / x \in X \text{ et } y \in Y\} \quad (1.25)$$

Grâce aux propriétés de monotonie des fonctions considérées, leur extension est exprimée de la façon suivante :

Quels que soient $X = [\underline{x}, \bar{x}] \in \mathbb{IR}$ et $Y = [\underline{y}, \bar{y}] \in \mathbb{IR}$, avec la restriction $0 \notin Y$ pour l'opération $/$:

$$\begin{aligned} [\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] &= [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}] \\ [\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{y}, \bar{y}] &= [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}] \\ [\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{y}, \bar{y}] &= [\min(\underline{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \underline{y}, \bar{x} \times \bar{y}), \max(\underline{x} \times \underline{y}, \underline{x} \times \bar{y}, \bar{x} \times \underline{y}, \bar{x} \times \bar{y})] \\ 1/[\underline{y}, \bar{y}] &= [\min(1/\underline{y}, 1/\bar{y}), \max(1/\underline{y}, 1/\bar{y})] \\ [\underline{x}, \bar{x}] / [\underline{y}, \bar{y}] &= [\underline{x}, \bar{x}] \times (1/[\underline{y}, \bar{y}]) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Parmi les nombreuses propriétés de ces opérations, quelques unes sont rappelées ci-dessous.

3.1.1. Propriétés algébriques

Soient A, B, C et D des intervalles de \mathbb{IR} :

1. L'addition et la multiplication sont commutatives : $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$
2. L'addition et la multiplication sont associatives :

$$(A + B) + C = A + (B + C), A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

3. L'intervalle $[0, 0]$ (respectivement $[1, 1]$) est l'unique élément neutre pour l'addition (respectivement la multiplication) :

- $A = X + A = A + X$ pour tout $X \in \mathbb{IR}$ ssi $X = [0, 0]$
- $A = Y \cdot A = A \cdot Y$ pour tout $Y \in \mathbb{IR}$ ssi $Y = [1, 1]$

4. La soustraction n'est pas la réciproque de l'addition (l'opposé d'un intervalle n'existe pas). Par exemple, pour $X = [2, 3]$, $X - X = [2, 3] - [2, 3] = [-1, 1] \neq [0, 0]$. De façon générale on a :

$$X - X = \{x - x' / x \in X, x' \in X\} = [\underline{x} - \bar{x}, \bar{x} - \underline{x}] \supset \{x - x' / x \in X\} = \{0\}$$

5. De la même façon, la division n'est pas la réciproque de la multiplication (l'inverse d'un intervalle n'existe pas). En reprenant $X = [2, 3]$, $X / X = [2, 3] / [2, 3] = [2/3, 3/2] \neq [1, 1]$. De plus, la multiplication d'un intervalle par lui-même n'est pas égale à l'intervalle des carrés des bornes. Prenons par exemple $X = [-3, 2]$, $X \times X = [-3, 2] \times [-3, 2] = [-6, 9]$.
6. Enfin, la multiplication n'est pas distributive par rapport à l'addition. En effet, prenons par exemple $X = [-2, 3]$, $Y = [1, 4]$ et $Z = [-2, 1]$, alors :

$$X \times (Y + Z) = [-2, 3] \times ([1, 4] + [-2, 1]) = [-2, 3] \times [-1, 5] = [-10, 15]$$

$$X \times Y + X \times Z = [-2, 3] \times [1, 4] + [-2, 3] \times [-2, 1] = [-8, 12] + [-6, 4] = [-14, 16]$$

De façon générale, la multiplication est sous distributive par rapport à l'addition :

$$X, Y, Z \in \mathbb{IR} \quad X \times (Y + Z) \subset X \times Y + X \times Z \quad (1.27)$$

Cet ensemble de propriétés algébriques diffèrent de celles du cas classique, et font du calcul par intervalles un calcul pessimiste engendrant une surestimation du résultat. Ces surestimations peuvent être prises en compte, en utilisant une méthode de réduction ou d'élimination [Boche, 1966 ; Boukezzoula & al., 2006].

3.1.2. Extension des fonctions élémentaires

Des études plus détaillées sur le calcul par intervalles sont disponibles dans la littérature, avec l'extension des fonctions élémentaires pour ce type de calcul [Jaulin & al., 2001]. Si f est une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, son extension au calcul par intervalles est définie de $\mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$ par :

$$X \in \mathbb{IR}, [f](X) = [\{f(x) / x \in X\}] \quad (1.28)$$

Par exemple, pour $X = [\underline{x}, \bar{x}]$:

$$\begin{aligned} \exp[\underline{x}, \bar{x}] &= [\exp \underline{x}, \exp \bar{x}] \\ \ln[\underline{x}, \bar{x}] &= [\ln \underline{x}, \ln \bar{x}] \text{ si } 0 \leq \underline{x} \\ \sqrt{[\underline{x}, \bar{x}]} &= [\sqrt{\underline{x}}, \sqrt{\bar{x}}] \text{ si } 0 \leq \underline{x} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Dans le cas des fonctions non monotones, par exemple $f(x) = x^2$, des définitions simples et efficaces peuvent être proposées [Jaulin & al., 2001] :

$$[\underline{x}, \bar{x}]^2 = \begin{cases} [\min(\underline{x}^2, \bar{x}^2), \max(\underline{x}^2, \bar{x}^2)] & \text{si } 0 \notin [\underline{x}, \bar{x}] \\ [0, \max(\underline{x}^2, \bar{x}^2)] & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.30)$$

3.1.3. Évaluation d'une expression

L'une des grandes faiblesses du calcul par intervalles est sans doute le fait que les résultats dépendent fortement de la manière dont l'expression est évaluée. Cela engendre bien souvent un encadrement trop large du résultat (ou surestimation). Pour illustrer ce fait, prenons l'exemple simple suivant issu de [Revol, 2004] :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $x \rightarrow x^2 - 2x + 1$. On considère $[f](X)$ avec $X = [-1, 3]$, il vient $[f](X) = X \times X - 2X + 1 = [-5, 12]$. Notons que $f(x)$ possède plusieurs écritures qui ne sont pas équivalentes pour $[f](X)$. Par exemple on peut écrire $f(x) = x(x-2) + 1$, le résultat de $[f]_1(X)$ ($[f]_1$ et plus loin $[f]_2$ sont utilisées pour les distinguer $[f]$ sachant que les résultats obtenus sont différents) toujours avec $X = [-1, 3]$ est alors $[f]_1(X) = X \times (X - 2) + 1 = [-8, 4]$. On peut aussi utiliser l'expression factorisée $f(x) = (x-1)^2$ le résultat est encore différent en utilisant (1.30), $[f]_2(X) = (X - 1)^2 = [0, 4]$.

Cet exemple illustre le fait que les équivalences en arithmétique classique ne le sont plus en arithmétique par intervalles, ce qui donne lieu à un sur encadrement de l'image de X par la fonction $[f]$.

L'arithmétique des intervalles ayant été rappelée, nous nous intéressons à présent à celle des nombres flous.

3.2. Arithmétique des nombres flous

La structure de base de l'arithmétique pour les nombres flous a été développée dans [Mizumoto & Tanaka, 1976 ; Mizumoto & Tanaka, 1979] et [Nahmias, 1978]. Un aperçu très compact de l'état réel de l'art est donné dans [Kaufmann, 1975 ; Dubois & Prade, 1988c ; Mareš, 1997 ; Dubois & al., 2000].

Dans ce qui suit, un rappel des méthodes les plus connues et les plus utilisées dans la littérature est donné.

3.2.1. La méthode du Principe d'extension flou

Le principe d'extension est un des outils fondamentaux de la théorie des sous-ensembles flous puisqu'il permet d'étendre sur les nombres flous les opérations habituelles sur les nombres (addition, soustraction, multiplication, division, ...) [Zadeh, 1965 ; Zadeh, 1975 ; Buckley, 2005].

Soient \tilde{a} et \tilde{b} deux nombres flous, et le nombre flou \tilde{c} , résultat de l'opération définie par $\tilde{c} = \tilde{a} * \tilde{b}$. Si « * » est une division, en supposant que 0 n'appartient pas au support du diviseur ($0 \notin \text{Supp}(\tilde{b})$), alors la fonction d'appartenance déterminée en utilisant le principe d'extension de Zadeh est définie par :

$$\mu_{\tilde{c}}(z) = \sup_{x,y} \{ \min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)) \mid x * y = z \} \quad (1.31)$$

3.2.2. Arithmétique floue basée sur les intervalles

Une autre arithmétique floue a été établie en considérant le nombre flou comme une collection d' α -coupes. Le calcul des nombres flous dans ce cas est une extension de

l'arithmétique de Moore. D'autres utilisent la forme paramétrique donnée par la définition 2.14 [Ma & al, 1999].

Soient deux nombres flous \tilde{a} et \tilde{b} représentés respectivement par leurs α -coupes $a_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$ et $b_\alpha = [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]$. Alors $\forall \alpha \in [0,1]$ les opérations classiques $c_\alpha = a_\alpha * b_\alpha$ correspondent aux définitions données précédemment sur les intervalles (1.26). Le nombre flou résultat \tilde{c} , donné par la définition 2.11, est le suivant : $\tilde{c} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot c_\alpha$.

3.2.3. La méthode des fronts

Pour éviter un résultat qui est forcément une approximation (puisque l'on est obligé d'avoir recours à une discrétisation en α -coupes) des auteurs proposent dans certains cas d'utiliser les calculs en des points particuliers. Le but est de pouvoir calculer les valeurs possibles d'une fonction d'intervalles : $f : X = \times_i [x_i^-, x_i^+] \rightarrow \mathbb{IR}, y = f(x)$. Dans le cas de certains types de monotonie, il est suffisant d'effectuer les calculs sur les sommets de l'hyperrectangle X pour obtenir $f(X)$ [Dubois & al., 2004 ; Fortin & al., 2004].

Pour ce faire, ils utilisent des nombres flous dont ils définissent les parties droite et gauche comme des fronts :

Définition 3.2 [Dubois & al., 2004] Un front est une fonction ϕ de $[0,1]$ dans \mathbb{R} . Soit I un intervalle flou normalisé semi-continu supérieurement, de support $[s^-, s^+]$. Les fronts gauche et droit de I (respectivement notés I^- et I^+) sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} I^-(\lambda) &= \inf \{x / \mu_I(x) \geq \lambda, x \geq s^-\} \\ I^+(\lambda) &= \sup \{x / \mu_I(x) \geq \lambda, x \leq s^+\} \end{aligned} \tag{1.32}$$

La fonction d'appartenance μ_I est définie de la façon suivante :

$$\mu_I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < I^-(0) \\ \sup \{\lambda \mid I^-(\lambda) \leq x\} & \text{si } I^-(0) \leq x < I^-(1) \\ 1 & \text{si } I^-(1) \geq x \geq I^+(1) \\ \sup \{\lambda \mid I^+(\lambda) \geq x\} & \text{si } I^+(1) < x \leq I^+(0) \\ 0 & \text{si } I^+(0) < x \end{cases} \tag{1.33}$$

Pour illustrer l'utilisation des fronts, l'exemple de la multiplication de deux nombres flous développée dans [Fortin & al., 2004] est repris. Soient \tilde{a} et \tilde{b} deux nombres flous pouvant contenir 0 (de fronts respectifs \tilde{a}^- , \tilde{a}^+ et \tilde{b}^- , \tilde{b}^+), et le nombre flou \tilde{c} , résultat de l'opération définie par $\tilde{c} = \tilde{a} \times \tilde{b}$. \tilde{c} peut être obtenu directement à partir du calcul sur les fronts suivant :

$$\begin{aligned}\tilde{c}^- &= \min(\tilde{a}^- \times \tilde{b}^-, \tilde{a}^+ \times \tilde{b}^-, \tilde{a}^- \times \tilde{b}^+, \tilde{a}^+ \times \tilde{b}^+) \\ \tilde{c}^+ &= \max(\tilde{a}^- \times \tilde{b}^-, \tilde{a}^+ \times \tilde{b}^-, \tilde{a}^- \times \tilde{b}^+, \tilde{a}^+ \times \tilde{b}^+)\end{aligned}\tag{1.34}$$

On retrouve un résultat bien connu pour les intervalles à support positif mais qui s'étend de façon immédiate à tous les supports à l'aide de la méthode des fronts.

Après avoir présenté la modélisation et l'arithmétique, une autre partie importante consiste à rappeler les différentes métriques existantes.

4. Métrique sur les quantités incertaines et imprécises

Pour pouvoir comparer des quantités imprécises, il est important d'introduire une métrique sur l'imprécision. En effet, celle-ci permet d'ordonner et de classer des quantités floues. Cette thématique a fait l'objet de nombreux travaux, un grand nombre de méthodes existent aujourd'hui, dont quelques unes sont rappelés ci-après.

Les méthodes de comparaison des nombres flous se répartissent en quatre classes principales [Chen & Hwang, 1992]. Une vue d'ensemble et une comparaison de ces méthodes allant de la méthode la plus « évidente » à la plus complexe sont détaillées dans la littérature [Yager, 1981; Efstathiou & Tong, 1982 ; Bortolan & Degani, 1985 ; Chen & Hwang, 1992 ; Fortemps & Roubens, 1996 ; Lee & Li, 1988 ; Zhu & Lee, 1992, Murakami & al., 1983 ; Modarres & Soheil, 2001 ; Detyniecki & Yager, 2001]. Certains auteurs [Kim & Park, 1990] proposent une méthode de comparaison des nombres flous basée sur la combinaison de la possibilité maximale et minimale en utilisant un « indice d'optimisme » dans $[0,1]$. Celui-ci reflète le risque de prise de décision. Plus récemment, une distance basée sur le calcul du centre de gravité pour ordonner des nombres flous a été proposée [Cheng, 1998]. La nécessité d'évaluer et de comparer les nombreuses propositions faites s'est traduite par la présentation

d'axiomes [Wang & Kerre, 2001a, Wang & Kerre, 2001b]. Pour éviter des résultats contre-intuitifs existants dans certaines des méthodes citées précédemment une métrique floue, respectant les propriétés de la métrique classique, est présentée dans [Tran & Duckstein, 2002].

Parmi les méthodes les plus récentes on trouve : un principe de comparaison basé sur un calcul de surface entre les centres de gravité des nombres flous et l'origine [Chu & Tsao, 2002] ; une méthode pour ordonner des nombres flous basée sur leurs formes et leurs écarts [Lee & Chen, 2006 ; Lee & Chen, 2007] ; une défuzzification utilisant la minimisation de la distance entre deux nombres flous pour leur comparaison [Asady & Zendehnam, 2007].

Un petit aperçu de quelques métriques et pseudo-métriques proposées dans la littérature est donné dans ce qui suit.

4.1. Métrique dans \mathbb{R}

Plusieurs distances sont définies sur l'ensemble des intervalles, la plus simple est définie par la relation suivante : $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec :

$$d([\underline{a}, \bar{a}], [\underline{b}, \bar{b}]) = \max(|\underline{a} - \underline{b}|, |\bar{a} - \bar{b}|) \quad (1.35)$$

Dans [Tran & Duckstein, 2002], une mesure de distance entre les intervalles $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ et $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ est donnée par la formule suivante :

$$D^2(A, B) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ \left[\left(\frac{\underline{a} + \bar{a}}{2} \right) + x(\bar{a} - \underline{a}) \right] - \left[\left(\frac{\underline{b} + \bar{b}}{2} \right) + y(\bar{b} - \underline{b}) \right] \right\} dx dy \quad (1.36)$$

4.2. Métrique floue

Plusieurs métriques sont proposées dans la littérature. Celle basée sur la généralisation du concept de l'espace métrique probabiliste [Schweitzer & Sklar, 1960], ou dans un autre registre celle basée sur la continuité des t-normes [Kramosil & Michalek, 1975]

Dans d'autres travaux plus récents, d'autres méthodes de calcul ont été développées pour le calcul des distances basées souvent sur les α -coupes [Tran & Duckstein, 2002]. Elles sont plus difficiles à mettre en œuvre.

Cette dernière partie donne un panorama de certaines méthodes de fusion de données imprécises. Il ne s'agit pas dans ce travail de maîtriser les outils présentés ici. Dans la suite du mémoire, l'arithmétique floue utilisée permet simplement un éclairage qui nous paraît intéressant dans un contexte de fusion de données.

5. Fusion de données

La fusion d'informations a pris naissance dans les années soixante et a beaucoup évolué ces dernières années, notamment avec l'apport de nouvelles sources d'informations et de nouvelles techniques (capteurs, informations à priori, connaissances génériques, ...) [Bloch & al. 2001 ; Bloch, 2005].

Cependant, et malgré toutes les nouvelles techniques utilisées pour la collecte d'informations, celles-ci restent toujours imparfaites et imprécises et dans certains cas incertaines. Il est donc important d'en combiner plusieurs afin d'avoir une connaissance plus précise. La fusion d'informations peut alors se définir comme la combinaison d'informations (souvent imparfaites et hétérogènes) afin d'obtenir une information globale plus complète, de meilleure qualité, et permettant de mieux décider et agir [Bloch, 2005].

Parallèlement, les méthodes pour modéliser et combiner les connaissances et informations imparfaites ont connu des développements théoriques importants et leurs champs d'applications se sont étendus. Ces méthodes, souvent issues des théories de la décision, de l'incertain et de l'intelligence artificielle, peuvent être soit numériques, soit symboliques.

Les méthodes de fusion sont liées au modèle de représentation de l'incertitude abordées ici. Ces modèles sont répartis en trois catégories, ils sont basés sur les théories des fonctions de croyance, des possibilités et la théorie des sous ensembles flous.

La suite expose brièvement pour chaque théorie les caractéristiques des données qu'elle permet de modéliser, ainsi que les modes de combinaison et les règles.

5.1. *Modèle probabiliste*

Le modèle le plus ancien est celui de probabilité qui utilise une mesure additive P avec $P(X)=1$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1.37)$$

De cette relation il est facile de montrer qu'il existe une distribution définie sur les singletons de X telle que :

$$P(A) = \sum_{a \in A} p(a) \quad (1.38)$$

Ce qui donne aussi :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad (1.39)$$

Maintenant quand il s'agit de fusion de données, nous envisageons n sources de données p_i associée à un degré (relatif) de confiance λ_i , tels que $\sum_i \lambda_i = 1$. La fusion de ces sources en parallèle peut se faire avec une somme convexe :

$$P(A) = \sum_i \lambda_i P_i(A) \quad (1.40)$$

5.2. *Fusion floue et possibiliste*

La théorie des sous-ensembles flous présentée précédemment permet de modéliser des connaissances imprécises ou vagues. Une autre théorie en liaison avec celle de la théorie des sous-ensembles flous a été introduite en 1978 par L.A. Zadeh et permet de raisonner sur ces connaissances en introduisant un moyen de prendre en compte des incertitudes.

La théorie des possibilités [Zadeh, 1978 ; Dubois & Prade, 1988a] est présentée comme un cadre alternatif pour représenter des informations incertaines. Elle dérive de la théorie des ensembles flous (une distribution de possibilité peut être vue comme la fonction d'appartenance de l'ensemble flou des éléments possibles pour la solution cherchée) et permet de représenter à la fois l'imprécision et l'incertitude d'un événement A par l'intermédiaire de possibilités π et de deux fonctions le caractérisant à savoir, une mesure de possibilité $\Pi(A)$

et une mesure de nécessité $N(A)$ [Dubois & Prade, 1988b]. Ces notions n'étant pas reprises dans la suite de ce travail, elles sont présentées très succinctement. Pour plus de détails, voir [Masson, 2005 ; Dubois, 2006]

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable. Une mesure de possibilité Π est une fonction de \mathcal{A} dans $[0,1]$ telle que :

$$\begin{aligned} \Pi(\emptyset) &= 0 \\ \Pi(A \cup B) &= \max(\Pi(A), \Pi(B)) \end{aligned} \tag{1.41}$$

De plus, si $\Pi(\Omega) = 1$, la mesure de possibilité est dite *normale*. Le nombre $\Pi(A)$ quantifie dans quelle mesure l'évènement $A \subseteq \Omega$ est possible. Il est à noter que les mesures de possibilité satisfont la relation suivante :

$$\max(\Pi(A), \Pi(\bar{A})) = 1 \tag{1.42}$$

où \bar{A} dénote le complément de A .

Cette relation (1.42) traduit le fait que pour un évènement et son contraire, si l'un au moins est possible, cela n'entraîne pas forcément l'impossibilité pour l'autre.

Dans le cas où Ω est fini, une mesure de possibilité Π est caractérisée par une distribution de possibilité telle que :

$$\begin{aligned} \pi : \Omega &\rightarrow [0,1] \\ \Pi(A) &= \sup_{\omega \in A} \pi(\omega) \quad \forall A \subseteq \Omega \end{aligned} \tag{1.43}$$

Cette distribution de possibilité définit une mesure duale dite mesure de nécessité :

$$N(A) = \inf_{\omega \notin A} (1 - \pi(\omega)) \quad \forall A \subseteq \Omega \tag{1.44}$$

Cette mesure de nécessité est liée à la mesure de possibilité par la relation suivante : $\Pi(A) = 1 - N(\bar{A})$. Cette relation indique que la possibilité d'un évènement A est reliée à la nécessité de son complément : plus un évènement A est possible, moins son complément est

certain. Par contre il n'y a aucune indication sur la possibilité du complément, la seule relation sur les degrés de possibilité étant fournie par (1.42).

Quant il s'agit de traiter l'incertitude d'une variable, il y a une contrainte entre les deux mesures Π et P : $\Pi(A) \geq P(A)$, $\forall A$.

Maintenant la fusion de données concerne plusieurs sources d'information modélisées par des distributions de possibilités π_i . Suivant les hypothèses émises sur les sources, différents opérateurs de la théorie des ensembles flous peuvent être utilisés, et notamment toutes les t-normes et t-conormes. Par exemple l'intersection de différentes sources est réalisée grâce à la règle conjonctive [Bloch, 1996] :

$$\forall x \in X, \pi_{\cap}^*(x) = \min_i \pi_i(x), \pi_{\cap}(x) = \frac{\pi_{\cap}^*(x)}{\sup_y \pi_{\cap}^*(y)} \quad (1.45)$$

π_{\cap}^* étant la version non normalisée de la règle.

5.3. *Modèle des fonctions de croyance*

La théorie des fonctions de croyance (ou théorie de Dempster-Shafer) date des années 70 et est une généralisation de la théorie bayésienne. Elle permet ainsi de prendre en compte les notions d'incertitude et d'imprécision de l'information à l'aide de fonctions de masse m (encore appelée masse élémentaire de croyance), de plausibilités Pl et de croyance Bel [Bloch, 2005]. Les fonctions de masse sont définies sur tous les sous-ensembles de l'espace de discernement X et non simplement sur les singletons comme les probabilités qui ne mesurent que la probabilité d'appartenance à une classe donnée. Avec 2^X qui représente l'ensemble des parties de X et $m : 2^X \rightarrow [0,1]$, il y a une contrainte de normalité :

$$\sum_{A \in 2^X} m(A) = 1$$

Alors il est possible de déduire les fonctions de plausibilité et de croyance :

$$Bel(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m(B) \quad (1.46)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad (1.47)$$

$$Bel(A) = 1 - Pl(\bar{A}) \quad (1.48)$$

Bien sûr la plausibilité est supérieure à la croyance qui est une borne inférieure pour l'incertitude : $Pl(A) \geq Bel(A)$ pour tout A . Ces deux mesures ne sont pas additives. Elles respectent d'autres propriétés, comme $Bel(A \cup B) \geq Bel(A) + Bel(B) - Bel(A \cap B)$

Ce modèle englobe donc les deux précédents modèles, probabiliste et possibilité. Une comparaison entre les modèles probabiliste et de croyance a été faite dans [Delmotte & Smets, 2004].

Il ne sera pas abordé plus de détails sur ces théories ici, car nos recherches se sont focalisées sur les nombres flous.

6. Conclusion

Une revue des différentes représentations existantes dans la littérature des nombres, intervalles et quantités floues a été présentée dans ce chapitre. La prise en compte et la modélisation des incertitudes et imprécisions ont en effet connues un essor considérable grâce à l'apparition et aux développements de nouvelles méthodes ou l'amélioration de méthodes apparues dans le passé. Ce développement s'est accru ces dernières années avec notamment la puissance des calculateurs numériques et les nouvelles technologies. Aujourd'hui, plusieurs logiciels, simple d'utilisation, permettent l'utilisation de ces techniques. Le plus utilisé et le plus élaboré est la boîte à outil *INTLAB* utilisable sous le logiciel Matlab dédiée au calcul par intervalles ou encore d'autres outils comme la toolbox Matlab « Fuzzy Logic Toolbox » pour la modélisation des systèmes basés sur la logique floue.

Cette étude bibliographique est motivée par l'introduction au chapitre suivant d'une autre représentation des quantités floues ainsi qu'un certain nombre d'outils mathématiques basés sur cette représentation. Cette approche sera illustrée par des exemples didactiques pour simplifier la compréhension. Le chapitre suivant sera par conséquent, structuré de la même façon, savoir de la représentation au calcul et de la proposition de différents indices métriques à l'introduction d'un opérateur de fusion pondérée floue.

Chapitre 2 : Arithmétique φ -calcul

1. Introduction	48 -
2. Modélisation des nombres flous	49 -
2.1. Modélisation par une fonction de répartition	49 -
2.2. Réalisation et extension floue	51 -
2.2.1. Réalisation médiane.....	52 -
2.2.2. Réalisation modale	52 -
2.2.3. Réalisation moyenne	52 -
2.2.4. Réalisation centrale	52 -
3. Arithmétique φ-calcul.....	53 -
3.1. Opérations élémentaires	53 -
3.1.1. Addition.....	53 -
3.1.2. La soustraction.....	54 -
3.1.3. La multiplication	56 -
1. Supports positifs	57 -
2. Supports négatifs	58 -
3. Supports mixtes	58 -
3.1.4. La division.....	61 -
3.1.5. Exemple.....	62 -
3.2. Arithmétique floue sous contraintes	63 -
3.3. Fonctions monotones réelles de variables floues	64 -
3.3.1. Exponentielle d'un nombre flou	65 -
3.3.2. Logarithme d'un nombre flou.....	65 -
3.4. Exemple d'application	66 -
3.5. Recherche de solutions approchées	68 -
3.5.1. Recherche d'une solution basée sur un modèle	69 -
3.5.2. Utilisation des « ψ -coupes»	69 -
4. Métrique sur Φ	71 -
4.1. Indices métriques.....	71 -
4.1.1. Distance.....	71 -
4.1.2. Écart	71 -
4.1.3. Indices de « précedence ».....	72 -
4.1.4. Relations d'ordre induites.....	72 -
4.2. Quantité floue contenue dans un nombre flou.....	73 -
5. Fusion de quantités floues.....	76 -

5.1.	Moyenne floue pondérée	- 76 -
5.2.	Fusion floue pondérée	- 76 -
5.3.	Exemple Fusion/moyenne floue pondérée	- 77 -
6.	Conclusion.....	- 77 -

1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation de l'arithmétique φ -calcul, laquelle propose une extension des opérateurs arithmétiques classiques (addition, multiplication, symétrique...) aux nombres flous. L'approche s'appuie sur la modélisation d'un nombre flou par une fonction de répartition bornée au lieu d'une fonction d'appartenance classique. Cette démarche est inspirée des statistiques classiques dans lesquelles un échantillon est représenté par une fonction de répartition empirique monotone croissante [Schweizer & Sklar, 1963]. Un avantage de l'approche est l'« esthétique », puisque toutes les fonctions de répartitions sont de la même forme, à savoir des fonctions monotones croissantes (fonctions uniformes de type S), quelles que soient les opérations effectuées. Cet aspect peut paraître secondaire, mais à la vue des nombreux travaux trouvés dans la littérature discutant de la forme résultante d'une opération arithmétique effectuée sur des nombres flous, celui-ci peut s'avérer intéressant [Giachetti & Young, 1997 ; De Baets & Marková-Stupnaňová, 1997 ; Hong & Do, 1997 ; Oussalah & De Schutter, 2003 ; Dubois & al., 2004]. Naturellement la nécessité pour un élément de Φ (ensemble des nombres flous représentés par cette nouvelle fonction d'appartenance), d'avoir une représentation monotone croissante impose également un certain nombre de contraintes, i.e. pour que le résultat des opérations effectuées reste dans l'ensemble Φ . Les autres avantages de cette nouvelle représentation seront détaillés par des exemples au fur et à mesure de la lecture de ce chapitre et des suivants.

Dans la première partie du chapitre, une présentation des nombres flous utilisés et les différents opérateurs arithmétiques sont présentés. Quelques exemples didactiques seront proposés permettant d'illustrer non seulement cette nouvelle arithmétique pour les nombres flous mais aussi la démarche scientifique proposée. La résolution d'une équation du premier ordre est proposée afin d'illustrer l'utilisation du φ -calcul, ses avantages et ses inconvénients.

La deuxième partie est consacrée à la présentation d'une métrique φ -calcul pour les nombres flous ainsi que son extension aux quantités floues.

Enfin, on termine ce chapitre par la proposition d'un opérateur de fusion pondérée floue (*WFF ; Weighted Fuzzy Fusion*) avec un exemple illustratif.

2. Modélisation des nombres flous

La proposition d'une nouvelle modélisation des nombres flous a vu le jour suite à de précédents travaux sur l'axe de recherche ayant trait à l'analyse de données objectives et subjectives [Guerra & Roger, 1991 ; Guerra & Loslever 1993].

2.1. Modélisation par une fonction de répartition

En général, un nombre flou \tilde{a} est représenté par sa fonction d'appartenance notée $\mu_{\tilde{a}}$, non nulle sur un intervalle borné $Supp(\tilde{a}) \subset \mathbb{R}$ [Dubois & Prade, 1979 ; Bouchon Meunier & Marsala, 2003]. Par exemple, le nombre flou triangulaire (TFN) \tilde{a} , représenté par un triplet (b, m, c) correspond à : $\mu_{\tilde{a}}(x) = 1$ pour $x = m$ (m est appelé mode) et le noyau est l'intervalle $[m - b, m + c]$. Dans notre cas, l'idée de base est tirée de la statistique mathématique [Schweizer & Sklar, 1963] et consiste à modéliser le nombre flou par une fonction de répartition normée.

Ainsi, l'algèbre φ -calcul [Roger & Lecomte, 1998 ; Roger et al., 1999] est fondée sur une représentation intégrale des nombres flous qui repose sur la fonction de répartition notée $\varphi_{\tilde{a}}$ et définie comme suit :

$$\varphi_{\tilde{a}}(x) = \frac{\int_{-\infty}^x \mu_{\tilde{a}}(t) \cdot dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{a}}(t) \cdot dt} \quad (2.1)$$

De façon à assurer la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{a}}(t) \cdot dt$ (cardinalité de \tilde{a} notée $Card(\tilde{a})$), seules les fonctions d'appartenance $\mu_{\tilde{a}}$ à support compact $Supp(\tilde{a}) = [\underline{a}, \bar{a}]$, $[\underline{a}, \bar{a}] \in \mathbb{IR}$ seront utilisées. Ainsi, $\varphi_{\tilde{a}}$ est une fonction monotone croissante de $Supp(\tilde{a})$ dans $[0, 1]$ admettant, par là même, une fonction réciproque, notée $\varphi_{\tilde{a}}^{-1}$, de $[0, 1]$ dans $Supp(\tilde{a})$ constituant un élément essentiel de la définition des opérations. L'ensemble des nombres flous représentés par les fonctions φ est noté Φ et est isomorphe à l'ensemble des fonctions monotones croissantes de $Supp(\tilde{a})$ dans $[0, 1]$.

Décrire un nombre flou \tilde{a} par sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{a}}$ ou par sa fonction de répartition $\varphi_{\tilde{a}}$ est strictement équivalent.

Le modèle représentatif du nombre flou \tilde{a} utilisé est alors :

$$\varphi_{\tilde{a}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \underline{a} \\ \varphi_{\tilde{a}}(x) & \text{si } x \in [\underline{a}, \bar{a}] \\ 1 & \text{si } x \geq \bar{a} \end{cases} \quad (2.2)$$

Il est à noter que la définition proposée rentre dans le cadre plus général de celle de [Dubois & Prade, 1988a].

La figure 3 illustre la modélisation des nombres flous singleton, intervalle et de forme triangulaire par leur fonction de répartition. Il est clair que la fonction de répartition d'un singleton (réel ordinaire) est un échelon et que celle d'un intervalle [Kaufmann & Gupta, 1988] est une rampe. La figure 4 représente des nombres flous de forme gaussienne et de forme trapézoïdale sous la forme (2.2).

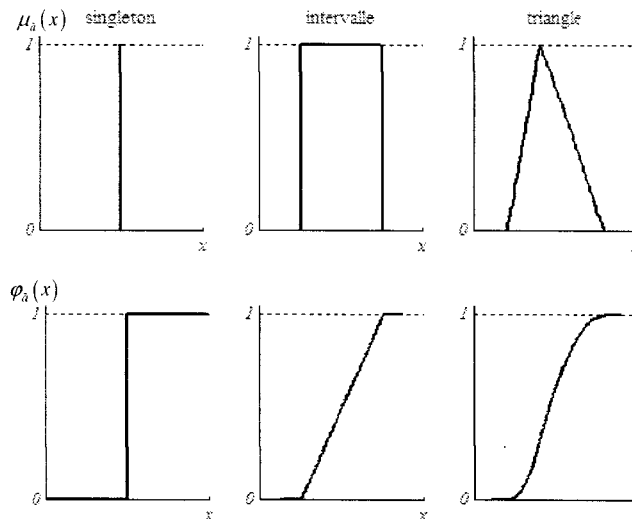


Figure 3 : Modélisation des nombres flous : singleton, intervalle et triangulaire

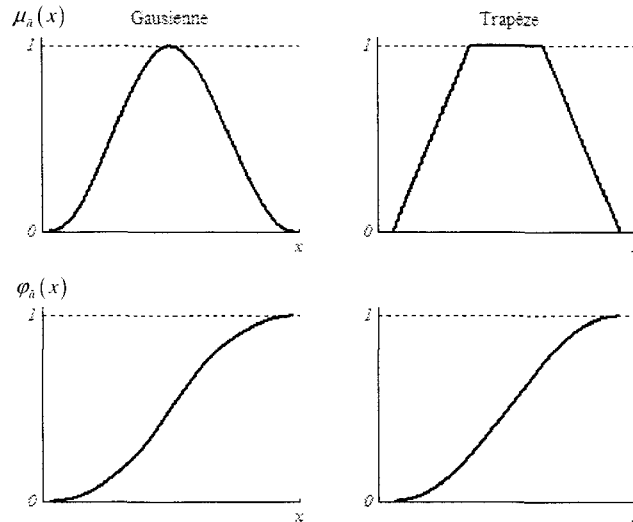


Figure 4 : Modélisation des nombres flous gaussienne et trapézoïdale

2.2. Réalisation et extension floue

Un des intérêts majeurs de l'utilisation des nombres flous est de pouvoir modéliser l'incertitude et l'imprécision autour d'une valeur réelle. Dans un cadre très concret, il est souvent nécessaire de déduire de la fonction $\varphi_{\tilde{a}}$ une valeur réelle "représentative". Il est pour cela possible de privilégier diverses propriétés de la fonction considérée, telles que la largeur du support ou des points particuliers de la courbe $\varphi_{\tilde{a}}$ caractérisant le nombre flou \tilde{a} .

Ainsi, toute application de $\Phi \rightarrow \mathbb{R}$, est appelée réalisation. Cette notion de réalisation floue qui associe une valeur ordinaire à un nombre flou est à rapprocher de celle de « défuzzification » couramment employée en commande floue [Sugeno, 1985].

Inversement, toute application de $\mathbb{R} \rightarrow \Phi$ est appelée extension floue. La « fuzzification » et l'extension floue sont deux notions comparables. Celle-ci consiste à associer à un nombre donné a une fonction $\varphi_{\tilde{a}}$.

Quelques propositions de réalisation sont définies dans la partie suivante.

2.2.1. Réalisation médiane

La réalisation médiane notée $R_{méd}(\tilde{a})$ associe à $\varphi_{\tilde{a}}$ le nombre a_0 tel que $\varphi_{\tilde{a}}(a_0) = 0,5$:

$$a_0 = R_{méd}(\tilde{a}) = \varphi_{\tilde{a}}^{-1}(0,5) \quad (2.3)$$

Une relation d'équivalence \mathfrak{R} dans Φ est définie à partir de cette réalisation : la classe d'équivalence de $a_0 \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des fonctions $\varphi_{\tilde{a}}$ telles que $\varphi_{\tilde{a}}(a_0) = 0,5$.

2.2.2. Réalisation modale

La réalisation modale (pour les nombres flous uniquement) notée $R_{mod}(\tilde{a})$ est définie comme suit :

$$a_0 = R_{mod}(\tilde{a}) \Leftrightarrow a_0 : \mu_{\tilde{a}}(a_0) = 1 \quad (2.4)$$

2.2.3. Réalisation moyenne

La réalisation moyenne notée $R_{moy}(\tilde{a})$ est définie par :

$$a_0 = R_{moy}(\tilde{a}) = \int_0^1 \varphi_{\tilde{a}}^{-1}(y) \cdot dy \quad (2.5)$$

2.2.4. Réalisation centrale

La réalisation centrale notée $R_{cent}(\tilde{a})$ est le centre du support de la fonction de répartition, elle est donnée par :

$$a_0 = R_{cent}(\tilde{a}) = \frac{a + \bar{a}}{2} \quad (2.6)$$

Le choix de la méthode de réalisation dépend évidemment de l'application.

Après avoir défini les notions de réalisation floue, la partie suivante propose les opérations arithmétiques dans Φ .

3. Arithmétique φ -calcul

Les opérations arithmétiques classiques addition, pseudo-opposé, soustraction, multiplication et pseudo-inverse quand elle existe sont proposées dans ce paragraphe.

3.1. Opérations élémentaires

3.1.1. Addition

Définition :

Soient \tilde{a} et \tilde{b} deux nombres flous quelconques caractérisés respectivement par leurs fonctions de répartition $\varphi_{\tilde{a}}$ et $\varphi_{\tilde{b}}$. Leur addition notée $\tilde{a} + \tilde{b}$ est définie par :

$$\varphi_{\tilde{a} + \tilde{b}}^{-1} = \varphi_{\tilde{a}}^{-1} + \varphi_{\tilde{b}}^{-1} \quad (2.7)$$

Interprétation géométrique :

Le résultat de l'addition est illustré figure 5, où pour tout point $M_{\tilde{a}}$ et $M_{\tilde{b}}$ est associé la transformation géométrique du plan (x, y) suivante :

$$\forall y \in [0, 1], M_{\tilde{a}} \begin{pmatrix} x_{\tilde{a}} \\ y \end{pmatrix} \text{ et } M_{\tilde{b}} \begin{pmatrix} x_{\tilde{b}} \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M_{\tilde{a} + \tilde{b}} \begin{pmatrix} x_{\tilde{a}} + x_{\tilde{b}} \\ y \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

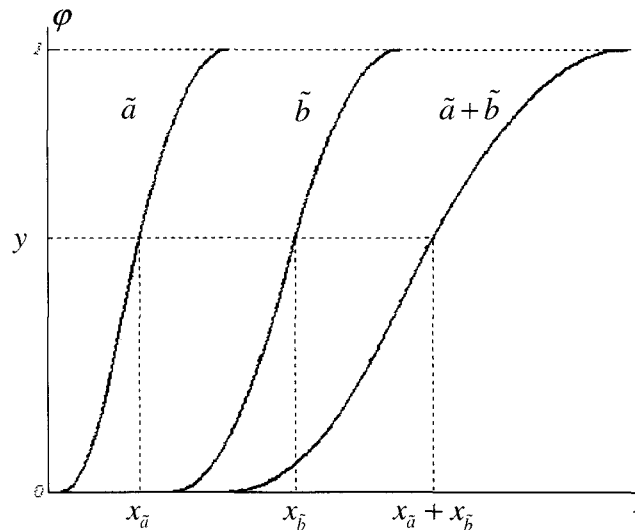


Figure 5 : Addition de deux nombres flous

Propriétés algébriques :

L'addition ainsi définie possède les propriétés suivantes :

1. Opération interne dans Φ ;
2. Commutativité ;
3. Associativité ;
4. 0 (ordinaire) est élément neutre unique ;
5. $\forall (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{a}) \in \Phi^3, \tilde{x} + \tilde{a} = \tilde{y} + \tilde{a} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$;
6. Compatibilité avec l'algèbre de Moore [Moore, 1966] :

$$Supp(\tilde{a} + \tilde{b}) = Supp(\tilde{a}) + Supp(\tilde{b})$$

7. Compatibilité avec l'algèbre des réels :

$$\forall (\tilde{a}, \tilde{b}) \in \Phi^2, R_{med}(\tilde{a} + \tilde{b}) = R_{med}(\tilde{a}) + R_{med}(\tilde{b}).$$

Cette dernière propriété permet de voir l'addition comme une extension aux nombres flous de l'addition classique des nombres réels. Toutes les opérations à suivre sont construites dans le cadre de cette généralisation.

3.1.2. La soustraction

Avant de définir la soustraction de deux nombres flous, on définit l'opposé d'un nombre flou \tilde{a} . Cela revient à chercher un nombre flou \tilde{b} tel que $\tilde{a} + \tilde{b} = \tilde{b} + \tilde{a} = 0$. Or ceci s'avère impossible compte tenu des propriétés caractéristiques du modèle utilisé (fonctions non-décroissantes). De plus, une somme de nombres imprécis ne peut donner un résultat précis. En fait, cela revient plutôt à chercher \tilde{b} tel que $\tilde{a} + \tilde{b} = \tilde{b} + \tilde{a} = \tilde{0}$, c'est-à-dire à définir une classe $\tilde{0}$. Ce résultat est tout à fait commun aux diverses arithmétiques floues de la littérature [Bouchon Meunier & Marsala, 2003].

