



HAL
open science

Étude théorique et expérimentale de la convection forcée sur plaque plane en régime transitoire

Ali Grine

► **To cite this version:**

Ali Grine. Étude théorique et expérimentale de la convection forcée sur plaque plane en régime transitoire. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2007. Français. NNT : 2007VALE0034 . tel-02998504

HAL Id: tel-02998504

<https://uphf.hal.science/tel-02998504>

Submitted on 10 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE*Présentée à***L'UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES ET DU HAINAUT-CAMBRESIS***Pour obtenir le titre de***DOCTEUR**

Option : MÉCANIQUE-ÉNERGÉTIQUE

*Par***ALI GRINE**

**Étude théorique et expérimentale de la convection
forcée sur plaque plane en régime transitoire**

*Soutenue le 26 novembre 2007 devant la commission d'examen**Jury*

Rapporteurs :	C. ABID M. LACHI	HDR, Université de Marseille HDR, Université de Reims
Examineurs :	J.Y. DESMONS S. HARMAND	HDR, ISTV – UVHC Professeur, ENSIAME – UVHC
Invités :	B. DESMET D. LEGER	Professeur, ENSIAME – UVHC Professeur, ISTV – UVHC



Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au sein du Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique (LME) de l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis (UVHC) sous la direction de Madame Souad HARMAND, Professeur à l'UVHC.

Je tiens d'abord à exprimer toute ma gratitude envers ma directrice de thèse Madame Souad HARMAND pour la qualité de son encadrement. Je la remercie tout particulièrement pour ses conseils, sa disponibilité et son soutien qui m'ont aidé à persévérer et avancer durant la thèse.

J'exprime également ma gratitude envers Monsieur Jean Yves DESMONS, qui a dirigé la partie théorique de ma thèse avec une grande attention. J'ai beaucoup appris grâce à ses larges connaissances scientifiques, à sa rigueur et à son sens pédagogique.

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à Monsieur Mohamed LACHI et Madame Cherifa ABID pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant la tâche de rapporteur.

Je suis également très honoré que Madame Cherifa ABID ait accepté de présider mon jury.

Je remercie les examinateurs, Messieurs Daniel LEGER, Bernard DESMET pour avoir accepté d'évaluer mon travail, et pour leurs remarques pertinentes.

Je remercie tous les membres du Laboratoire Mécanique et d'Énergétique qui ont contribué à cet épanouissement : chercheurs, thésards, stagiaires, techniciens et secrétaires, en particulier Madame Sabine GUILAIN secrétaire du Laboratoire pour son aide et Didier SAURY pour sa disponibilité et son aide précieuse aussi bien pour la partie expérimentale que numérique.

Je voudrais remercier Krimo SIDHOM, Hamid ZIDOUH, Mohamed GUERRACHE, Abderrahmane MANA, R. SONAN OCHO, Adel BENSELAMA, Sabri YUCEF-ALI, Souhil SEGHIR-OUALI, Hassiba BAHLOUL et Saida SADI, pour leurs aides, conseils et encouragements.

Enfin et surtout, je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance et mes plus chaleureux remerciements à mes parents pour leur dévouement sans égal et leur affection sans limite, à mes sœurs ainsi que ma famille en France. Et je tiens à remercier particulièrement mon oncle Ahmed qui m'a soutenu et encouragé au long de ce parcours.

Résumé

Ce travail de recherche traite les phénomènes convectifs en régime transitoire et plus particulièrement l'identification du coefficient d'échange convectif sur une plaque plane chauffée et placée dans un canal rectangulaire.

Nous avons élaboré deux modèles analytiques :

Le premier modèle est fondé sur la résolution de l'équation de propagation de la chaleur dans une plaque par la méthode des fonctions de Green, permettant de déduire de façon rigoureuse l'évolution du flux pariétal pénétrant dans le fluide, puis le coefficient d'échange convectif.

Nous constatons que ce coefficient prend des valeurs très importantes au voisinage de $t = 0$ puis décroît et tend vers une valeur limite constante en régime permanent proche des valeurs obtenues à partir des corrélations issues de la littérature.

Le deuxième modèle, concerne quand à lui la résolution de l'équation de l'énergie dans le fluide dans le cas d'un flux de chaleur appliqué à l'interface solide-fluide en utilisant également la méthode des fonctions de Green.

Cette démarche originale permet, connaissant le profil de vitesse dans la couche limite dynamique, de déterminer le profil de température dans tout le fluide et ainsi les températures et la couche limite thermique.

Un banc d'essais expérimental a permis d'identifier les conditions limites nécessaires pour les deux modèles analytiques.