Définition du pseudo-opposé :

On définit ainsi pour tout \tilde{a} un pseudo-opposé unique, noté $-\tilde{a}$, de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_{-\tilde{a}}(x) = 1 - \varphi_{\tilde{a}}(-x) \quad (2.9)$$

Interprétation géométrique du pseudo-opposé :

Le pseudo-opposé d'un nombre flou \tilde{a} est illustré figure 6 où tout point $M_{\tilde{a}}$ est associé à la transformation géométrique du plan (x, y) suivante :

$$\forall y \in [0, 1], M_{\tilde{a}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M_{-\tilde{a}} \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

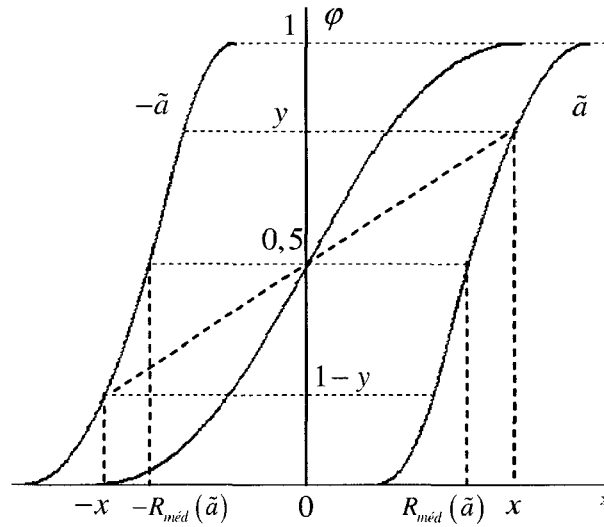


Figure 6 : Pseudo-opposé d'un nombre flou \tilde{a}

De façon évidente, le pseudo-opposé $-\tilde{a}$ n'est pas l'opposé de \tilde{a} , mais permet de définir un nombre flou $\tilde{0}_{\tilde{a}}$ de la classe de 0, de la manière suivante :

$$\tilde{a} + (-\tilde{a}) = \tilde{0}_{\tilde{a}} \quad (2.11)$$

La stabilité du pseudo-opposé dans Φ / \mathbb{R} est assurée par le fait que :

$$R_{méd}(-\tilde{a}) = -R_{méd}(\tilde{a}) \quad (2.12)$$

Définition de la soustraction :

Soient \tilde{a} et \tilde{b} , la soustraction notée $\tilde{a} - \tilde{b}$ est alors définie comme l'addition du nombre \tilde{a} avec le pseudo-opposé $-\tilde{b}$:

$$\varphi_{\tilde{a}-\tilde{b}}^{-1} = \varphi_{\tilde{a}}^{-1} + \varphi_{-\tilde{b}}^{-1} \quad (2.13)$$

La soustraction de deux nombres flous quelconques \tilde{a} et \tilde{b} est illustrée par la figure 7.

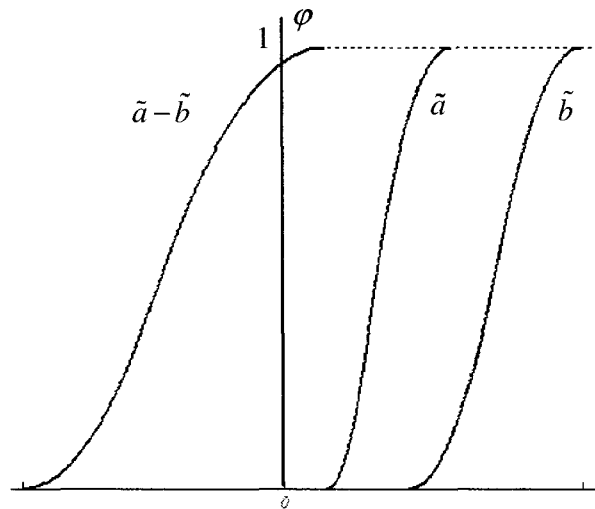


Figure 7 : Soustraction de deux nombres flous

Propriétés algébriques de la soustraction :

La soustraction possède les propriétés suivantes :

1. Opération interne dans Φ
2. Commutativité ;
3. Associativité ;
4. 0 (ordinaire) est élément neutre unique ;
5. $\forall (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{a}) \in \Phi^3, \tilde{x} - \tilde{a} = \tilde{y} - \tilde{a} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$
6. Compatibilité avec l'algèbre des intervalles :

$$Supp(\tilde{a} - \tilde{b}) = Supp(\tilde{a}) - Supp(\tilde{b})$$

7. Compatibilité avec l'algèbre des réels :

$$\forall (\tilde{a}, \tilde{b}) \in \Phi^2, R_{med}(\tilde{a} - \tilde{b}) = R_{med}(\tilde{a}) - R_{med}(\tilde{b}).$$

3.1.3. La multiplication

Pour le calcul de la multiplication, le signe des opérandes joue un rôle capital. En effet, si la somme de deux fonctions croissantes est assurément croissante, il n'en est pas de même pour leur produit. C'est pourquoi, il faut adapter la définition de la multiplication de deux nombres flous à la nature de leurs supports respectifs. Soit $\tilde{a} \in \Phi$ un nombre flou et $Supp(\tilde{a}) = [\underline{a}, \bar{a}]$, trois types de nombres sont distingués :

$$\begin{cases} \text{positif, noté } \tilde{a} \geq 0 & \text{si } \text{Supp}(\tilde{a}) \text{ est tel que } \underline{a} \geq 0 \\ \text{négatif, noté } \tilde{a} \leq 0 & \text{si } \text{Supp}(\tilde{a}) \text{ est tel que } \bar{a} \leq 0 \\ \text{mixte} & \text{sinon, i.e. } 0 \in \text{Supp}(\tilde{a}) \text{ et } \underline{a} \times \bar{a} < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

L'ensemble des nombres à support positif $\tilde{a} \geq 0$ (respectivement négatif $\tilde{a} \leq 0$) est noté Φ^+ (respectivement Φ^-).

1. Supports positifs

Dans ce cas, la multiplication est définie de façon similaire à l'addition.

Définition :

Soit \tilde{a} et \tilde{b} deux nombres flous à supports positifs, i.e. $\underline{\tilde{a}} \geq 0$, $\underline{\tilde{b}} \geq 0$, la multiplication notée $\tilde{a} \times \tilde{b}$ est définie par :

$$\varphi_{\tilde{a} \times \tilde{b}}^{-1} = \varphi_{\tilde{a}}^{-1} \times \varphi_{\tilde{b}}^{-1} \quad (2.15)$$

Interprétation géométrique :

La transformation géométrique, figure 8, est une extension directe qui correspond à :

$$\forall y \in [0, 1], M_{\tilde{a}} \begin{pmatrix} x_{\tilde{a}} \\ y \end{pmatrix} \text{ et } M_{\tilde{b}} \begin{pmatrix} x_{\tilde{b}} \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M_{\tilde{a} \times \tilde{b}} \begin{pmatrix} x_{\tilde{a}} \times x_{\tilde{b}} \\ y \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

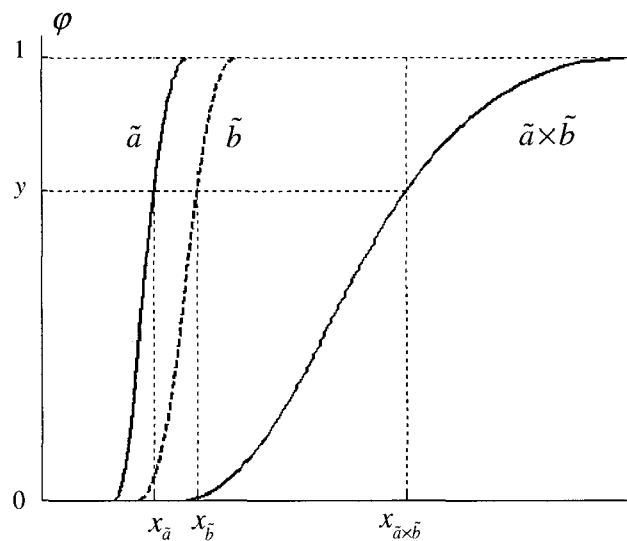


Figure 8 : Multiplication de deux nombres flous à supports positifs

2. Supports négatifs

Dans le cas où la multiplication met en jeu un ou deux nombres flous négatifs, il faut se ramener à la définition de la multiplication de deux nombres flous positifs en utilisant le pseudo-opposé défini précédemment comme l'illustre l'équation (2.17).

Définition :

Soient \tilde{a} et \tilde{b} deux nombres flous non mixtes la multiplication $\tilde{a} \times \tilde{b}$ est définie par :

$$\tilde{a} \times \tilde{b} = \begin{cases} -((- \tilde{a}) \times \tilde{b}) & \text{si } \tilde{a} \leq 0 \text{ et } \tilde{b} \geq 0 \\ -(\tilde{a} \times (- \tilde{b})) & \text{si } \tilde{a} \geq 0 \text{ et } \tilde{b} \leq 0 \\ (- \tilde{a}) \times (- \tilde{b}) & \text{si } \tilde{a} \leq 0 \text{ et } \tilde{b} \leq 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

3. Supports mixtes

Pour les nombres flous mixtes, une décomposition permettant la prise en compte de deux supports de signe « constant » est proposée.

Soit $\tilde{a} \in \Phi$ un nombre flou mixte de fonction de répartition $\varphi_{\tilde{a}}$ de support $Supp(\tilde{a}) = [\underline{a}, \bar{a}]$ avec $\underline{a} \times \bar{a} < 0$. Il peut toujours être décomposé en deux nombres flous $\tilde{a}_- \leq 0$ et $\tilde{a}_+ \geq 0$ de fonctions $\varphi_{\tilde{a}_-}$ et $\varphi_{\tilde{a}_+}$ définies par :

$$\varphi_{\tilde{a}_-}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \underline{a} \\ \varphi_{\tilde{a}}(x) & \text{si } x \in [\underline{a}, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_{\tilde{a}_+}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi_{\tilde{a}}(x) & \text{si } x \in [0, \bar{a}] \\ 1 & \text{si } x > \bar{a} \end{cases} \quad (2.18)$$

Les supports respectifs de \tilde{a}_- et \tilde{a}_+ sont $[\underline{a}, 0]$ et $[0, \bar{a}]$. Ces deux nombres flous sont appelés respectivement *composante négative* et *composante positive* de \tilde{a} , Figure 9.

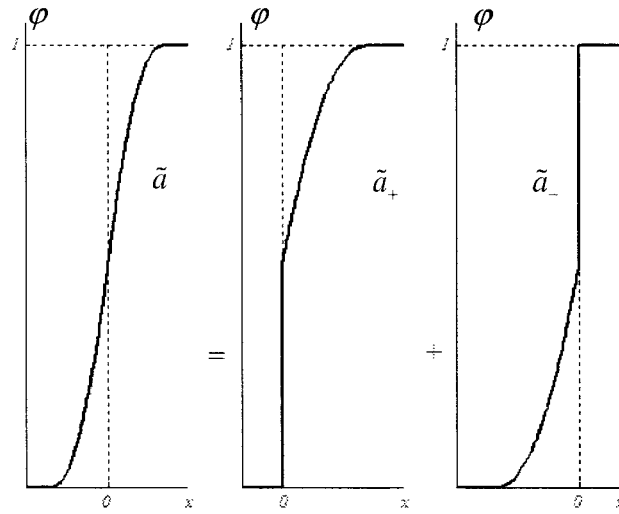


Figure 9 : Décomposition additive d'un nombre flou mixte \tilde{a}

La décomposition ainsi définie est appelée *décomposition additive* de \tilde{a} . Pour résumer ses propriétés, on a $\tilde{a}_- \leq 0$ et $\tilde{a}_+ \geq 0$ et :

$$\varphi_{\tilde{a}}^{-1} = \varphi_{\tilde{a}_-}^{-1} + \varphi_{\tilde{a}_+}^{-1} \tag{2.19}$$

Cette décomposition est un élément essentiel de la multiplication de deux nombres flous dont au moins un est mixte.

Définition de la multiplication (cas général) :

Soient \tilde{a} et \tilde{b} deux nombres mixtes caractérisés par leurs fonctions $\varphi_{\tilde{a}}$ et $\varphi_{\tilde{b}}$. Soient $\tilde{a}_- \leq 0$ et $\tilde{a}_+ \geq 0$, $\tilde{b}_- \leq 0$ et $\tilde{b}_+ \geq 0$ leurs composantes négatives et positives respectives. A l'aide des définitions précédentes on calcule les deux produits à support positif : $\tilde{a}_+ \times \tilde{b}_+ \geq 0$ et $\tilde{a}_- \times \tilde{b}_- = (-\tilde{a}_-) \times (-\tilde{b}_-) \geq 0$, et les deux produits à support négatif : $\tilde{a}_+ \times \tilde{b}_- = \tilde{a}_+ \times (-\tilde{b}_-) \leq 0$ et $\tilde{a}_- \times \tilde{b}_+ = (-\tilde{a}_-) \times \tilde{b}_+ \leq 0$. A partir de ces produits on définit pour les supports négatifs la quantité : $\varphi_{(\tilde{a} \times \tilde{b})_-}^{-1} = \text{Min}[\varphi_{\tilde{a}_+ \times \tilde{b}_-}^{-1}, \varphi_{\tilde{a}_- \times \tilde{b}_+}^{-1}]$ et pour les supports positifs la quantité :

$$\varphi_{(\tilde{a} \times \tilde{b})_+}^{-1} = \text{Max}[\varphi_{\tilde{a}_+ \times \tilde{b}_+}^{-1}, \varphi_{\tilde{a}_- \times \tilde{b}_-}^{-1}], \text{ le produit s'écrit alors :}$$

$$\varphi_{\tilde{a} \times \tilde{b}}^{-1} = \varphi_{(\tilde{a} \times \tilde{b})_-}^{-1} + \varphi_{(\tilde{a} \times \tilde{b})_+}^{-1} \tag{2.20}$$

Cette définition obtenue pour deux nombres mixtes est cohérente avec les précédentes. Si $\tilde{a} \leq 0$ (respectivement $\tilde{a} \geq 0$) et $\tilde{b} \leq 0$ (respectivement $\tilde{b} \geq 0$) les résultats obtenus à partir de (2.20) sont identiques à ceux obtenus précédemment (2.15) ou (2.17) suivant les cas.

Le résultat de la multiplication de deux nombres un nombre flou \tilde{a} mixte et d'un nombre flou \tilde{b} positif est illustré figure 10.

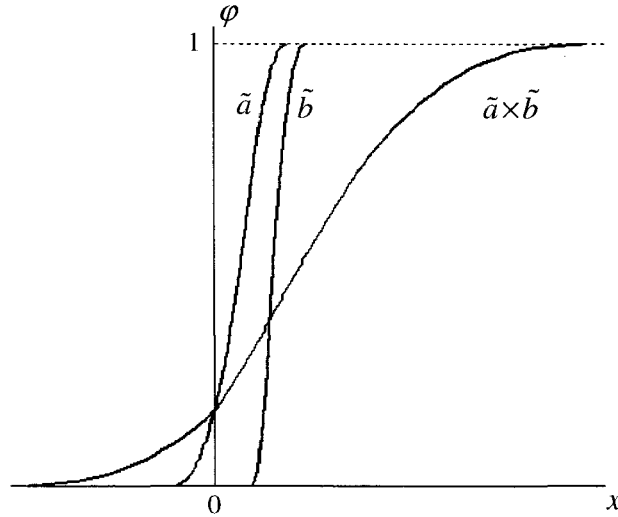


Figure 10 : Multiplication de deux nombres flous mixtes

Propriétés algébriques de la multiplication :

La multiplication ainsi définie possède les propriétés suivantes :

1. Opération interne dans Φ ;
2. Commutativité ;
3. Associativité ;
4. 1 (classique) est élément neutre unique ;
5. $\forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Phi^2, \tilde{a} \in \Phi^+, \tilde{x} \times \tilde{a} = \tilde{y} \times \tilde{a} \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$
6. Stabilité dans $\Phi / \mathbb{R} : \forall (\tilde{a}, \tilde{b}) \in \Phi^2, R_{\text{méd}}(\tilde{a} \times \tilde{b}) = R_{\text{méd}}(\tilde{a}) \times R_{\text{méd}}(\tilde{b}) ;$
7. Compatibilité avec l'algèbre des intervalles :

$$Supp(\tilde{a} \times \tilde{b}) = Supp(\tilde{a}) \times Supp(\tilde{b})$$
8. Compatibilité avec l'addition : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \tilde{x} \in \Phi, n \times \tilde{x} = \underbrace{\tilde{x} + \tilde{x} + \dots + \tilde{x}}_{n \text{ fois}}$.

3.1.4. La division

Le problème rencontré pour la définition d'un inverse est de même nature que celui du pseudo-opposé. Sa construction suit un procédé similaire ; pour tout nombre non mixte tel que $0 \notin \text{Supp}(\tilde{a})$, i.e. $\tilde{a} > 0$ ou $\tilde{a} < 0$, on cherche un pseudo-inverse \tilde{a}^{-1} , vérifiant $\tilde{a} \times \tilde{a}^{-1} = \tilde{a}^{-1} \times \tilde{a} = \tilde{1}_{\tilde{a}}$ ($\tilde{1}_{\tilde{a}}$ étant un élément de la classe de l'élément neutre 1 dépendant de \tilde{a}).

Définition du pseudo-inverse :

Soit \tilde{a} un nombre flou tel que $0 \notin \text{Supp}(\tilde{a})$, i.e. $\tilde{a} > 0$ ou $\tilde{a} < 0$, le pseudo-inverse noté \tilde{a}^{-1} est défini de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi_{\tilde{a}^{-1}}(x) = 1 - \varphi_{\tilde{a}}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (2.21)$$

Interprétation géométrique :

La transformation géométrique du plan (x, y) , illustrée Figure 11, concernant un point $M_{\tilde{a}}$ de $\varphi_{\tilde{a}}$ est la suivante :

$$\forall y \in [0, 1], M_{\tilde{a}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M_{\tilde{a}^{-1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ 1 - y \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Définition de la division :

La division de deux nombres flous \tilde{a} et \tilde{b} n'existe que si le pseudo-inverse \tilde{b}^{-1} existe, c'est à dire si \tilde{b} un nombre flou tel que $0 \notin \text{Supp}(\tilde{b})$, i.e. $\tilde{b} > 0$ ou $\tilde{b} < 0$. Elle est notée \tilde{a}/\tilde{b} et se définit par :

$$\varphi_{\tilde{a}/\tilde{b}}^{-1} = \varphi_{\tilde{a}}^{-1} \times \varphi_{\tilde{b}^{-1}}^{-1} \quad (2.23)$$

Le pseudo-inverse du nombre flou \tilde{b} est illustré figure 11, et le résultat de la division de \tilde{a} par \tilde{b} est illustré figure 12.

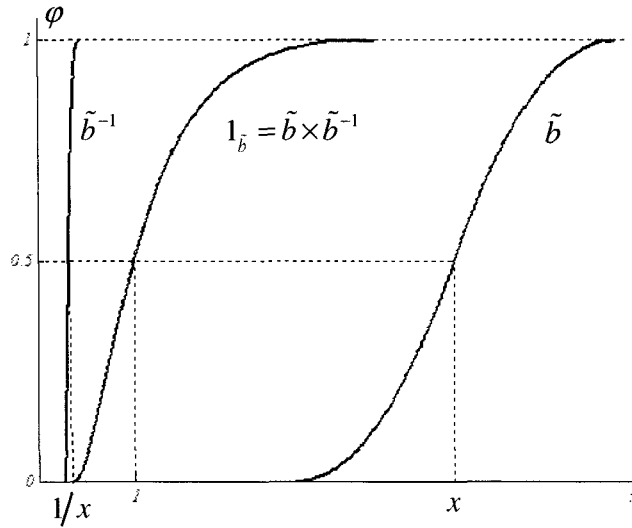


Figure 11 : Pseudo-inverse d'un nombre flou

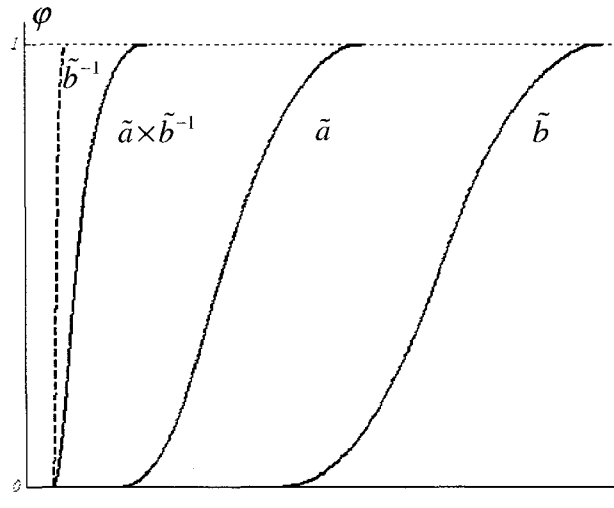


Figure 12 : Division de deux nombres flous

Toutes ces opérations sont compatibles avec l'algèbre dite de Moore [Moore, 1966].

3.1.5. Exemple

Le plus grand inconvénient des calculs issus des différentes arithmétiques mises en œuvre pour la prise en compte des incertitudes est la surestimation. Effectivement, chaque opération arithmétique engendre du pessimisme dans la solution. De plus l'ordre des opérations et/ou la forme des expressions utilisées influent sur ce pessimisme.

En reprenant l'exemple de [Jaulin, 1995], les deux expressions $\frac{x+2}{x+1}$ et $1+\frac{1}{x+1}$ sont égales pour $x \in \mathbb{R}$. Comme attendu, pour $\tilde{x} \in \Phi$, cette égalité n'est plus satisfaite (elle ne l'est pas non plus pour $[x] \in \mathbb{IR}$ avec l'algèbre de Moore, ni avec le principe d'extension flou de Zadeh), figure 13. En fait on peut montrer que si on a bien $\frac{\tilde{x}+2}{\tilde{x}+1} \neq 1+\frac{1}{\tilde{x}+1}$ on a aussi l'inclusion suivante : $Supp\left(1+\frac{1}{\tilde{x}+1}\right) \subset Supp\left(\frac{\tilde{x}+2}{\tilde{x}+1}\right)$. Le pessimisme engendré par la première expression est bien supérieur, figure 13.

La cohérence de la réalisation médiane est toutefois respectée puisque les deux réalisations sont égales. Cet exemple illustre bien que la manière de considérer une expression avant d'effectuer les calculs flous est capitale pour éviter une trop grande surestimation du résultat due au calcul.

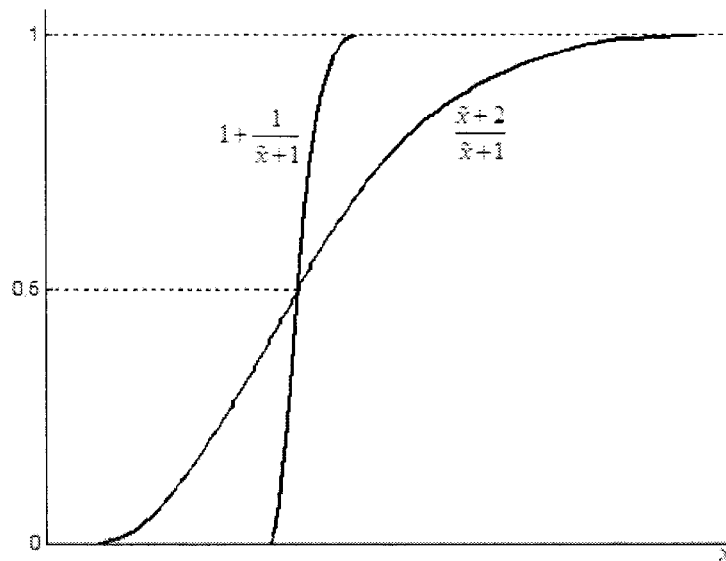


Figure 13 : Exemple : $\tilde{x} = \text{triplet}(1, 2, 3)$

3.2. Arithmétique floue sous contraintes

Les opérations arithmétiques effectuées sur des nombres classiques (l'arithmétique classique) suivent des règles uniques indépendantes de ce qui est représenté par les nombres impliqués par les opérations. Le résultat de chaque opération arithmétique particulière sur des nombres dépend seulement des nombres impliqués et non des entités représentées par ces nombres [Klir, 1997].

Prenons un exemple simple : si on a $\tilde{x} = \tilde{y}$ (en tout point) on s'attend à ce que $\tilde{x} - \tilde{y} = 0$ (et non pas $\tilde{0}$). Le $\tilde{0}$ que l'on obtient dans ce cas correspond à une imprécision artificielle introduite par l'opération. L'idée développée dans [Klir et Pan, 1998] est d'utiliser cette information supplémentaire $\tilde{x} = \tilde{y}$ sous forme d'une contrainte. Cette idée est ensuite généralisée dans le cas d'une contrainte égalité (par exemple au cas du calcul de $\tilde{x} \times \tilde{x}$, \tilde{x} / \tilde{x} ...) et exploitée sur d'autres types de contraintes (inégalité, probabiliste ...).

L'arithmétique du φ -calcul ayant été définie, l'image d'un nombre flou par une fonction fait l'objet du paragraphe suivant.

3.3. Fonctions monotones réelles de variables floues

Lorsqu'il s'agit de fonctions monotones non décroissantes l'image du nombre flou se calcule pour chaque point. Comme on utilise les fonctions réciproques $\varphi_a^{-1} : u \in [0,1] \rightarrow x \in \mathbb{R}$ pour avoir une base commune dans $[0,1]$ on a alors :

$$\forall u \in [0,1], \quad \varphi_{f(\tilde{a})}^{-1}(u) = f(\varphi_a^{-1}(u)) = (f \circ \varphi_a^{-1})(u) \quad (2.24)$$

Dans le cas d'une fonction monotone décroissante la composition $f \circ \varphi_x^{-1}$ donne une fonction décroissante qui est incompatible avec la définition des nombres flous utilisés. Dans ce cas, une généralisation de la définition du pseudo-opposé est proposée pour résoudre cette incompatibilité. Le résultat de la composition $(f \circ \varphi_a^{-1})^{-1} : x \in \mathbb{R} \rightarrow u \in [0,1]$ est complété à 1 pour garder le même support. On peut donc écrire $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{f(\tilde{a})}(x) = 1 - (f \circ \varphi_a^{-1})^{-1}(x)$ ce qui est équivalent à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \varphi_{f(\tilde{a})}(x) = (f \circ \varphi_a^{-1})^{-1}(x) \quad (2.25)$$

avec : $u = \varphi_{f(\tilde{a})}(x)$, (2.25) s'écrit alors : $1 - u = (f \circ \varphi_a^{-1})^{-1}(\varphi_{f(\tilde{a})}^{-1}(u))$ et on a donc une expression directe pour la fonction réciproque :

$$\forall u \in [0,1] \quad \varphi_{f(\tilde{a})}^{-1}(u) = (f \circ \varphi_a^{-1})(1 - u) = f(\varphi_a^{-1}(1 - u)) \quad (2.26)$$

C'est-à-dire : $\forall u \in [0, 1], M_{\tilde{a}} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \rightarrow M_{f(\tilde{a})} \begin{pmatrix} f(x) \\ 1-u \end{pmatrix}$.

Dans ce qui suit, quelques exemples illustrent l'usage de certaines fonctions.

3.3.1. Exponentielle d'un nombre flou

Comme la fonction exponentielle est une fonction monotone croissante, la définition de $f(\tilde{a}) = \exp(\tilde{a})$ pour un nombre flou \tilde{a} est immédiatement définie à l'aide de (2.24) :

$$\varphi_{\exp(\tilde{a})}^{-1} = \exp(\varphi_{\tilde{a}}^{-1}) \tag{2.27}$$

La figure 14 illustre cette fonction avec pour le nombre flou $\tilde{a} = \text{triplet}(1, 2, 3)$. Signalons que l'exponentielle floue ne conserve pas le triangle.

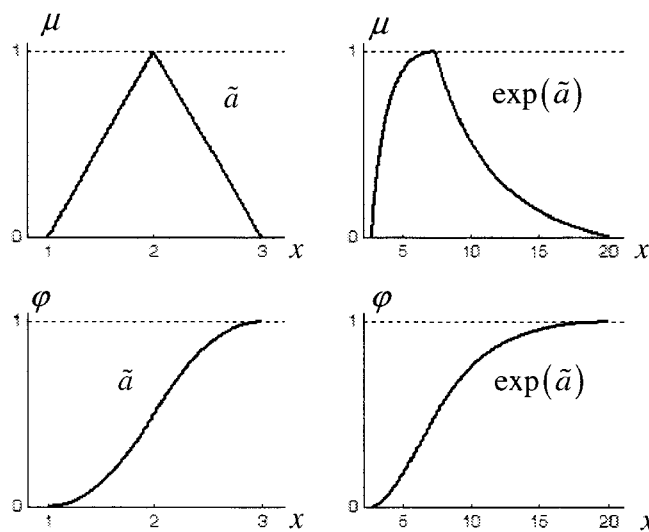


Figure 14 : Exponentielle du nombre flou \tilde{a}

3.3.2. Logarithme d'un nombre flou

Le logarithme se définit également de façon directe pour les nombres flous tels que $\tilde{a} > 0$, i.e. à support positif :

$$\varphi_{\log(\tilde{a})}^{-1} = \log(\varphi_{\tilde{a}}^{-1}) \tag{2.28}$$

Un exemple est donné figure 15 (sur cet exemple, il s'agit d'un logarithme népérien).

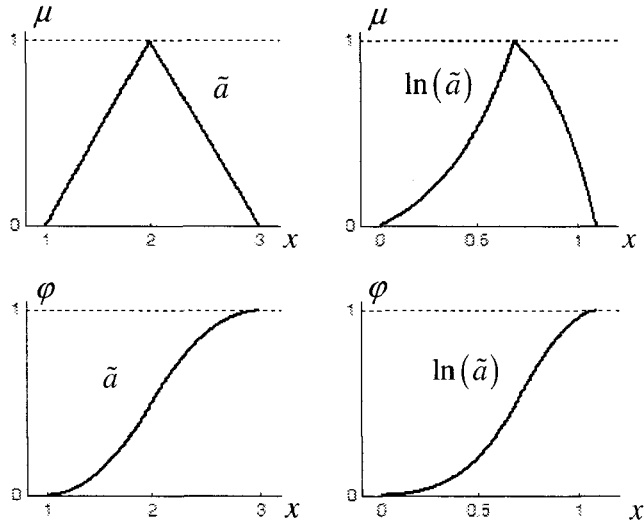


Figure 15 : Logarithme népérien du nombre flou \tilde{a}

On peut imaginer travailler avec tout type de fonctions possédant les propriétés de monotonie, par exemple arcsinus, arccosinus, arctangente...

D'autres fonctions ne possédant pas cette propriété, telles que les fonctions trigonométriques directes ne sont pas traitées dans ce chapitre, mais seront discutées dans le chapitre 5.

3.4. Exemple d'application

Dans le but d'illustrer les avantages et les inconvénients de cette nouvelle arithmétique φ -calcul, une application est proposée dans ce chapitre. Elle consiste à rechercher une solution à l'équation, avec \tilde{a} et \tilde{b} des nombres flous supposés non mixtes :

$$\tilde{a} \times \tilde{x} + \tilde{b} = 0 \tag{2.29}$$

Cette équation n'admet pas de solution unique étant donné qu'elle représente l'égalité entre un terme flou et un terme précis. La solution proposée est :

$$\tilde{x} = \frac{-\tilde{b}}{\tilde{a}} \tag{2.30}$$

Cette solution \tilde{x} ne garantit pas (2.29) mais $\tilde{a} \times \tilde{x} + \tilde{b} = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'un des représentants de la classe d'équivalence de 0 qui dépend de la solution obtenue. Quelques

exemples de résultats sont représentés figure 16, selon différents choix des nombres flous \tilde{a} et \tilde{b} .

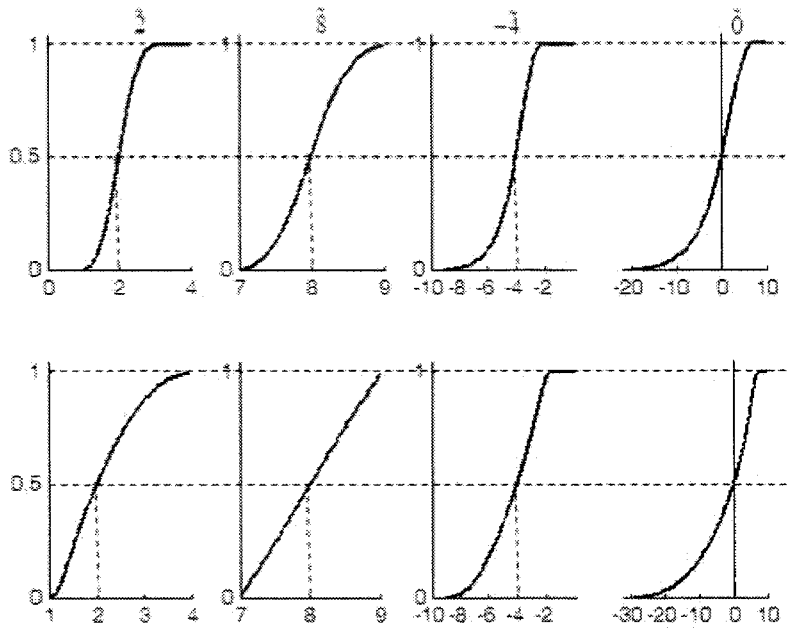


Figure 16 : Deux exemples de solution à l'équation $\tilde{2} \cdot \tilde{x} + \tilde{8} = \tilde{0}$; $\tilde{x} = -\tilde{4}$

Il est facilement vérifiable que la réalisation médiane (coupe à $y = 0,5$) ne dépend pas du représentant choisi pour les paramètres flous \tilde{a} et \tilde{b} (stabilité des opérations dans l'ensemble quotient Φ/\mathbb{R}). A contrario, la figure 17 montre que le résultat final dépend de façon importante des formes des fonctions φ_2 et φ_8 (et donc de μ_2 et μ_8). Ceci est particulièrement bien mis en évidence par les fonctions d'appartenance associées au résultat, aussi bien pour μ_{-4} que pour μ_0 .

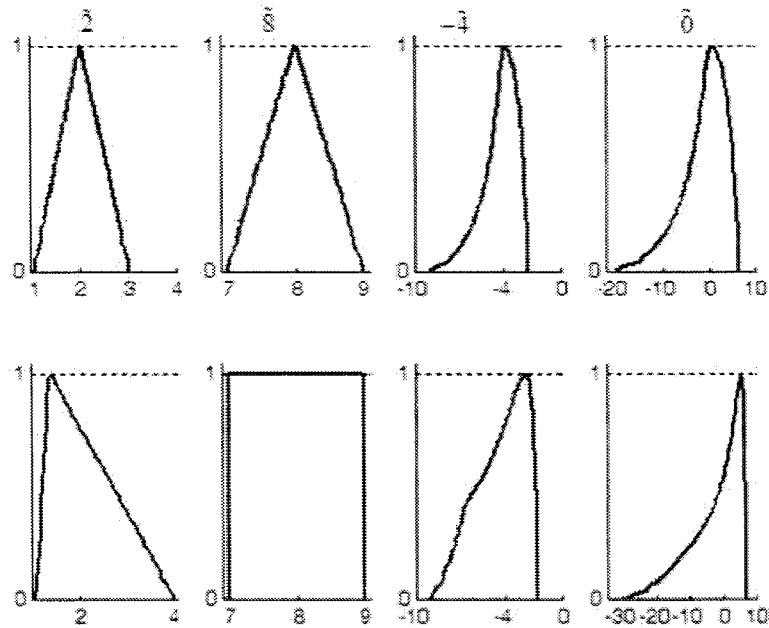


Figure 17 : Fonctions d'appartenance classiques des paramètres de l'équation $\tilde{2} \cdot \tilde{x} + \tilde{8} = \tilde{0}$.

La résolution de cette équation peut également se faire en utilisant les α -coupes, c'est-à-dire en se ramenant au calcul par intervalles. La solution trouvée dans ce cas ou bien par notre approche, est dite pessimiste car le support résultat est surestimé pour englober toutes les solutions possibles dans le domaine de solutions.

3.5. Recherche de solutions dites « approchées » ou « exactes »

Pour éviter le pessimisme des conditions de calcul, des arithmétiques différentes peuvent être utilisées [Boukezzoula, et al. 2006]. En résumant de façon rapide, elles proposent des solutions moins pessimistes (appelées « exactes ») avec comme contrepartie le fait de ne pas avoir de solutions à l'équation dans certains cas (alors qu'une solution plus pessimiste est possible).

Les calculs utilisant des quantités floues engendrant des surestimations plus au moins importantes des résultats, la recherche de solutions dites « approchées » peut parfois être nécessaire pour faciliter une prise de décision.

Ce point est repris et développé dans le chapitre 4 pour la commande des systèmes.

3.5.1. Recherche d'une solution basée sur un modèle

Il y a des situations où on recherche une solution qui corresponde à un modèle prédéfini. Par exemple, si on juge que le pessimisme engendré par les solutions (dû aux opérations arithmétiques plus qu'aux données manipulées) est trop important, il est souhaitable de proposer une solution pour réduire cette surestimation. Pour ce faire, il est possible d'imposer un modèle de solution avec surestimation réduite en fonction de différents paramètres. Par exemple, on peut proposer un nombre flou triangulaire et imposer une borne minimum à son support.

Les choix du modèle et des contraintes effectués, il s'agit alors de trouver les paramètres de ce modèle qui permettent de minimiser l'écart avec la solution obtenue. Soit \tilde{Q} une quantité floue résultat d'opérations effectuées à l'aide du φ -calcul, représentée par sa fonction de répartition $\varphi_{\tilde{Q}}$, de support $Supp(\tilde{Q})$. Soit \tilde{Q}^* le modèle optimal recherché dépendant d'un vecteur de paramètres θ et $h_{\tilde{Q}^*}(\theta) \leq 0$ un ensemble de contraintes à satisfaire. La recherche de la solution dite « approchée » se fait en recherchant :

$$\begin{cases} \tilde{Q}_{app} = \arg \min_{\theta} d_{\bullet}(\tilde{Q}, \tilde{Q}^*(\theta)) \\ \text{sous contraintes : } h_{\tilde{Q}^*}(\theta) \leq 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

d_{\bullet} représentant une des distances définies plus loin.

Par exemple, on suppose que le résultat flou \tilde{Q} devrait être proche d'un triangle tel que sa borne inférieure ne dépasse pas une valeur donnée \bar{a} . Dans ce cas la solution « approchée » est recherchée comme un triangle : $\tilde{Q}^*(a, b) = \text{triplet}\left(a, \frac{a+b}{2}, b\right)$ (avec $\theta^T = [a \ b]$) représenté par sa fonction de répartition $\varphi_{\tilde{Q}^*(a,b)}$. On cherche alors $\theta^T = [a \ b]$

qui minimise $\begin{cases} d_1(\varphi_{\tilde{Q}}, \varphi_{\tilde{Q}^*(a,b)}) \\ a \leq \bar{a} \end{cases}$ (si d_1 est la distance choisie qui sera définie dans la suite).

3.5.2. Utilisation des « ψ -coupes»

Pour réduire une surestimation jugée trop grande, une autre piste exploitable est l'utilisation du concept des ψ -coupes. Elle permet également d'éviter la perte d'information engendrée par une réalisation directe (ou dans le cas général de la défuzzification).

Définition : Soit un nombre flou \tilde{a} défini par sa fonction de répartition $\varphi_{\tilde{a}} : X \subset \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ et un nombre réel $\psi \in [0;0,5]$. On définit $a_{\psi} = \varphi_{\tilde{a}}^{-1}(\psi)$ et $a_{1-\psi} = \varphi_{\tilde{a}}^{-1}(1-\psi)$, une ψ -coupe $\varphi_{\tilde{a}_{\psi}}$ correspond à :

$$\varphi_{\tilde{a}_{\psi}}(x) = \begin{cases} 0 & \underline{a} \leq x < a_{\psi} \\ \varphi_{\tilde{a}}(x) & a_{\psi} \leq x \leq a_{1-\psi} \\ 1 & a_{1-\psi} < x \leq \bar{a} \end{cases} \quad (1.32)$$

L'une des réalisations que l'on peut définir à partir des ψ -coupes notée $R_{\tilde{a}_{\psi}}$ est celle qui consiste à rechercher le point d'intersection, s'il est unique, entre la fonction de répartition du résultat et la droite $\varphi_{[a_{\psi}, a_{1-\psi}]}$ rejoignant les points : $(a_{\psi}, 0)$ et $(a_{1-\psi}, 1)$, figure 18.

$$R_{\tilde{a}_{\psi}}(\tilde{a}) = \left\{ a \in [a_{\psi}, a_{1-\psi}] \mid \varphi_{\tilde{a}}(x) = \frac{a - a_{\psi}}{a_{1-\psi} - a_{\psi}} \right\} \quad (2.33)$$

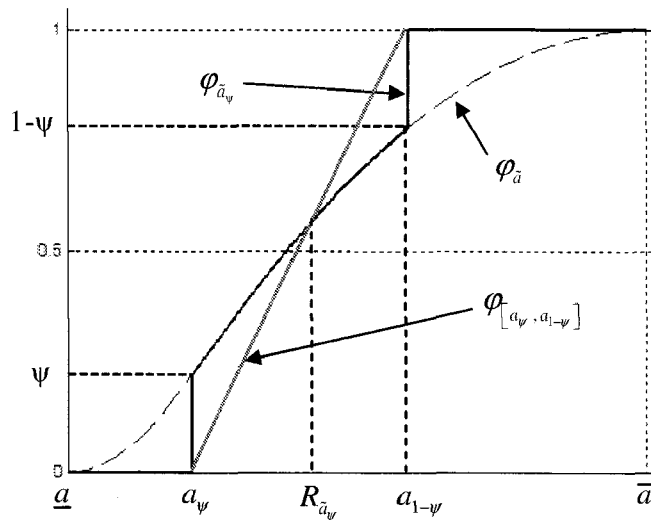


Figure 18 : ψ -coupe et sa réalisation

Pour compléter cette algèbre, cette section propose une métrique associée comprenant différents indices métriques dans le but entre autre d'ordonner les nombres et les quantités flous et de quantifier l'imprécision contenue dans un nombre flou.

4. Métrique sur Φ

4.1. Indices métriques

On définit sur l'ensemble Φ des nombres flous les trois indices métriques suivants : la distance, l'écart et l'indice de précédence.

4.1.1. Distance

Par homogénéité avec la métrique sur l'ensemble des nombres réels, à savoir $a, b \in \mathbb{R}$ $d_1(a, b) = |a - b|$, on définit la distance entre deux nombres flous $\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi$ par :

$$d_1(\tilde{a}, \tilde{b}) = \int_0^1 |\varphi_{\tilde{a}}^{-1}(y) - \varphi_{\tilde{b}}^{-1}(y)| dy \quad (2.34)$$

Le calcul est fait sur la réciproque $\varphi_a^{-1} : y \in [0, 1] \rightarrow x \in \mathbb{R}$ toujours pour la même raison. d_1 est une distance de Hamming [Kaufmann, 75], et vérifie par là même tous les axiomes caractérisant une distance.

D'autres distances peuvent être définies par simple extension du cas réel. Par exemple la distance euclidienne (ou quadratique, ou distance de Wasserstein pour deux fonctions de répartition empiriques) :

$$\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi, \quad d_2(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sqrt{\left(\int_0^1 (\varphi_{\tilde{a}}^{-1}(y) - \varphi_{\tilde{b}}^{-1}(y)) dy \right)^2} \quad (2.35)$$

Ou encore la distance de Hamming généralisée :

$$\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi \quad d_p(\tilde{a}, \tilde{b}) = \left(\int_0^1 |\varphi_{\tilde{a}}^{-1}(y) - \varphi_{\tilde{b}}^{-1}(y)|^p \cdot dy \right)^{1/p} \quad (2.36)$$

4.1.2. Écart

Dans le même souci d'homogénéité, on définit l'écart d'un nombre flou \tilde{a} au nombre flou \tilde{b} comme la moyenne des écarts réels $a, b \in \mathbb{R}$ $a - b$ à chaque niveau y :

$$\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi \quad \delta(\tilde{a}, \tilde{b}) = \int_0^1 [\varphi_{\tilde{a}}^{-1}(y) - \varphi_{\tilde{b}}^{-1}(y)] \cdot dy \quad (2.37)$$

De façon évidente $\delta(\tilde{a}, \tilde{b}) = R_{\text{moy}}(\tilde{a}) - R_{\text{moy}}(\tilde{b}) \in \mathbb{R}$, et peut donc être négatif.

4.1.3. Indices de « précedence »

Soient $\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi$, $\tilde{a} \neq \tilde{b}$, i.e. $d_1(\tilde{a}, \tilde{b}) \neq 0$, deux nombres flous, un premier indice de précedence π est défini par :

$$\pi(\tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{\delta(\tilde{a}, \tilde{b})}{d_1(\tilde{a}, \tilde{b})} \quad (2.38)$$

Cet indice $\pi \in [-1, 1]$ quantifie la façon dont les deux nombres « s'entrecroisent ». Il est égal à 1 si \tilde{a} précède totalement \tilde{b} c'est-à-dire :

$$\forall y \in [0, 1]; \quad \varphi_a^{-1}(y) \leq \varphi_b^{-1}(y) \quad (2.39)$$

Un second indice de précedence est proposé (plus global car pas directement lié aux réalisations), plus strict dans sa définition que le premier, noté η , et défini comme suit :

$$\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi, \quad \eta(\tilde{a}, \tilde{b}) = \int_0^1 \text{sign}(\varphi_a^{-1}(y) - \varphi_b^{-1}(y)) \cdot dy \quad (2.40)$$

On montre facilement que $\eta \in [-1, 1]$, cet indice est plus « sévère » que le précédent indice. Il compare les parties de \tilde{b} qui précèdent \tilde{a} (respectivement de \tilde{a} qui précèdent \tilde{b}).

4.1.4. Relations d'ordre induites

A partir de (2.37) on peut construire une relation de pré-ordre sur les réalisations moyennes. Effectivement, considérons la relation \preceq (respectivement \succeq) définie comme suit : $\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi$ $\tilde{a} \preceq \tilde{b} \Leftrightarrow \delta(\tilde{a}, \tilde{b}) \leq 0$ (respectivement $\tilde{a} \succeq \tilde{b} \Leftrightarrow \delta(\tilde{a}, \tilde{b}) \geq 0$). A partir de (2.37) on peut écrire :

$$\tilde{a} \preceq \tilde{b} \Leftrightarrow \int_0^1 \varphi_a^{-1}(y) \cdot dy \leq \int_0^1 \varphi_b^{-1}(y) \cdot dy \Leftrightarrow R_{\text{moy}}(\tilde{a}) \leq R_{\text{moy}}(\tilde{b}) \quad (2.41)$$

Par ailleurs, on montre que cette relation de pré-ordre n'est pas compatible avec la relation d'ordre classique sur Φ/\mathbb{R} : $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ n'implique pas $a \leq b$.

De la même manière on peut induire un pré-ordre à partir du deuxième indice de précedence (2.40).

4.2. Quantité de floue contenue dans un nombre flou

Il est souvent utile et nécessaire de quantifier l'imprécision contenue dans un nombre flou et plus généralement d'un sous-ensemble flou, soit de déterminer dans quelle mesure un nombre flou A est imparfaitement défini. Pour cela, deux approches différentes existent et sont respectivement caractérisées par le *degré de flou* et la *spécificité* d'un sous-ensemble flou [De Luca & Termini, 1972 ; Kaufmann, 1977 ; Yager, 1982 ; Bouchon Meunier & Marsala, 2003].

Le degré de flou vise à évaluer dans quelle mesure "*l'appartenance et la non appartenance à un sous-ensemble flou sont différenciées*" : une appartenance égale à 0 ou à 1 représente une certitude absolue en ce qui concerne la proposition modélisée, alors qu'une appartenance de 0,5 représente l'indécision la plus totale.

La spécificité, quant à elle, vise à évaluer dans quelle mesure le sous-ensemble flou est proche d'un singleton. C'est une grandeur à valeur dans $[0,1]$, égale à 1 si le sous-ensemble considéré est réduit à un singleton.

Pour évaluer l'imprécision, ou la quantité de flou, contenue dans un nombre $\tilde{a} \in \Phi$ représenté par $\varphi_{\tilde{a}} : x \in \mathbb{R} \rightarrow y \in [0,1]$ on définit certains indices à partir de la métrique définie sur Φ . On rappelle par définition que $Supp(\tilde{a}) = [\underline{a}, \bar{a}]$. Toute réalisation de \tilde{a} notée $R_{\bullet}(\tilde{a})$ (le \bullet représentant une réalisation parmi celles possibles) est telle que : $R_{\bullet}(\tilde{a}) \in [\underline{a}, \bar{a}]$. Parmi les réalisations possibles on peut évaluer son adéquation en utilisant une des distances définie sur Φ : $d_{\bullet}(\tilde{a}, R_{\bullet}(\tilde{a}))$. Une réalisation est d'autant plus représentative qu'elle minimise cette distance. $d_{\bullet}(\tilde{a}, R_{\bullet}(\tilde{a}))$ peut donc être vue comme un degré de non représentativité de la réalisation $R_{\bullet}(\tilde{a})$.

Pour d_1 , on montre aisément que cette distance est minimum pour la réalisation médiane définie précédemment. En effet, on peut écrire $\forall r \in \text{Supp}(\tilde{a}) = [\underline{a}, \bar{a}]$:

$$d_1(\tilde{a}, r) = \int_0^1 |\varphi_{\tilde{a}}^{-1}(y) - r| \cdot dy \quad (2.42)$$

Or, ce terme correspond graphiquement à la surface $S(r)$ représentée figure 19 :

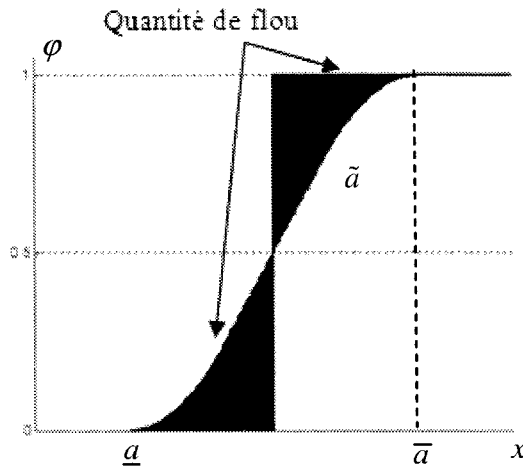


Figure 19 : Quantité floue contenue dans un nombre

Il est aussi possible de calculer $S(r)$ en intégrant, non pas selon l'axe des ordonnées, mais selon l'axe des abscisses, soit :

$$d_1(\tilde{a}, r) = S(r) = \int_{\underline{a}}^r \varphi_{\tilde{a}}(x) dx + \int_r^{\bar{a}} [1 - \varphi_{\tilde{a}}(x)] dx \quad (2.43)$$

(2.43) est minimale pour : $\frac{\partial d(\tilde{a}, r)}{\partial r} = \frac{\partial S(r)}{\partial r} = 2 \cdot \varphi_{\tilde{a}}(r) - 1 = 0$ c'est-à-dire $\varphi_{\tilde{a}}(r) = 0,5$

soit encore la réalisation médiane : $r = R_{\text{med}}(\tilde{a})$.

Le réel le plus représentatif de \tilde{a} au sens de la métrique d_1 est donc la réalisation médiane $R_{\text{med}}(\tilde{a})$. La distance séparant \tilde{a} de cette réalisation permet de quantifier l'imprécision contenue dans ce nombre, comme le montre la figure 19 (elle est nulle s'il est ordinaire).

A partir de ce résultat, différentes quantités de flous sont définies.

- La *quantité de flou absolue* contenue dans un nombre flou est définie par :

$$Q_{abs}(\tilde{a}) = d_1(\tilde{a}, R_{med}(\tilde{a})) \quad (2.44)$$

- La *quantité de flou relative* contenue dans un nombre flou est définie par :

$$Q_{rel}(\tilde{a}) = \frac{d_1(\tilde{a}, R_{med}(\tilde{a}))}{R_{med}(\tilde{a})} = \frac{Q_{abs}(\tilde{a})}{R_{med}(\tilde{a})} \quad (2.45)$$

• La *quantité de flou normée* est obtenue en rapportant la quantité de flou absolue de \tilde{a} à la quantité de flou absolue maximale pour un nombre ayant à la fois la même réalisation médiane et le même support. La fonction φ de ce nombre est représentée sur la figure 20, et sa

quantité de flou absolue est $\frac{\bar{a} - a}{2}$. La quantité de flou normée est donc, comme son nom l'indique, par définition comprise entre 0 et 1, et exprimée de la façon suivante :

$$Q_{nor}(\tilde{a}) = 2 \cdot \frac{d_1(\tilde{a}, R_{med}(\tilde{a}))}{\bar{a} - a} \quad (2.46)$$

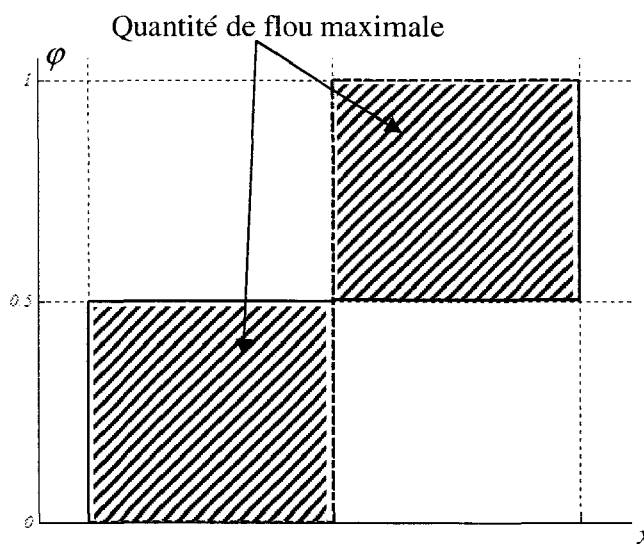


Figure 20 : Quantité de flou maximale pour une réalisation et un support donnés.

5. Fusion de quantités floues

Dans cette partie, nous introduisons un opérateur de fusion floue [Roger & al., 1999 ; Lamara & al., 2007]. Pour des raisons de clarté et de compréhension de cet opérateur, nous introduisons la moyenne pondérée appliquée aux nombres flous modélisés sous forme de fonction de répartition.

5.1. Moyenne floue pondérée

Soient $\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi$ deux nombres flous et $\varphi_{\tilde{a}}, \varphi_{\tilde{b}} : x \in \mathbb{R} \rightarrow y \in [0,1]$ leur représentation. La moyenne pondérée des deux nombres flous est définie de la manière suivante, où $p_{\tilde{a}}, p_{\tilde{b}} \in \mathbb{R}$ représentent les pondérations respectives des deux nombres flous. Le calcul se faisant toujours sur les réciproques :

$$\forall y \in [0,1] \quad \varphi_{\text{moy}}^{-1}(y) = \frac{p_{\tilde{a}} \cdot \varphi_{\tilde{a}}^{-1}(y) + p_{\tilde{b}} \cdot \varphi_{\tilde{b}}^{-1}(y)}{p_{\tilde{a}} + p_{\tilde{b}}} \quad (2.47)$$

Cette moyenne floue pondérée est compatible avec la réalisation médiane, c.-à-d., la réalisation médiane de la moyenne floue est la moyenne des réalisations médianes des deux nombres flous.

5.2. Fusion floue pondérée

Soient $\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi$ deux nombres flous et $\varphi_{\tilde{a}}, \varphi_{\tilde{b}} : x \in \mathbb{R} \rightarrow y \in [0,1]$ leur représentation. La fusion pondérée des deux nombres flous est définie de la manière suivante, où $p_{\tilde{a}}, p_{\tilde{b}} \in \mathbb{R}$ représentent les pondérations respectives des deux nombres flous. Le calcul est cette fois-ci réalisé sur les fonctions de répartition (et non leur réciproque) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{\text{WFF}}(x) = \frac{p_{\tilde{a}} \cdot \varphi_{\tilde{a}}(x) + p_{\tilde{b}} \cdot \varphi_{\tilde{b}}(x)}{p_{\tilde{a}} + p_{\tilde{b}}} \quad (2.48)$$

On peut voir cet opérateur comme une fusion dans le sens où il conserve une partie des informations des ensembles flous de départ, voir figure 21, où φ_{WFF} va « de l'un à l'autre ».

Il est facile de démontrer que les propriétés suivantes sont toujours vérifiées. Soit \tilde{c} le résultat de la fusion représenté par φ_{WFF} :

- La fusion est une opération interne dans Φ , i.e. $\tilde{c} \in \Phi$.

- $Supp(\tilde{c}) = [\underline{c}, \bar{c}]$ avec : $\underline{c} = \min(\underline{a}, \underline{b})$ et $\bar{c} = \max(\bar{a}, \bar{b})$
- La fusion floue pondérée n'est pas compatible avec la réalisation médiane.

5.3. Exemple Fusion/moyenne floue pondérée

Soient $\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi$ deux nombres flous et $\varphi_{\tilde{a}}, \varphi_{\tilde{b}} : x \in \mathbb{R} \rightarrow y \in [0,1]$ leur représentation. La figure 21 illustre la moyenne pondérée (figures du haut, à gauche $p_{\tilde{a}} = p_{\tilde{b}} = 0,5$, à droite $p_{\tilde{a}} = 0,8$ et $p_{\tilde{b}} = 0,2$) et la fusion (figures du bas, à gauche $p_{\tilde{a}} = p_{\tilde{b}} = 0,5$, à droite $p_{\tilde{a}} = 0,8$ et $p_{\tilde{b}} = 0,2$) des deux nombres flous représentés par leurs fonctions de répartition dans deux cas, avec comme résultat à chaque fois une quantité floue $\tilde{c} \in \Phi$. Elle illustre bien l'aspect fusion de l'opérateur WFF .

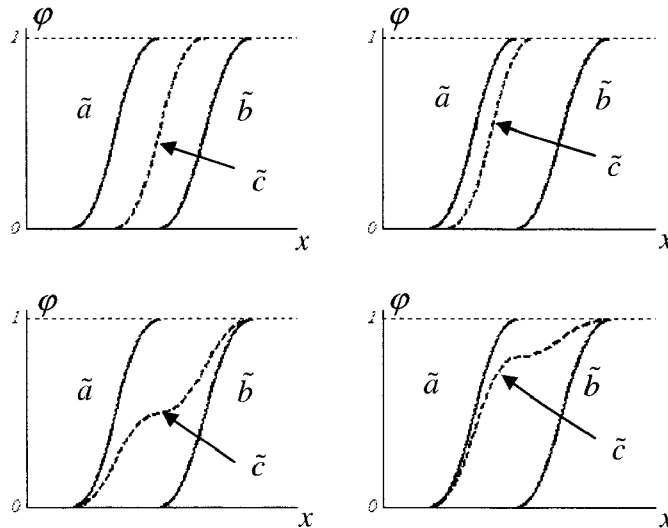


Figure 21 : Fusion et moyenne pondérées de deux nombres flous

6. Conclusion

Le chapitre a permis de proposer une nouvelle arithmétique des nombres flous appelée φ -calcul. En premier lieu, une nouvelle modélisation de ces nombres par leur fonction de répartition et l'arithmétique que l'on peut construire avec cette représentation ont été présentées. Celle-ci permet de traiter simplement les nombres et intervalles flous de forme quelconque. En second lieu, une métrique dont il est possible de déduire des indices de flou et une relation de pré-ordre sur Φ ont été proposées. Enfin, un opérateur interne de fusion a été proposé.

Notons que dans le but de manipuler simplement l'arithmétique φ -calcul et de pouvoir la comparer à celles issues des théories des intervalles [Moore, 1966] ou du principe de l'extension floue de Zadeh [Zadeh, 1965], une boîte à outils MATLAB a été développée.

Afin d'illustrer les possibilités offertes par cette nouvelle modélisation et l'arithmétique φ -calcul associée, notamment l'opérateur de fusion, plusieurs applications seront proposées dans les chapitres suivants. Le chapitre 3 appliquera cette algèbre à la classification de données (classer des listes au sens de l'âge des individus qui les composent par exemple) tandis que l'application à la commande sera traitée dans le chapitre 4 (structure de commande à modèle interne par exemple).

Chapitre 3 : φ -calcul et la classification

1. Introduction	- 81 -
2. Classification ascendante hiérarchique	- 82 -
2.1. Principe	- 82 -
3. Fuzzification et ordonnancement de données par le φ-calcul	- 84 -
4. Applications	- 88 -
4.1. Filtrage numérique du signal	- 88 -
4.2. Ordonnancement de listes	- 91 -
4.3. Fuzzification et classification de données du crâne humain	- 97 -
4.4. Fuzzification et classification d'étudiants	- 101 -
4.4.1. Calcul des profils par étudiant	- 101 -
4.4.2. Classement des étudiants par l'indice η	- 103 -
4.4.3. Classification globale des étudiants	- 104 -
4.4.4. Classification des étudiants par unité	- 105 -
5. Conclusion.....	- 106 -

Introduction

La classification intervient fréquemment dans tous les domaines et dans la vie courante, les éléments sont répertoriés par rapport à des classes auxquelles ils sont censés appartenir, ou simplement ordonnés selon un critère bien défini. Cette appartenance est, la plupart du temps, vague et/ou graduelle.

De plus, des termes linguistiques tels que « très », « trop », « assez », « insuffisamment », rencontrés dans beaucoup de cas, et caractérisant les propriétés de certaines données, ajoutent des incertitudes et des imprécisions modélisables en utilisant des techniques du type classification par décision floue, réseau de neurones ...

Lorsque aucune information sur les objets à traiter n'est disponible a priori, on parle de classification non supervisée (ou en anglais de *clustering*), ou regroupement, et de classification supervisée, ou classification tout court, dans le cas contraire. Néanmoins, on parle d'environnement partiellement supervisé dans le cas où l'information disponible est incomplète. Différents travaux issus de la littérature proposent certaines techniques pour traiter ces situations [Pedrycz, 1986 ; Dubuisson & Masson, 1993].

La classification, en tant que discipline scientifique, a été automatisée et massivement appliquée ces dernières années bénéficiant ainsi de l'avènement et du perfectionnement des outils informatiques. Les méthodes mises au point à des fins de classification, supervisée ou non, sont très abondantes dans la littérature. Le choix d'une méthode dépend de l'application et de la problématique posée. Aussi, la plupart des techniques nécessitent le réglage de paramètres qui peuvent influencer de manière très importante sur les résultats.

Dans ce domaine, l'introduction en 1969 par Enrique H. Ruspini [Ruspini, 1969] de la notion de partition floue est d'une grande importance, celle-ci aboutit à la définition d'une famille d'algorithmes : les *c*-moyennes floues par J.C. Bezdek [Bezdek, 1981]. Aujourd'hui, un très grand nombre de travaux ont été développés sur le thème des *c*-moyennes floues et leurs améliorations, et constituent l'essentiel de ce qui a été publié dans le domaine de la classification floue non supervisée [Krishnapuram & Keller, 1993 ; Khodja, 1999 ; Baccini & Besse, 2003, Bouchon-Meunier & Marsala, 2003].

L'objet de ce chapitre, ne concernant pas directement ces théories, elles ne sont pas rappelées. Cependant, dans la continuité de nos travaux sur le φ -calcul, avec l'introduction de l'opérateur de fusion pondérée floue, plusieurs applications dans ce domaine sont proposées, notamment la classification de données floues obtenues par ce dernier, ce qui justifie ce rappel bibliographique succinct. Le premier paragraphe est consacré à un bref rappel de la classification ascendante hiérarchique, son principe et les différentes techniques de calcul des dissemblances. Dans le deuxième paragraphe, nous rappelons l'opérateur de fusion pondérée floue lié au φ -calcul introduit dans le chapitre 2, pour souligner sa double utilisation : comme opérateur de fusion de données et comme opérateur de fuzzification. Le dernier paragraphe présente des exemples simples et des applications de cet opérateur dans la classification de données pour illustrer ses avantages et ses limitations.

1. Classification ascendante hiérarchique

L'objectif d'une méthode de classification consiste à rechercher une *typologie* ou *segmentation* des éléments à classer, c'est-à-dire de définir une partition ou répartition de ces éléments en *classes* ou catégories. Ceci est fait en optimisant un *critère* visant à regrouper les éléments dans des classes les plus homogènes (dispersion intra-classe minimale) et les plus distinctes entre elles (dispersion inter-classe maximale). Cet objectif est à distinguer des procédures de discrimination ou encore de classement pour lesquelles une typologie est *a priori* connue, au moins pour un échantillon d'apprentissage. Tous les exemples traités dans ce travail concernent la situation d'apprentissage *non-supervisé*.

1.1. Principe

Soient n éléments et p variables quantitatives ou données associées aux éléments. Le but est d'obtenir une classification automatique des éléments. L'initialisation de cet algorithme consiste à disposer d'un tableau de dissemblances (distances) entre les n éléments à classer. L'algorithme est ascendant, il commence de la partition triviale des n singletons, chaque élément étant une classe. Ensuite, à chaque étape l'algorithme constitue des classes par agrégation des 2 éléments les plus proches de la partition de l'étape précédente. L'algorithme s'arrête lorsque tous les éléments sont agrégés en une classe unique. Les regroupements successifs sont représentés sous la forme d'un arbre binaire ou *dendrogramme*.

1.2. Dissemblance ou distance entre deux classes

Il est donc nécessaire de définir deux critères. Le premier doit permettre de déterminer la ressemblance (ou la dissemblance) entre deux éléments. Le second appelé, critère d'agrégation, doit permettre de déterminer la distance entre deux classes. Pour le premier, on utilise une distance notée $d_{i,j}$ (avec i et j deux éléments) dans la suite. Notons qu'en général c'est la distance euclidienne qui est choisie.

Pour le second, il y a de nombreux choix. Soient C_1 et C_2 deux classes (qui peuvent être réduites à un élément) de cardinal respectif n_{C_1} et n_{C_2} , certains critères d'agrégation sont définis ci-après :

- Saut minimal : $d(C_1, C_2) = \min_{i \in C_1, j \in C_2} (d_{i,j})$
- Saut maximal : $d(C_1, C_2) = \sup_{i \in C_1, j \in C_2} (d_{i,j})$
- Saut moyen : $d(C_1, C_2) = \frac{1}{n_{C_1} \cdot n_{C_2}} \times \sum_{i \in C_1, j \in C_2} d_{i,j}$
- Barycentre : $d(C_1, C_2) = d(g_{C_1}, g_{C_2})$, g_{C_k} est le barycentre de la classe C_k
- Saut de Ward : $d(C_1, C_2) = \sqrt{\frac{\omega_{C_1} \cdot \omega_{C_2}}{\omega_{C_1} + \omega_{C_2}}} d(g_{C_1}, g_{C_2})$, g_{C_k} est le barycentre et ω_{C_k} une pondération de la classe C_k .

Le choix de l'agrégation est évidemment capital. Suivant le choix opéré on peut avoir des opérateurs qui ont tendance à produire des classes générales et sensibles aux éléments bruités (saut minimal par exemple). Inversement le saut maximal aura tendance à produire des classes spécifiques et sera également sensible aux bruits [Bisson & Nédellec, 2001].

De façon générale, la classification hiérarchique est dépendante d'une distance ultra métrique pour éviter les inversions (distance possédant la propriété supplémentaire : $\forall x, y, z, d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$). Il s'agit donc de déterminer une métrique qui soit la plus proche possible d'une ultra métrique pour le problème considéré.

Dans le cas du traitement proposé, les éléments traités étant des quantités floues, les indices de dissemblance possibles sont ceux introduits dans le cadre du φ -calcul (voir chapitre 2). Le critère d'agrégation correspond à l'opérateur de fusion *WFF*.

2. Fuzzification et ordonnancement de données par le φ -calcul

Le traitement proposé concerne les quantités floues. Elles peuvent soit être disponibles, soit à construire. Dans ce dernier cas, cette partie montre que le même opérateur, à savoir *WFF* peut être utilisé pour cette construction.

Fusion floue pondérée (*WFF*) comme opérateur de fuzzification

Soient $\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi$ deux nombres flous et $\varphi_{\tilde{a}}, \varphi_{\tilde{b}} : x \in \mathbb{R} \rightarrow y \in [0,1]$ leur représentation. On rappelle que la fusion pondérée des deux quantités floues est réalisée sur les fonctions de répartition (et non leur réciproque) et est définie de la manière suivante, où $p_{\tilde{a}}, p_{\tilde{b}} \in \mathbb{R}$ représentent les pondérations respectives des deux nombres flous :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{WFF}(x) = \frac{p_{\tilde{a}} \cdot \varphi_{\tilde{a}}(x) + p_{\tilde{b}} \cdot \varphi_{\tilde{b}}(x)}{p_{\tilde{a}} + p_{\tilde{b}}} \quad (3.1)$$

Le résultat est une quantité floue \tilde{c} de pondération $p_{\tilde{c}}$ que l'on choisit de noter de la manière suivante :

$$\{\tilde{c}, p_{\tilde{c}}\} = \left\{ WFF \left(\{\tilde{a}, p_{\tilde{a}}\}, \{\tilde{b}, p_{\tilde{b}}\} \right), p_{\tilde{a}} + p_{\tilde{b}} \right\} \quad (3.2)$$

Pour illustrer la fuzzification à l'aide de cet opérateur, considérons un échantillon de données : $X = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, N\}$ représentant N observations d'une même entité, affectées chacune d'un poids $p_i > 0$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Le principe est de pouvoir représenter l'information contenue dans cet échantillon X pondéré par une quantité floue \tilde{Q} en « conservant la sémantique » de cette entité. Pour ce faire on utilise l'algorithme suivant. Soit le premier élément écrit sous forme d'une quantité floue (singleton) : $\{\tilde{Q}_1, p_{\tilde{Q}_1}\} = \{x_1, p_1\}$, il est agrégé avec le second élément $\{x_2, p_2\}$ en utilisant directement (3.2) :

$\{\tilde{Q}_2, p_{\tilde{Q}_2}\} = \left\{ WFF \left(\{\tilde{Q}_1, p_{\tilde{Q}_1}\}, \{x_2, p_2\} \right), p_{\tilde{Q}_1} + p_2 \right\}$ et par récurrence :

$$\forall i \in \{1, N-1\}, \quad \{\tilde{Q}_{i+1}, p_{\tilde{Q}_{i+1}}\} = \left\{ WFF \left(\{\tilde{Q}_i, p_{\tilde{Q}_i}\}, \{x_{i+1}, p_{i+1}\} \right), p_{\tilde{Q}_i} + p_{i+1} \right\} \quad (3.3)$$

Le résultat final correspondant évidemment à : $\{\tilde{Q}, p_{\tilde{Q}}\} = \left\{ \tilde{Q}_N, \sum_{i=1}^N p_i \right\}$.

Exemple didactique

Soit une série de mesures prises plusieurs fois sur le même processus, donnée dans le vecteur suivant :

$$X = (25,3 \quad 24,6 \quad 26,7 \quad 23,5 \quad 24 \quad 22,8) \quad (3.4)$$

Dans un premier cas, toutes les mesures prises ont la même importance ($p_1 = \dots = p_6$). La quantité floue représentant cette série de mesures est obtenue par agrégations successives des mesures obtenues. Le résultat est illustré figure 22 :

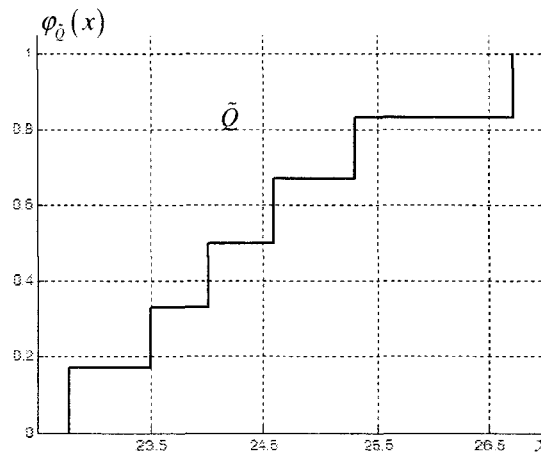


Figure 22 : Fuzzification WFF de mesures de même poids

Dans ce deuxième cas, les mesures ont un poids $p_i = 2^{i-1}$, $i \in \{1, \dots, 6\}$ selon leur rang i dans X . Dans cette situation, les premières valeurs interviennent de moins en moins au profil de la quantité floue obtenue. Le résultat est illustré figure 23.

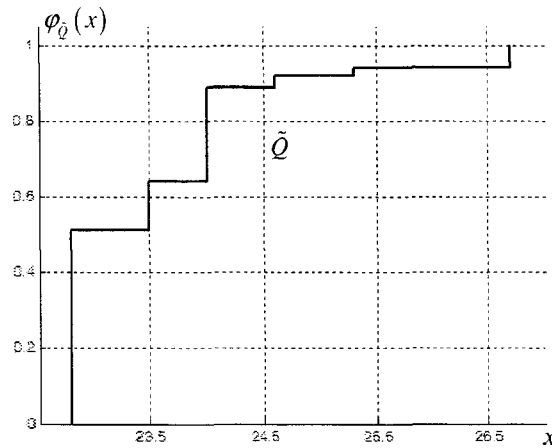


Figure 23 : Fuzzification WFF de mesures de poids différents

3. Comparaison de quantités floues

Pour la suite, il est nécessaire de pouvoir ordonner des quantités floues. Pour ce faire, on rappelle la définition de l'indice de précédence (préférence) du chapitre précédent :

$$\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi, \quad \eta(\tilde{a}, \tilde{b}) = \int_0^1 \text{sign}(\varphi_{\tilde{a}}^{-1}(y) - \varphi_{\tilde{b}}^{-1}(y)) \cdot dy \quad (3.5)$$

On rappelle également qu'elle induit une relation de pré-ordre total $\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi \quad \tilde{a} \prec \tilde{b} \Leftrightarrow \eta(\tilde{a}, \tilde{b}) < 0$ sur les réalisations moyennes. Cette relation est comparée à quelques exemples repris de la littérature [Cheng, 1998 ; Yao & Kweimei, 2000 ; Asady & Zendehnam, 2007].

Exemple 1 : Soient les nombres flous \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{c} et \tilde{d} représentés Figure 24 (en bas). Leur représentation $\varphi_{\tilde{a}}$, $\varphi_{\tilde{b}}$, $\varphi_{\tilde{c}}$ et $\varphi_{\tilde{d}}$ est donnée (en haut). La figure 24 fait apparaître de façon triviale que l'ordre sur ces nombres est : $\tilde{a} \prec \tilde{b} \prec \tilde{c} \prec \tilde{d}$, ordre retrouvé immédiatement à partir de (3.5).

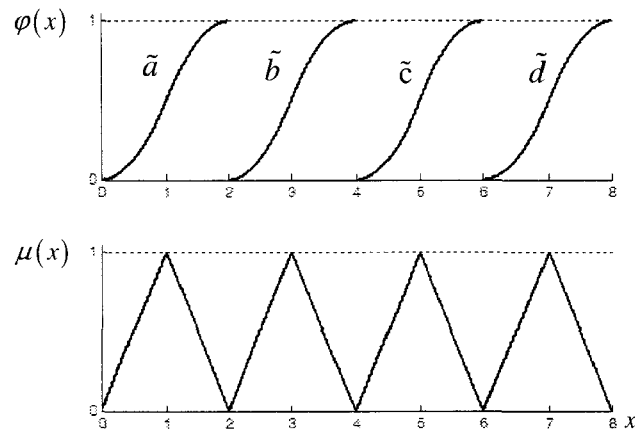


Figure 24 : Ordre des nombres flous $\tilde{a} < \tilde{b} < \tilde{c} < \tilde{d}$

Les deux exemples suivants s'intéressent à des cas moins triviaux, en tout cas sur la représentation de quantités flous « classiques » présentant des recouvrements.

Exemple 2 : La figure 25 illustre l'ordonnancement de trois nombres flous \tilde{a} , \tilde{b} et \tilde{c} . S'il peut apparaître une certaine difficulté à décider a priori pour la représentation classique du bas de la figure, leur représentation dans Φ permet de proposer une solution intuitive $\tilde{a} < \tilde{b} < \tilde{c}$.

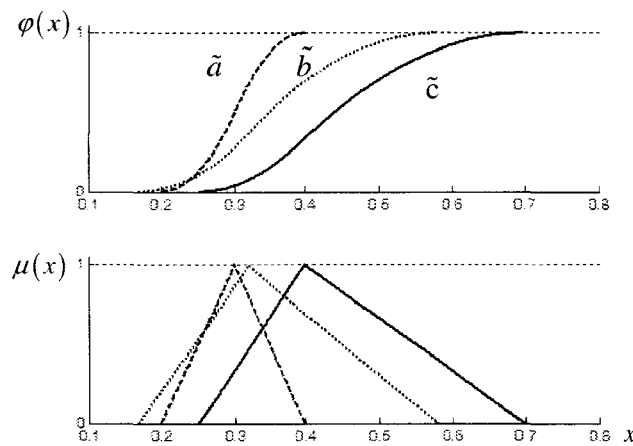


Figure 25 : Ordre des nombres flous $\tilde{a} < \tilde{b} < \tilde{c}$

Exemple 3 : Un autre exemple, figure 26, illustre le cas de nombres flous partageant le même support. La même remarque que pour l'exemple 2 s'applique.

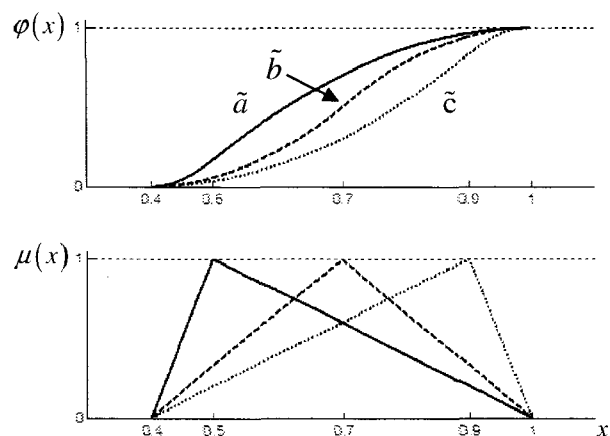


Figure 26 : Ordre des nombres flous $\tilde{a} < \tilde{b} < \tilde{c}$

Exemple 4 : Enfin un dernier exemple proposé dans [Abbasbandy & Asady, 2006], la figure 27 illustre un autre cas de nombres flous avec supports à intersection « forte ». L'ordre de ces trois nombres flous dans notre cas est $\tilde{a} < \tilde{c} < \tilde{b}$ le même que celui des méthodes proposées dans [Cheng, 1998 ; Chu & Tsao, 2002]. Alors que celui donnée dans [Abbasbandy & Asady, 2006] est $\tilde{a} < \tilde{b} < \tilde{c}$.

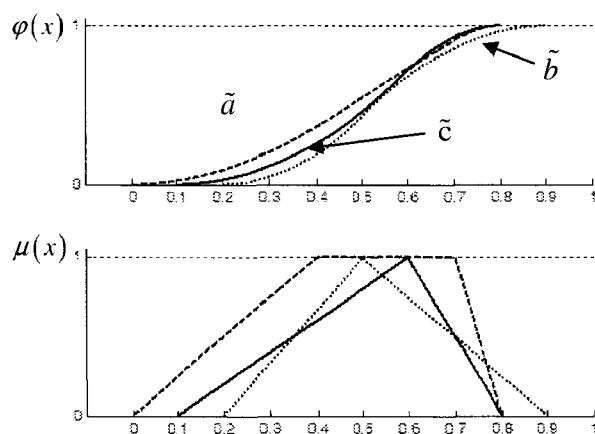


Figure 27 : Ordre des nombres flous $\tilde{a} < \tilde{c} < \tilde{b}$

Ces différents exemples illustrent le fait que la modélisation par la fonction φ permet (souvent) de mieux visualiser une relation d'ordre entre les grandeurs floues. En outre, la comparaison de quantités floues utilisant le φ -calcul donne des résultats « similaires », avec

un calcul beaucoup plus simple, que ceux trouvés dans la littérature [Cheng, 1998] et [Tran & Duckstein, 2002].

On dispose donc d'un ensemble de propriétés. Elles peuvent permettre de manipuler des quantités floues : calcul, comparaison, ordonnancement ... Les applications peuvent donc être liées à ces différentes manipulations. Plusieurs applications sont passées en revue dans la suite de ce chapitre permettant d'illustrer ces résultats.

4. Applications

Les propositions faites, notamment de l'opérateur *WFF* permettant soit la fusion de quantités floues, soit la fuzzification de données sont appliquées en premier lieu dans le domaine du filtrage du signal

4.1. Filtrage numérique du signal

Considérons un filtre digital IIR linéaire d'ordre N donné par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} \quad (3.6)$$

$$\text{avec } B(z^{-1}) = \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} \text{ et } A(z^{-1}) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}$$

On suppose l'entrée $U(z^{-1})$ bruitée. De façon classique (3.6) peut se représenter par l'équation de récurrence suivante :

$$y_k + a_1 \cdot y_{k-1} + \dots + a_N \cdot y_{k-N} = b_1 \cdot u_{k-1} + \dots + b_N \cdot u_{k-N} \quad (3.7)$$

On peut donc considérer ce bruit comme une imprécision dans les entrées et réécrire (3.7) de la manière suivante :

$$\tilde{y}_k + a_1 \cdot \tilde{y}_{k-1} + \dots + a_N \cdot \tilde{y}_{k-N} = b_1 \cdot \tilde{u}_{k-1} + \dots + b_N \cdot \tilde{u}_{k-N} \quad (3.8)$$

Le filtre récursif (3.7) devient donc « flou » et on peut alors utiliser les opérations arithmétiques définies au chapitre 2. Cette approche de résolution, sera pour des raisons pratiques, abordée au chapitre 4.

L'idée générale est à chaque instant de calculer la fusion floue d'un signal $\{\tilde{y}_{k-1}, p_{\tilde{y}_{k-1}}\}$ avec la nouvelle valeur mesurée $\{y_k, p_{y_k}\}$, i.e. à partir de (3.2) :

$$\{\tilde{y}_k, p_{\tilde{y}_k}\} = \left\{ WFF \left(\left\{ \tilde{y}_{k-1}, p_{\tilde{y}_{k-1}} \right\}, \left\{ y_k, p_{y_k} \right\} \right), p_{\tilde{y}_{k-1}} + p_{y_k} \right\} \quad (3.9)$$

Les pondérations p_{y_k} qui apparaissent peuvent être choisies identiques pour tout k dans le cas le plus simple, indiquant par là que chaque mesure a le même poids. Naturellement, ce n'est pas le meilleur choix et il est préférable d'attribuer des pondérations dépendant du temps. A la manière de ce que l'on trouve pour l'identification, il est possible d'introduire des facteurs d'oubli. On peut utiliser une fenêtre glissante de taille n , i.e. le calcul de (3.9) est refait à chaque instant k entre $k-n$ et k . On peut choisir également $p_{y_{k-i}} = \lambda^i$ avec $\lambda \in [0,1[$, typiquement proche de 1.