Dans ce banc d'essais la plaque plane est exposée sur sa face inférieure à un créneau de flux transmis par conduction et pénétrant dans le fluide par la face supérieure sans perturber l'écoulement.

Une Caméra Infrarouge installée en regard de la plaque permet d'enregistrer le profil de température sur cette face. Aucun système de mesure de flux n'est installé sur la face supérieure de la plaque ce qui évite de modifier les couches limites thermique et dynamique.

II.2.7 Etude du régime d'échauffement	29
II.2.7.1 Profil de température	29
II.2.7.2 Densité de flux de chaleur et coefficient d'échange	30
II.2.8 Etude du régime de relaxation.....	33
II.2.8.1 Profil de température	33
II.2.8.2 Densité de flux de chaleur et coefficient d'échange thermique.....	35
II.3 Modèle 2 : Condition limite de convection en $x = 0$	36
II.3.1 Conditions limites et initiale	36
II.3.2 Résolution de l'équation de propagation par la théorie des fonctions de Green.....	37
II.3.3 Recherche de la fonction de Green	38
II.3.3.1 Méthode de séparation des variables	38
II.3.3.1.1 Définition des fonctions propres et valeurs propres	38
II.3.3.1.2 Calcul numérique des valeurs propres.....	38
II.3.3.2 Méthode directe par la transformée de Laplace.....	39
II.3.4 Cas de h_c indépendant du temps	40
II.3.4.1 Profil de température et flux de chaleur dans la phase de chauffage.....	41
II.3.4.2 Profil de température et flux de chaleur dans la phase de relaxation.....	42
II.3.5 Cas de h_c dépendant du temps.....	42
II.4 Conclusion	43
CHAPITRE III : MODELISATION DANS LE FLUIDE	45
III.1 Introduction	45
III.2 Equation de l'énergie	45
III.2.1 Position du problème	45
III.2.2 Conditions aux limites thermiques	47

III.3 Résolution de l'équation de l'énergie par la méthode des fonctions de Green	47
III.3.1 Résolution par la méthode des fonctions de Green.....	48
III.3.2 Réponse indicielle.....	51
III.3.3 Définition de la fonction de Green	52
III.4 Comportement thermique d'une plaque plane semi-infinie.....	53
III.4.1 Température locale	55
III.4.2 Coefficient d'échange convectif local	58
III.5 Comparaison entre h_0 et $h_{\text{Corrélation}}$ en régime permanent	66
III.5.1 Température moyenne et coefficient d'échange convectif moyen	68
III.5.2 Comparaison entre h_{moy} et $h_{\text{Corrélation}}$ en régime permanent.....	70
III.6 Calcul du premier terme correctif	70
III.6.1 Calcul du terme $\overline{K_\delta^1}(z,p)$ dans le domaine de Laplace	74
III.6.2 Retour dans le domaine temporel $K_\delta^1(z,t)$	75
III.7 Calcul du deuxième terme correctif $K_\delta^2(z,t)$	76
III.8 Profil de température pour un flux de chaleur réel : produit de convolution..	79
III.9 Exploitation du modèle et comparaison des résultats théorique et ceux de la littérature	81
III.9.1 Profil de température	81
III.9.2 Evolution du coefficient d'échange convectif h_c en fonction du temps	83
III.9.3 Evolution du coefficient d'échange convectif $h_{c_modèle}$ par rapport à la vitesse d'écoulement.....	87
III.10 Conclusion.....	88
CHAPITRE IV : EXPERIMENTATION ET RESULTATS.....	91
IV.1 Introduction.....	91

IV.2	Expérimentation.....	91
IV.2.1	Description du banc d'essai expérimental	91
IV.2.2	Chaîne de mesure.....	95
IV.2.2.1	Mesure des températures.....	95
IV.2.2.2	L'anémométrie fil chaud	96
IV.2.2.3	Propriétés thermophysiques des plaques d'essais	97
IV.2.3	Identification du flux de chauffage ϕ_i à l'aide d'un bilan thermique.....	97
IV.3	Incertitude sur h_e^0 , h_i^0 et ϕ_i	100
IV.4	Résultat expérimentaux.....	101
IV.4.1	Choix du matériau constituant la plaque	101
IV.4.2	Détermination du flux incident ϕ_i et du coefficient d'échange h_i^0 en régime permanent et incertitudes de mesure.....	101
IV.4.3	Analyse des résultats de modélisation mathématique (modèle 1).....	103
IV.4.3.1	Profils de température	103
IV.4.3.2	Flux de chaleur.....	105
IV.4.3.3	Coefficients d'échanges radiatif et convectif.....	108
IV.4.4	Comparaisons du modèle mathématique avec la simulation numérique... ..	112
IV.4.4.1	Plaque de vitrocéramique.....	112
IV.4.4.2	Plaque d'Aluminium	115
IV.4.5	Comparaisons des profils de température du modèle fluide et modèle solide à h constant à la température expérimentale	117
IV.4.6	Comparaisons des flux pariétaux des modèles théorique 1 et 2.....	120
IV.5	Conclusion	123
	CONCLUSION GENERALE.....	124
	Annexe 1	128
	Annexe 2	130