A titre d'illustration la figure 28 présente le calcul de (3.9) sur un signal $\{\tilde{y}_k, p_{\tilde{y}_k}\}$ où l'on accorde une importance identique pour les poids $p_{\tilde{y}_i}$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$ et où la dernière mesure a un poids très important. En d'autres termes, on garde tout le passé du signal mais c'est la dernière mesure qui contribue « le plus » à la construction de $\{\tilde{y}_k, p_{\tilde{y}_k}\}$.

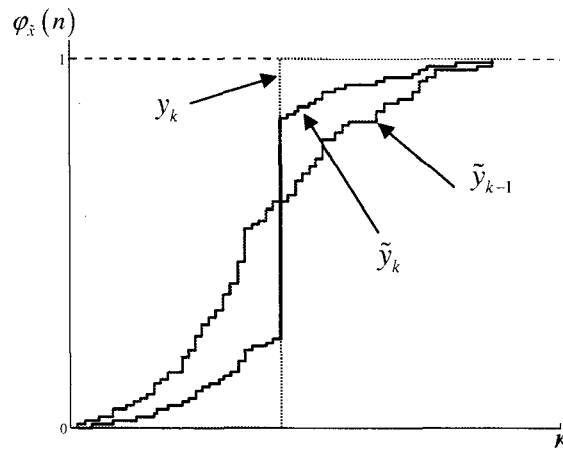


Figure 28 : fuzzification par la WFF

Le principe du filtrage « flou » est de choisir à chaque instant un représentant du signal fuzzifié. Naturellement en l'absence de bruit, on retrouve le résultat classique de (3.11) si la réalisation choisie est la médiane.

On a donc :

$$\hat{y}_k = R_{med}(\tilde{y}_k) = \varphi_{\tilde{y}_k}^{-1}(0,5) \quad (3.10)$$

On peut certainement imaginer d'autres choix de la réalisation, bien qu'ils puissent conduire à des résultats différents du résultat sans bruit.

Pour illustrer l'ensemble de cette méthodologie, un modèle de filtre du 1^{er} ordre est choisi :

$$y_k = D \cdot y_{k-1} + (1-D) \cdot u_{k-1} \quad (3.11)$$

avec D paramètre du filtre du premier ordre ($D \in]-1,1[$ assurant la convergence). Tout en gardant une valeur précise de D , on considère le signal $U(z^{-1})$ bruité par un bruit blanc à densité spectrale nulle. Dans ce cas, l'équation (3.11) est utilisée comme suit :

$$\tilde{y}_k = D \cdot \tilde{y}_{k-1} + (1-D) \cdot \tilde{u}_{k-1} \quad (3.12)$$

La figure 29 donne le résultat du filtrage pour une entrée de type sinusoïdal bruitée dans le cas linéaire et dans le cas « flou ». Pour effectuer le calcul de WFF par (3.9) on a choisi de façon empirique : $p_{\tilde{y}_{k-1}} = 0,8$, $p_{\tilde{y}_k} = 0,2$, de manière à conserver le passé tout en accordant le plus d'importance à la nouvelle valeur.

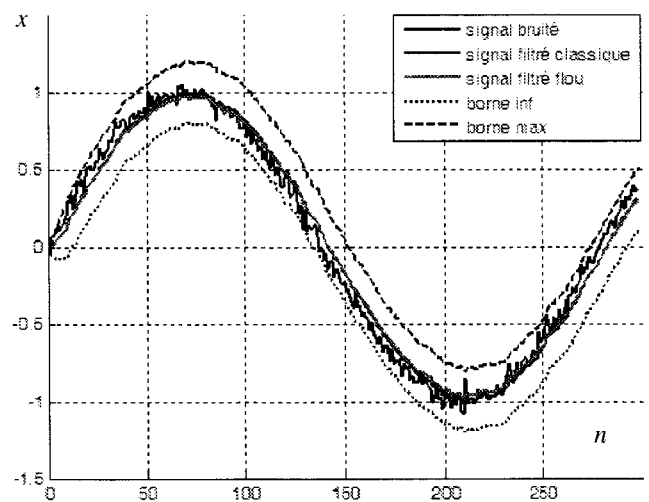


Figure 29 : Résultats du filtrage linéaire et flou

Ce paragraphe a permis de montrer l'utilisation de l'opérateur de fusion WFF pour le filtrage d'un signal. Il ne s'agissait ici que de montrer la faisabilité de l'approche sur un

exemple volontairement très simple. Néanmoins, cette manière de considérer l'imprécision des mesures peut facilement être étendue à des équations de récurrence d'ordre plus élevée, voire à des filtres non linéaires.

Il reste évidemment à montrer que, dans un contexte général, les résultats obtenus amènent quelque chose de nouveau. Soit par une prise en compte de l'imprécision rapide et « élégante », soit en montrant que la propagation de cette dernière est par exemple bornée.

Afin d'illustrer l'opérateur *WFF* dans un contexte de classification, trois exemples basés sur des données « réelles » sont traités.

4.2. Ordonnement de listes

Le tableau 2 est extrait d'un ensemble de listes électorales et représente l'âge de chaque candidat en fonction de son rang dans sa liste. La question posée est de déterminer quelle liste est la plus « jeune » ou la plus « vieille » ? Si l'âge d'une liste à un « sens » dans la conversation courante, sa représentation mathématique est moins évidente.

Listes	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8
Rang1	69	38	39	58	45	45	44	56
Rang2	60	42	32	23	54	21	42	34
Rang3	37	51	39	26	40	39	38	22
Rang4	48	80	56	45	55	39	36	41
Rang5	51	48	31	72	56	43	24	55
Rang6	36	45	30	32	45	54	44	45
Rang7	37	55	65	56	41	40	33	54
Rang8	36	26	45	71	42	68	49	28
Rang9	65	72	53	29	56	38	41	36
Rang10	42	52	58	75	53	64	49	34
Rang11	42	52	45	52	52	42	44	78
Rang12	70	38	69	58	37	70	32	48
Rang13	64	53	45	48	44	26	32	47
Rang14	45	54	57	71	44	35	59	69
Rang15	43	64	67	49	44	45	45	43
Rang16	44	44	60	46	40	48	38	43
Rang17	59	64	44	45	43	65	51	31
Rang18	29	37	52	70	33	56	36	70

Tableau 2 : Ages des candidats en fonction de la liste et du rang

D'une manière classique, on considère simplement la moyenne, voire la médiane ou la valeur modale ou toute autre valeur dite centrale. À la simple lecture des écart-types (tableau 3), on voit tout de suite que ces 8 listes ont des répartitions différentes, ne permettant pas de comparer valablement les moyennes au sens statistique.

Moyenne	48,7	50,8	49,3	51,4	45,8	46,6	40,9	46,3
Médiane	44,5	52,0	48,5	51,5	44,0	44,0	41,5	44,0
Ecart-type	12,7	13,2	12,3	16,6	6,9	13,9	8,3	15,2

Tableau 3 : Comparaison des âges avec les méthodes classiques

L'analyse envisagée consiste à structurer cet ensemble en fonction de l'âge des listes, l'utilisation de la relation d'ordre induite pour ordonner ces listes de la « plus jeune » à la « plus vieille ».

Dans notre étude, l'âge d'une liste est considéré comme une grandeur floue dont l'âge de chaque individu est une occurrence. L'approche proposée pour analyser cet ensemble consiste dans un premier temps à modéliser l'âge d'une liste en construisant la quantité floue correspondante sous forme du profil en escalier, fonction de répartition des âges de chaque liste (l'axe horizontal correspondant à $\hat{age}/100$), en appliquant la formule (3.2) avec des poids égaux, la figure 30 représente $\varphi_{\bar{Y}_3}$.

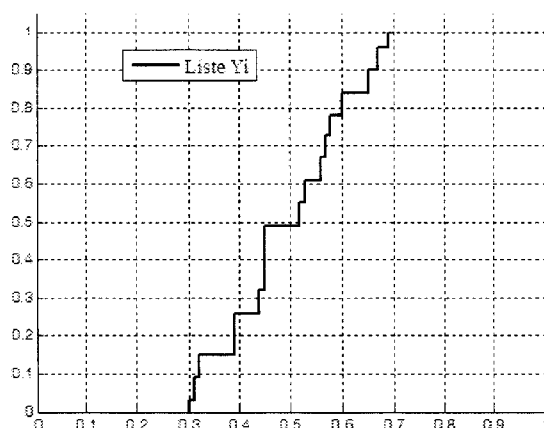


Figure 30 : Grandeur floue « âge d'une liste »

L'intérêt de cette modélisation est notamment de garder pendant les calculs toutes les valeurs initiales au lieu de les remplacer par une moyenne. Le tableau 2 est ainsi recodé dans la série des 8 profils de la figure 31.

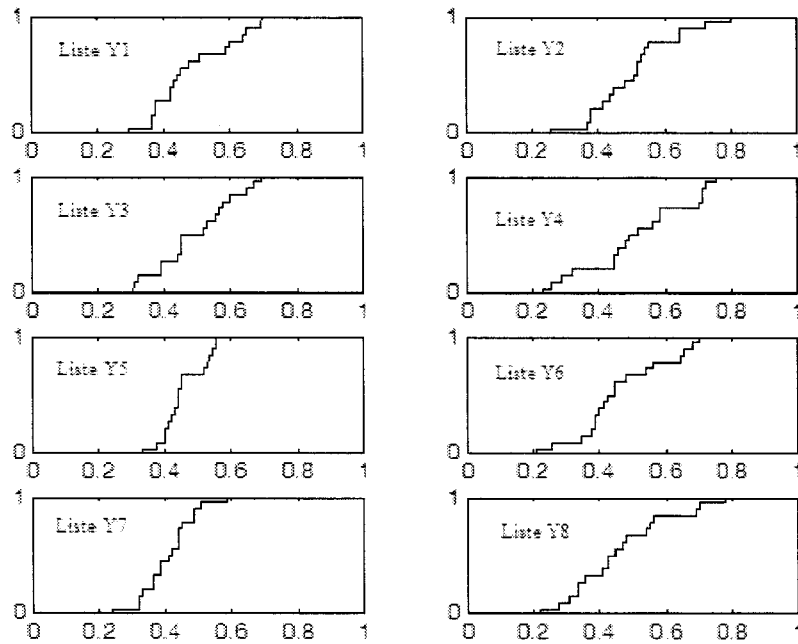


Figure 31 : Profils flous des listes

En premier lieu, le classement des huit listes, par ordre croissant de l'âge, utilise l'indice de précédence π défini au chapitre 2 :

$$Y7 \prec Y5 \prec Y8 \prec Y6 \prec Y1 \prec Y3 \prec Y2 \prec Y4 \tag{3.13}$$

Comme signalé au chapitre précédent, on retrouve dans cet exemple le classement fourni par les moyennes, ce qui n'est pas le cas de celui fourni par les médianes :

$$Y7 \prec Y5 \approx Y8 \approx Y6 \prec Y1 \prec Y3 \prec Y4 \prec Y2 \tag{3.14}$$

Dans l'expression (3.14), la liste Y7 reste la plus jeune, alors que Y2 devient la plus vieille au lieu de Y4. Enfin, les listes $Y5 \approx Y8 \approx Y6$ sont maintenant classées ex-æquo.

Un troisième classement est obtenu cette fois en utilisant le deuxième indice de précédence défini au chapitre 2 $\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi$, $\eta(\tilde{a}, \tilde{b}) = \int_0^1 \text{sign}(\varphi_{\tilde{a}}^{-1}(y) - \varphi_{\tilde{b}}^{-1}(y)) \cdot dy$:

$$Y7 \prec Y6 \prec Y5 \prec Y8 \prec Y1 \prec Y3 \prec Y2 \prec Y4 \tag{3.15}$$

Les listes Y5, Y6 et Y8 sont à nouveau classées mais dans un ordre différent des moyennes.

Au-delà de ce premier résultat, on recherche une structure éventuelle de cet ensemble de listes au sens de l'âge. À partir des profils de la figure 31, l'algorithme de classification ascendante hiérarchique présenté en début de chapitre est repris :

- L'indice de dissemblance choisi est : $\tilde{a}, \tilde{b} \in \Phi$, $d_1(\tilde{a}, \tilde{b}) = \int_0^1 |\varphi_{\tilde{a}}^{-1}(y) - \varphi_{\tilde{b}}^{-1}(y)| dy$
- L'agrégation de deux listes est obtenue en opérant la fusion *WFF* pondérée par les effectifs des quantités floues (3.2).

La figure 32 illustre les différentes étapes d'agrégation des listes.

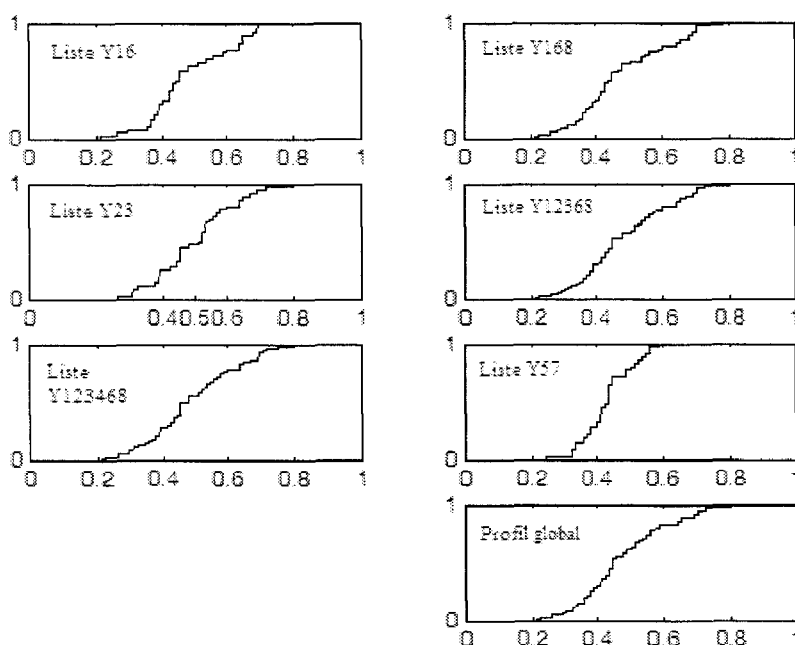


Figure 32 : Profil des listes après agrégations successives

Le dendrogramme, figure 33, synthétise cette classification et illustre la structure de l'ensemble des huit listes au sens de l'âge des candidats.

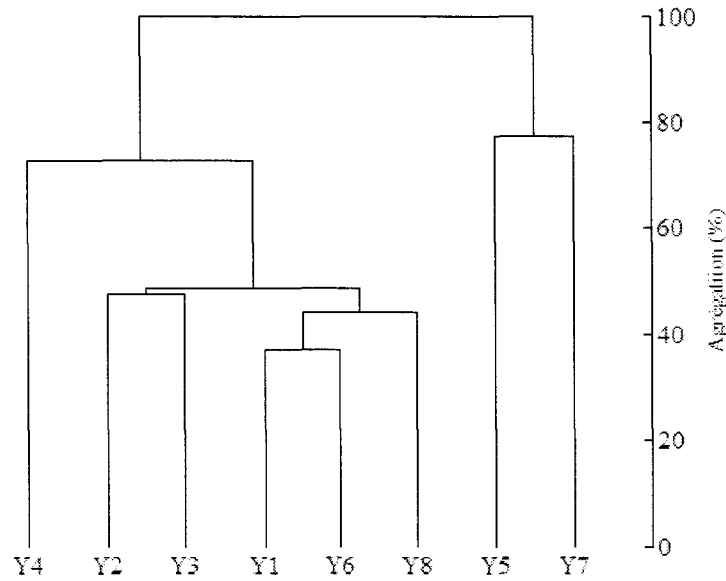


Figure 33 : Dendrogramme des 8 listes selon la distance d_1

On constate une structure relativement faible en deux classes (seuil d'agrégation à $\approx 80\%$ classes $\{4, 2, 3, 1, 6, 8\}$ et $\{5, 7\}$) ou quatre classes (seuil d'agrégation à $\approx 50\%$ classes $\{4\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 6, 8\}$ et $\{5, 7\}$).

Pour un traitement plus approfondi de cet exemple de listes électorales, le rang de chaque candidat dans sa liste peut également être pris en compte, considérant que les premiers candidats de chaque liste ont plus de chance d'être élus que les derniers. Dans cette optique, chaque âge est affecté d'un poids décroissant du premier au dernier rang de la liste $p_{rang(i)} = 18 - i$. Les profils de chaque liste sont recalculés, figure 34. Le nouveau classement des huit listes, par ordre croissant de l'âge, est alors le suivant (toujours en utilisant l'écart des réalisations moyennes) :

$$Y7 \prec Y6 \prec Y8 \prec Y3 \prec Y5 \prec Y4 \prec Y1 \prec Y2 \tag{3.16}$$

Le nouveau classement en utilisant l'indice η est alors :

$$Y7 \prec Y6 \prec Y8 \prec Y3 \prec Y1 \prec Y5 \prec Y4 \prec Y2 \tag{3.17}$$

On constate que les classements ne sont plus les mêmes que ceux donnés par la formule (3.13) s'agissant des écarts des moyennes et la formule (3.15) s'agissant de l'indice η . La liste Y7 reste la plus jeune quels que soient l'indice et la méthode de classement

utilisés alors que la liste Y2 devient la plus vieille. La figure 34 donne un exemple de changement de profil de la liste Y3 qui illustre bien la prise en compte du rang des candidats ainsi que son changement de classement.

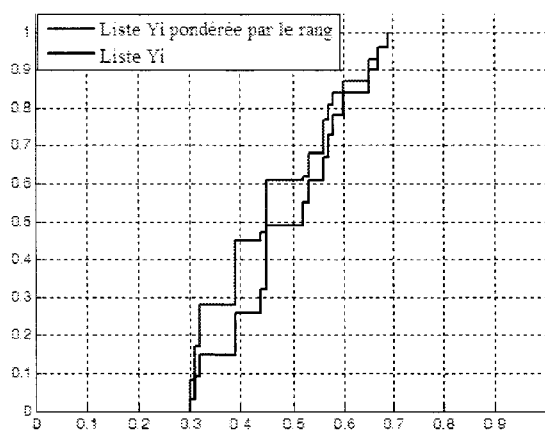


Figure 34 : Grandeur floue « âge d'une liste », pondérée ou pas par le rang

La classification ascendante hiérarchique est illustrée par le dendrogramme de la figure 35.

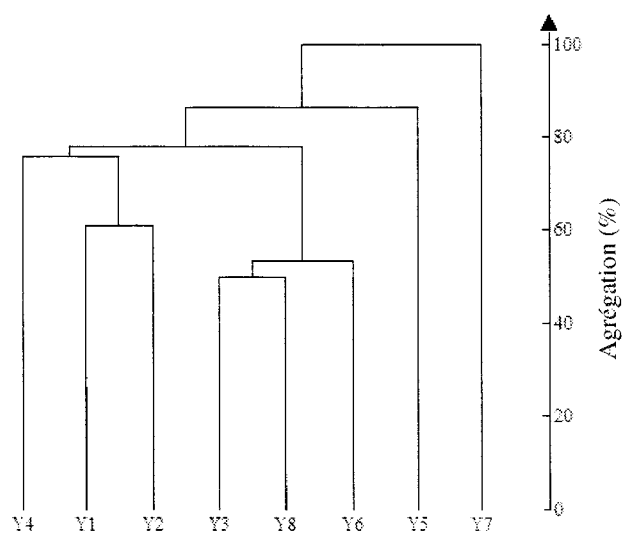


Figure 35 : Dendrogramme des 8 listes avec prise en compte du rang

La nouvelle structure de l'ensemble de ces listes reste faible mais a notablement évolué en prenant en compte le rang des candidats.

Le paragraphe suivant propose une autre application au traitement de données plus complexes et plus hétérogènes issues de l'expérimentation.

4.3. Fuzzification et classification de données du crâne humain

Cette application, issue du domaine de la biomécanique (équipes MCSIB et C2S du LAMIH), est traitée dans [Rambaut, 2007]. Voici un bref rappel du sujet des travaux. Les traumatismes crâno-encéphaliques sont la principale cause de mortalité et de handicap sévère chez les moins de 45 ans.

Un programme de recherche relevant de la biomécanique du traumatisme crânien a été initié dans le cadre du PREDIT (Programme de Recherche Et D'Innovation dans les Transports terrestres) en 2003. Le projet PROTEUS (PROtection de la TEte des USagers vulnérables) a pour objectif de mettre au point un outil numérique de prédiction des lésions crâno-encéphaliques nécessaire à l'évaluation et à l'élaboration des systèmes de protection de la tête en cas de choc.

Une campagne expérimentale a été conduite afin de caractériser les tissus de la boîte crânienne. Ainsi, des tests de sollicitations d'éprouvettes de crâne en flexion 3 points à 10mm/mn ont été réalisés sur une base de 17 crânes humains ; les sujets, non embaumés, sont d'origine caucasienne, âgés de 53 à 82 ans (moyenne $71,82 \pm 7,13$), de sexe masculin. A partir de chaque crâne, 17 éprouvettes de même géométrie ont été prélevées, selon une cartographie bien précise. Seules les éprouvettes issues des zones pariétales gauche et droite (au nombre de 8 par calotte crânienne) nous intéressent ici.

Les expérimentations suivies de caractérisation à partir d'images des éprouvettes ont fourni des données de raideur statique, de masse, de densité, d'épaisseur, d'indices de courbure des faces interne et externe pour chaque éprouvette.

L'objectif premier est de déterminer les liens entre la raideur statique, et les paramètres géométriques, anthropométriques et densitométriques. Ces liaisons doivent ensuite être modélisées, en prédisant la raideur statique, avec ajustement sur les meilleurs prédicteurs possibles.

Les données obtenues de l'expérimentation sont très hétérogènes, une étude statistique préalable est impérative. Dans un premier temps, une matrice des corrélations entre les

différentes entrées est calculée afin éventuellement de détecter et d'éliminer les variables d'entrées les moins significatives. Une classification ascendante hiérarchique est ensuite proposée en utilisant les outils du φ -calcul et les outils classiques à fin de comparaison.

Un calcul des coefficients de corrélation de rangs de Spearman, aboutit au choix des différentes variables d'entrée. Au vu des fortes corrélations linéaires constatées entre plusieurs variables, seules les variables d'entrée C_{inf} , C_{sup} , qui sont obtenues en fusionnant les courbures inférieures et supérieures, le poids d'air Pa et la densité De sont prises en compte pour l'établissement de cette classification, la sortie du système est la raideur statique K . Avant de passer à la modélisation du crâne humain $K = f(C_{\text{inf}}, C_{\text{sup}}, Pa, De)$ et au choix d'une méthode d'identification, une étape d'analyse de données est nécessaire. Pour notre part, une classification hiérarchique ascendante est choisie (classique ou avec fusion floue). Une normalisation standard des données par moyenne écart-type est choisie. La moyenne est locale sur chaque variable et l'écart type global sur tous les crânes.

La première étape du travail est la constitution d'un ensemble d'apprentissage et d'un ensemble de validation des données des différents crânes d'une manière aléatoire.

Sur cet ensemble d'apprentissage, pour chaque crâne, chaque entrée est caractérisée par un jeu de 5 à 8 mesures. Ces mesures sont regroupées par fusion pondérée floue en gardant le même poids pour chaque mesure, ce qui donne quatre profils de variables d'entrée et un profil de variable de sortie \tilde{a}_5 de chaque crâne $\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4, \tilde{a}_5\}$.

Un crâne j , ($j = 1, 2, \dots, 17$) est ainsi représenté par un vecteur flou noté $\tilde{C}^j = (\tilde{a}_1^j, \tilde{a}_2^j, \tilde{a}_3^j, \tilde{a}_4^j, \tilde{a}_5^j)^T$. La distance d'un crâne j à un autre crâne k est dans ce cas définie par, $j, k \in \{1, 2, \dots, 17\}$:

$$d^2(\tilde{C}^j, \tilde{C}^k) = \sum_{i=1}^5 d_i^2(\tilde{a}_i^j, \tilde{a}_i^k) \quad (3.18)$$

Le résultat de cette classification ascendante hiérarchique est illustré par le dendrogramme de la figure 36.



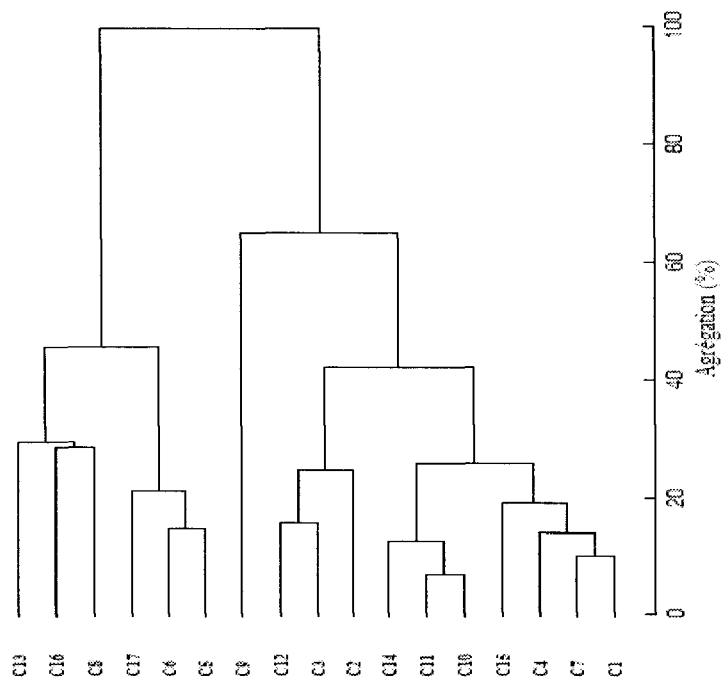


Figure 36 : Dendrogramme des crânes par la fusion floue pondérée

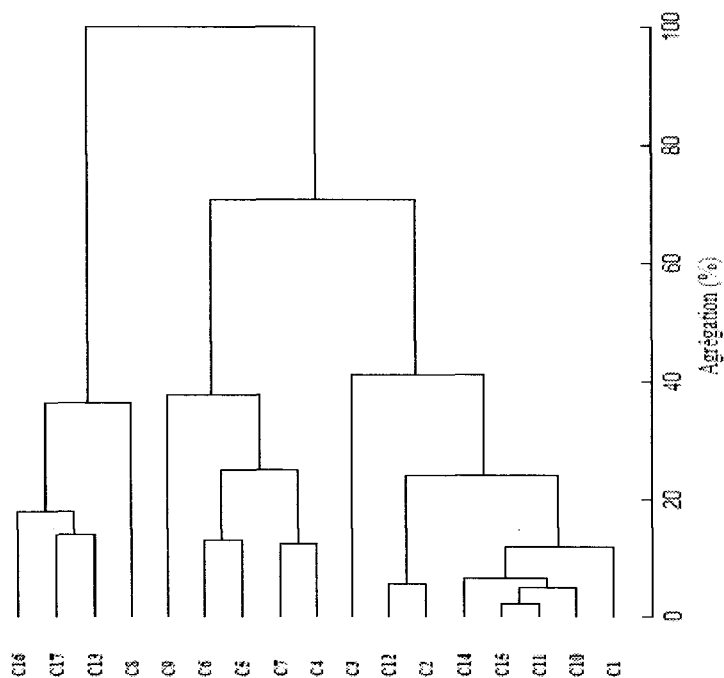


Figure 37 : Dendrogramme des crânes par le saut moyen

À titre de comparaison, la classification ascendante hiérarchique utilisant le saut moyen des éprouvettes de chaque crâne et une distance euclidienne est présentée figure 37.

Les indices d'agrégation n'étant pas les mêmes, une différence importante est obtenue entre les deux méthodes. Pour déterminer si une des deux classifications est plus proche de la « réalité » il convient de réaliser par classes obtenues la modélisation et vérifier la pertinence des regroupements effectués. La question qui se posera alors est la suivante : Est-ce qu'avec les quelques crânes constituant une classe suffisent pour trouver un modèle fiable ?

Effectivement, les résultats de validation de plusieurs modélisations basées sur une régression multiple à partir des classes issues des deux méthodes de classification n'ont pas permis de conclure. En effet, il a été difficile de mener l'étude plus avant, car la pertinence des données issues des éprouvettes n'est pas avérée. L'acquisition des données dans ce genre d'expérimentation étant un contrôle destructif et rare, il serait plus judicieux d'ajouter une opinion d'un expert sur la validité des acquisitions au cours du processus expérimental, soit sous forme linguistique (mauvaise, moyenne, bonne, très bonne, ...), soit sous forme d'une pondération de chaque donnée (qui pourra d'ailleurs être floue sous forme d'un intervalle de confiance par exemple).

4.4. Fuzzification et classification d'étudiants

Cette dernière application permet de proposer un outil (différent de la sempiternelle moyenne) pour les jurys de fin d'année dans le but d'étudier le cas de chaque étudiant selon les résultats obtenus pendant une année scolaire.

Créer des profils de chaque étudiant dans chaque matière et un profil global de l'étudiant pour toute l'année sans perdre aucune note obtenue, est une image fidèle du parcours de l'étudiant pendant toute l'année ou tout un cursus, qui servira aux jurys lors de l'orientation par exemple.

L'exemple pris dans ce travail est issu de résultats réels d'une promotion d'étudiants de première année de la formation DUT GEII de l'IUT de Valenciennes pour la promotion de 2006-2007.

Les étudiants de cette section sont nommés E_1, E_2, \dots, E_n , avec $n = 48$ le nombre d'étudiants de la section. Les enseignements de cette section sont répartis en quatre unités d'enseignement U11, U12, U13 et U14.

4.4.1. Calcul des profils par étudiant

Les profils de chaque étudiant sont obtenus par unité d'enseignement en fusionnant ces notes dans chaque matière composant l'unité avec la prise en compte des coefficients. Un profil global est ensuite obtenu en fusionnant les différents profils des unités. Le calcul de ces profils est obtenu de la manière suivante :

1. A chaque note (TP, TD et DS) on associe un poids en fonction du nombre d'occurrences et de son importance dans le module. Plusieurs modules composent une matière, on fusionne les profils issus de chaque module, toujours en accord avec des poids déterminés en fonction de l'importance relative du module.
2. Les profils des matières de la même unité sont fusionnés, en suivant la même logique.
3. Enfin, le profil global est obtenu en fusionnant les profils des unités.

La figure 39 illustre un exemple de quatre profils $\{\tilde{E}_i^{11}, \tilde{E}_i^{12}, \tilde{E}_i^{13}, \tilde{E}_i^{14}\}$ d'un étudiant dans les quatre unités.

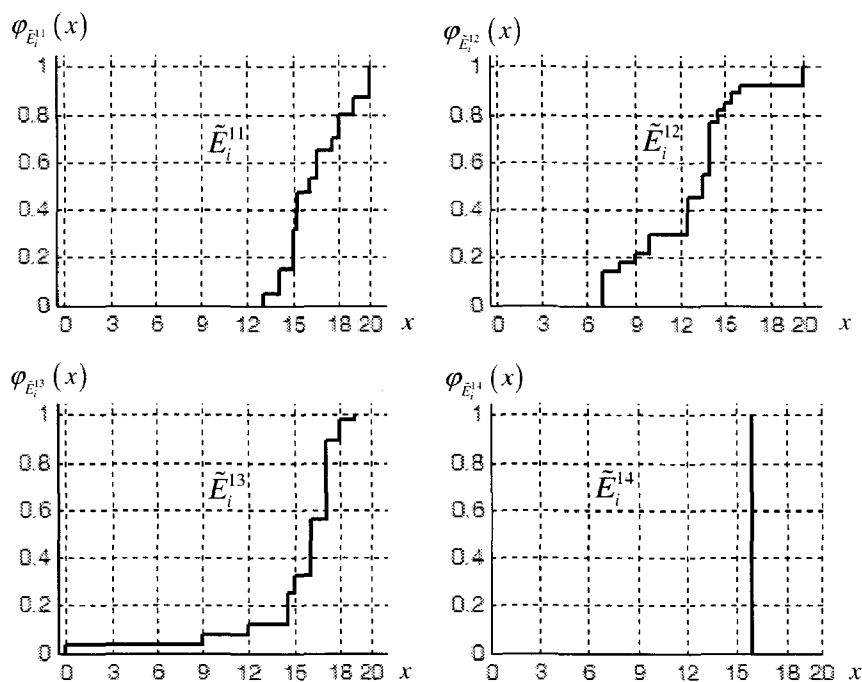


Figure 38 : Profils par unité d'enseignement

Cette étude des profils intermédiaires par unité d'enseignement peut donner une lecture intéressante au jury dans le cadre d'une orientation par exemple. Pour cet exemple, l'étudiant est « bon » dans les quatre unités, il est excellent dans l'unité U11 où sa note mini est de 13 et sa note maxi est de 20 (son profil dans l'unité U14 est un singleton qui correspond à la seule note obtenue dans cette unité).

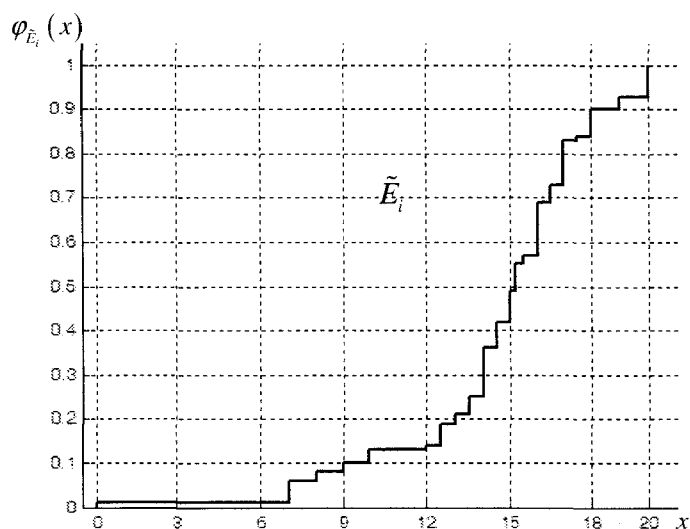


Figure 39 : Profil global des notes d'un étudiant au cours de l'année

Le profil global obtenu est présenté Figure 39, il remplace la moyenne classique. Il est évidemment beaucoup plus riche en informations puisqu'il contient l'ensemble des notes obtenues par l'étudiant durant l'année scolaire. A titre d'exemple, la plus mauvaise note obtenue par l'étudiant au cours de l'année est « 0 » avec un « indice d'appartenance » très faible, ce qui explique que cette note est peu significative (on peut penser à un accident au cours de l'année ou bien à une absence non justifiée lors d'un contrôle). Sa meilleure note est « 20 » avec un indice d'appartenance plus important qui peut s'expliquer par le fait que la note est obtenue dans un contrôle d'une matière ayant un coefficient important ou bien, l'obtention de plusieurs notes équivalentes dans d'autres matières. Dans ce cas, pour une analyse plus approfondie, on pourra ressortir les profils intermédiaires dans chaque unité, figure 38.

Un classement utilisant les réalisations médianes peut être obtenu, mais avec une difficulté de calculer la réalisation médiane d'un profil contenant un plateau au niveau

$y = 0,5$ (ce qui est appelé quantité floue confuse). Dans le cas de cette application, un classement utilisant l'indice η peut s'avérer intéressant du fait qu'il quantifie une précedence.

4.4.2. Classement des étudiants par l'indice η

Un premier classement est obtenu à partir des moyennes. La figure 40 présente la comparaison de ce classement avec celui obtenu avec l'indice η . Cette figure illustre bien que la distribution autour de la première bissectrice n'est pas parfaite, des inversions de classement apparaissent.

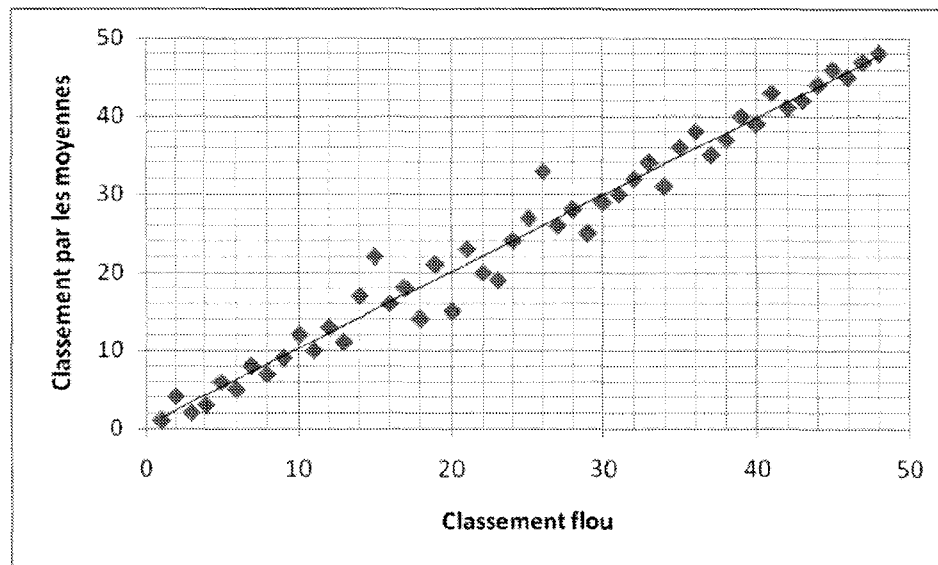


Figure 40 : Classement flou en fonction du classement classique

Ce qui est constaté à travers ces deux méthodes c'est que les inversions dans le classement au milieu de ce dernier sont importantes (perte ou gain de 4 à 5 places au maximum). Cependant, les changements en tête et fin de classement sont minimes (le premier reste toujours premier et le dernier reste toujours dernier). Ces inversions donnent une première idée sur les insuffisances d'un calcul basé directement sur la moyenne des moyennes utilisé ordinairement.

4.4.3. Classification globale des étudiants

Là aussi, la classification ascendante hiérarchique est obtenue à partir de ces profils de la manière suivante :

- L'indice de dissemblance entre deux listes est cette fois la distance quadratique entre les deux quantités floues,
- L'agrégation de deux listes est obtenue en opérant la fusion pondérée par les effectifs, des quantités floues.

La méthode est identique à celle utilisée plus haut pour les profils d'âges.

Le dendrogramme, obtenu figure 41, illustre la structure de l'ensemble des 48 étudiants au sens des profils de notes.

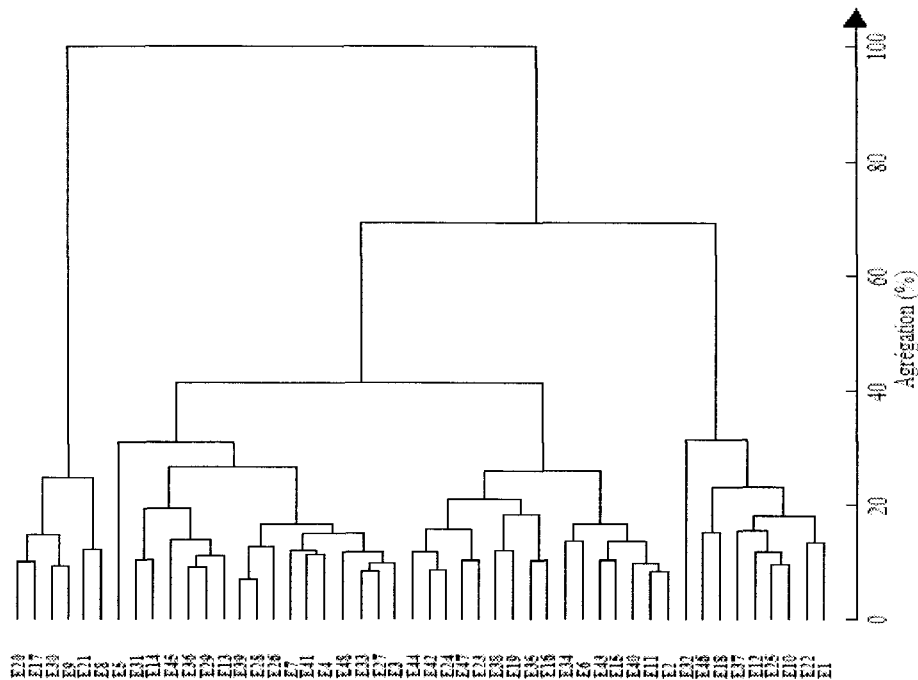


Figure 41 : Dendrogramme des étudiants par la WFF (distance d_2)

Ce dendrogramme montre une structure classique de la promotion ; on peut distinguer 3 classes d'étudiants : un groupe de tête de 6 étudiants, un groupe de 8 étudiants les plus faibles et un groupe importante (34 sur 48) regroupée autour de la moyenne.

4.4.4. Classification des étudiants par unité

Des résultats plus affinés sont obtenus en établissant une classification des étudiants cette fois en séparant les différentes unités d'enseignement. En effet, une classification partielle par unité évite l'effet de compensation entre les unités et donnera une image plus concrète de la section. Un vecteur flou est obtenu pour les étudiants composé des quantités floues des quatre unités $\{\tilde{E}_i^{11}, \tilde{E}_i^{12}, \tilde{E}_i^{13}, \tilde{E}_i^{14}\}$.