Annexe 3	132
Annexe 4	134
Annexe 5	136
Annexe 6	138
Annexe 7	141
Annexe 8	143
Annexe 9	151
Annexe 10	153
Annexe 11	156
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	162

Liste des figures

<i>Figure I.1 : Evolution de $Bi\sqrt{Fo}$ en fonction de m^*</i>	8
<i>Figure I.2 : Evolution temporelle de la température en régime de relaxation.....</i>	10
<i>Figure I.3 : thermogramme temporel ; Figure I.4 : coefficient d'échange convectif.....</i>	13
<i>Figure I.5 : L'influence de la conductivité thermique sur la variation du nombre de Nu</i>	16
<i>Figure II.1: Représentation schématique des conditions aux limites sur la plaque.....</i>	18
<i>Figure II.2 : Valeurs propres de Laplacien.....</i>	25
<i>Figure II.3 : Valeurs propres du Laplacien</i>	39
<i>Figure III.1 : Représentation de l'écoulement dans un canal rectangulaire</i>	46
<i>Figure III.2 : Représentation schématique d'une plaque plane chauffée à partir d'une distance $x_0 - c/2$</i>	54
<i>Figure III.3 : Schéma et notation du problème de la convection forcée sur la plaque plane</i>	54
<i>Figure III.4 : Evolution de la fonction $k(u)$ en fonction de u pour différents x.....</i>	57
<i>Figure III.5 : Représentation de la fonction $k(u)$ par un créneau pour $x = c/2$</i>	57
<i>Figure III.6 : Evolution temporelle de la température pariétale T_0 pour différents x.....</i>	59
<i>Figure III.7 : Evolution temporelle du coefficient d'échange pour différents x.....</i>	60
<i>Figure III.8 : Évolution spatiale de la température pariétale pour différents instants</i>	61
<i>Figure III.9 : Evolution spatiale de la température du fluide en $z = 1$ mm.....</i>	62
<i>Figure III.10 : Evolution spatiale de la température du fluide en $z = 3$ mm.....</i>	62
<i>Figure III.11 : Evolution spatiale du profil de température en régime transitoire $t=0,05s$.....</i>	63
<i>Figure III.12 : Evolution spatiale du profil de température en régime transitoire $t=0,1s$.....</i>	63
<i>Figure III.13 : Evolution spatiale du profil de température en régime transitoire $t=0,15s$.....</i>	64
<i>Figure III.14 : Evolution spatiale du profil de température en régime permanent.....</i>	64
<i>Figure III.15 : Couche limite thermique en régime transitoire.....</i>	65
<i>Figure III.16 : Couche limite thermique en régime permanent</i>	65
<i>Figure III.17 : Comparaison du $h_0(x)$ du modèle et de la corrélation pour différentes vitesses U_∞</i>	67
<i>Figure III.18 : Comparaison du $h_0(x)$ du modèle et de la corrélation ($0,5 < U_\infty < 20$ m/s).....</i>	67