La distance entre deux vecteurs représentant deux étudiants est obtenue par la formule (3.18). Le nouveau dendrogramme obtenu est illustré figure 42.

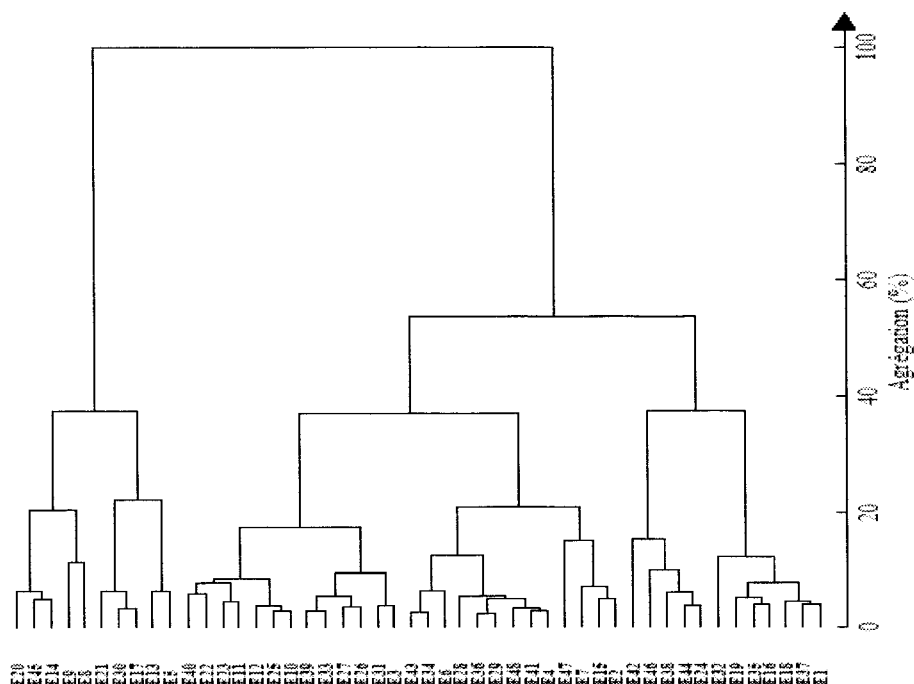


Figure 42 : Classification des étudiants par unité (distance(3.18))

Le regroupement des étudiants cette fois-ci n'est plus le même comme le montre le dendrogramme de la figure 42. Ici aussi, on pourra distinguer 3 ou 6 classes distinctes ; les trois classes sont plus réparties et comportent chacune 2 sous-classes. Certains étudiants de la classe centrale précédente se retrouvent réaffectés aux classes « marginales ».

Les résultats de cet exemple sont intéressants dans la mesure où ils constituent un outil supplémentaire d'analyse pour les membres d'un jury. Cet outil ne doit pas venir en substitution aux moyennes, aux remarques et appréciations des enseignants. Ces dernières pourraient même être modélisées comme « notes subjectives » et être prises en compte dans ce type de traitement flou.

5. Conclusion

Ce chapitre est consacré entièrement à un aspect particulier de l'utilisation du φ -calcul et les outils développés pour cet effet. Pour des raisons pratiques de cohérence dans notre travail surtout au vu des résultats intéressants obtenus dans le cadre de l'analyse de données, il

nous a semblé important de dédier un chapitre pour présenter les exemples traités dans ce registre.

Dans l'exemple d'ordonnement des listes électorales, l'utilisation de la fusion floue pondérée nous permet de coder une notion aussi vague que « l'âge d'un groupe d'individus » que chacun peut comprendre dans la conversation courante, par une grandeur moins réductrice qu'une simple moyenne. Cet aspect est encore plus parlant dans le cas du traitement et de la classification des étudiants d'une promotion. Avoir une mauvaise note dans un partiel est peut être un accident qui est pris d'une manière implicite dans le calcul de la moyenne mais cette dernière ne nous renseigne pas pour une éventuelle orientation. Le profil calculé d'un étudiant pour l'année et toutes les matières en gardant en mémoire l'ensemble des notes est un outil intéressant pour un jury de fin d'année.

Le chapitre suivant est consacré à l'application des outils du φ -calcul à l'automatique et à la commande à modèle interne.

Chapitre4 : Applications à la commande à Modèle interne

1. Introduction	- 109 -
2. Modèles de récurrence flous pour les systèmes discrets	- 109 -
1. Modèles linéaires	- 110 -
2. Utilisation pour le calcul d'une loi de commande	- 113 -
3. Limitations de l'approche	- 116 -
3. Commande à Modèle Interne	- 117 -
3.1 Rappels	- 117 -
4. Analyse de la commande à modèle interne (CMI)	- 118 -
3.2 Inversion de modèle	- 119 -
3.3 Calcul inversible « exact »	- 122 -
3.4 Commande à modèle interne flou	- 128 -
4. Exemple d'application en temps réel	- 129 -
4.1 Système étudié	- 129 -
4.2 CMI du système à deux cuves	- 130 -
5. Conclusion	- 134 -

1. Introduction

Le but de ce chapitre est de proposer l'utilisation du ϕ -calcul pour la commande des systèmes. Le début du chapitre présente son application « directe » ou comment passer des équations de récurrence à coefficients constants à des équations de récurrence à coefficients flous. Ce passage dans le cas de la boucle ouverte est immédiat et il correspond à ce que l'on peut trouver dans les modèles à base d'intervalles.

Pour la synthèse d'une loi de commande plusieurs solutions sont envisageables. La première est de combiner une technique éprouvée (RST par exemple) avec les outils du ϕ -calcul. On retrouve donc dans les coefficients du régulateur les incertitudes du modèle. Cette approche est envisagée dans la première partie. Elle se heurte à deux problèmes. Le premier est la surestimation engendrée par la succession des calculs, le deuxième est de ne pas apporter de robustesse ou des performances supplémentaires car la réalisation médiane utilisée correspond à la commande linéaire.

Pour remédier à ces inconvénients, une autre structure basée sur la commande à modèle interne est proposée. Cela restreint le choix des modèles à ceux stables en boucle ouverte. Cette dernière a déjà été utilisée avec succès dans ce contexte par [Hunt & Sbarbaro, 1991 ; Edgar & Postlethwaite, 2000 ; Boukkezoula et al., 2003 ; Awais, 2005]. De façon générale, la commande à modèle interne se base sur une inversion du modèle. La deuxième partie du chapitre s'attache donc à définir un modèle inverse \tilde{M}^{-1} d'un modèle flou \tilde{M} . Pour éviter le défaut cité précédemment de la surestimation due au calcul flou, un algorithme de calcul « exact » est proposé. Ce dernier est justifié dans ce contexte puisque l'on sait que « globalement » $\tilde{M} \times \tilde{M}^{-1} = Id$. A partir de la définition de ce calcul « exact », des structures de modèle interne flou sont définies. Des essais en simulation accompagnent ces différents résultats et la commande temps réel d'un système de cuves couplées est également proposée.

2. Modèles de récurrence flous pour les systèmes discrets

Dans la section 4.1 du chapitre 3, une première application au filtrage a été présentée. Ce sont les signaux qui étaient supposés entachés d'imprécision, les coefficients des équations de récurrence étant supposés parfaitement connus (non flous) ; l'approche proposée utilisait l'opérateur de fusion *WFF*.

Le but de cette section est de montrer que l'arithmétique ϕ -calcul permet de prendre en compte cette fois-ci une incertitude paramétrique, i.e. les coefficients des équations de

récurrance sont par exemple « mal connus » ou varient dans le temps. On se limitera au cas des modèles discrets linéaires monovariables.

2.1. Modèles linéaires

Dans la suite, on utilise l'opérateur de retard q^{-1} ($x_{k-1} = q^{-1}x_k$) plutôt que z^{-1} car ce dernier n'est valable que dans le cas linéaire. Or des opérations issues du φ -calcul seront utilisées, on sort donc du strict cadre linéaire. Une fonction de transfert linéaire discrète peut s'écrire :

$$H(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{y(q^{-1})}{u(q^{-1})} \quad (4.1)$$

$$B(q^{-1}) = \sum_{k=1}^N b_k q^{-k} \text{ et } A(q^{-1}) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k q^{-k}$$

Ou sous forme d'équation de récurrence :

$$y_k + a_1 \cdot y_{k-1} + \dots + a_N \cdot y_{k-N} = b_1 \cdot u_{k-1} + \dots + b_N \cdot u_{k-N} \quad (4.2)$$

Classiquement, en considérant des paramètres incertains avec : a_i, b_i les paramètres nominaux, $\Delta a_i, \Delta b_i$ des variations bornées dans un compact, on peut écrire :

$$i \in \{1, \dots, N\}, a_i = a_{i_0} + \Delta a_i, b_i = b_{i_0} + \Delta b_i \quad (4.3)$$

Pour prendre en compte ces incertitudes, une idée est de considérer (4.3) comme une collection d'ensembles flous $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, i \in \{1, \dots, N\}$. On suppose connaître une distribution des incertitudes sinon une description par intervalle est suffisante. Les signaux restant réels (4.2) se réécrivent :

$$y_k = -\tilde{a}_1 \cdot y_{k-1} - \dots - \tilde{a}_N \cdot y_{k-N} + \tilde{b}_1 \cdot u_{k-1} + \dots + \tilde{b}_N \cdot u_{k-N} \quad (4.4)$$

Néanmoins, le but est d'actualiser la sortie y_k à chaque instant en fonction de (4.4), et des signaux d'entrée, seuls à être certains. Deux possibilités existent : soit la suite des $\{y_i\}$ est mesurée et on calcule y_k directement et il n'y a pas de propagation des incertitudes au cours du temps, soit on considère la suite des $\{\tilde{y}_i\}$, i.e. obtenus à l'aide de :

$$\tilde{y}_k = -\tilde{a}_1 \cdot \tilde{y}_{k-1} - \dots - \tilde{a}_N \cdot \tilde{y}_{k-N} + \tilde{b}_1 \cdot u_{k-1} + \dots + \tilde{b}_N \cdot u_{k-N} \quad (4.5)$$

Dans ce cas, les résultats doivent permettre de déterminer l'enveloppe dans laquelle la sortie du modèle évolue. La solution floue à (4.5) comprend l'ensemble des solutions possibles de (4.2) avec des paramètres incertains décrits en (4.3).

Exemple :

A titre d'illustration, on considère le premier ordre continu : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$ d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$. En supposant un bloqueur $B_0(p)$, l'équation de récurrence linéaire correspondante s'écrit avec T_e la période d'échantillonnage :

$$D = e^{-\frac{T_e}{\tau}}, \quad y_k = D \cdot y_{k-1} + K \cdot (1 - D) \cdot u_{k-1} \quad (4.6)$$

La période d'échantillonnage choisie est : $T_e = 0,3 s$. On suppose le gain statique K et la constante de temps τ incertains. Cette incertitude pouvant se représenter par les nombres flous triangulaires : $\tilde{K} = triplet(0.7, 1, 1.3)$ et $\tilde{\tau} = triplet(0.95, 1, 1.05)$, on peut donc écrire en gardant les notations précédentes :

$$\tilde{a}_1 = -\tilde{D}, \quad \tilde{b}_1 = \tilde{K} \cdot (1 - \tilde{D}), \quad \tilde{y}_k = -\tilde{a}_1 \cdot \tilde{y}_{k-1} + \tilde{b}_1 \cdot u_{k-1} \quad (4.7)$$

Notons que $\tilde{D} = \exp\left(-\frac{1}{\tilde{\tau}}\right)$ implique un premier calcul à partir des opérations arithmétiques définies au chapitre 2, \tilde{a}_1 et \tilde{b}_1 sont donnés figure 43.

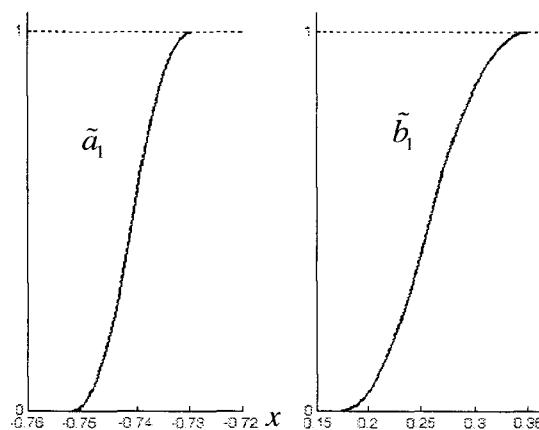


Figure 43 : Allures des paramètres flous \tilde{a}_1 et \tilde{b}_1

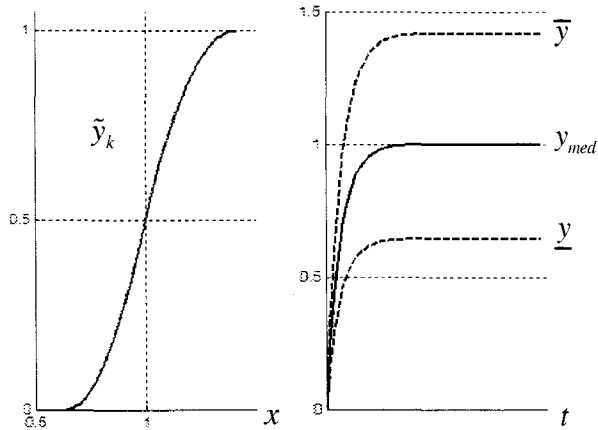


Figure 44 : Réponse indicielle à un échelon unitaire

La réponse \tilde{y}_k de (4.7) est donnée figure 44. L'enveloppe obtenue est représentée par les réponses minimum \underline{y} et maximum \bar{y} . La réalisation médiane y_{med} est également présentée, elle correspond à la réponse du 1^{er} ordre sans incertitudes, i.e. avec les valeurs choisies le gain statique étant égal à 1.

On peut également remarquer la cohérence des opérations effectuées. Si on s'intéresse à la stabilité du modèle linéaire, elle est garantie si et seulement si $D \in]-1,1[$. En choisissant $\tilde{D} \in [-1,1]$, les bornes sont atteignables, il est donc possible d'être en limite de stabilité. Dans ce cas les réponses minimales et maximales \underline{y} et \bar{y} sont « rejetées » à l'infini alors que toutes les autres réalisations convergent, figure 45, par exemple y_{med} .

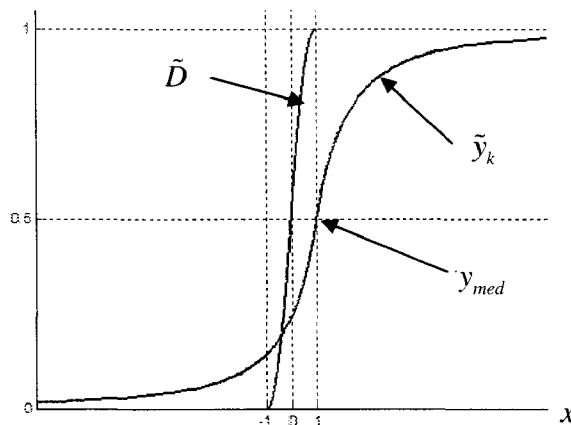


Figure 45 : Réponse indicielle \tilde{y}_k

2.2. Utilisation pour le calcul d'une loi de commande

On peut envisager plusieurs solutions. Pour présenter l'esprit de ce qui peut être fait, nous utiliserons la synthèse de type RST [De Larminat, 2002]. L'idée en linéaire est de pouvoir modifier la place des pôles en boucle fermée tout en assurant des performances prédéfinies. A partir du modèle du système décrit précédemment $B(q^{-1}) = \sum_{k=1}^N b_k q^{-k}$ et

$A(q^{-1}) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k q^{-k}$ on choisit un correcteur RST, figure 46, qui s'écrit :

$$u_k = \frac{T(q^{-1})}{S(q^{-1})} y_{c_k} - \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} y_k \quad (4.8)$$

Avec les polynômes $R(q^{-1}) = r_0 + r_1 \cdot q^{-1} + r_2 \cdot q^{-2} \dots$, $S(q^{-1}) = s_0 + s_1 \cdot q^{-1} + s_2 \cdot q^{-2} \dots$ et $T(q^{-1}) = t_0 + t_1 \cdot q^{-1} + t_2 \cdot q^{-2} \dots$ de taille appropriée. Ils peuvent éventuellement incorporer des pré-spécifications pour des besoins de performances (atténuation du bruit, rejet d'une fréquence particulière ...) [Landau, 1998]. Par exemple, on a généralement $S(1) = 0$ pour garantir une précision à un suivi de consigne de type échelon.

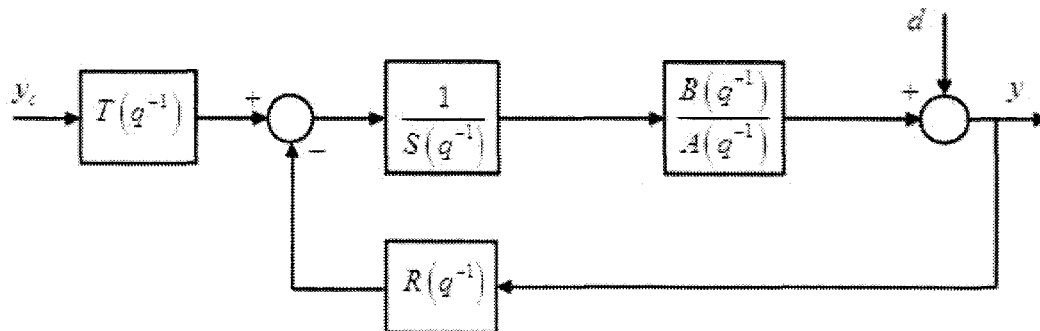


Figure 46 : Correcteur RST

La sortie y_k s'écrit alors en fonction des signaux d'entrées y_{c_k} (consigne) et d_k (perturbation) :

$$y_k = \frac{B(q^{-1})T(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1})} y_{c_k} - \frac{A(q^{-1})S(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1})} d_k \quad (4.9)$$

On s'aperçoit que les pôles de la boucle fermée sont déterminés à partir du dénominateur des fonctions de transfert de (4.9). Si on choisit un placement de pôles par exemple, i.e. on se fixe un but en boucle fermée $P_{but}(q^{-1}) = p_0 + p_1 \cdot q^{-1} + p_2 \cdot q^{-2} \dots$ alors on est amené à résoudre une équation de diophantine (ou identité de Bezout) [De Larminat, 2002] (4.10). Cette dernière admettant une solution sous certaines hypothèses d'ordre sur les polynômes.

$$A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1}) = P_{but}(q^{-1}) \tag{4.10}$$

Si on considère les paramètres du modèle variant comme précédemment (4.3) alors il est possible de déterminer des coefficients des correcteurs qui soient issus d'un calcul faisant intervenir les ensembles flous $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, i \in \{1, \dots, N\}$. Néanmoins, utilisés tels quels on se heurte au problème de la réalisation choisie pour la loi de commande floue obtenue \tilde{u}_k . L'ensemble de la méthode est étudiée sur le même exemple didactique du 1^{er} ordre défini précédemment (4.6) et (4.7).

Exemple :

On a : $B(q^{-1}) = b_1 \cdot q^{-1}$ et $A(q^{-1}) = 1 + a_1 \cdot q^{-1}$, $R(q^{-1}) = r_0 + r_1 \cdot q^{-1}$, $S(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ et $T(q^{-1}) = t_0$. On choisit comme but $P_{but}(q^{-1}) = 1 + p_1 \cdot q^{-1} + p_2 \cdot q^{-2}$, on montre facilement que l'identité de Bezout (4.10) est satisfaite si et seulement si les paramètres du correcteur sont donnés par : $r_0 = \frac{1}{b_1}(p_1 - a_1 + 1)$, $r_1 = \frac{1}{b_1}(p_2 + a_1)$. On choisit aussi $t_0 = \frac{1}{b_1}(1 + p_1 + p_2)$ pour assurer un gain statique unitaire à la boucle fermée.

En reprenant : $\tilde{K} = triplet(0.7, 1, 1.3)$ et $\tilde{\tau} = triplet(0.95, 1, 1.05)$ on peut calculer des coefficients « flous » des correcteurs qui tiennent donc compte des distributions de \tilde{K} et $\tilde{\tau}$:

$$\tilde{r}_0 = \frac{1}{\tilde{b}_1}(p_1 - \tilde{a}_1 + 1), \tilde{r}_1 = \frac{1}{\tilde{b}_1}(p_2 + \tilde{a}_1), \tilde{t}_0 = \frac{1}{\tilde{b}_1}(1 + p_1 + p_2) \tag{4.11}$$

La loi de commande peut donc s'écrire :

$$u_k = u_{k-1} + \overline{\Delta u}_k = u_{k-1} + \tilde{t}_0 \cdot y_{c_k} - \tilde{r}_0 \cdot y_k - \tilde{r}_1 \cdot y_{k-1} \tag{4.12}$$

Une consigne de type échelon est proposée avec des changements à $k = 20$ et $k = 80$. Une perturbation additive en sortie est également présente figure 47 (droite), de type échelon à $k = 40$ et bruitée après $k = 80$. De plus, à chaque changement de consigne on modifie le modèle. Pour les 20 premiers échantillons il s'agit du modèle nominal $K = 1, \tau = 1 s$, pour la consigne suivante $K = 1,3, \tau = 0,95$, enfin sur la dernière partie $K = 0,7, \tau = 1,05 s$. Le comportement de la sortie y_k est présenté figure 47 (gauche) et les enveloppes de $\overline{\Delta u_k}$ sont présentées. On s'aperçoit du bon comportement du correcteur proposé.

Néanmoins les bornes des incertitudes semblent grandes en comparaison des incertitudes considérées dans le modèle. Cela est principalement dû à la surestimation introduite par les opérations sur les nombres flous.

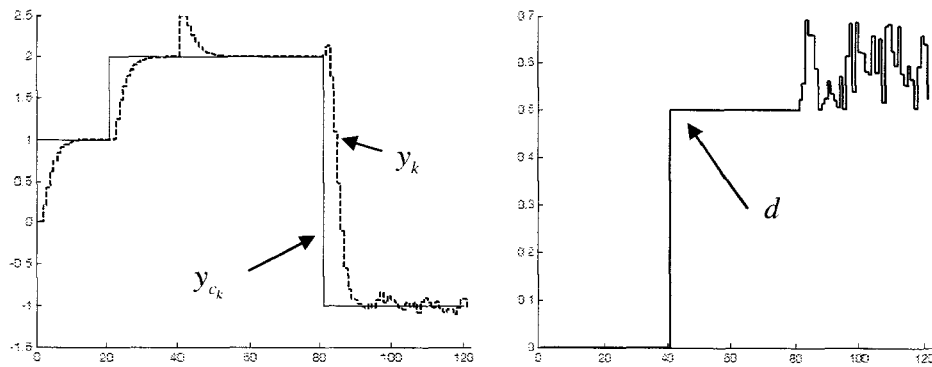


Figure 47 : Correcteur RST flou

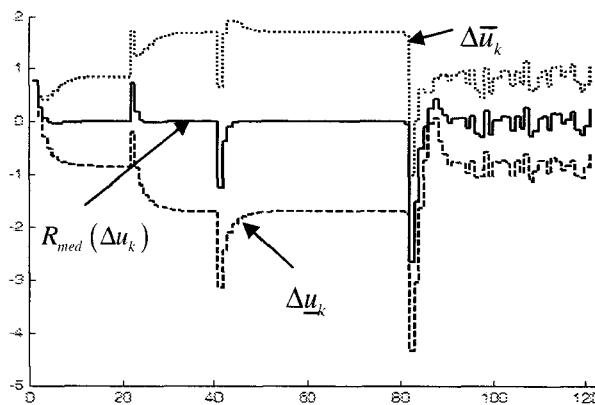


Figure 48 : Correcteur RST flou

Cette manière de procéder permet donc d'utiliser le φ -calcul pour des boucles de régulation. Néanmoins, pour aller plus loin, il faudrait relier ces premiers travaux aux différents résultats obtenus soit avec des intervalles [Jaulin & al., 2001], soit sur la stabilité robuste, par exemple [Kharitonov, 1978] ou la connaissance de la stabilité de certains polynômes suffit à prouver la stabilité quelles que soient les variations paramétriques dans un compact.

2.3. Limitations de l'approche

Comme l'a montré l'étude précédente, le φ -calcul permet de proposer une application aux boucles de régulation. Néanmoins, de façon générale un bloc de commande s'écrit :

$$u_k = f\left(\{y_{c_{k-i}}\}, \{y_{k-i}\}, \{u_{k-i-1}\}\right), \quad i \in \{0, \dots, n\} \quad (4.13)$$

Les $\{y_{k-i}\}$ représentant la suite des éléments de y_k à y_{k-n} et la fonction $f(\bullet)$ peuvent être linéaires ou non. Dans le cas « flou » on remplace ce bloc de commande par : $\tilde{u}_k = \tilde{f}\left(\{y_{c_{k-i}}\}, \{y_{k-i}\}, \{\tilde{u}_{k-i-1}\}\right)$, les entrées $\{y_{k-i}\}$ et $\{y_{c_{k-i}}\}$ sont évidemment réelles. La loi de commande finale est donc obtenue par : $u_k = R(\tilde{u}_k)$, avec R une des réalisations possibles de \tilde{u}_k . Si cette dernière coïncide parfaitement avec le résultat de (4.13) (ce que l'on est en droit d'attendre pour espérer une cohérence dans l'arithmétique) alors le fait d'avoir $\tilde{f}(\bullet)$ au lieu de $f(\bullet)$ impose le même résultat que (4.13).

Il faut donc voir cette approche pour des applications plus complètes. Par exemple utiliser la connaissance des incertitudes pour évaluer des défauts dans le cadre du diagnostic est envisageable. Dans la figure 48 on s'aperçoit que les changements de modèles s'accompagnent du changement des enveloppes de $\overline{\Delta u_k}$ et qu'il est tout à fait envisageable d'exploiter cette connaissance. De façon générale, pour « gagner » quelque chose il faudrait pouvoir disposer d'une boucle fermée floue complète, or il n'en existe pas à notre connaissance. Il faudra toujours envoyer une commande réelle et mesurer une sortie réelle.

Une manière de faire est alors de conserver une boucle floue en parallèle avec la boucle de commande. Un type de commande se prête parfaitement à cela : il s'agit de la commande à modèle interne (CMI). Des travaux ont alors vus le jour en utilisant des modèles

du procédé permettant de prendre en compte des connaissances supplémentaires. On trouve des résultats basés sur un modèle flou [Boukezzoula & al., 2003], sur un modèle neuronal voire en utilisant un raisonnement probabiliste [Hunt & Sbarbaro, 1991 ; Edgar & Postlethwaite, 2000]. Le paragraphe suivant propose alors à l'aide de tous les outils développés précédemment d'expérimenter une telle structure de commande.

Pour commencer, un très rapide rappel de ce type de commande est donné.

3. Commande à Modèle Interne

3.1. Rappels

On rappelle que la commande à modèle interne (CMI) ne s'applique qu'à des modèles stables en boucle ouverte. La structure d'une commande à modèle interne est rappelée figure 49. L'idée de base est de placer un modèle du procédé $G_m(q^{-1})$ en parallèle avec le système $G(q^{-1})$ et de ne corriger que les écarts constatés entre la sortie du procédé y_k et la sortie du modèle y_{m_k} . Le filtre $F(q^{-1})$ est dit de robustesse et vérifie $F(1) = 1$ (gain statique unitaire).

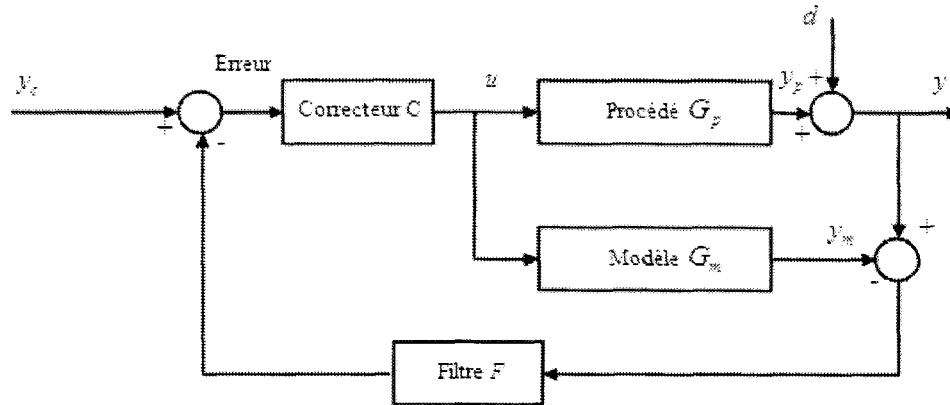


Figure 49 : Schéma de principe de la commande à modèle interne

On montre aisément dans le cas linéaire, que la boucle figure 49, correspond aux équations suivantes pour la sortie y_k :

$$\begin{aligned}
y_k &= F_{BF}(q^{-1}) \cdot y_{c_k} + S_{yp}(q^{-1}) \cdot d_k \\
F_{BF}(q^{-1}) &= \frac{G(q^{-1})C(q^{-1})}{1+C(q^{-1})F(q^{-1})[G(q^{-1})-G_m(q^{-1})]} \\
S_{yp}(q^{-1}) &= \frac{1-G_m(q^{-1})C(q^{-1})F(q^{-1})}{1+C(q^{-1})F(q^{-1})[G(q^{-1})-G_m(q^{-1})]}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

et pour le bloc de commande :

$$u_k = \frac{C(q^{-1})}{1-C(q^{-1})F(q^{-1})G_m(q^{-1})} \cdot (y_{c_k} - F(q^{-1})y_k) \tag{4.15}$$

3.2. Analyse de la commande à modèle interne (CMI)

On veut pouvoir garantir au minimum la stabilité et $F_{BF}(1)=1$ (gain statique de la boucle fermée unitaire) $S_{yp}(1)=0$ (rejet des perturbations d_k faiblement variables dans le temps par rapport à la dynamique du système).

Cas idéal : $G(q^{-1})=G_m(q^{-1})$

Dans ce cas les équations (4.14) s'écrivent :

$$y_k = G(q^{-1})C(q^{-1}) \cdot y_{c_k} + (1-G(q^{-1})C(q^{-1})F(q^{-1})) \cdot d_k \tag{4.16}$$

On a donc une poursuite parfaite si $C(q^{-1}) = \frac{1}{G(q^{-1})}$, i.e. le correcteur compense

parfaitement le modèle. Naturellement $G(q^{-1})$ étant strictement propre, cette inversion n'est pas réalisable parfaitement.

Une condition suffisante pour assurer une poursuite asymptotique pour une entrée de type échelon, i.e. $F_{BF}(1)=1$ et $S_{yp}(1)=0$, est donc $G(1)C(1)=1$. Au minimum le correcteur doit être tel que : $C(1) = \frac{1}{G(1)}$. La dynamique de la sortie est alors fixée par les pôles de

$G(q^{-1})C(q^{-1})$. Par exemple, si on choisit comme correcteur un proportionnel simple, on a :

$$y_k = \frac{G(q^{-1})}{G(1)} \cdot y_{c_k} + \left(1 - \frac{G(q^{-1})}{G(1)} F(q^{-1}) \right) \cdot d_k \quad (4.17)$$

Enfin, de façon évidente, la stabilité est assurée si et seulement si le correcteur et le procédé sont stables séparément (propriété de la boucle ouverte).

Cas général : $G(q^{-1}) \neq G_m(q^{-1})$

Les propriétés sont conservées. Effectivement, comme le filtre de robustesse vérifie $F(1) = 1$, si $G(1)C(1) = 1$ alors de façon immédiate avec les équations (4.14) on a $F_{BF}(1) = 1$ et $S_{yp}(1) = 0$.

Pour la stabilité de la boucle, le modèle n'imité pas le comportement dynamique du procédé, de faibles écarts n'entraînent pas d'instabilité [Foulard & al, 1987] mais pour des écarts plus importants (influence de la perturbation d'une part et de l'erreur de modélisation d'autre part), il peut s'avérer nécessaire d'introduire un filtre de robustesse $F(q^{-1})$ qui permet d'avoir une réaction moins rapide aux perturbations pour conférer à l'ensemble une certaine robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation figure 49. On peut montrer [De Larminat, 2002] que quelle que soit l'incertitude du modèle il est toujours possible de trouver un filtre $F(q^{-1})$, placé suffisamment en basses fréquences qui permette de stabiliser la boucle.

Globalement, la commande à modèle interne peut être vue comme une commande par simplification de modèle. Il est donc nécessaire de savoir « inverser » un modèle pour proposer une telle commande.

3.3. Inversion de modèle

Plusieurs travaux se sont intéressés à ce type d'inversion dans le cas d'un modèle flou. Pour des modèles à base de règles, une inversion « règle par règle » peut être proposée [Babuska et al., 1995] ou des méthodes d'optimisation itératives [Park et Han, 2000]. Pour les modèles flous qui nous concernent, l'inversion de modèle est plus proche de celle réalisée pour les modèles dont les incertitudes peuvent être représentées par des intervalles. Ce type d'inversion étendue aux modèles flous est étudié dans [Boukezzoula et al., 2006]. On rappelle

que cette inversion de modèle n'est valable que pour des modèles stables et à minimum de phase, i.e. tous les pôles et les zéros du modèle sont dans le demi-plan gauche.

En partant d'un modèle avec incertitudes décrit par (4.4) la question posée par l'inversion de modèle est : si on dispose de la description des incertitudes pour le modèle, peut-on déterminer une loi de commande basée sur l'inverse du modèle qui puisse garantir que la sortie du modèle reste dans une enveloppe prédéfinie $[y_c - \Delta, y_c + \Delta]$.

Pour répondre à cette question, l'approche développée dans [Boukezzoula et al., 2006] est reprise ici. Si on se place à un instant donné k pour le calcul de la commande u_k , on dispose des informations aux instants précédents $\{y_{k-i}, i = 1 \dots N\}$, $\{u_{k-i}, i = 1 \dots N\}$. On peut donc écrire en inversant (4.2) directement (on suppose évidemment $b_1 \neq 0$) :

$$u_k = \frac{1}{b_1} (y_{k+1} + a_1 \cdot y_k + \dots + a_N \cdot y_{k-N+1} - b_2 \cdot u_{k-1} - \dots - b_N \cdot u_{k-N+1}) \quad (4.18)$$

Ou, en isolant le terme inconnu à l'instant k , y_{k+1} :

$$u_k = \frac{1}{b_1} (y_{k+1} + \psi(z(k)))$$

$$\psi(z(k)) = a_1 \cdot y_k + \dots + a_N \cdot y_{k-N+1} - b_2 \cdot u_{k-1} - \dots - b_N \cdot u_{k-N+1} \quad (4.19)$$

$$z(k) = [y_k \quad \dots \quad y_{k-N+1} \quad u_{k-1} \quad \dots \quad u_{k-N+1}]^T \in \mathbb{R}^{2N-1}$$

Si on remplace y_{k+1} par la trajectoire de référence désirée, dans le cas linéaire pour un modèle sans retard, le résultat idéal est : $y_{k+1} = y_{c_k}$. La compensation étant parfaite, la sortie suit l'entrée de référence avec un retard pur d'une période d'échantillonnage.

Si on revient à la question posée, on veut garantir que $y_{k+1} \in [\underline{y}_{k+1}, \bar{y}_{k+1}]$. En reprenant les équations (4.18) et (4.19) pour le modèle flou (4.4) on a donc directement :

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{\tilde{b}_1} (\tilde{y}_{k+1} + \tilde{\psi}(\tilde{z}(k)))$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{z}(k)) = \tilde{a}_1 \cdot \tilde{y}_k + \dots + \tilde{a}_N \cdot \tilde{y}_{k-N+1} - \tilde{b}_2 \cdot \tilde{u}_{k-1} - \dots - \tilde{b}_N \cdot \tilde{u}_{k-N+1} \quad (4.21)$$

On a donc une description du modèle inverse à partir des nombres flous. Pour rendre le calcul de la commande possible, on remplace \tilde{y}_{k+1} par une trajectoire désirée définie par un

nombre flou \tilde{y}_{c_k} , par exemple : $\tilde{y}_{c_k} = \text{triplet}(y_{c_k} - \Delta, y_{c_k}, y_{c_k} + \Delta)$. Le calcul de la loi de commande se fait donc de la manière suivante :

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{\tilde{b}_1} (\tilde{y}_{c_k} + \tilde{\psi}(\tilde{z}(k)))$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{z}(k)) = \tilde{a}_1 \cdot \tilde{y}_{c_k} + \dots + \tilde{a}_N \cdot \tilde{y}_{c_{k-N+1}} - \tilde{b}_2 \cdot \tilde{u}_{k-1} - \dots - \tilde{b}_N \cdot \tilde{u}_{k-N+1} \quad (4.23)$$

Evidemment, le vecteur $\tilde{z}(k)$ dépend maintenant des entrées du bloc de commande, i.e. les \tilde{y}_i sont remplacés par la consigne désirée \tilde{y}_{c_i} . On se retrouve donc dans le cas de la figure 50.



Figure 50 : Inversion de modèle flou

Naturellement, l'utilisation des nombres flous et de l'arithmétique associée introduisent des surestimations et on ne peut plus garantir $\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_{c_k}$. Pour illustrer ces propos nous allons utiliser l'exemple suivant qui sera repris tout au long de ce chapitre. Il est issu de [Boukezzoula et al., 2006].

Exemple :

On considère le second ordre suivant : $\tilde{y}_k = -\tilde{a}_1 \cdot \tilde{y}_{k-1} - \tilde{a}_2 \cdot \tilde{y}_{k-2} + \tilde{b}_1 \cdot u_{k-1} + \tilde{b}_2 \cdot u_{k-2}$ avec la description des nombres flous :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \text{triplet}(-0,6 ; -0,55 ; -0,5) & \tilde{a}_2 &= \text{triplet}(0,05 ; 0,1 ; 0,15) \\ \tilde{b}_1 &= \text{triplet}(0,6 ; 0,625 ; 0,65) & \tilde{b}_2 &= \text{triplet}(0,15 ; 0,2 ; 0,25) \end{aligned} \quad (4.24)$$

La trajectoire voulue est : $y_{c_k} = 0,5 \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi k}{50}\right) + \sin\left(\frac{2\pi k}{75}\right) \right)$ et on choisit :

$$\tilde{y}_{c_k} = \text{triplet}(y_{c_k} - 1 ; y_{c_k} ; y_{c_k} + 1) \quad (4.25)$$

En utilisant (4.22) et (4.23), les enveloppes obtenues (minimum \underline{y}_{c_k} et maximum \bar{y}_{c_k} de $Supp(\tilde{y}_{c_k})$) pour la consigne \tilde{y}_{c_k} (4.25) et pour la sortie \tilde{y}_k sont données figure 51. Le pessimisme engendré par le φ -calcul est très clair.

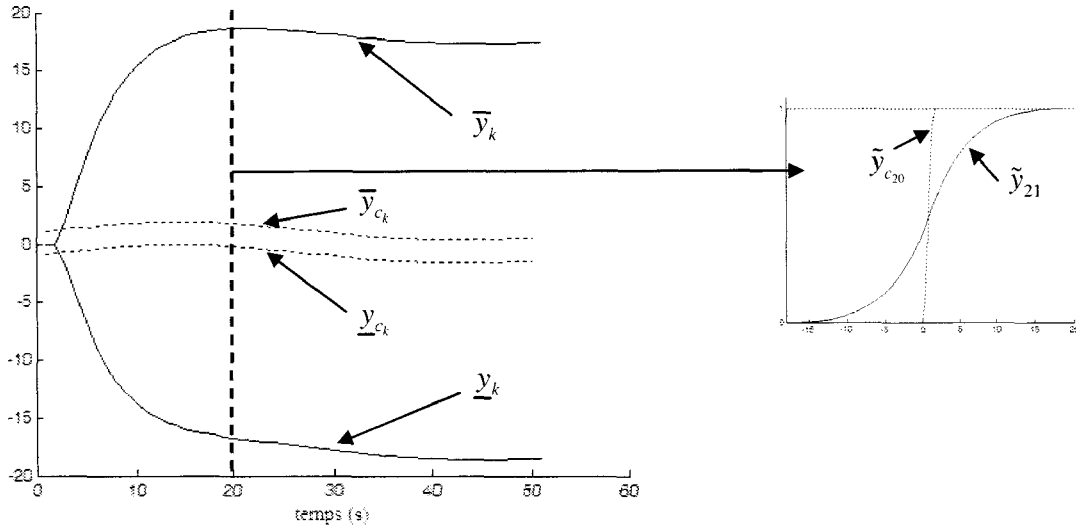


Figure 51 : Envelopes de l'entrée \tilde{y}_{c_k} (en pointillés) et de la sortie \tilde{y}_k

L'application du φ -calcul de cette manière n'est donc pas judicieuse. Notons que les mêmes types de surestimation sont obtenus si on utilise le calcul par intervalles ou les α -coupes. Néanmoins, c'est très clairement la non prise en compte de la connaissance du résultat a priori qui induit cette surestimation. Il est donc indispensable d'utiliser cette connaissance et pour ce faire d'introduire des contraintes supplémentaires. On parlera comme dans le chapitre 2 de calcul « exact ».

3.4. Calcul inversible « exact »

(4.22) correspond à la résolution de l'équation floue affine :

$$\tilde{b} \times \tilde{x} + \tilde{a} = \tilde{y} \tag{4.26}$$

L'idée développée dans [Boukezzoula et al., 2006] est de la résoudre de façon « exacte » en deux étapes (quand une solution « exacte » existe).