<i>Figure III.19 : Evolution temporelle de la température pariétale moyenne pour différentes vitesses d'écoulement U_∞</i>	69
<i>Figure III.20 : Evolution temporelle du coefficient d'échange convectif moyen pour différentes vitesses d'écoulement U_∞</i>	69
<i>Figure III.21 : Comparaison du h_{moy} du modèle et de la corrélation ($0,5 < U_\infty < 20$ m/s)</i>	70
<i>Figure III.22 : Évolution de la fonction f en fonction de u</i>	74
<i>Figure III.23 : Comparaison des évolutions temporelles de la température obtenues par différentes méthodes, $x = 0,02$ m et $U_\infty = 1$ m/s</i>	81
<i>Figure III.24 : Comparaison des évolutions temporelles de la température obtenues par différentes méthodes, $x = 0,1$ m et $U_\infty = 1$ m/s</i>	82
<i>Figure III.25 : Evolution du coefficient h_c pour les différentes méthodes, $x = 0,02$ m et $U_\infty = 1$ m/s</i>	83
<i>Figure III.26 : Evolution du coefficient h_c pour les différentes méthodes, $x = 0,1$ m et $U_\infty = 1$ m/s</i>	84
<i>Figure III.27 : Comparaison du h_c local du modèle et de la corrélation ($0,5 < U_\infty < 20$ m/s)</i>	87
<i>Figure III.28 : Comparaison du h_c moyen du modèle et de la corrélation ($0,5 < U_\infty < 20$ m/s)</i> ..	88
<i>Figure IV.1 : Dispositif expérimental</i>	92
<i>Figure IV.2 : Banc d'essai expérimental</i>	92
<i>Figure IV.3 : Convergent</i>	93
<i>Figure IV.4 : Plaque plane et système d'isolation</i>	93
<i>Figure IV.5 : Système de chauffage</i>	94
<i>Figure IV.6 : Hublot en fluorine</i>	94
<i>Figure IV.7 : Caméra Infrarouge</i>	95
<i>Figure IV.8 : Pont de Wheatston</i>	96
<i>Figure IV.9 : Étalonnage de fil chaud</i>	97
<i>Figure IV.10 : Représentation schématique des conditions aux limites sur la plaque au régime permanent</i>	98
<i>Figure IV.11 : Profil de température en $x = 0$ en convection naturelle</i>	102
<i>Figure IV.12 : Profil de température en $x = 0$ en convection naturelle</i>	102
<i>Figure IV.13 : Profil de température pour $U_\infty = 5$ m/s (modèle 1)</i>	103
<i>Figure IV.14 : Profil de température pour $U_\infty = 5$ m/s (modèle 1)</i>	104

<i>Figure IV.15 : Profil de température pour $U_{\infty} = 7$ m/s (modèle 1)</i>	104
<i>Figure IV.16 : Profil de température pour $U_{\infty} = 7$ m/s (modèle 1)</i>	105
<i>Figure IV.17 : Flux de chaleur pariétaux pour différentes vitesses d'écoulement</i>	106
<i>Figure IV.18 : Flux de chaleur pariétaux pour différentes vitesses d'écoulement</i>	106
<i>Figure IV.19 : Evolution temporelle du flux de chaleur pariétal pour les temps faibles, (.....</i>	107
<i>Figure IV.19_bis : Evolution temporelle du flux de chaleur pariétal pour les temps faibles, $U_{\infty}=5$ m/s (vitrocéramique)</i>	108
<i>Figure IV.20 : Coefficients d'échanges radiatifs pour différentes vitesses d'écoulement (vitrocéramique)</i>	109
<i>Figure IV.21 : Coefficients d'échanges radiatifs pour différentes vitesses d'écoulement (Aluminium)</i>	109
<i>Figure IV.22 : Coefficients d'échanges convectifs pour différentes vitesses d'écoulement (Vitrocéramique)</i>	110
<i>Figure IV.23 : Coefficients d'échanges convectifs pour différentes vitesses d'écoulement (Aluminium)</i>	110
<i>Figure IV.24 : Comparaison des températures en convection naturelle (vitrocéramique)</i>	112
<i>Figure IV.25 : Comparaison des températures pour une vitesse 5 m/s (vitrocéramique)</i>	113
<i>Figure IV.26 : Comparaison des flux de chaleur pariétaux en convection naturelle (vitrocéramique)</i>	113
<i>Figure IV.27 : Comparaison des flux de chaleur pariétaux pour $U_{\infty}=5$ m/s (vitrocéramique)</i>	114
<i>Figure IV.28 : Comparaison des coefficients d'échanges globaux $U_{\infty}=5$ m/s (vitrocéramique)</i>	114
<i>Figure IV.29 : Comparaison des températures pour une vitesse 5 m/s (Aluminium)</i>	115
<i>Figure IV.30 : Comparaison des températures pour une vitesse 7 m/s (Aluminium)</i>	115
<i>Figure IV.31 : Comparaison des flux de chaleur pariétaux pour $U_{\infty}=5$ m/s (Aluminium)</i>	116
<i>Figure IV.32 : Comparaison des coefficients d'échanges globaux pour $U_{\infty}=5$ m/s (Aluminium)</i>	116
<i>Figure IV.33 : Comparaison des profils de température pour une vitesse d'écoulement 5 m/s (vitrocéramique)</i>	118
<i>Figure IV.34 : Comparaison des profil de température pour une vitesse d'écoulement 7 m/s (vitrocéramique)</i>	119
<i>Figure IV.35 : Comparaison des profils de température pour une vitesse d'écoulement 5 m/s (Aluminium)</i>	119