Etape 1 : en posant $\tilde{d} = \tilde{b} \times \tilde{x}$ le but est d'obtenir la solution exacte de $\tilde{d} + \tilde{a} = \tilde{y}$. Cette dernière est : $\varphi_d^{-1}(u) = \varphi_y^{-1}(u) - \varphi_a^{-1}(u)$ dans le cas où le résultat obtenu pour φ_d^{-1} reste une fonction croissante. Dans le cas contraire, la solution n'est plus « exacte » mais on propose

une solution approchée. On dispose d'un ensemble de couples $(\varphi_d^{-1}(u_i), u_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$. En effectuant une fusion floue pondérée *WFF* sur tous ces couples, le résultat \tilde{d}_{app} aura une fonction de répartition croissante.

Avec les nombres flous triangulaires $\tilde{a}_1 = triplet(1; 2; 3)$ et $\tilde{y}_1 = triplet(0; 3; 4)$, la figure 52 donne pour le φ -calcul le résultat $Supp(\tilde{d}) = [-3, 3]$ et pour le calcul « exact » $Supp(\tilde{d}_{exact}) = [-1, 1]$ (noté \tilde{d}_{exact}). On voit également la surestimation obtenue pour $\tilde{d} + \tilde{a}_1$ en calculant à partir du résultat du φ -calcul alors qu'évidemment avec la solution exacte $\tilde{y}_1 = \tilde{d}_{exact} + \tilde{a}_1$.

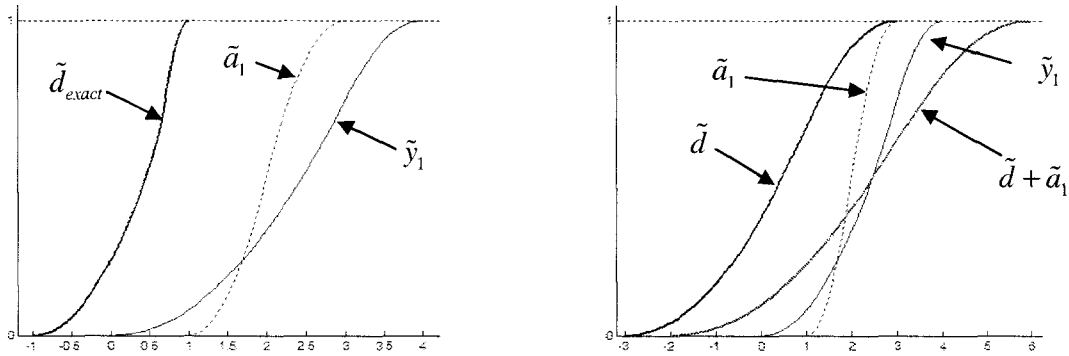


Figure 52 : résultats « exact » (gauche) et par φ -calcul (droite) pour les nombres \tilde{a}_1 et \tilde{y}_1

Soient les nombres flous triangulaires suivants : $\tilde{a}_2 = triplet(0,6; 0,8; 1,8)$ et $\tilde{y}_2 = triplet(1; 2,4; 2,5)$. Sur la figure 53, on voit qu'il n'est pas possible d'obtenir une solution exacte puisque φ_d^{-1} n'est pas croissante (partie gauche). La fusion *WFF* permet alors de déduire une solution approchée \tilde{d}_{app} . Cette dernière ainsi que l'illustration de ce que l'on « perd » sont présentées (partie droite), i.e. $Supp(\tilde{y}_2) = [1; 2,5] \subset Supp(\tilde{d}_{app} + \tilde{a}_2) = [1; 2,82]$.

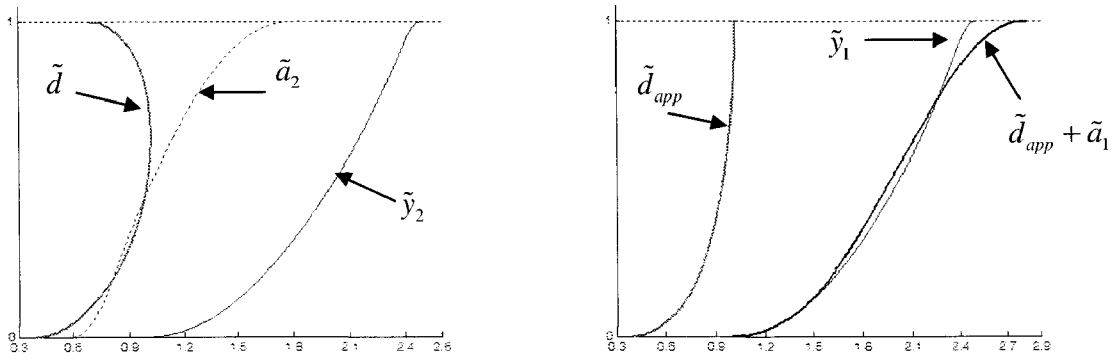


Figure 53 : résultats « exact » (gauche) et approché (droite) pour les nombres \tilde{a}_2 et \tilde{y}_2

L'intérêt de proposer une alternative au calcul exact est évidemment important. Dans le cas des intervalles (et des α -coupes) utilisés dans [Boukezzoula et al., 2006] ils acceptent de n'avoir aucune solution. Il nous semble préférable d'avoir une solution « inexacte » mais approchée que pas de solution.

Etape 2 : trouver une solution à : $\tilde{d} = \tilde{b} \times \tilde{x}$ avec évidemment $0 \notin \text{Supp}(\tilde{b})$. Le calcul « exact » se base sur une division point par point si $\tilde{b} > 0$ et $\tilde{d} > 0$: $\varphi_{\tilde{x}}^{-1}(u) = \varphi_{\tilde{d}}^{-1}(u) / \varphi_{\tilde{b}}^{-1}(u)$. Dans le cas général on utilise la décomposition additive (cf. chapitre 2) de \tilde{d} avec $\tilde{d}_- \leq 0$ et $\tilde{d}_+ \geq 0$: $\varphi_{\tilde{d}}^{-1}(u) = \varphi_{\tilde{d}_-}^{-1}(u) + \varphi_{\tilde{d}_+}^{-1}(u)$ et de \tilde{x} : $\varphi_{\tilde{x}}^{-1}(u) = \varphi_{\tilde{x}_-}^{-1}(u) + \varphi_{\tilde{x}_+}^{-1}(u)$. On rappelle aussi que le pseudo-opposé \tilde{d} se note $-\tilde{d}$ et se définit par sa fonction de répartition $\varphi_{-\tilde{d}}$. Le calcul est fait de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \text{Si } \tilde{b} > 0, \quad \tilde{x}_+ &= \tilde{d}_+ / \tilde{b}, & \tilde{x}_- &= -((-\tilde{d}_-) / \tilde{b}) & \tilde{x} &= \tilde{x}_+ + \tilde{x}_- \\ \text{Si } \tilde{b} < 0, \quad \tilde{x}_+ &= \tilde{d}_+ / (-\tilde{b}), & \tilde{x}_- &= -((-\tilde{d}_-) / (-\tilde{b})) & \tilde{x} &= -(\tilde{x}_+ + \tilde{x}_-) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pour illustrer cette deuxième étape, soient les nombres flous triangulaires suivants : $\tilde{b}_1 = \text{triplet}(-2; -1,5; -1)$ et $\tilde{d}_1 = \text{triplet}(-2; 0; 1)$. La figure 54 donne les résultats du φ -calcul et exact (noté \tilde{x}_{exact}). On voit à nouveau la surestimation obtenue pour $\tilde{b} \times \tilde{x}$ en calculant à partir du résultat du φ -calcul alors qu'avec la solution exacte : $\tilde{d} = \tilde{b} \times \tilde{x}_{\text{exact}}$.

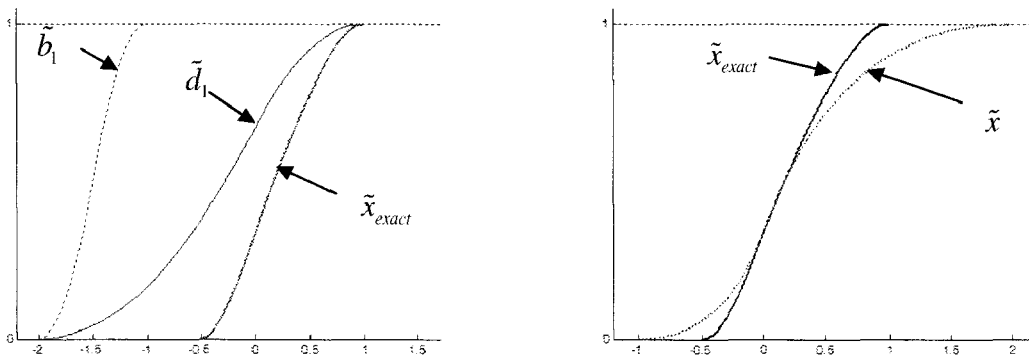


Figure 54 : résultats « exact » (gauche) et par φ -calcul (droite) pour les nombres \tilde{b}_1 et \tilde{d}_1

Soient les nombres flous triangulaires suivants : $\tilde{b}_2 = \text{triplet}(1; 2; 2)$ et $\tilde{d}_2 = \text{triplet}(3; 3; 4)$. Sur la figure 55 on voit qu'il n'est pas possible d'obtenir une solution exacte puisque φ_x^{-1} n'est pas croissante (partie gauche). La fusion WFF permet alors de déduire une solution approchée \tilde{x}_{app} . Cette dernière ainsi que l'illustration de ce que l'on « perd » sont présentées (partie droite), i.e. $Supp(\tilde{d}_2) = [3; 4] \subset Supp(\tilde{b}_2 \times \tilde{x}_{app}) = [1, 87; 6]$.

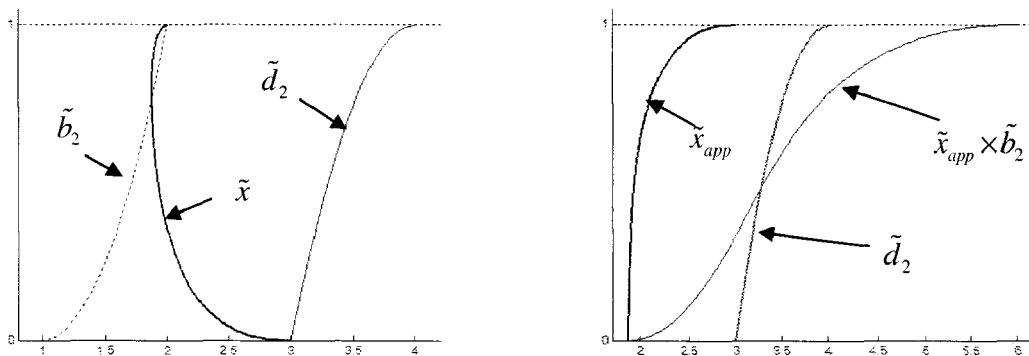


Figure 55 : résultats « exact » (gauche) et par φ -calcul (droite) pour les nombres \tilde{b}_2 et \tilde{d}_2

Pour illustrer l'intérêt de l'ensemble de ce calcul « exact » $\tilde{b} \times \tilde{x} + \tilde{a} = \tilde{y}$, reprenons le modèle inverse flou et l'exemple donné en (4.24) et (4.25). La figure 56 représente le même essai que celui effectué pour la figure 51. On s'aperçoit que l'on retrouve le résultat attendu, i.e. $\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k$. Cela indique également qu'une solution exacte a été trouvée pour chaque instant k .

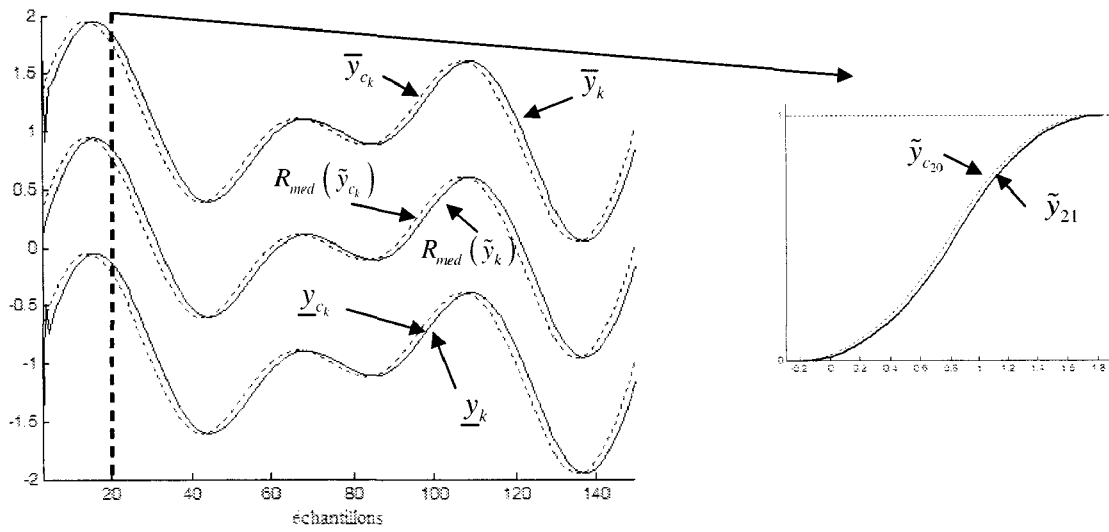


Figure 56 : Enveloppes de l'entrée \tilde{y}_{c_k} (en pointillés) et de la sortie \tilde{y}_k

Si on augmente les incertitudes sur le modèle (4.24), il peut arriver que l'inversion ne soit plus « exacte ». Pour illustrer ces propos, on reprend l'exemple défini en (4.24) en modifiant les bornes sans modifier les centres. Les bornes sont choisies les plus grandes possibles mais de manière à ce que les pôles et le zéro restent dans le cercle unité (pour que le modèle et le modèle inverse restent stables). Les nombres flous ne sont plus symétriques et correspondent alors à :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \text{triplet}(-0,825; -0,4; 0,3) & \tilde{a}_2 &= \text{triplet}(-0,175; 0,255; 0,95) \\ \tilde{b}_1 &= \text{triplet}(0,415; 0,625; 0,835) & \tilde{b}_2 &= \text{triplet}(-0,01; 0,2; 0,41) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Pour illustrer cette modification, la place des pôles (croix) et du zéro réel (rond) sont donnés figure 57. Le même essai que précédemment est effectué avec l'entrée (4.25) et est présenté figure 58 (il s'agit du zoom entre les échantillons 80 et 150). On s'aperçoit que l'on n'obtient plus de simplification exacte du modèle flou, i.e. $\tilde{y}_{k+1} \neq \tilde{y}_{c_k}$. Pour illustrer ce phénomène, les échantillons $k=117$ et $k=130$ sont également présentés figure 58. Comparées à ne pas garantir de solutions dans ces cas, les solutions approchées proposées semblent parfaitement adaptées.

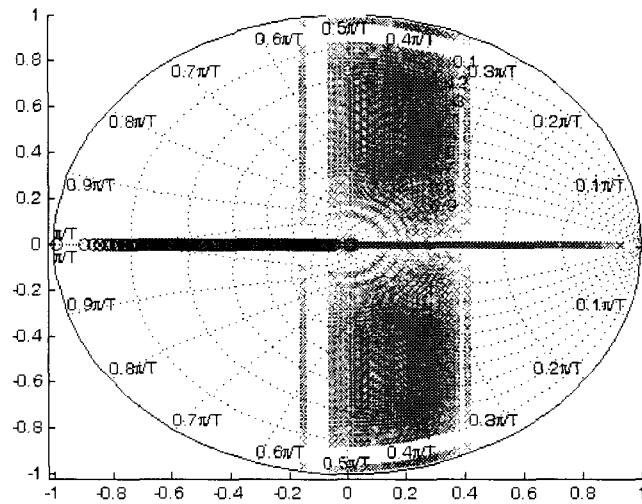


Figure 57 : place des pôles de la fonction de transfert en fonction des incertitudes

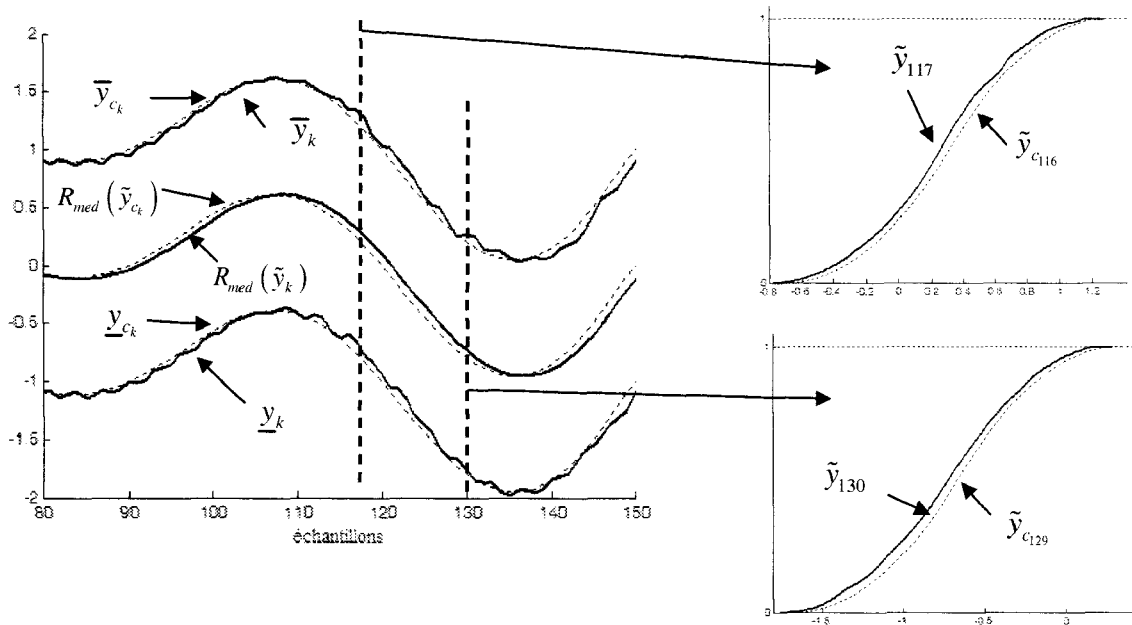


Figure 58 : Envelopes de l'entrée \tilde{y}_{c_k} (en pointillés) et de la sortie \tilde{y}_k

Disposant d'une stratégie de calcul d'un modèle inverse basée sur des contraintes, justifiées dans le cadre de la commande, il est maintenant possible d'envisager une commande à modèle interne floue.

3.5. Commande à modèle interne flou

A partir de la figure 49 présentant la CMI et les différentes équations (4.14) et (4.15) on peut imaginer plusieurs solutions. Pour la première soit : $G_m(q^{-1}) = q^{-r} G_m^+(q^{-1})$, $G_m^+(q^{-1})$ correspond à une fonction dont l'inverse existe (exactement propre et dont les pôles et zéros sont dans le demi-plan gauche). On peut alors choisir $C(q^{-1}) = \frac{1}{G_m^+(q^{-1})}$ et proposer le modèle équivalent de la figure 59. Effectivement, (4.15) peut se réécrire :

$$u_k = \frac{1}{G_m^+(q^{-1})(1 - q^{-r} \cdot F(q^{-1}))} \cdot (y_{ck} - F(q^{-1})y_k) \quad (4.29)$$

Par analogie on a donc le modèle inverse (ici flou) $[\tilde{G}_m^+(q^{-1})]^{-1}$ multiplié par la fonction de transfert linéaire : $\frac{F(q^{-1})}{1 - q^{-r} F(q^{-1})}$.

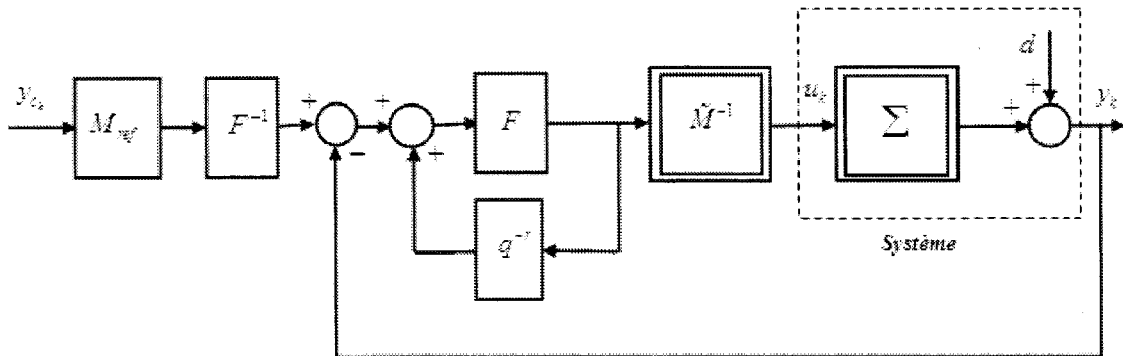


Figure 59 : CMI, schéma équivalent

Une deuxième solution consiste à conserver en parallèle avec le système un modèle. On a $C(q^{-1}) = \frac{1}{G_m^+(q^{-1})}$ et par analogie avec le cas classique dans le cas flou $[\tilde{G}_m^+(q^{-1})]^{-1}$ comme dans la structure précédente, figure 60.

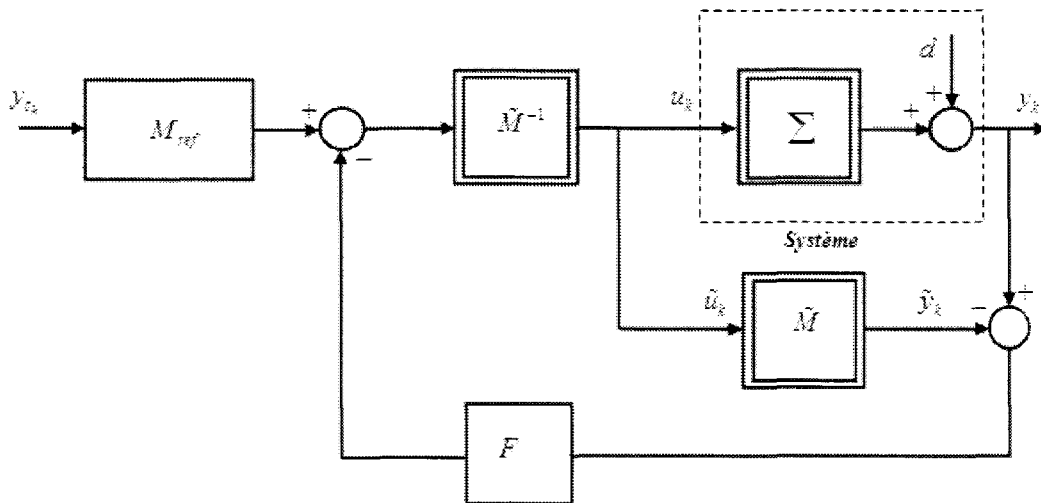


Figure 60 : CMI2, schéma équivalent

Dans les deux cas on peut rajouter un modèle de référence M_{ref} de manière à adoucir les commandes.

4. Exemple d'application en temps réel

4.1. Système étudié

Le problème de contrôle choisi pour illustrer cette méthode est celui d'un système de deux cuves à eau figure 61, système physique classique et didactique utilisé dans de nombreux laboratoires et Instituts dans le cadre de travaux pratiques d'automatique [Åström & Östberg, 1986].

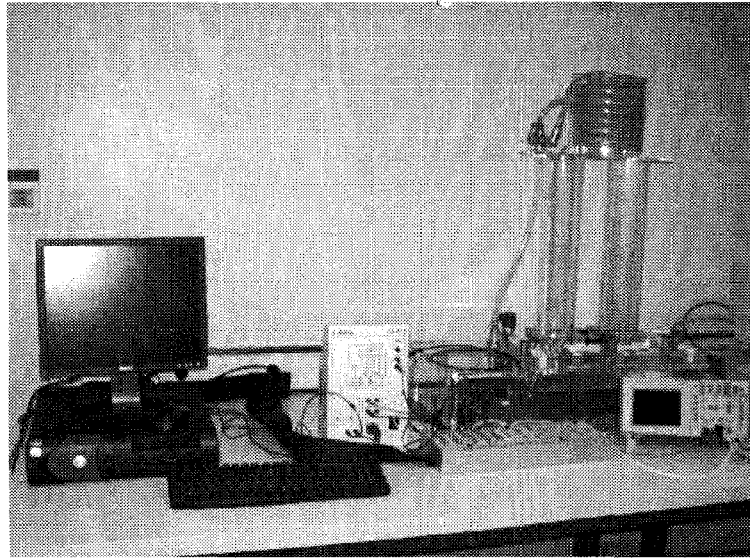


Figure 61 : Banc d'essais

Ce système est constitué de deux cuves communicantes et d'une pompe. La tension $u \in [0,10]$ aux bornes de la pompe est considérée comme l'entrée pour le système, tandis que les sorties sont les tensions ou courants représentant les niveaux h_1 et h_2 fournis par des transmetteurs mesurant la hauteur dans chaque cuve. Les réservoirs sont ouverts à leur extrémité supérieure. Les grandeurs utilisées pour ce système et un schéma de celui-ci sont données en tableau 4.

$u(t)$	tension d'entrée de la pompe
$q_i(t)$	débit de la cuve i , m^3/s
$h_i(t)$	niveau d'eau de la cuve i , m
g	accélération due à la pesanteur, $9.8 m/s^2$
ρ	densité du liquide, kg/m^3
Σ_i	section de la cuve i , m^2
σ_i	section de la pipe de sortie de la cuve i , m^2

Tableau 4 : Paramètres de la maquette

4.2. CMI du système à deux cuves

Le schéma du système à deux cuves est donné par la figure 62. L'entrée est le débit $q_1(t)$ et la sortie la hauteur dans la cuve 2 : $h_2(t)$. Dans le cas nominal de la figure 62, le débit de fuite $q_3(t)$ est constant ainsi que la liaison entre les deux cuves.

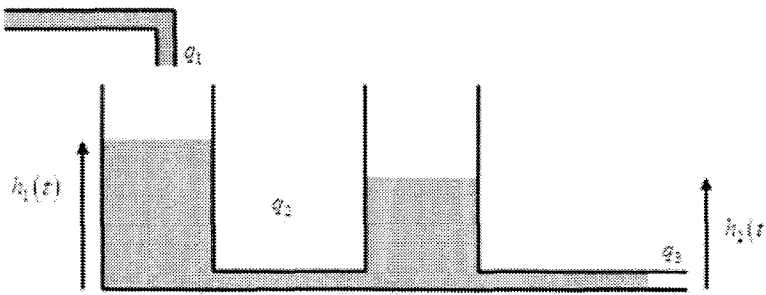


Figure 62 : Schéma du système à deux cuves

De façon usuelle un modèle de ce système correspond à un second ordre non linéaire, la non linéarité étant due principalement à l'apparition de $\sqrt{h(t)}$ dans les équations différentielles. Effectivement, chaque cuve peut-être représentée par une équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{h}_i(t) + k_i \cdot \sqrt{h_i(t)} = c_i \cdot q_i(t) \quad (4.30)$$

c_i et k_i étant des constantes. La période d'échantillonnage choisie pour tous les essais est (4.31) $T_e = 10 \text{ s}$ (pour une hauteur de 15 cm, le remplissage de la 1^{ère} cuve est d'environ 35 s). Une identification autour de plusieurs points de fonctionnement a été réalisée sur la maquette et une technique de type moindres carrés simples a permis d'obtenir les résultats sous la forme d'une fonction de transfert du second ordre. La fonction de transfert nominale correspond à une hauteur fixée dans la 2^{ème} cuve à 15 cm :

$$\frac{h_2(q^{-1})}{q_1(q^{-1})} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{0,0233 \cdot q^{-1} + 0,0197 \cdot q^{-2}}{1 - 1,5729 \cdot q^{-1} + 0,6037 \cdot q^{-2}} \quad (4.32)$$

A partir des essais effectués sur le système autour des points de fonctionnement les bornes du modèle flou choisies sont :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \text{triplet}(-1,574; -1,573; -1,497) & \tilde{a}_2 &= \text{triplet}(0,602; 0,603; 0,652) \\ \tilde{b}_1 &= \text{triplet}(0,013; 0,023; 0,033) & \tilde{b}_2 &= \text{triplet}(0,01; 0,02; 0,03) \end{aligned} \quad (4.33)$$

On choisit la structure CMI1 présentée figure 59 avec un modèle de référence. Le modèle de référence est le même pour les deux essais. Il a été choisi de manière à accélérer la boucle ouverte en présentant un temps de montée plus rapide de 80 s il correspond à :

$$\frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} = \frac{0,1784 \cdot q^{-1} + 0,1071 \cdot q^{-2}}{1 - 0,9315 \cdot q^{-1} + 0,2169 \cdot q^{-2}} \quad (4.34)$$

Sans entrer dans les détails, une structure d'anti-dérive de l'intégrateur a également été introduite dans les correcteurs. Les essais temps réel obtenus sont présentés figure 63 et figure 64 pour une commande linéaire basée sur le modèle nominal (4.32) (à gauche) et pour la commande floue (à droite). La consigne et la sortie $h_2(t)$ sont données figure 63 et la commande $q_1(t)$ figure 64. Les conditions de l'essai sont les suivantes et ont été répétées pour les deux lois de commande. Il y a 4 variations de consigne. La 1^{ère} amène le système sur sa position nominale (représentée par la valeur 2 sur la figure 63). Ensuite deux variations successives sont opérées (vers une consigne de 3 puis de 4), enfin un retour à la position nominale. Des perturbations sont additionnées. Elles sont introduites vers $t = 900$ s et correspondent à l'introduction d'un débit de fuite sur la première cuve et à la fermeture partielle de la vanne de communication entre les deux cuves. On augmente donc la constante de temps de la 1^{ère} cuve et on diminue celle de la 2^{ème}. Les deux perturbations sont enlevées aux alentours de $t = 2300$ s.

On s'aperçoit que le comportement du correcteur linéaire est satisfaisant en termes de rejet des perturbations et de suivi de consigne, ceci malgré le fait qu'il ait été synthétisé autour du point de fonctionnement nominal correspondant à la valeur 2 sur la figure 63. La sortie $h_2(t)$ pour la commande basée sur le φ -calcul est plus rapide et présente un léger dépassement. En termes de signaux de commande ils présentent globalement des comportements similaires, même si les zones de fonctionnement « agité » ne se situent pas au même endroit, dans toute la partie finale (après le 3^{ème} changement de consigne) pour la CMI linéaire et après le deuxième changement de consigne pour la CMI floue.

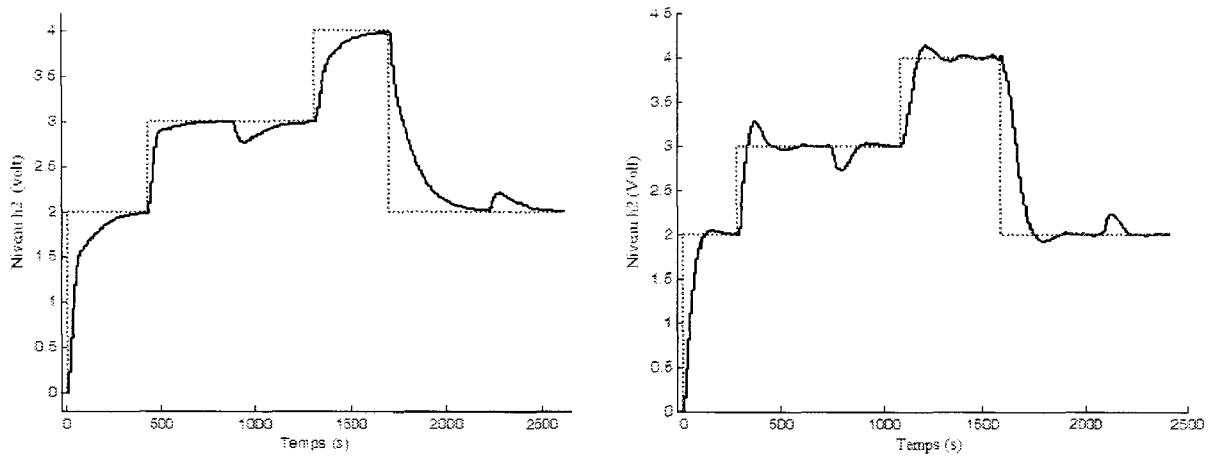


Figure 63 : CMI1, consigne d'hauteur et sortie $h_2(t)$ modèle linéaire (gauche), modèle flou (droite)

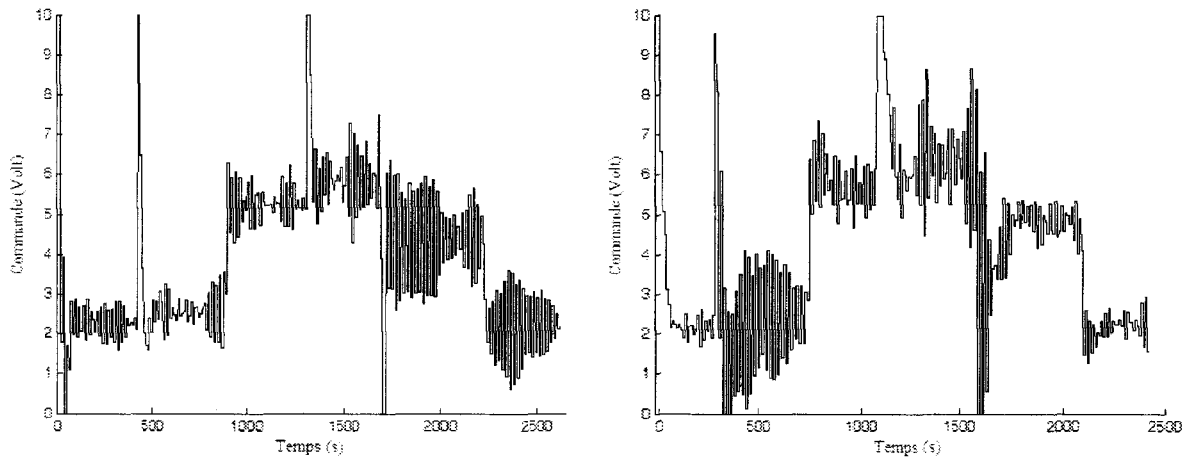


Figure 64 : CMI1, signal de commande $q_1(t)$, modèle linéaire (gauche), modèle flou (droite)

Enfin les enveloppes de la variation de la commande Δu sont présentées sur la figure 65.

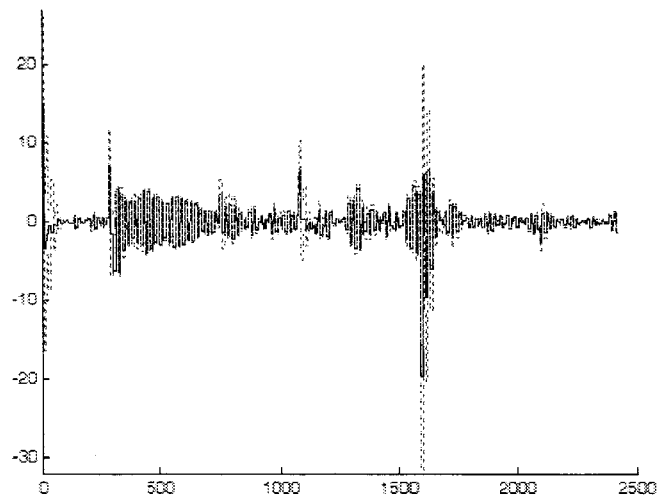


Figure 65 : CMI floue, Enveloppes sur la variation de commande Δu

5. Conclusion

On a proposé différentes manières d'introduire le φ -calcul pour la synthèse de lois de commande. Les premiers essais réalisés consistent à remplacer les coefficients réels par des nombres flous à la manière de ce qui est réalisé pour le calcul par intervalle. Sans précaution cela aboutit à une surestimation très importante des résultats due à la répétition des opérations arithmétiques utilisées. Il est même assez aisé d'obtenir des nombres flous dont le support devient infini et la réalisation médiane converge vers une valeur finie.

Pour remédier à ce type de problèmes qui viennent d'une surestimation qui ne semble pas justifiée dans ce contexte (comme nous l'avons déjà mentionné on sait que globalement $\tilde{M} \times \tilde{M}^{-1} = Id$), une procédure permettant un calcul « exact » d'un modèle inverse a été proposé sur la base du φ -calcul.

Cette approche a été mise en œuvre sur des structures de commande à modèle interne basées sur une analogie de ce qui est fait usuellement. Des essais temps réel sur un système couplé à deux cuves ont également été proposés. Il ressort de ces études qu'il est possible d'utiliser avec succès ce genre de méthodologie dans le contexte de la commande.

Chapitre 5 : Vers d'autres applications

1.	Introduction	- 137 -
2.	Fonctions réelles de variables floues	- 137 -
2.1	Fonctions usuelles	- 138 -
2.1.1	Puissances d'un nombre flou	- 138 -
2.2	Étude d'une fonction polynômiale	- 140 -
2.3	Les fonctions trigonométriques	- 141 -
2.3.1	Fonctions de base	- 141 -
2.3.2	Relations trigonométriques	- 144 -
3.	Nombres complexes flous	- 145 -
3.1	Extension du calcul par intervalles aux nombres complexes	- 145 -
3.2	Extension du calcul flou aux nombres complexes	- 147 -
3.3	Nombres complexes flous et φ -calcul	- 148 -
3.4	Coordonnées polaires	- 149 -
3.5	Résolutions possibles d'une équation du second ordre	- 152 -
4.	Conclusion	- 154 -

1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation d'un certain nombre de travaux, de suggestions et d'applications du φ -calcul. En effet, durant la thèse, un certain nombre de points relatifs au φ -calcul n'ont pas abouti ou n'ont pu être creusés, soit par manque de temps, soit par l'importance de la réflexion que nécessitent ces points.

La première section concerne la généralisation du calcul de fonctions réelles de variables floues qu'elles soient monotones (discutées au deuxième chapitre) ou non avec la présentation de quelques fonctions usuelles (le carré, la racine carrée, les fonctions polynômiales et trigonométriques).

Dans la deuxième section, on donne une proposition d'étendre les calculs aux nombres complexes flous. Là aussi, pour illustrer nos propos, on propose un exemple de résolution d'une équation de deuxième degré.

2. Fonctions réelles de variables floues

Un aperçu du calcul des fonctions monotones réelles de variables floues ayant été présenté au paragraphe 3.7 du chapitre 2, cette partie traite de la généralisation aux calculs de fonctions réelles continues (monotones ou non) de variables floues. On rappelle que l'arithmétique du φ -calcul impose des quantités floues monotones croissantes. L'application d'une fonction f à un nombre flou peut donc donner un résultat incohérent. On propose de lever cette incohérence de la manière suivante.

Soit \tilde{a} une quantité floue définie par sa fonction réciproque $\varphi_{\tilde{a}}^{-1} : u \in [0,1] \rightarrow x \in \mathbb{R}$. L'image de la quantité floue \tilde{a} par une fonction f a été définie par (cf. chapitre 2) :

$$\forall u \in [0,1], \quad \varphi_{f(\tilde{a})}^{-1}(u) = f(\varphi_{\tilde{a}}^{-1}(u)) = (f \circ \varphi_{\tilde{a}}^{-1})(u) \quad (5.1)$$

Le problème rencontré est que le résultat obtenu $f(\tilde{a})$ ne soit pas monotone croissant et donc en contradiction avec les hypothèses du φ -calcul. Pour remédier à cette inconsistance, on propose de procéder de la manière suivante.

On rappelle que l'espace de départ de φ_a^{-1} est discrétisé avec un pas constant N , i.e. $u \in [0,1]$ devient le vecteur $[u_0 \ u_1 \ \dots \ u_N]^T = \left[0 \ \frac{1}{N} \ \dots \ \frac{N-1}{N} \ 1\right]^T$. On calcule alors les images de ce vecteur par $\varphi_a^{-1} : [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_N]^T = [\varphi_a^{-1}(u_0) \ \varphi_a^{-1}(u_1) \ \dots \ \varphi_a^{-1}(u_N)]^T$ puis (5.1) se déduit par : $[f(x_0) \ f(x_1) \ \dots \ f(x_N)]^T$. On dispose donc d'un ensemble de couples :

$$i \in \{0, \dots, N\}, (u_i, f(x_i)) = (u_i, f(\varphi_a^{-1}(u_i))) \in [0,1] \times \mathbb{R} \quad (5.2)$$

Si le résultat de (5.1) n'est pas monotone croissant, les couples de (5.2) ne peuvent pas être ordonnés de façon croissante. Dans ce cas c'est l'opérateur de fusion *WFF* qui est utilisé sur les couples de (5.2), garantissant par là même la monotonie du résultat final. L'algorithme *WFF* est simplifié puisque l'on considère des poids identiques pour chaque couple, i.e. $\forall i \in \{0, \dots, N\}, p_i = 1/(N+1)$. Le résultat final étant noté $f(\tilde{a})$ on a alors de façon constructive :

$$\begin{aligned} \{\tilde{Q}_0, p_{\tilde{Q}_0}\} &= \left\{ f(x_0), \frac{1}{N+1} \right\} \\ \forall i \in \{0, N-1\}, \{\tilde{Q}_{i+1}, p_{\tilde{Q}_{i+1}}\} &= WFF \left(\left\{ \tilde{Q}_i, \frac{i+1}{N+1} \right\}, \left\{ f(x_{i+1}), \frac{1}{N+1} \right\} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Et enfin : $f(\tilde{a}) = \tilde{Q}_N$.

Cette procédure peut alors s'appliquer sur toute fonction continue. Un ensemble d'exemples est proposé dans la partie suivante pour illustrer cette procédure automatique.