<i>Figure IV.36 : Comparaison des profil de température pour une vitesse d'écoulement 7 m/s (Aluminium).....</i>	<i>120</i>
<i>Figure IV.37 : Comparaison du flux pariétal pour $U_{\infty}=5$ m/s (vitrocéramique)</i>	<i>121</i>
<i>Figure IV.38 : Comparaison du flux pariétal pour $U_{\infty}=7$ m/s (vitrocéramique)</i>	<i>121</i>
<i>Figure IV.39 : Comparaison du flux pariétal pour $U_{\infty}=5$ m/s (Aluminium)</i>	<i>122</i>
<i>Figure IV.40 : Comparaison du flux pariétal pour $U_{\infty}=7$ m/s (Aluminium)</i>	<i>122</i>

Liste des tableaux

<i>Tableau III.1 : Durée du régime transitoire pour différentes abscisses de la plaque.....</i>	<i>58</i>
<i>Tableau III.2.a : $\Delta(\%)$: Ecart relatif entre h_0 et $h_{\text{littérature}}$ pour $x < c$, $U_\infty = 0,5$ m/s</i>	<i>66</i>
<i>Tableau III.2.b : Ecart relatif entre h_0 et $h_{\text{littérature}}$ pour $x < c$, $U_\infty = 1$ m/s</i>	<i>66</i>
<i>Tableau III.2.c : Ecart relatif entre h_0 et $h_{\text{littérature}}$ pour $x < c$, $U_\infty = 2$ m/s</i>	<i>66</i>
<i>Tableau III.2.d : Ecart relatif entre h_0 et $h_{\text{littérature}}$ pour $x < c$, $U_\infty = 5$ m/s</i>	<i>66</i>
<i>Tableau III.3 : Coefficient d'échange convectif h_c en régime permanent obtenu par les différentes méthodes de calcul ($U_\infty = 1$ m/s).....</i>	<i>84</i>
<i>Tableau III.4.a : Ecart relatif entre $h_{c_modèle}$ et $h_{c_corrélation}$ pour $U_\infty = 0,5$ m/s.....</i>	<i>85</i>
<i>Tableau III.4.b : Ecart relatif entre $h_{c_modèle}$ et $h_{c_corrélation}$ pour $U_\infty = 1$ m/s.....</i>	<i>85</i>
<i>Tableau III.4.c : Ecart relatif entre $h_{c_modèle}$ et $h_{c_corrélation}$ pour $U_\infty = 2$ m/s.....</i>	<i>86</i>
<i>Tableau III.4.d : Ecart relatif entre $h_{c_modèle}$ et $h_{c_corrélation}$ pour $U_\infty = 5$ m/s.....</i>	<i>86</i>
<i>Tableau IV.1 : Propriétés des plaques de mesure.....</i>	<i>97</i>
<i>Tableau IV.2.a : Flux de chaleur absorbé et incertitudes – phase de chauffage</i>	<i>103</i>
<i>Tableau IV.2.b : Flux de chaleur absorbé et incertitudes – phase de relaxation.....</i>	<i>103</i>
<i>Tableau IV.3 : Valeurs des coefficients d'échange en régime permanent</i>	<i>111</i>

Nomenclature

a	Diffusivité thermique ($a = \lambda/\rho c_p$ en $m^2.s^{-1}$)
b	Largeur caractéristique de la plaque (m)
c	Longueur caractéristique de la plaque (m)
c_p	Chaleur massique ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
e	Épaisseur de la plaque plane (m)
erfc	Fonction d'erreur complémentaire
E	Fonction de Heaviside
f	Température pariétale ($^{\circ}C$)
G	Fonction de Green
G_{ϕ}	Fonction de Green pour un flux imposé
\bar{G}	Transformée de Laplace de G
Gr	Nombre de Grashof = $(g.\beta.\Delta\theta.l^3)/\nu^2$
h	Coefficient de transfert thermique ($W.m^{-2}.K^{-1}$)
$\ell = 2a/U_{\infty}$	Longueur caractéristique du phénomène de convection
L_1, L_2	Dimensions du canal (m)
Nu	Nombre de Nusselt $Nu = h\ell/\lambda$
Pr	Nombre de Prandtl ($Pr = \nu/a$)
k	Coefficient de Fourier
Ra	Nombre de Rayleigh = $Gr.Pr$
Re_x	Nombre de Reynolds local ($Re_x = U x / \nu$)
$\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}''$	Vecteurs d'espaces (x, y, z), (x', y', z') et (x'', y'', z'')
R	Résistance thermique ($m^2 K/W$)
S_0	Section de la plaque chauffante (m^2)
t	Temps (s)
t_1	Temps de chauffage (s)
t_c	Durée du régime transitoire (temps critique) (s)
T_{∞}	Température ambiante ($^{\circ}C$)
T_e	Température d'entrée ($^{\circ}C$)
T_0	Température initiale ($^{\circ}C$)
T	Température dans la plaque ($^{\circ}C$)
\bar{T}	Transformée de Laplace de T
$T_{\delta r}$	Réponse indicielle ($^{\circ}C$)
U_{∞}	Vitesse de l'écoulement loin de la paroi (m/s)
x, y, z	Variables d'espace