2.1 Fonctions usuelles

2.1.1 Puissances d'un nombre flou

Avec $f(x) = x^2$, il s'agit ici de l'extension du calcul du carré d'un nombre flou mixte ; les autres cas sont résolus car $f(x)$ est monotone pour $x \in \mathbb{R}^-$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Pour le carré, il est essentiel d'ajouter une contrainte d'égalité telle que $\tilde{a} \times \tilde{a} = \tilde{a}^2$ (cf chapitre 2).

La figure 66 illustre l'algorithme permettant la détermination du carré du nombre flou mixte : $\tilde{a} = \text{triplet}(-2, 0, 4)$. En partant de \tilde{a} , les couples initiaux de $f(\tilde{a})$ sont donnés, i.e. $(u_i, f(x_i)) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, N\}$, puis à l'aide de l'opérateur *WFF* le résultat $f(\tilde{a})$ final.

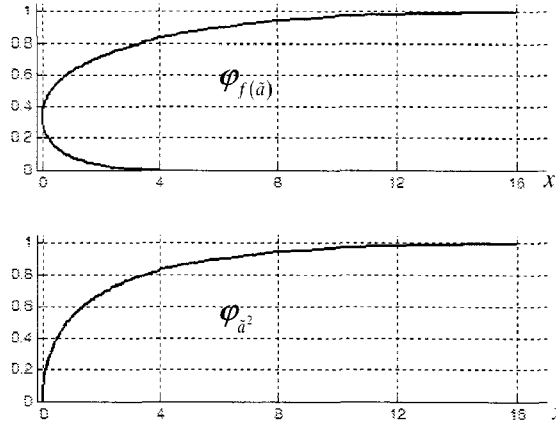


Figure 66 : Carré d'un nombre flou mixte

De la même manière, on peut définir :

- La valeur absolue : $f : \Phi \rightarrow \Phi$; $f(\tilde{a}) = |\tilde{a}|$, figure 67 avec $\tilde{a} = \text{triplet}(-2, 0, 4)$
- La racine carrée : $f : \Phi^+ \rightarrow \Phi$; $f(\tilde{a}) = \sqrt{\tilde{a}}$, figure 68 avec $\tilde{a} = \text{triplet}(2, 5, 7)$
- La puissance d'un nombre flou : avec $n \in \mathbb{N}$, $f : \Phi \rightarrow \Phi$; $f(\tilde{a}) = \tilde{a}^n$, figure 69, avec $\tilde{a} = \text{triplet}(-2, 1, 2)$ et $n = 0$, $n = 2$ et $n = 3$.

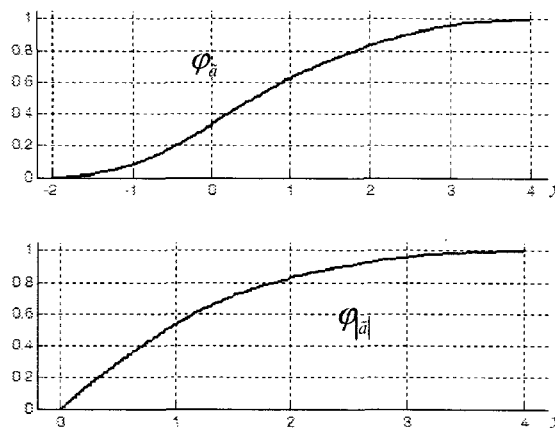


Figure 67 : exemple de valeur absolue

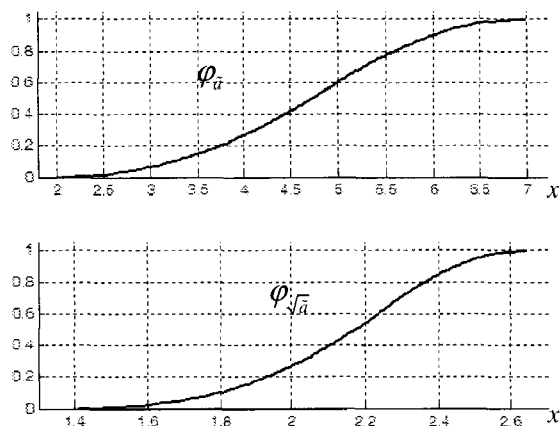


Figure 68 : Racine carrée d'un nombre flou positif

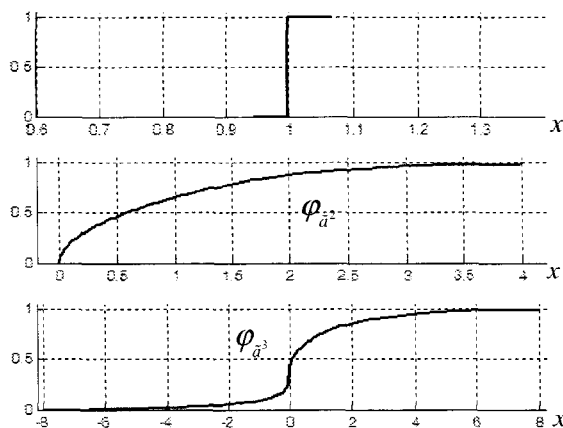


Figure 69 : Puissances de \tilde{a} , $n = 0$, $n = 2$ et $n = 3$

2.2 Étude d'une fonction polynômiale

Les différentes possibilités offertes par les exemples proposés dans la partie précédente permettent de traiter de nombreuses fonctions. A titre d'illustration on considère la fonction polynômiale : $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ issue de [Revol, 2004]. Il est évidemment possible de déterminer le résultat pour un nombre flou \tilde{a} de plusieurs manières. Par exemple : $f_1(\tilde{a}) = \tilde{a}^3 - 2\tilde{a}^2 + \tilde{a} - 3$, ou encore $f_2(\tilde{a}) = ((\tilde{a} - 2) \times \tilde{a} + 1) \times \tilde{a} - 3$ (décomposition de Hörner). Le résultat pour l'intervalle $[-5, 2]$ est $[-183, 7]$, [Revol, 2004]. Si on utilise un nombre triangulaire $\tilde{a} = triplet(-5, -1, 2)$, introduisant une connaissance supplémentaire, i.e. la solution la « plus probable » doit être recherchée autour de -1 , le résultat est donné Figure 70. On retrouve bien la cohérence avec les intervalles : $Supp(f_1(\tilde{a})) = [-183, 7]$. Par contre,

la distribution de $f_1(\tilde{a})$ montre bien que les nombres grands en valeur absolue (en-dessous de -50) contribuent faiblement à sa construction. On peut donc privilégier une solution qui exclut les valeurs trop importantes.

En utilisant cette fois-ci $f_2(\tilde{a})$, le résultat introduit une incertitude supplémentaire pour les valeurs positives. Encore une fois, on voit l'importance de l'ordre des opérations arithmétiques effectuées. Il faut « privilégier » l'addition sur la multiplication, pour ne pas introduire une trop grande surestimation.

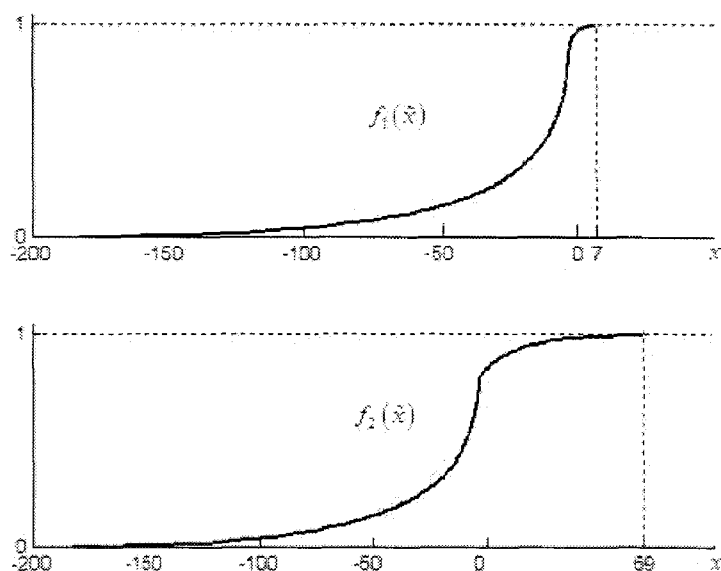


Figure 70 : Evaluation de $f(\tilde{x})$

L'arithmétique proposée est appliquée aux fonctions trigonométriques dans la partie suivante.

2.3 Les fonctions trigonométriques

2.3.1 Fonctions de base

L'algorithme présenté en début de chapitre permet une représentation aisée des résultats pour les fonctions trigonométriques suivantes :

- Les fonctions : $f, g: \Phi \rightarrow \Phi$; $f(\tilde{\theta}) = \sin(\tilde{\theta})$, $g(\tilde{\theta}) = \cos(\tilde{\theta})$. Les figure 71 et figure 72, illustrent quelques exemples de calcul de la fonction $f(\tilde{\theta}) = \sin(\tilde{\theta})$. Les angles flous \tilde{a} sont donnés dans la partie haute des figures, les résultats dans la partie

basse sur plusieurs $Supp(\tilde{\theta})$. On notera évidemment que $Supp(\sin(\tilde{\theta})) \subseteq [-1,1]$. De même, quelques exemples pour $g(\tilde{\theta}) = \cos(\tilde{\theta})$ sont donnés figure 73.

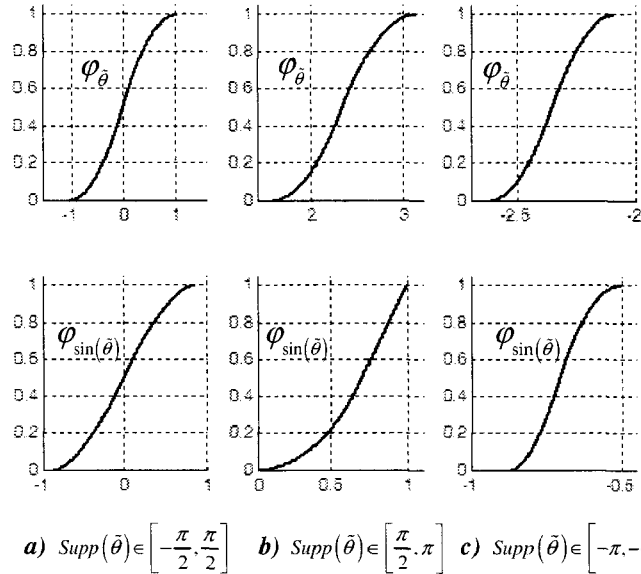


Figure 71 : Quelques exemples de sinus avec différents supports

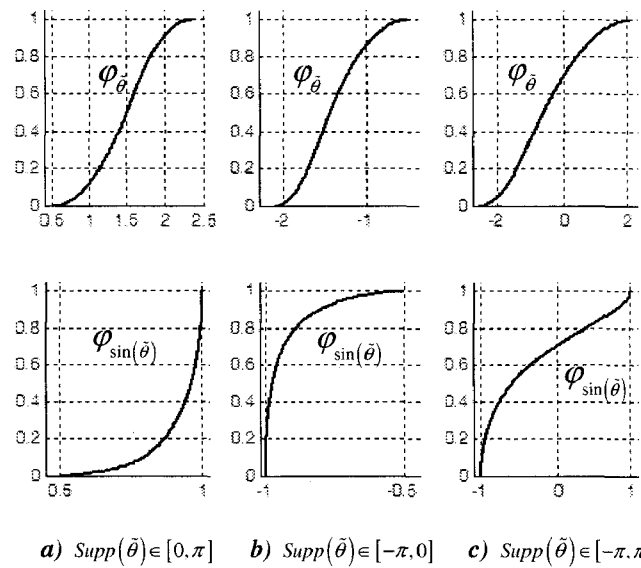


Figure 72 : Quelques exemples de sinus avec différents supports

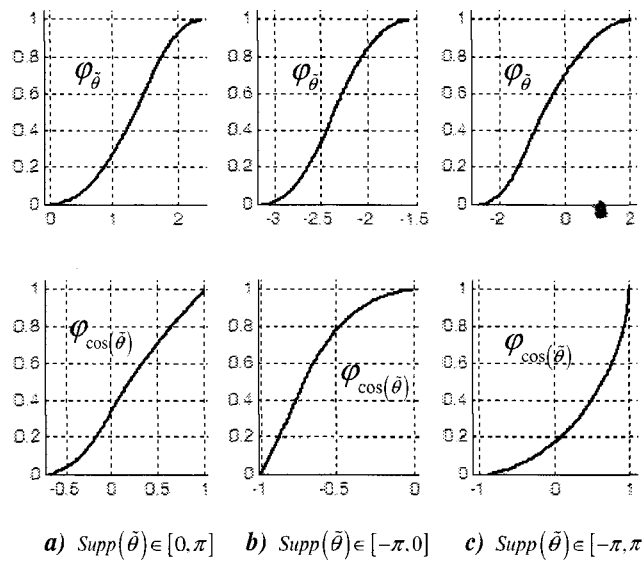


Figure 73 : Exemples de cosinus avec différents supports

- Les fonctions : $f, g: \Phi \rightarrow \Phi$; $f(\tilde{\theta}) = \tan(\tilde{\theta})$, $g(\tilde{\theta}) = \cotan(\tilde{\theta})$. On utilisera les définitions des deux fonctions sur leurs domaines de définition. La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, quelques exemples sont donnés figure 74. La figure 75 donne deux exemples de la fonction cotangente.

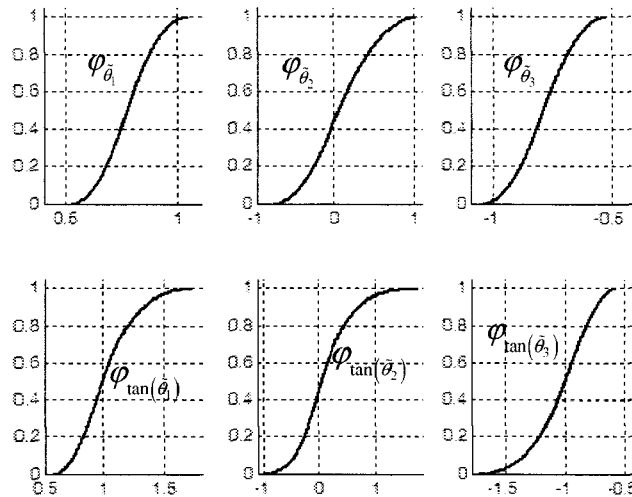


Figure 74 : exemples de la fonction tangente

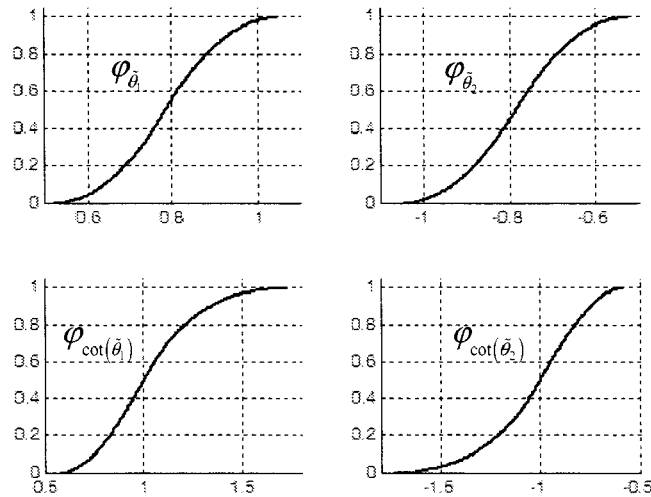


Figure 75 : exemples de la fonction cotangente

La partie suivante est consacrée à l'évaluation de certaines relations trigonométriques en utilisant les fonctions définies précédemment.

2.3.2 Relations trigonométriques

Quand on utilise des fonctions trigonométriques « étendues » aux quantités floues, il est naturel de se poser des questions sur les propriétés associées à ces fonctions. Les relations trigonométriques usuelles, valables dans \mathbb{R} , sont-elles conservées dans Φ ?

Propriété 1 : soit $\tilde{\theta} \in \Phi$, les relations suivantes sont vérifiées :

- $\cos(\pi - \tilde{\theta}) = -\cos(\tilde{\theta})$, $\sin(\pi - \tilde{\theta}) = \sin(\tilde{\theta})$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \tilde{\theta}\right) = \sin(\tilde{\theta})$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \tilde{\theta}\right) = \cos(\tilde{\theta})$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \tilde{\theta}\right) = -\sin(\tilde{\theta})$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \tilde{\theta}\right) = \cos(\tilde{\theta})$

Preuve : seule la deuxième relation est montrée, les autres preuves sont identiques. On dispose des fonctions réciproques : $\varphi_{\sin(\tilde{\theta})}^{-1}, \varphi_{\sin(\pi-\tilde{\theta})}^{-1} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ $\varphi_{\sin(\tilde{\theta})}^{-1}(u) = \sin(\varphi_{\tilde{\theta}}^{-1}(u))$ et $\varphi_{\sin(\pi-\tilde{\theta})}^{-1}(u) = \sin(\pi - \varphi_{\tilde{\theta}}^{-1}(u))$. On a évidemment $\forall u \in [0,1] \sin(\varphi_{\tilde{\theta}}^{-1}(u)) = \sin(\pi - \varphi_{\tilde{\theta}}^{-1}(u))$.

Le résultat de la discrétisation nécessaire à l'emploi de l'opérateur de fusion *WFF* est donc

identique dans les deux cas puisque ce sont les mêmes couples de points qui seront fusionnés. La seule condition étant que la discrétisation de $[0,1]$ soit la même.

Naturellement, toutes les propriétés ne sont pas préservées, en particulier celles faisant intervenir deux quantités floues. Par exemple, la relation $\cos^2(\tilde{\theta}) + \sin^2(\tilde{\theta}) = 1$ n'est plus vérifiée, la somme peut d'ailleurs « dépasser 1 ». On a en fait $\cos^2(\tilde{\theta}) + \sin^2(\tilde{\theta}) = \tilde{1}_{\tilde{\theta}}$, avec $\tilde{1}_{\tilde{\theta}}$ un nombre flou de classe 1 dépendant de $\tilde{\theta}$. Une manière d'y remédier est l'utilisation de l'information connue a priori, i.e. de la garantir par contrainte.

Les autres relations comme les formules d'addition ne donnent pas les mêmes résultats à cause notamment des surestimations générées par les multiplications ainsi que la soustraction. En se basant sur les différentes fonctions trigonométriques, la partie suivante présente une extension aux nombres complexes flous.

3. Nombres complexes flous

Ayant à notre disposition une arithmétique sur Φ avec des nombres flous à support dans \mathbb{R} et une extension des fonctions trigonométriques et de certaines de leurs propriétés, une extension naturelle des travaux est la prise en compte de nombres complexes flous. Ces derniers associant deux représentations possibles, cartésiennes et polaires, leur cohérence pour cette extension est étudiée. Pour situer le contexte, les résultats existants dans le cadre des intervalles et des nombres flous sont d'abord rappelés.

3.1 Extension du calcul par intervalles aux nombres complexes

Nous reprenons ici les travaux de [Boche, 1966] qui s'appuient sur les suggestions de [Knopp, 1952]. Les auteurs précisent que si le choix est de travailler en coordonnées cartésiennes, dans ce cas, aucune difficulté supplémentaire n'est rencontrée par rapport au calcul par intervalles dans le plan des réels. Un intervalle complexe est alors défini comme une paire ordonnée de deux intervalles $([A],[B])$ [Boche, 1966] :

$$C = [a,b] + [c,d] \cdot i = \{x + yi / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (5.4)$$

avec l'intervalle complexe $([0,0],[1,1])$ défini comme étant « i ».

Géométriquement, l'intervalle complexe est défini, en coordonnées cartésiennes, comme étant l'aire d'un rectangle dans le plan complexe, figure 76.

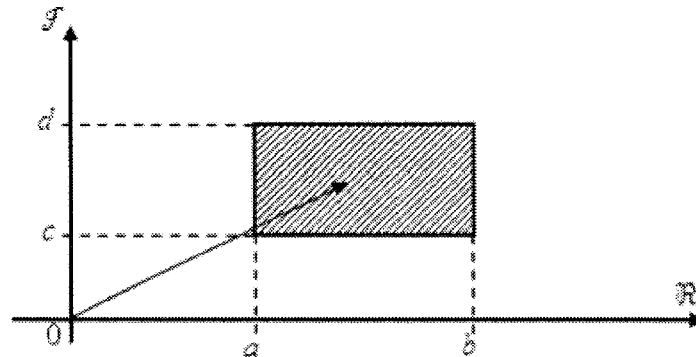


Figure 76 : représentation d'un intervalle complexe en coordonnées cartésiennes

Quelle est alors la cohérence avec l'autre représentation en coordonnées polaires ? Le problème qui apparaît réside dans la prise en charge des surestimations survenues lors du calcul du module et de l'argument. La partie hachurée de la figure 77 illustre cette surestimation et cette difficulté.

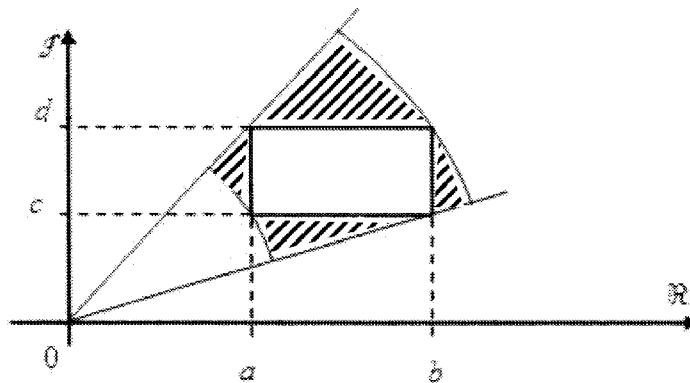


Figure 77 : surestimations engendrées par le passage aux coordonnées polaires

Toutes les définitions des nombres complexes sont étendues aux intervalles complexes et sont prises en compte dans la boîte à outil INTLAB. Pour plus de précisions, le lecteur pourra se référer à différents travaux issus de la littérature [Boche, 1966 ; Jaulin & al., 2001].

3.2 Extension du calcul flou aux nombres complexes

Les premiers travaux sur l'extension au plan complexe du calcul flou se trouvent dans [Buckley, 1989]. La définition suivante y est donnée :

Définition 3.1 [Buckley, 1989] : \tilde{Z} est un nombre complexe flou si et seulement si :

1. $\mu(z|\tilde{Z})$ est continue ;
2. Z_α , $0 \leq \alpha \leq 1$ est ouvert, borné, connexe et simplement connexe ;
3. Z_1 est non nul, compact, connexe par arc et simplement connexe ;

avec $\mu(z|\tilde{Z})$ la fonction d'appartenance de \tilde{Z} qui est une surface de C dans $[0,1]$, et les α -coupes de \tilde{Z} définies par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= \{z | \mu(z|\tilde{Z}) > \alpha\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ Z_1 &= \{z | \mu(z|\tilde{Z}) = 1\} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Les opérations arithmétiques de bases (addition, soustraction, multiplication et division) sont aussi définies en utilisant le principe d'extension flou de Zadeh. L'auteur a également montré qu'il était possible d'effectuer ces opérations en se ramenant au calcul par intervalles en utilisant les α -coupes.

D'autres travaux [Moses & al., 1999 ; Ramot & al., 2001, 2002] proposent d'étendre l'ensemble image des fonctions d'appartenance de $[0,1]$ au cercle unité dans le plan complexe. A chaque élément x ils associent deux quantités floues $r_s(x)$ et $\omega_s(x)$ et $\mu_s(x)$ et la fonction du nombre complexe flou qui associe une valeur d'appartenance $r_s(x) \cdot e^{i\omega_s(x)}$.

La partie suivante propose des pistes possibles pour étendre l'utilisation du ϕ -calcul aux nombres complexes. Il s'agit des premières définitions et des résultats qui en découlent. Une étude plus approfondie est nécessaire pour en déduire une algèbre complète des nombres complexes flous. Néanmoins, ces premiers résultats semblent encourageants pour poursuivre dans cette voie.

3.3 Nombres complexes flous et φ -calcul

Définition 3.2 Avec $i = 0 + i1$, un nombre complexe flou \tilde{z} , représenté par sa fonction de répartition $\varphi_{\tilde{z}}$, est défini comme étant une paire de deux nombres flous (\tilde{a}, \tilde{b}) (respectivement représentés par $\varphi_{\tilde{a}}$ et $\varphi_{\tilde{b}}$) telle que :

$$\tilde{z} = \tilde{a} + i \cdot \tilde{b}, \quad \forall u \in [0,1], \varphi_{\tilde{z}}^{-1}(u) = \varphi_{\tilde{a}}^{-1}(u) + i \cdot \varphi_{\tilde{b}}^{-1}(u) \quad (5.6)$$

Interprétation géométrique :

La définition 3.2 correspond à la transformation géométrique suivante :

$$\forall u \in [0,1], M_{\tilde{a}} \begin{pmatrix} x_{\tilde{a}} \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \text{ et } M_{\tilde{b}} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{\tilde{b}} \\ u \end{pmatrix} \rightarrow M_{\tilde{z}} \begin{pmatrix} x_{\tilde{a}} \\ y_{\tilde{b}} \\ u \end{pmatrix}$$

La figure 78 illustre cette transformation.

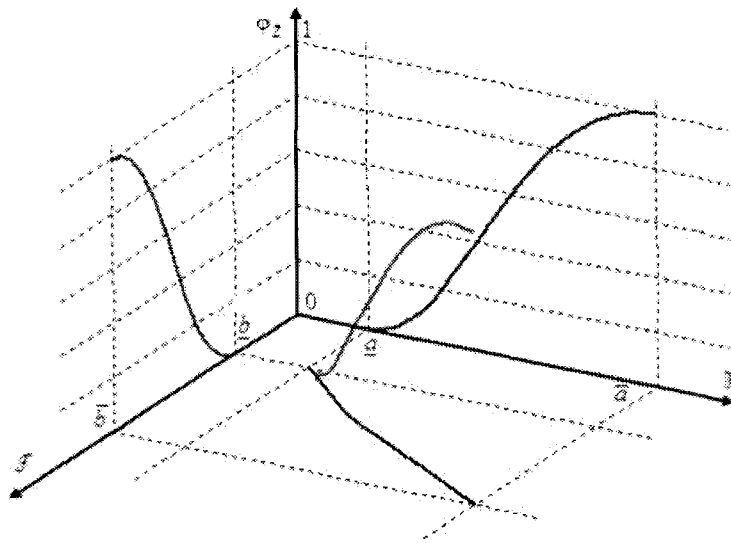


Figure 78 : nombre complexe flou

D'autres définitions telles que le conjugué, le symétrique, la somme et le produit sont étendues aux nombres complexes flous. Soient $\tilde{z} = \tilde{a} + i \cdot \tilde{b}$, $\tilde{z}_1 = \tilde{a}_1 + i \cdot \tilde{b}_1$ et $\tilde{z}_2 = \tilde{a}_2 + i \cdot \tilde{b}_2$ trois nombres flous, on peut définir :

- Conjugué $\tilde{\tilde{z}} = \tilde{\tilde{a}} + i \cdot \tilde{\tilde{b}}$: symétrique de \tilde{z} par rapport à l'axe réel, sa partie imaginaire est le pseudo-opposé de celle de \tilde{z} , i.e. $\tilde{\tilde{b}} = -\tilde{b}$;
- Opposé $-\tilde{z} = (-\tilde{a}) + i \cdot (-\tilde{b})$: pseudo-opposé de \tilde{z} par rapport à l'origine ;
- Somme de deux nombres complexes flous $\tilde{z} = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2$: elle est définie par :

$$\tilde{z} = \tilde{a} + i \cdot \tilde{b} = (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) + i \cdot (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2) \quad (5.7)$$

- Produit de deux nombres complexes flous $\tilde{z} = \tilde{z}_1 \times \tilde{z}_2$: il est défini par :

$$\tilde{z} = \tilde{a} + i \cdot \tilde{b} = (\tilde{a}_1 \times \tilde{a}_2 - \tilde{b}_1 \times \tilde{b}_2) + i \cdot (\tilde{a}_1 \times \tilde{b}_2 + \tilde{a}_2 \times \tilde{b}_1) \quad (5.8)$$

Comme pour l'extension aux fonctions trigonométriques, il est naturel de regarder quelles sont les propriétés conservées (ou non) pour les nombres complexes flous. Par exemple, avec $z = a + i \cdot b$, on a : $z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}$. En utilisant les propriétés définies précédemment on a :

$$\tilde{z} + \tilde{\tilde{z}} = (\tilde{a} + i \cdot \tilde{b}) + (\tilde{a} + i \cdot (-\tilde{b})) = 2\tilde{a} + i \cdot (\tilde{b} + (-\tilde{b})) = 2\tilde{a} + i \cdot \tilde{0}_b \quad (5.9)$$

On retrouve donc à nouveau un $\tilde{0}_b$ zéro flou dépendant de \tilde{b} . Néanmoins, il est toujours possible d'imposer par contrainte $\tilde{z} + \tilde{\tilde{z}} = 2\tilde{a}$ [Klir, 1997].

Une autre propriété importante des nombres complexes : $z \times \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$ n'est pas vérifiée dans le cas des complexes flous :

$$\tilde{z} \times \tilde{\tilde{z}} = (\tilde{a} + i \cdot \tilde{b}) \times (\tilde{a} + i \cdot (-\tilde{b})) = (\tilde{a} \times \tilde{a} + \tilde{b} \times \tilde{b}) + i \cdot (\tilde{a} \times \tilde{b} + \tilde{a} \times (-\tilde{b})) \quad (5.10)$$

En ajoutant des contraintes, par exemple $\tilde{a} \times \tilde{a} = \tilde{a}^2$ on peut imposer : $\tilde{z} \times \tilde{\tilde{z}} = \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2$.

La suite traitera du module et de l'argument d'un nombre complexe flou et montrera la difficulté du passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

3.4 Coordonnées polaires

Définition 3.3 Un nombre complexe flou $\tilde{z} = \tilde{a} + i \cdot \tilde{b}$, représenté par sa fonction de répartition $\varphi_{\tilde{z}}$ a pour module :

$$|\tilde{z}| = \sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2} \quad \forall u \in [0,1], \varphi_{|\tilde{z}|}^{-1}(u) = \sqrt{(\varphi_{\tilde{a}}^{-1}(u))^2 + (\varphi_{\tilde{b}}^{-1}(u))^2} \quad (5.11)$$

et pour argument :

$$\arg(\tilde{z}) \triangleq \arg\left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right) \quad \forall u \in [0,1], \varphi_{\arg(\tilde{z})}^{-1}(u) = \arg_{\mathbb{C}}(\varphi_{\tilde{a}}^{-1}(u) + i \cdot \varphi_{\tilde{b}}^{-1}(u)) \quad (5.12)$$

La fonction $\arg_{\mathbb{C}}(\cdot)$ est la fonction argument utilisée dans un calcul ordinaire.

Interprétation géométrique :

Le module du nombre complexe flou $|\tilde{z}|$ est illustré figure 79, et correspond à la transformation géométrique suivante avec $\tilde{z} = \text{triplet}(1,2,3) + i \cdot \text{triplet}(1,3,5)$:

$$\forall u \in [0,1], M_{\tilde{a}}\left(\begin{matrix} x_{\tilde{a}} \\ u \end{matrix}\right) \text{ et } M_{\tilde{b}}\left(\begin{matrix} x_{\tilde{b}} \\ u \end{matrix}\right) \rightarrow M_{|\tilde{z}|}\left(\begin{matrix} \sqrt{x_{\tilde{a}}^2 + x_{\tilde{b}}^2} \\ u \end{matrix}\right) \quad (5.13)$$

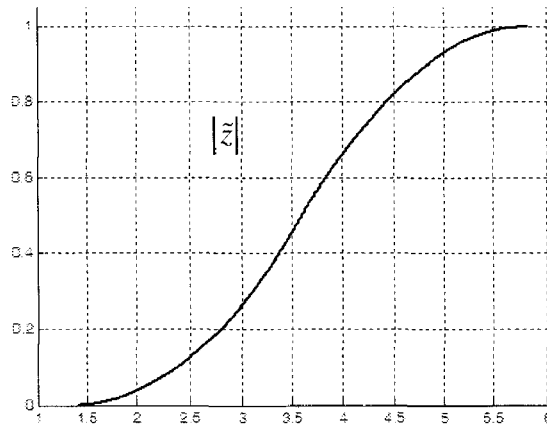


Figure 79 : module d'un nombre complexe flou

L'argument du nombre complexe flou $\arg(\tilde{z})$ est illustré figure 80, avec la transformation géométrique suivante :

$$\forall u \in [0,1], M_{\tilde{a}}\left(\begin{matrix} x_{\tilde{a}} \\ u \end{matrix}\right) \text{ et } M_{\tilde{b}}\left(\begin{matrix} x_{\tilde{b}} \\ u \end{matrix}\right) \rightarrow M_{\arg(\tilde{z})}\left(\begin{matrix} \arg(x_{\tilde{a}} + i \cdot x_{\tilde{b}}) \\ u \end{matrix}\right) \quad (5.14)$$

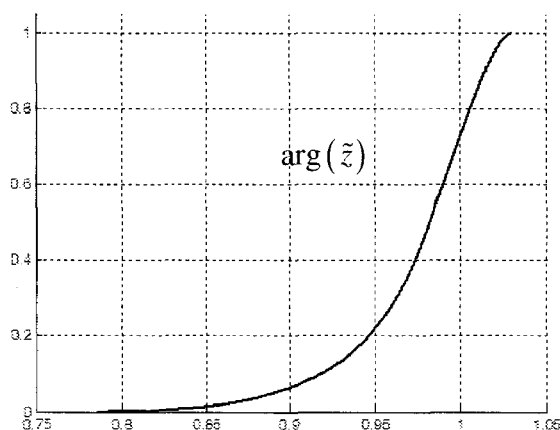


Figure 80 : argument d'un nombre complexe flou

Le passage des coordonnées cartésiennes (\tilde{a}, \tilde{b}) aux coordonnées polaires $(|\tilde{z}|, \arg(\tilde{z}))$ d'un nombre complexe flou \tilde{z} engendre une surestimation illustrée figure 81. En utilisant les propriétés classiques des nombres complexes, on compare les deux représentations des nombres complexes. Avec $\tilde{z} = \tilde{a} + i \cdot \tilde{b}$ et les fonctions réciproques $\varphi_a^{-1}(u)$ et $\varphi_b^{-1}(u)$ qui sont comparées respectivement à $\varphi_{a_{polaire}}^{-1}(u) \triangleq \varphi_{|\tilde{z}|}^{-1}(u) \cdot \cos(\varphi_{\arg(\tilde{z})}^{-1}(u))$ et à $\varphi_{b_{polaire}}^{-1}(u) \triangleq \varphi_{|\tilde{z}|}^{-1}(u) \cdot \sin(\varphi_{\arg(\tilde{z})}^{-1}(u))$.

Par exemple avec $\tilde{z} = \text{triplet}(0,1,3) + i \cdot \text{triplet}(2,3,5)$:

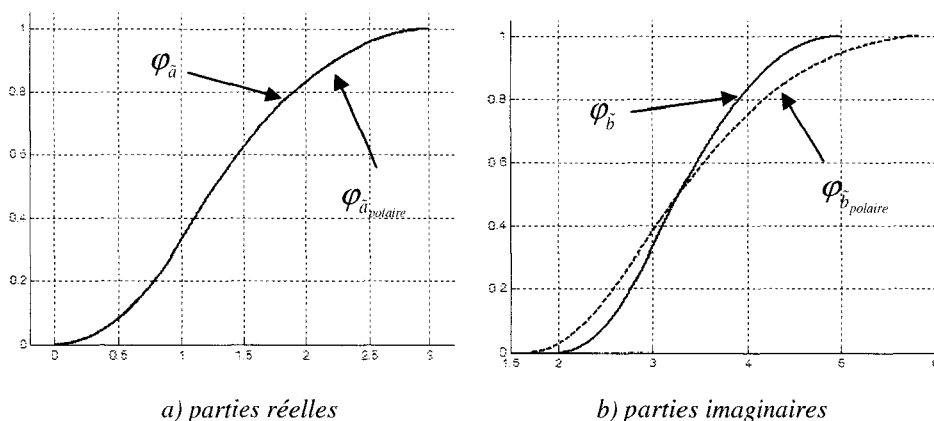


Figure 81 : fonctions de répartition d'un nombre flou complexe en coordonnées polaires et cartésiennes

On notera une légère surestimation lors du passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires (les parties réelles sont identiques) due aux calculs, cependant, la réalisation médiane est identique dans les deux cas. À l'aide de la nouvelle bibliothèque

comprenant les fonctions dédiées aux nombres complexes flous, il est possible de déterminer à titre d'exemple, les différentes solutions d'une équation du second degré en fonction du signe de son discriminant, comme le montre la partie suivante.

3.5 Résolutions possibles d'une équation du second ordre

Soit une équation linéaire du second ordre à coefficients flous (\tilde{a} non mixte et $\tilde{0}$ est un zéro flou dont la réalisation médiane est 0) :

$$\tilde{a} \cdot x^2 + \tilde{b} \cdot x + \tilde{c} = \tilde{0} \tag{5.15}$$

Pour proposer une solution, rappelons dans le cas classique les étapes amenant au choix du discriminant. On a de façon immédiate : $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$. Il est donc nécessaire de s'intéresser au signe $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$, ce qui dans le cas réel est équivalent au signe du discriminant : $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Dans notre cas, cette équivalence n'est évidemment plus respectée. On choisit donc de s'intéresser au support de la quantité floue suivante :

$$\tilde{\Xi} = \frac{\tilde{b}^2}{4\tilde{a}^2} - \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}} \tag{5.16}$$

En fonction du signe de $Supp(\tilde{\Xi})$ on distingue deux cas, $Supp(\tilde{\Xi}) \subseteq \mathbb{R}^+$, $\tilde{\Xi}$ est un nombre flou positif, $\exists u \in [0,1], \varphi_{\tilde{\Xi}}^{-1}(u) < 0$, une partie de $\tilde{\Xi}$ est à support négatif, $\tilde{\Xi}$ est un nombre flou mixte ou négatif.

Dans tous les cas on choisit pour solution les deux nombres flous suivants :

$$\tilde{x}_1 = -\frac{\tilde{b}}{2\tilde{a}} + \sqrt{\frac{\tilde{b}^2}{4\tilde{a}^2} - \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}}, \tilde{x}_2 = -\frac{\tilde{b}}{2\tilde{a}} - \sqrt{\frac{\tilde{b}^2}{4\tilde{a}^2} - \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}} \tag{5.17}$$

Notons qu'en fonction du signe de $Supp(\tilde{\Xi})$, \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 peuvent être des nombres complexes flous ou non. Pour illustrer cette manière de résoudre une équation du second degré, deux exemples sont traités.

Premier cas : $Supp(\tilde{\Xi}) \subseteq \mathbb{R}^+$

Soit l'équation définie par :

$$\text{triplet}(1,3,8) \cdot x^2 + \text{triplet}(2,5,6) \cdot x + \text{triplet}(-6,-2,0) = \tilde{0} \quad (5.18)$$

Pour illustrer le choix de (5.17) plutôt que du discriminant classique $\tilde{\Delta} = \tilde{b}^2 - 4 \cdot \tilde{a} \cdot \tilde{c}$, la figure 82 donne les fonctions de répartition des deux solutions \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 dans les deux cas (i.e. le deuxième cas correspond à remplacer (5.17) par $\tilde{x}_{\Delta_{1,2}} = \frac{-\tilde{b} \pm \sqrt{\tilde{\Delta}}}{2\tilde{a}}$). Pour évaluer la qualité des solutions, les solutions des deux méthodes sont remplacées dans l'équation (5.18). Le $\tilde{0}$ issu des solutions \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 (trait continu) est moins surestimé que celui issu de \tilde{x}_{Δ_1} et \tilde{x}_{Δ_2} (trait pointillé).

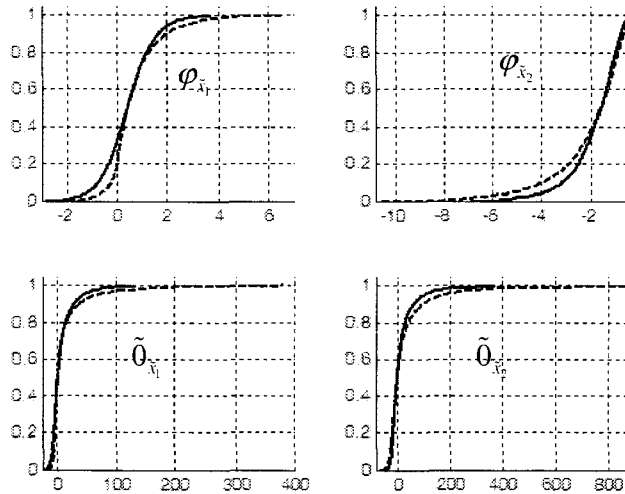


Figure 82 : Résolution d'une équation du second degré avec Ξ positif non mixte

Deuxième cas : $\tilde{\Xi}$ est un nombre flou mixte ou négatif, $\exists u \in [0,1], \varphi_{\tilde{\Xi}}^{-1}(u) < 0$

Soit l'équation définie par :

$$(2,3,5) \cdot x^2 + (2,5,6) \cdot x + (1,2,3) = \tilde{0} \quad (5.19)$$

La figure 83 donne les fonctions de répartition des solutions, savoir, les parties réelles et imaginaires des deux racines flous \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 de l'équation (5.19). A titre de comparaison, \tilde{x}_{Δ_1} et \tilde{x}_{Δ_2} sont également données, on peut remarquer que les différences entre les solutions sont très importantes. Le $\tilde{0}$ issu des solutions \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 est dessiné figure 83 et surestime également moins la solution que celui issu des solutions \tilde{x}_{Δ_1} et \tilde{x}_{Δ_2} .