Symboles grecs

λ_s	Conductivité thermique du solide ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
λ_f	Conductivité thermique du fluide ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
τ	Temps (s)
φ_i	Flux de chauffage incident (W.m^{-2})
Φ	Flux de chaleur (W.m^{-2})
ε	Emissivité
$\delta(t)$	Distribution de Dirac
δ_t	Epaisseur de la couche limite thermique (m)
δ	Epaisseur de la couche limite dynamique (m)
δ_{moy}	Epaisseur de la couche limite dynamique moyenne (m)
φ_n, ψ_m	Fonctions propres du Laplacien
Δ, Δ'	Ecart relatifs
α, β	Valeurs propres du Laplacien
θ	Température en Kelvin
p, q	Variables de la transformée de Laplace
ν	Viscosité cinématique (m^2/s)
Γ	Fonction Gamma

Indices et exposants

c	Convection
r	Rayonnement
cf	Phase de chauffage
re	Phase de refroidissement
moy	Moyenne
∞	Valeur à l'infini
0	Régime permanent
f	fluide
s	solide
*	Problème auxiliaire
n, m, k	Indices de sommation
i	Inférieure
e	Extérieure
N, M	Indices de convergence
c0	Convection en régime permanent
r0	Rayonnement en régime permanent
d	Analogie

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

La connaissance et la bonne maîtrise du coefficient d'échange convectif sont des étapes importantes dans le dimensionnement optimisé de tout procédé industriel faisant intervenir la convection comme mode de transfert de la chaleur.

Les transferts de chaleur par convection ont été essentiellement étudiés en régime permanent, mais la plupart des systèmes thermiques sont soumis à des conditions de fonctionnement variables dans le temps. Leur analyse devient donc essentielle dans certains procédés industriels. C'est pourquoi l'étude des mécanismes fondamentaux de la convection en régime instationnaire constitue actuellement un thème « émergent ».

L'identification expérimentale du coefficient d'échange convectif entre une paroi et un fluide en écoulement est souvent basée sur la mesure du flux et de la température à la surface de la paroi soumise à l'écoulement. Cette identification est le plus souvent réalisée lorsque le régime thermique est permanent dans la paroi. Dans le cas d'expérimentations en régime transitoire dans le solide, les modèles les plus couramment utilisés sont ceux basés sur le principe de la méthode flash appliqué à une paroi. Ce type de méthode n'est pas sans inconvénients, car l'application de l'impulsion de flux peut perturber les couches limites thermique et dynamique ainsi que la prise de mesure de température et/ou du flux à la paroi du solide.

Nous proposons dans ce travail deux méthodes :

La première méthode non destructive, est basée sur la résolution de l'équation de propagation de chaleur dans le solide par la méthode des fonctions de Green, pour la détermination du coefficient d'échange convectif en régime transitoire où la seule mesure effectuée est celle du profil de température superficielle obtenue par une Caméra Infrarouge.

La plaque est chauffée sur sa face inférieure par un créneau de flux de longue durée permettant d'atteindre le régime permanent, évitant la perturbation de la couche limite thermique sur la face supérieure.

Le flux superficiel, non mesuré, est obtenu à partir du profil de température enregistré, couplé au modèle théorique utilisant la méthode des fonctions de Green.

La deuxième méthode est quant à elle basée sur la résolution de l'équation de l'énergie dans le fluide dans le cas d'un flux de chaleur appliqué à l'interface solide-fluide.

Cette démarche originale permet, connaissant le profil de vitesse dans la couche limite dynamique, de déterminer le profil de température dans tout le fluide et ainsi les températures et la couche limite thermique.

Ce mémoire comporte quatre parties principales :

- Le premier chapitre regroupe, sous forme de synthèse bibliographique, les différentes méthodes d'évaluation des coefficients d'échange convectifs dans le cas d'échanges fluide-paroi.
- Le deuxième chapitre présente la modélisation mathématique dans le solide.
- Le troisième chapitre présente la modélisation mathématique dans le fluide.
- Le quatrième chapitre est consacré à la présentation du banc d'essais mis en place de l'instrumentation et des différentes techniques expérimentales utilisées pour la prise de mesures. Ce chapitre regroupe également les résultats et les analyses des essais réalisés.

Chapitre I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Introduction

Notre travail se décompose essentiellement en deux grandes parties qui traitent le problème des échanges convectif entre une plaque plane et un écoulement en convection laminaire forcé en se basant, soit sur la résolution de l'équation de propagation de la chaleur dans le solide et, soit sur la résolution de l'équation de l'énergie couplée avec les équation de Navier-Stokes dans le fluide. L'étude bibliographique sera aussi décomposée en deux parties :

Dans la première partie, on présente les travaux relatifs à l'identification du coefficient de convection en analysant le comportement transitoire à l'intérieur d'une paroi soumise à une perturbation thermique. Cette perturbation peut consister en une variation périodique de la température pariétale ou plus simplement en une impulsion du flux ou de la température pariétale.

D'un point de vue expérimental, les auteurs utilisent dans la plupart des études, pour les relevés de températures des couples thermoélectriques et comme moyen d'excitation, la décharge d'un condensateur. Ces dernières années, on observe l'utilisation de nouvelles techniques mettant en œuvre des méthodes sans contact et complètement non destructives comme les excitations optiques (lampe flash ou laser) et des moyens de mesure photothermique (détecteur infrarouge ou caméra de thermographie infrarouge).

Cette partie bibliographique intitulée "*Méthode impulsionnelle*" est subdivisée en deux sous-parties : la première aborde le cas où l'excitation est produite par un moyen optique et la seconde est consacrée au cas où l'excitation thermique est produite par un effet électrique.

La deuxième partie concerne l'analyse des mécanismes de transfert thermique dans le fluide. La résolution de l'équation de l'énergie couplée aux équations de Navier-Stokes et parfois couplée aussi aux équations de la conduction dans le solide, représente l'essentiel des études présentées. Ces études permettent la détermination de la température et du flux à l'interface fluide-paroi, et puis la détermination du coefficient d'échange convectif.

Dans cette partie, on présente essentiellement le cas de la convection laminaire forcée en régime transitoire obtenue après une élévation brusque de la température du solide. Cette partie de l'analyse bibliographique sera appelée "*convection forcée externe en régime transitoire*".

Il existe bien évidemment, une autre méthode pour mesurer le coefficient d'échange entre une paroi et un fluide en écoulement basée sur l'utilisation de fluxmètres thermiques, qui déterminent en régime permanent, la quantité de chaleur traversant la paroi du solide. Associé à la mesure de deux températures, le flux de chaleur ainsi mesuré permet de calculer un coefficient d'échange par convection.

1.2 Méthode impulsienne

Le principe sur lequel reposent les techniques de la méthode impulsienne est inspiré de la méthode flash, développée par **Parker** [1] et son équipe en 1961 pour la caractérisation des matériaux et, en particulier, pour la mesure de leur diffusivité thermique. Cette méthode consiste à mesurer la réponse en température d'une plaque plane d'épaisseur finie, initialement à l'équilibre thermique, à une sollicitation en Dirac de flux sur l'une de ses faces.

Par la suite, la méthode flash a été considérablement développée par les chercheurs dans des buts aussi divers que la détermination des propriétés thermophysiques des matériaux, la mesure des résistances de contact [2], ou encore l'étude de la réponse d'un thermocouple [3]. Citons par exemple les travaux de **Degiovanni** [4,5,6] et **Balageas** [4] sur la mesure de la diffusivité thermique des matériaux.

La configuration la plus utilisée en méthode flash est celle où le dépôt d'énergie et la mesure de température s'effectuent sur la même face de la plaque. Cette technique présente l'avantage de permettre des mesures même si la face arrière est inaccessible, ou si la plaque de mesure est semi infinie.

Toutes ces méthodes peuvent être classées selon la forme de l'excitation qui prend généralement deux formes : impulsion optique (laser ou lampe flash) ou bien effet électrique (décharge d'un condensateur sur un matériau conducteur électrique provoquant un échauffement par effet Joule). Mais peuvent être aussi classées en fonction de la nature du coefficient d'échange convectif : h supposé constant ou variable pendant la durée du régime transitoire.

1.2.1 Méthode optique

La détermination des transferts convectifs à partir de la thermographie infrarouge a été largement étudiée par **Balageas** et al. [7]. L'utilisation d'une caméra infrarouge associée à une analyse numérique des images par ordinateur, leur a permis de réaliser des cartes de transfert convectif. Ces auteurs ont étudié en particulier le transfert thermique entre un fluide et une paroi dont la modélisation s'appuie principalement sur un système de type mur semi-infini. Dans leur études, ils ont supposé que le coefficient de transfert h et la température de l'écoulement T_∞ , restent constants dans le temps et la

température pariétale de la paroi ne dépend que du coefficient h , de la température T_∞ , de la durée de l'échauffement et de l'effusivité thermique b du matériau constituant la paroi. La détermination expérimentale de l'évolution de la température pariétale dans le temps, leur permet de calculer le coefficient h en utilisant la relation suivante :

$$h = \frac{b}{t^{1/2}} \operatorname{erfcx}^{-1}(1-\theta) \quad (\text{I.1})$$

Avec :