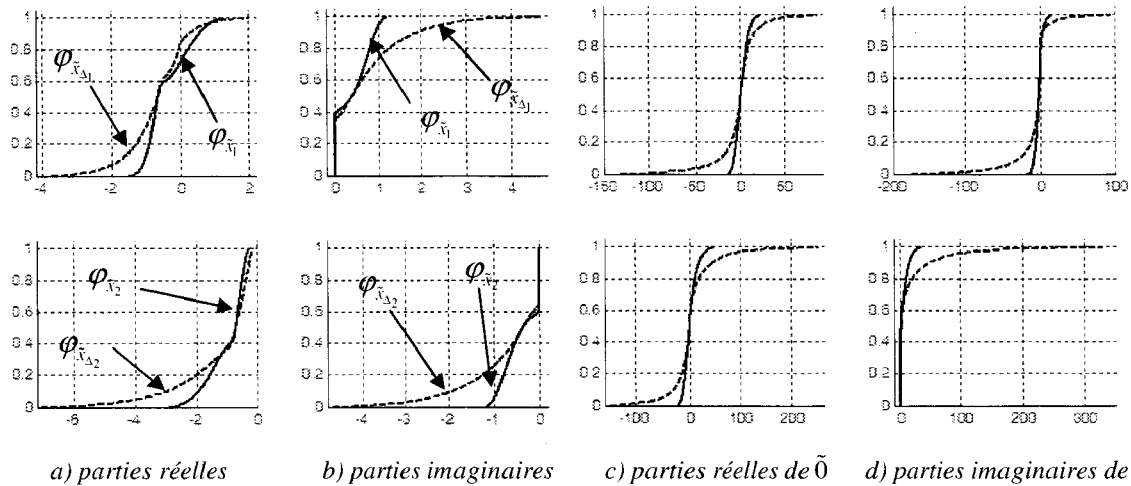


Figure 83 : cas Ξ mixte

On peut imaginer encore d'autres solutions, par exemple approchées, à ce type d'équations. Pour confirmer ce type d'approches, il est bien évidemment nécessaire de les confronter à des essais plus approfondis.

4. Conclusion

Les suggestions proposées dans ce dernier chapitre constituent des pistes de recherche futures. On s'est autorisé à proposer des manières de contourner des problèmes qui ont difficilement des solutions dans un cadre classique pour les nombres flous. Pour ce faire, on « force » le résultat à appartenir à Φ , notamment par l'utilisation de l'opérateur de fusion *WFF*. Il reste bien entendu, à confronter ces résultats soit aux résultats intuitifs (que l'on peut trouver dans le domaine subjectif) soit aux résultats obtenus par les autres méthodes (intervalle, nombre flou). Néanmoins, l'aspect systématique nous apparaît intéressant.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons proposé une manière de présenter et de modéliser des incertitudes et imprécisions basées sur la théorie des sous ensembles flous, appelée le φ -calcul. Ce dernier est présenté sous deux facettes : la première, purement synthétique, est une autre méthode de représentation d'un nombre ou d'une quantité floue. Celle-ci consiste à modéliser ce nombre ou quantité floue non pas par une fonction d'appartenance usuelle pouvant avoir plusieurs formes (L-R, triangulaire, trapézoïdale, gaussienne, ...) mais par une fonction de répartition monotone croissante de forme unique (fonctions uniformes de type S) inspirée des statistiques classiques. La deuxième facette de cette représentation, est de proposer une arithmétique où les difficultés d'implémentation classiquement rencontrées lors de l'application des autres méthodes proposées dans la littérature sont réduites.

Le premier chapitre a été consacré à un bref rappel des méthodes de modélisation et de calcul des incertitudes et imprécisions existantes dans la littérature. Il a fait aussi l'objet du rappel des métriques associées ainsi qu'un bref aperçu d'un autre aspect de l'imprécision et de l'imperfection des données qui est la fusion de données imprécises.

Finalement les questions qui se posent quand on passe de nombres définis usuellement dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} à des extensions de type intervalle ou dans Φ sont : quelles propriétés sont conservées ? et surtout, que doit-on faire dans le cas où une propriété n'est plus conservée ? Faut-il garder une cohérence à tout prix avec le cas des nombres définis dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ? Sachant de plus que l'arithmétique utilisée sur des nombres de type intervalle ou flous est toujours pessimiste, doit-on conserver ce pessimisme à tout prix, quelle que soit l'application considérée ?

Dans ce mémoire, on a tenté de répondre à quelques-unes de ces questions. L'extension des nombres dans Φ a d'abord été traitée de manière rigoureuse, au sens d'une extension devant être cohérente avec la théorie des intervalles et de celle des nombres. L'arithmétique proposée au chapitre 2 se base sur la construction de fonctions de répartition. Son intérêt est de ne travailler qu'avec des fonctions monotones croissantes, ce qui permet de simplifier de façon notable les opérations. Elle est, à l'instar de ces prédécesseurs, algèbre des intervalles, algèbre des nombres flous pessimiste dans les résultats obtenus. Un opérateur de fusion floue pondéré (*WFF*) a également été proposé permettant de fusionner deux quantités floues pour obtenir une quantité floue qui reprend la sémantique des deux premières moyennant un poids affecté selon que l'on favorise l'une ou l'autre.

Diverses applications sont présentées dans le chapitre 3. Il met également en évidence les avantages de la double utilisation de l'opérateur WFF . Dans un premier cas, celui-ci a été utilisé comme opérateur de fusion de données imprécises comme critère d'agrégation dans le cadre d'une classification ascendante hiérarchique. Puis, dans un second cas, comme opérateur de fuzzification pour obtenir une quantité floue à partir de données ou de mesures imprécises et incertaines. Ce deuxième aspect a permis une application de la WFF aux problèmes de filtrage de signaux bruités. Ensuite, une application à l'analyse de données issues d'un processus expérimental destructif et rare, en l'occurrence la modélisation du crâne humain, nous a montré que l'ajout de l'opinion des experts sur la validité des acquisitions de données sous forme linguistique ou de pondération floue s'avère nécessaire dans l'analyse pour l'obtention d'un modèle fiable. Dans un autre contexte, un exemple concernant l'analyse des notes obtenues par les étudiants au cours d'une année scolaire a été étudié, celui-ci nous a montré qu'il est plus intéressant de prendre en compte le profil des notes obtenues que la moyenne générale.

Si on revient aux questions posées au début de cette conclusion, on remarque que dans les deux derniers chapitres, on essaye de réduire le pessimisme issu des conditions en introduisant des contraintes supplémentaires et/ou en acceptant de dégrader une solution initiale qui n'est pas dans Φ (car pas monotone croissante). Pour l'application à l'automatique il nous semble effectivement complètement justifié que si l'on dispose d'un modèle, même à paramètres incertains M , l'on puisse écrire $M \times M^{-1} = Id$ et que cette propriété doit rester valable dans Φ . Des algorithmes ont été proposés dans ce sens pour permettre de résoudre (parfois de façon approchée car le résultat n'est pas toujours dans Φ) le calcul de M^{-1} de façon « exacte ». Dans le dernier chapitre, on s'autorise la définition de toute fonction \tilde{f} de nombres flous (en accord avec le domaine de définition de f) en imposant sur le résultat, si nécessaire, l'opérateur de fusion $WFF(\tilde{f}(\tilde{a}))$. Dans ce cas le nombre flou résultant appartient toujours à Φ . Néanmoins, il conviendra d'en tester la cohérence pour l'ensemble des fonctions et voir si les propriétés rencontrées sur les ensembles \mathbb{R} ou \mathbb{C} sont encore valables ou compatibles avec Φ .

Pour terminer, quelques perspectives à ce travail peuvent être mentionnées.

De façon immédiate, la bibliothèque du ϕ -calcul proposée dans ce travail est pratique et complète pour un certain nombre d'applications. Cependant, d'autres extensions et

développements mathématiques (calcul matriciel, régression floue, opérateurs logiques, méthodes de fuzzification/défuzzification ...) permettraient également d'ouvrir d'autres perspectives.

Par rapport à une approche classique de l'automatique, i.e. un modèle unique, on dispose ici de connaissances supplémentaires apportées par les nombres flous introduits dans les équations. Par ce côté on se rapproche plus des structures multi-modèles. Cette connaissance supplémentaire devrait pouvoir être utilisée dans le cadre du diagnostic.

Plusieurs voies sont envisageables. Si on connaît la distribution d'un certain nombre de paramètres (en fonction de leur fréquence ou d'un taux de panne par exemple) cette connaissance peut être introduite dans les modèles à l'aide de nombres flous. Une piste serait alors de définir, par exemple, un observateur d'état basé sur le modèle flou (du système ou étendu aussi aux variables à étudier). Les équations liées à cet observateur devront très certainement être utilisées dans le cadre d'un calcul « exact » pour ne pas propager de façon inutile l'imprécision.

Bibliographie

[Asady & Zendehnam, 2007]

Asady B., Zendehnam A., *Ranking fuzzy numbers by distance minimization*, Applied Mathematical Modelling Vol. 31, pp. 2589–2598, 2007.

[Abbasbandy & Asady, 2006]

Abbasbandy S., Asady B., *Ranking of fuzzy numbers by sign distance*, Information Sciences International journal, Vol. 176, pp. 2405-2416, 2006

[Äström & Östberg, 1986]

Äström K.J., Östberg A.-B., *A teaching laboratory for process control*, *IEEE Contrl. Syst. Mag.*, Vol. 6, N°3, pp. 37-42, 1986.

[Awais, 2005]

Awais M.M., *Application of internal model control methods to industrial combustion*, Applied Soft Computing Vol. 5, pp. 223–233, 2005.

[Babuska & al., 1995]

Babuska R., Sousa J., Verbruggen H. B., *Model-based design of fuzzy control systems*, in Proc. 3rd Eur. Congr. Intelligent Techniques and Soft Computing (EUFIT'95), pp. 837-841, Aachen, Germany, 1995.

[Baccini & Besse, 2003]

Baccini A., Besse P., *Data mining : 1. Exploration Statistique*, Publication du Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier Toulouse III, Version octobre 2003.

[Bezdek, 1981]

Bezdek J. C., *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. New York, Plenum, 1981.

[Bisson & Nédellec, 2001]

Bisson G., Nédellec C., *Aide à la conception de méthodes de classification pour la construction d'ontologies*, Actes des journées francophones d'Extraction et de Gestion des Connaissances, EGC, 2001.

[Bloch, 1996]

Bloch I., *Information combination operators for data fusion: a comparative review with classification*, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics. Part A: Systems and Humans*, Vol. 26, N°. 1, pp. 52-67, 1996.

[Bloch & al., 2001]

Bloch I., Hunter A., Appriou A., Ayoun A., Benferhat S., Besnard P., Cholvy L., Cooke R., Cuppens F., Dubois D., Fargier H., Grabisch M., Kruse R., Lang J., Moral S., Prade H., Saffiotti A., Smets P. and Sossai C., *Fusion: General concepts and characteristics*, International Journal of Intelligent Systems, Vol. 16, N° 10, pp. 1107-1134, 2001.

[Bloch, 2005]

Bloch I., *Fusion d'informations numériques : panorama méthodologique*, Journées Nationales de la Recherche en Robotique, Guidel, Morbihan, France, 2005.

[Boche, 1963]

Boche R. E., *An operational Interval Arithmetic*, Lockheed Missiles & Space Company, Palo Alto, California, 1963.

[Boche, 1966]

Boche R., *Complex interval arithmetic with some applications*, Lockheed Missiles & Space Company, Sunnyvale, California, 1966.

[Bortolan & Degani, 1985]

Bortolan G., Degani R., *A review of some method for ranking fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems Vol. 15, pp. 1–19, 1985.

[Bouchon Meunier & Marsala, 2003]

Bouchon Meunier B., Marsala C., *Logique floue, principes, aide à la décision*, Hermes Science Publication, paris, 2003.

[Bouet & Dalaud, 1996]

Bouet G., Dalaud R., *Extension of Financial Concepts in Fuzzy Calculus and Application to Cash-Flow Matching*, Actuarial Approach for Financial Risks, Nürnberg, Germany, 1996.

[Boukezzoula & al., 2003]

Boukezzoula R., Galichet S., et Foulloy L., *Nonlinear Internal Model Control: Application of Inverse Model Based Fuzzy Control*, IEEE Trans. On Fuzzy Systems, Vol. 11, N° 6, 2003.

[Boukezzoula & al., 2006]

Boukezzoula R., Foulloy L., et Galichet S., *Inverse Controller Design for Fuzzy Interval Systems*, IEEE Trans. On Fuzzy Systems, Vol. 14, N° 1, 2006.

[Buckley, 1989]

Buckley J. J., *Fuzzy complex numbers*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 33, pp. 333-345, 1989.

[Buckley, 2005]

Buckley J. J., *Fuzzy Probabilities, New Approach and Applications*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer Editions, 2005.

[Chen & Hwang, 1992]

Chen S.-J., Hwang C.-L., *Fuzzy multiple attribute decision making methods and applications*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, New York, 1992.

[Cheng, 1998]

Cheng C.-H., *A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 95, pp. 307-317, 1998.

[Chu & Tsao, 2002]

Chu, T. C., Tsao, C. T., *Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 43, N° 1-2, pp. 111-117, 2002.

[De Baets & Marková-Stupnaňová, 1997]

De Baets B., Marková-Stupnaňová A., *Analytical expressions for the addition of fuzzy intervals*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 91, pp. 203-213, 1997.

[De Larminat, 2002]

De Larminat X., *Analyse Des Systèmes Linéaires*, Traite Ic2, Hermes Science Publications, 2002.

[Delmotte & Smets, 2004]

Delmotte F., Smets P., *Target Identification Based on the Transferable Belief Model Interpretation of the Dempster-Shafer Model*, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, Vol. 34, N° 6, 2004.

[Detyniecki & Yager, 2001]

Detyniecki M., Yager R. R., *Ranking fuzzy numbers using alpha-weighted valuations*, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, Vol. 8, N° 5, pp. 573-592, 2001.

[De luca & Termini, 1982]

- De luca A., Termini S., *Algorithmic Aspects in the Analysis Complex Systems*, LC/54/71/AL- Lab. di Cibernetica, Napoli, Italia, 1982.
- [Driankov & al., 1996]
Driankov D., Hellendoorn H., Reinfrank M., *An Introduction to Fuzzy Control*, Narosa, New Delhi, 1996.
- [Dong & Wong, 1987]
Dong W., Wong F., *Fuzzy weighted average and implementation of the extension principe*, Fuzzy Set and Systems, Vol. 21, pp. 183–199, 1987.
- [Dubois & Prade, 1978]
Dubois D., Prade H., *Operations on fuzzy numbers*, Internat. J. Systems Science Vol. 9 N°6, pp. 613-626, 1978.
- [Dubois & Prade, 1979]
Dubois D., Prade H., *Fuzzy real algebra: some results*, Fuzzy sets and systems Vol. 2, pp. 327-383, 1979.
- [Dubois & Prade, 1980]
Dubois D., Prade H., *Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications*, New York, Academic, 1980.
- [Dubois & Prade, 1988a]
Dubois D., Prade H., *Théorie des possibilités. Application à la représentation des connaissances en informatique*, Masson, Paris, 2e édition, 1988.
- [Dubois & Prade, 1988b]
Dubois D., Prade H., *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum Press, New York, 1988
- [Dubois & Prade, 1988c]
Dubois D., Prade H., *Fuzzy numbers: an overview*, in: J.C. Bezdek (Ed), *Analysis of Fuzzy Information*, CRC-Press, Boca Raton, Vol. 2, pp. 3-39, 1988.
- [Dubois & Prade, 1988d]
Dubois D. and Prade H., *Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures*, Comput. Intell. Vol. 4, pp. 244-264, 1988.
- [Dubois & Prade, 1994]
Dubois D., Prade H., *La fusion d'informations imprécises*, Traitement du Signal, numéro spécial fusion de données, Vol. 11, N°6, pp. 447-458, 1994.
- [Dubois & al., 2000]

Dubois D., Kerre E., Mesiar R., Prade H., *Fuzzy interval analysis*. In : D. Dubois, H. Prade (Eds.), *Fundamentals of Fuzzy Sets*. Kluwer, Boston, Mass, pp. 483-581, 2000.

[Dubois & al., 2004]

Dubois D., H. Fargier, and J. Fortin, *A generalized vertex method for computing with fuzzy intervals*, Proc. of the International Conference on Fuzzy Systems (IEEE, ed.), pp. 541-546, IEEE, July 2004. Budapest, Hungary.

[Dubois, 2006]

Dubois D., *Possibility theory and statistical reasoning*, Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 51, N° 1, pp. 47-69, 2006.

[Dubuisson & Masson, 1993]

Dubuisson B., Masson M., *A statistical decision rule with incomplete knowledge about classes*, *Pattern Recognition*, Vol. 26, N° 1, pp. 155-165, 1993.

[Edgar & Postlethwaite, 2000]

Edgar C. R., Postlethwaite B. E., *MIMO fuzzy internal model control*, *Automatica* Vol. 34, pp. 867-877, 2000.

[Efstathiou, 1982]

Efstathiou J., Tong R.M., *Ranking fuzzy sets: a decision theoretic approach*, *IEEE Trans. Systems Man Cybernet* Vol. 12, pp. 655-659, 1982.

[Filev, 1991]

Filev D.P., Yager R.R., *A generalized defuzzification method via BADD distribution*, *Internat. J. Intell. Systems* Vol. 6, pp. 687-697, 1991.

[Firas, 1997]

Firas M., *Approche à base de logique floue pour le test et le diagnostic des circuits analogiques*, Thèse de doctorat, INPGrenoble, 172 pages, 1997.

[Fortemps & Roubens, 1996]

Fortemps P., Roubens M., *Ranking and defuzzification methods based on area compensation*, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 82, 319-330, 1996.

[Fortin, 2004]

Fortin J., Dubois D., and Fargier H., *Le calcul des intervalles flous par la méthode des fronts. Fuzzy interval analysis using the method of profiles*, LFA04, Cépaduès editions ed., 2004.

[Foulard, C. & al., 1987]

- Foulard, C. & al, *Commande et régulation par Calculateur numérique*, Ed. Eyrolles, Paris, 1987.
- [Giachetti, 1997]
Giachetti R. E., Young R. E., *A parametric representation of fuzzy numbers and their arithmetic operators*, Fuzzy Sets and Systems Vol. 91, pp. 185-202, 1997.
- [Guan & Bell, 1991]
Guan J., Bell D. A., *Evidence Theory and its Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [Guerra & Roger, 1991]
Guerra T.M., Roger D., *A method for getting into relation two data sets*, 4th I.F.S.A. Congress (Computer Management and System Science), pp. 94-97, 1991.
- [Guerra & Loslever, 1993]
Guerra T.M., LOSLEVER P., *Two ways for getting connections between objective and subjective data sets in man-machine systems : multiple correspondance factor analysis and probabilistic fuzzy set theory*, Cybernetics & Systems, Vol. 24, pp. 217-242, 1993.
- [Hunt & Sbarbaro, 1991]
Hunt K. J., Sbarbaro D., *Neural networks for nonlinear internal model control*, IEEE Proc. D, Vol. 138, N° 5, pp. 431–438, 1991.
- [Hanss, 2005]
Hanss M., *Applied Fuzzy Arithmetic; An Introduction with Engineering Applications*, Springer edition, 2005.
- [Hayes, 2003]
Hayes B., *A Lucid Interval*, Scientific American, Vol. 91, N° 6, pp. 484-488, 2003.
- [Hong & Do, 1997]
Hong D. H., Do H. Y., *Fuzzy system reliability analysis by the use of T_ω (the weakest t-norm) on fuzzy number arithmetic operations*, Fuzzy Sets and Systems Vol. 90, pp. 307-316, 1997.
- [Jaulin & al., 2001]
Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E., *Applied Interval Analysis*, Springer Edition, 2001.
- [Jaulin & Walter, 2005]

Jaulin L., Walter E., Calcul ensembliste garanti et ses applications en identification, observation, commande et robotique, Grenoble control summer school, Septembre 2005.

[Jaulin, 2005]

Jaulin L., *Guaranteed set computation with applications in identification, observation, control and robotics*. Actes de l'école d'été d'Automatique de Grenoble, 2005.

[Kaufmann, 1975]

Kaufmann A., *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous - Tome I : éléments théoriques de base*, Edition Masson, 1975.

[Kaufmann, 1977]

Kaufmann A., *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous - Tome 4 : Compléments et nouvelles applications*, Edition Masson, 1977.

[Kaufmann & Gupta, 1988]

Kaufmann A., Gupta M., *Fuzzy mathematical models in engineering and management science*, North-Holland, 1988.

[Kharitonov, 1978]

Kharitonov V. L., *Asymptotique stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations*, Differential'nye Uravneniya, Vol. 14, pp. 2086-2088, 1978.

[Kim & Park, 1990]

Kim K., Park K.S., *Ranking fuzzy numbers with index of optimism*, Fuzzy Sets and Systems Vol. 35, pp. 143-150, 1990.

[Klir & Yuan, 1995]

Klir G. J., Yuan B., *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications*, Prentice Hall, 1995.

[Klir, 1997]

Klir G.J., *Fuzzy arithmetic with requisite constraints*. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 91, pp. 165-175, 1997.

[Klir & Pan, 1998]

Klir G.J., Pan Y., *Constrained fuzzy arithmetic: Basic questions and some answers*, Soft Computing Vol. 2, pp. 100-108, Springer-Verlag 1998.

[Knopp, 1952]

- Knopp K., *Elements of the Theory of Functions*, New York, 1952.
- [Khodja, 1999]
Khodja L., *Contribution à la classification floue non supervisée*, Thèse de doctorat, Université de Savoie, 1999.
- [Kramosil & Michalek, 1975]
Kramosil O., Michalek J., *Fuzzy metric and statistical metric spaces*, Kybernetika Vol. 11, pp. 326-334, 1975.
- [Krishnapuram & Keller, 1993]
Krishnapuram R., Keller J., *A possibilistic Approach to Clustering*, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 1, N° 2, May 1993.
- [Landau, 1998]
Landau I. D., *Identification des systèmes*, Editions Hermès, ISBN 2-86601-683-1, 1998.
- [Lamara & al., 2006a]
Lamara H., Vermeiren L., Roger D., *Généralités sur l'arithmétique phi-calcul : Application à un système du premier ordre bouclé*, LFA'06, Cépaduès, Toulouse, France, 2006.
- [Lamara & al., 2006b]
Lamara H., Vermeiren L., Roger D., *Phi-calculus : A new fuzzy arithmetic*, 11th IEEE ETFA'06, Prague, République Tchèque, 2006.
- [Lamara & al., 2007]
Lamara H., Vermeiren L., Roger D., *Aggregation and fuzzification by weighted fuzzy fusion operator*, In proceedings of the IEEE-FUZZ'07, London, United Kingdom, 2007.
- [Lee & Chen, 2006]
Lee L.-W., Chen S. -M., *A new method for ranking fuzzy numbers based on the shapes and the deviations of fuzzy numbers*, Proc. of the 2nd International Conference on Natural Computation and the third international conference on fuzzy systems and knowledge discovery, pp. 269–280, Xi'an, China, 2006.
- [Lee & Chen, 2007]

- Lee L.-W., Chen S.-M., *Fuzzy risk analysis based on fuzzy numbers with different shapes and different deviations*, Expert Systems with Applications, doi:10.1016/j.eswa.2007.05.009, 2007.
- [Lee & Li, 1988]
- Lee E.S., Li R.-J., *Comparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events*, Comput. Math. Appl. Vol. 15, pp. 887–896, 1988.
- [Ma & al., 1999]
- Ma M., Friedman M., Kandel A., *A new fuzzy arithmetic*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 108, pp. 83-90, 1999.
- [Ma & al., 2000]
- Ma M., Kandel A., Friedman M., *A new approach for defuzzification*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 111, pp. 351-356, 2000.
- [Mabuchi, 1993]
- Mabuchi S., *A proposal for a defuzzification strategy by the concept of sensitivity analysis*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 55, pp. 1–14, 1993.
- [Mareš, 1997]
- Mareš M., *Weak arithmetics of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 91, pp. 143-153, 1997.
- [Masson, 2005]
- Masson M., *Apports de la théorie des possibilités et des fonctions de croyance à l'analyse de données imprécises*, rapport HDR, Université de Technologie de Compiègne, 2005.
- [Mizumoto & Tanaka, 1976]
- Mizumoto M., Tanaka K., *The four operations of arithmetic on fuzzy numbers*, Systems Comput. Controls, Vol. 7, N° 5, pp. 73 -81. 1976.
- [Mizumoto & Tanaka, 1979]
- Mizumoto M., Tanaka K., *Some properties of fuzzy numbers*, in M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager Editions, Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, North-Holland, Amsterdam, pp. 156-164, 1979.
- [Modarres & Soheil, 2001]

- Modarres M., Soheil S. N., *Ranking fuzzy numbers by preference ratio*. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 118, pp. 429–436, 2001.
- [Moore & Yang, 1959]
- Moore R.E., Yang C. T., *Interval analysis I*, technical Report LMSD 285875 Lockheed Aircraft Co, Missiles and Space, Sunnyvale, California, 1959.
- [Moore, 1966]
- Moore R.E., *Interval analysis*, Prentice-Hall - Englewood Cliffs, New Jersey, 1966
- [Moses & al., 1999]
- Moses D., Degani O., Teodorescu H-N., Friedman M., Kandel A., *Linguistic Coordinate Transformation for Complex Fuzzy Sets*, IEEE International Fuzzy Systems Conference, pp. 1340-1345, Seoul, Korea, 1999.
- [Murakami & al., 1983]
- Murakami, S., Maeda, S., & Imamura, S., *Fuzzy decision analysis on the development of centralized regional energy control systems*, In Proceedings of the IFAC symposium on fuzzy information, knowledge representation and decision analysis, pp. 363–368, 1983.
- [Nahmias, 1976]
- Nahmias S., *Fuzzy variables*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 1, pp. 97-110, 1976.
- [Oussalah & Schutter, 2003]
- Oussalah M., De Schutter J., *Approximated fuzzy LR computation*, Information sciences, Vol. 153, pp. 155-175, 2003.
- [Park & Han, 2000]
- Park S., Han T., *Iterative inversion of fuzzified neural networks*, IEEE Trans. Fuzzy Syst., Vol. 8, pp. 266-280, 2000.
- [Patel & Mohan, 2002]
- Patel A.V., Mohan B.M., *Some numerical aspects of center of area defuzzification method*, Fuzzy Sets and Systems 132, 401–409, 2002.
- [Pedrycz, 1986]

- Pedrycz W., *Techniques of supervised and unsupervised pattern recognition with the aid of fuzzy set theory*, in *Pattern Recognition in Practice II*, E. S. Gelsema and L. N. Kanal eds, pp. 439-448, Amsterdam, North-Holland, 1986.
- [Pedrycz, 1994]
- Pedrycz W., *Why triangular membership functions?*, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 64, pp. 21-30, 1994.
- [Ramot & al., 2001]
- Ramot D., Friedman M., Ron Milo G. L., Kandel A., *On complex fuzzy sets*, IEEE International Fuzzy Systems Conference, pp. 1160-1163, 2001.
- [Ramot & al., 2002]
- Ramot D., Friedman M., Ron Milo G. L., Kandel A., *complex fuzzy sets*, IEEE Transaction on Fuzzy Systems, Vol. 10, N° 2, pp. 171-186, 2002.
- [Revol, 2004]
- Revol N., *Introduction à l'arithmétique par intervalles*, Ecole Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel, Grenoble, 2004.
- [Rocacher, 2005]
- Rocacher D., *Multi-ensemble flous et quantités graduées : Application à l'interrogation flexible de bases de données*, rapport HDR, Université de Rennes 1, Ecole Nationale Supérieure de Sciences Appliquées et de Technologie, 2005.
- [Roger & Lecomte, 1998]
- Roger D., Lecomte J.-M., *φ -calcul : une arithmétique pratique pour les nombres flous*, LFA'98, Cépaduès, pp. 235-242, 1998.
- [Roger & al., 1999]
- Roger D., Lecomte J.-M., Laulier C., *Développement et extension du φ -calcul aux quantités floues*. Actes LFA'96, Cépaduès, pp. 285-290, 1999.
- [Roychowdhury & Wang, 1996]
- Roychowdhury S., Wang B.H., *Cooperative neighbours in defuzzification*, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 78, pp. 37-49, 1996.
- [Rump, 1999]
- Rump S., *INTLAB- Interval Laboratory*, Developments in reliable computing, Tiborsendes editor, Kluwer, pp. 77-104, 1999.
(<http://www.ti3.tuharburg.de/~rump/intlab/>)
- [Ruspini, 1969]

- Ruspini E. R., *A New Approach to Clustering*, Inform. Control, Vol. 15, N° 1, pp. 22-32, July 1969.
- [Saporta, 1990]
Saporta G., *Probabilités, analyses des données et statistique*, éditions Technip, 1990.
- [Shafer, 1976]
Shafer G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton, NJ, Princeton University Press, 1976.
- [Schweitzer & Sklar, 1960]
Schweitzer B., Sklar A., *Statistical metric spaces*, Pacific J. Math, Vol. 10, pp. 314-334, 1960.
- [Sunaga, 1958]
Sunaga T., *Theory of interval algebra and its application to numerical analysis*, RAAG Memoirs, Ggujutsu Bunken Fukuy-kai, Tokyo, Vol. 2, pp. 29-46, 1958.
- [Sugeno, 1985]
Sugeno M., *Industrial applications of fuzzy control*, North Holland, Amsterdam, 1985
- [Tran & Duckstein, 2002]
Tran L., Duckstein L., *Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measure*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 130, pp. 331–341, 2002.
- [Wang, 1997]
Wang L.-X., *A Course in Fuzzy Systems and Control*, Prentice Hall, 1997
- [Wang & Kerre, 2001a]
Wang X., Kerre E.E., *Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities(I)*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 118, pp. 375–385, 2001.
- [Wang & Kerre, 2001b]
Wang X., Kerre E.E., *Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities(II)*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 118, pp. 387–405, 2001.
- [Yager, 1981]
Yager R.R., *A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval*, in Information Sciences, Vol. 24, 143-161, 1981.
- [Yager & Filev, 1993]
Yager R.R., Filev D.P., *SLIDE: A simple adaptive defuzzification method*, IEEE Trans. Fuzzy Systems, Vol. 1, pp. 69–78, 1993.
- [Yang & al., 1993]

- Yang H. Q., Yao H., Jones D., *Calculating functions of fuzzy numbers*, Fuzzy Set and Systems, Vol. 55, pp. 273–283, 1993.
- [Yao & Kweimei, 2000]
- Yao J-S., Kweimei W., *Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance*, Fuzzy Sets and Systems, 116, pp. 275-288, 2000.
- [Young , 1931]
- Young R. C., *The algebra of many-valued quantities*, Mathematische Annalen, Vol. 104, pp. 260-290, 1931.
- [Zadeh, 1965]
- Zadeh L.A., *Fuzzy sets*, Information & Control, N° 8, pp. 338-353, 1965.
- [Zadeh, 1978]
- Zadeh L. A., *Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 1, pp. 3-28, 1978.
- [Zhao & Govind, 1991]
- Zhao Z., Govind R., *Solutions of algebraic equations involving generalised fuzzy numbers*, Information Sciences N° 56, pp. 199-243, 1991.
- [Zimmerman, 1991]
- Zimmerman H. J., *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Dordrecht, Holland : Kuwer, 1991.
- [Zhu & Lee, 1992]
- Zhu Q., Lee E.S., *Comparison and ranking of fuzzy numbers*, in: J. Kacprzyk, M. Fedrizi (Eds.), *Fuzzy Regression Analysis*, Omnitech Press, Warsaw and Physica-Verlag, Heidelberg, pp. 21–44, 1992.

Table des Illustrations

Figure 1 : Caractéristiques d'un ensemble flou.....	24 -
Figure 2 : Nombres flous trapézoïdal et triangulaire.....	28 -
Figure 3 : Modélisation des nombres flous : singleton, intervalle et triangulaire.....	50 -
Figure 4 : Modélisation des nombres flous gaussienne et trapézoïdale	51 -
Figure 5 : Addition de deux nombres flous.....	53 -
Figure 6 : Pseudo-opposé d'un nombre flou \tilde{a}	55 -
Figure 7 : Soustraction de deux nombres flous.....	56 -
Figure 8 : Multiplication de deux nombres flous à supports positifs.....	57 -
Figure 9 : Décomposition additive d'un nombre flou mixte \tilde{a}	59 -
Figure 10 : Multiplication de deux nombres flous mixtes	60 -
Figure 11 : Pseudo-inverse d'un nombre flou.....	62 -
Figure 12 : Division de deux nombres flous	62 -
Figure 13 : Exemple : $\tilde{x} = triplet(1,2,3)$	63 -
Figure 14 : Exponentielle du nombre flou \tilde{a}	65 -
Figure 15 : Logarithme népérien du nombre flou \tilde{a}	66 -
Figure 16 : Deux exemples de solution à l'équation $\tilde{2} \cdot \tilde{x} + \tilde{8} = \tilde{0}$; $\tilde{x} = -\tilde{4}$	67 -
Figure 17 : Fonctions d'appartenance classiques des paramètres de l'équation.....	68 -
Figure 18 : ψ -coupe et sa réalisation	70 -
Figure 19 : Quantité floue contenue dans un nombre	74 -
Figure 20 : Quantité de flou maximale pour une réalisation et un support donnés.....	75 -
Figure 21 : Fusion et moyenne pondérées de deux nombres flous	77 -
Figure 22 : Fuzzification WFF de mesures de même poids.....	85 -
Figure 23 : Fuzzification WFF de mesures de poids différents	85 -
Figure 24 : Ordre des nombres flous $\tilde{a} \prec \tilde{b} \prec \tilde{c} \prec \tilde{d}$	86 -
Figure 25 : Ordre des nombres flous $\tilde{a} \prec \tilde{b} \prec \tilde{c}$	87 -
Figure 26 : Ordre des nombres flous $\tilde{a} \prec \tilde{b} \prec \tilde{c}$	87 -
Figure 27 : Ordre des nombres flous $\tilde{a} \prec \tilde{c} \prec \tilde{b}$	88 -
Figure 28 : fuzzification par la WFF.....	90 -
Figure 29 : Résultats du filtrage linéaire et flou.....	91 -
Figure 30 : Grandeur floue « âge d'une liste ».....	93 -

Figure 31 : Profils flous des listes	- 93 -
Figure 32 : Profil des listes après agrégations successives	- 95 -
Figure 33 : Dendrogramme des 8 listes selon la distance d_1	- 95 -
Figure 34 : Grandeur floue « âge d'une liste », pondérée ou pas par le rang.....	- 96 -
Figure 35 : Dendrogramme des 8 listes avec prise en compte du rang.....	- 97 -
Figure 36 : Dendrogramme des crânes par la fusion floue pondérée.....	- 99 -
Figure 37 : Dendrogramme des crânes par le saut moyen	- 100 -
Figure 38 : Profils par unité d'enseignement	- 102 -
Figure 39 : Profil global des notes d'un étudiant au cours de l'année	- 102 -
Figure 40 : Classement flou en fonction du classement classique	- 103 -
Figure 41 : Dendrogramme des étudiants par la WFF (distance d_2).....	- 104 -
Figure 42 : Classification des étudiants par unité (distance(3.18))	- 105 -
Figure 43 : Allures des paramètres flous \tilde{a}_1 et \tilde{b}_1	- 111 -
Figure 44 : Réponse indicielle à un échelon unitaire	- 112 -
Figure 45 : Réponse indicielle \tilde{y}_k	- 112 -
Figure 46 : Correcteur RST.....	- 113 -
Figure 47 : Correcteur RST flou	- 115 -
Figure 48 : Correcteur RST flou	- 115 -
Figure 49 : Schéma de principe de la commande à modèle interne	- 117 -
Figure 50 : Inversion de modèle flou	- 121 -
Figure 51 : Enveloppes de l'entrée \tilde{y}_{c_k} (en pointillés) et de la sortie \tilde{y}_k	- 122 -
Figure 52 : résultats « exact » et par φ -calcul pour les nombres \tilde{a}_1 et \tilde{y}_1	- 123 -
Figure 53 : résultats « exact » (gauche) et approché (droite) pour les nombres \tilde{a}_2 et \tilde{y}_2 -	124 -
Figure 54 : résultats « exact » et par φ -calcul pour les nombres \tilde{b}_1 et \tilde{d}_1	- 125 -
Figure 55 : résultats « exact » et par φ -calcul pour les nombres \tilde{b}_2 et \tilde{d}_2	- 125 -
Figure 56 : Enveloppes de l'entrée \tilde{y}_{c_k} (en pointillés) et de la sortie \tilde{y}_k	- 126 -
Figure 57 : place des pôles de la fonction de transfert en fonction des incertitudes.....	- 127 -
Figure 58 : Enveloppes de l'entrée \tilde{y}_{c_k} (en pointillés) et de la sortie \tilde{y}_k	- 127 -
Figure 59 : CMI1, schéma équivalent	- 128 -
Figure 60 : CMI2, schéma équivalent	- 129 -
Figure 61 : Banc d'essais	- 130 -

Figure 62 : Schéma du système à deux cuves	131 -
Figure 63 : CMI1, consigne d' hauteur et sortie $h_2(t)$ modèle linéaire, modèle flou	133 -
Figure 64 : CMI1, signal de commande $q_1(t)$, modèle linéaire, modèle flou.....	133 -
Figure 65 : CMI floue, Enveloppes sur la variation de commande Δu	134 -
Figure 66 : Carré d'un nombre flou mixte	139 -
Figure 67 : exemple de valeur absolue	139 -
Figure 68 : Racine carrée d'un nombre flou positif	140 -
Figure 69 : Puissances de \tilde{a} , $n = 0$, $n = 2$ et $n = 3$	140 -
Figure 70 : Evaluation de $f(\tilde{x})$	141 -
Figure 71 : Quelques exemples de sinus avec différents supports	142 -
Figure 72 : Quelques exemples de sinus avec différents supports	142 -
Figure 73 : Exemples de cosinus avec différents supports.....	143 -
Figure 74 : exemples de la fonction tangente.....	143 -
Figure 75 : exemples de la fonction cotangente	144 -
Figure 76 : représentation d'un intervalle complexe en coordonnées cartésiennes	146 -
Figure 77 : surestimations engendrées par le passage aux coordonnées polaires	146 -
Figure 78 : nombre complexe flou	148 -
Figure 79 : module d'un nombre complexe flou.....	150 -
Figure 80 : argument d'un nombre complexe flou.....	151 -
Figure 81 : Nombre flou complexe en coordonnées polaires et cartésiennes	151 -
Figure 82 : Résolution d'une équation du second degré avec Ξ positif non mixte	153 -
Figure 83 : cas Ξ mixte.....	154 -



Résumé :

Cette thèse propose une arithmétique pratique de calcul d'intervalles et quantités floues. Ces derniers sont modélisés, non pas par leurs fonctions d'appartenance classiques, mais par une fonction de répartition cumulée inspirée des statistiques. Cette proposition se veut innovante et pratique pour traiter des données imprécises et incertaines avec l'introduction de quelques idées dans ce sens.

Cette approche n'a pas évidemment pour objectif de remettre en cause un certain nombre de méthodes existantes dans la littérature, mais offre une autre manière de raisonner et de résoudre certaines problématiques avec une implémentation et modélisation plus simples.

La proximité de cette méthode avec les probabilités et les statistiques classiques a conduit à mettre un accent sur des applications d'analyse de données imprécises, et à une extension des outils statistiques. Néanmoins, une arithmétique assez riche et cohérente basée sur les techniques de la logique floue et du calcul par intervalles a été proposée.

De nombreux exemples didactiques sont présentés au cours de ce travail pour faciliter la compréhension de notre démarche. Le but de ce mémoire est de démontrer dans un premier temps la faisabilité et l'applicabilité de nos propositions.

Les résultats des applications, que ce soit en analyse de données objectives et subjectives, ou bien en commande à modèle interne des systèmes non linéaires (avec notamment une application en temps réel sur un système non linéaire et imprécis), montrent l'intérêt du ϕ -calcul. D'autres développements mathématiques et extensions aux autres domaines laissent augurer des perspectives intéressantes dans un futur proche.

Mots clés : *Arithmétique floue, nombres flous, fuzzification, defuzzification, ordonnancement, agrégation, modélisation floue, commande à modèle interne.*

Abstract:

The presented Ph.D. thesis proposes a practical arithmetic to calculate the fuzzy intervals and quantities. The latter are modelled by an accumulative distribution function based on classical statistics instead of classical membership functions. This innovative work effectively deals with imprecise data and uncertainties by exploiting some ideas in the direction described above.

Existing methods found in the specialized literature are not disregarded, though this thesis intends to present another way of reasoning and solving certain problems with a simpler implementation.

Since the proposed method is close to probability and classical statistics, it has lead –at a first stage- to stressing the analysis of imprecise data as well as to extend the statistical tools. Nevertheless, a complete and coherent arithmetic based on fuzzy logic techniques and interval analysis has been proposed.

A number of illustrative examples have been presented through this work to facilitate the understanding of our approach. The thesis' objective is to show the feasibility and applicability of our claims.

Results obtained in applications, both on the analysis of objective-subjective data and on the internal nonlinear model control (with special emphasis on a real-time application for a non-linear imprecise system) have proved the effectiveness of ϕ -calculus. Other mathematical developments and extensions to other areas suggest that interesting perspectives in the future will arrive.

Keywords : *Fuzzy arithmetic, fuzzy numbers, fuzzification, defuzzification, aggregation, clustering, fuzzy models, inverse fuzzy model, internal fuzzy control model.*

Bibliothèque Universitaire de Valenciennes



00900460