θ : Température adimensionnée $(T_p - T_0)/(T_\infty - T_0)$

Pour diminuer les temps de calculs, la fonction $\operatorname{erfcx}^{-1}$ a été approchée avec une grande précision par des expressions polynomiales. Dans le but de généraliser ce type de mesure à d'autres systèmes thermiques, les auteurs étudient les effets de l'épaisseur finie dans deux cas : quand la face arrière de la paroi est isolée thermiquement ou bien quand elle est supposée à température constante. Dans le premier cas la température de la plaque baignée par l'écoulement est donnée en fonction du nombre de Biot et Fourier par la formule suivante :

$$\theta(0,t) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\operatorname{Bi}_e}{\operatorname{Bi}_e(1+\operatorname{Bi}_e) + \alpha_i^2} e^{-\alpha_i^2 \cdot \operatorname{Fo}_e} \quad (\text{I.2})$$

Avec : $\operatorname{Bi}_e = he/\lambda$

Les coefficients α_i étant les racines positives de l'équation : $\alpha_i \operatorname{tg}(\alpha_i) = \operatorname{Bi}_e$.

Dans le second cas, la solution est :

$$\theta(0,t) = \frac{1}{1+\operatorname{Bi}_e} \left[1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(\operatorname{Bi}_e+1)}{\operatorname{Bi}_e(1+\operatorname{Bi}_e) + \beta_j^2} e^{-\beta_j^2 \cdot \operatorname{Fo}_e} \right] \quad (\text{I.3})$$

Les coefficients β_j étant les racines positives de l'équation : $\beta_j \cotg(\beta_j) + \operatorname{Bi}_e = 0$

Pour chaque cas, les auteurs donnent sous forme polynomiale, l'écart sur la mesure de h entre le modèle mur semi-infini et le système d'épaisseur finie. Ils ont pu mettre en évidence l'existence de corrélations entre cet écart et des groupements adimensionnels formés à partir des nombres de Fourier et de Biot relatifs à l'épaisseur de la paroi.

Balageas et al. [8,9] proposent également une autre méthode de thermographie pour évaluer les pertes convectives d'un système afin de corriger des thermogrammes issus d'expériences de photothermique impulsionnelle.

Ils considèrent le cas d'un milieu plan semi-infini ou un milieu plan d'épaisseur finie. Durant les premiers instants de l'expérience, le dépôt d'énergie impulsionnelle se fait sur la face avant (face en contact avec l'écoulement d'air) de durée infiniment petite et de densité "Q".

L'échauffement de la face avant peut s'écrire en fonction des nombres de Fourier et de Biot :

$$\theta_{Bi}(t) \sim \frac{Q}{b\sqrt{\pi t}} \left\{ 1 - \sqrt{\pi} Bi \sqrt{Fo} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} Bi \sqrt{Fo} \right) \right\} \quad (I.4)$$

Ils déduisent ensuite pour un nombre de Biot nul l'échauffement sans perte donnée par l'expression :

$$\theta_{Bi=0}(t) = \frac{Q}{b\sqrt{\pi t}} \quad (I.5)$$

A l'aide de l'équation (I.4), connaissant le thermogramme expérimental avec perte $\theta_{Bi}(t)$, ils déduisent le thermogramme sans perte $\theta_{Bi=0}(t)$:

$$\theta_{Bi=0}(t) \sim \theta_{Bi}(t) \left\{ 1 + \sqrt{\pi} Bi \sqrt{Fo} \left(1 + \frac{\pi-2}{\sqrt{\pi}} Bi \sqrt{Fo} \right) \right\} \quad (I.6)$$

Le thermogramme corrigé peut ensuite être utilisé pour identifier l'effusivité ou la diffusivité du milieu. Cette méthode impose évidemment de connaître la valeur du coefficient h . A l'inverse, les auteurs étendent l'étude à la détermination des coefficients de transferts convectifs, où les propriétés thermiques et dimensionnelles de l'échantillon sont parfaitement connues. Ils calculent la valeur de h à partir d'un thermogramme expérimental avec perte et d'un thermogramme sans perte (absence d'écoulement). La relation (I.6) devient une équation de second degré en h dont la racine positive est la valeur cherchée du coefficient d'échange.

Par l'application de la même méthode, des relations empiriques analogues à l'expression (I.6) sont aussi données dans le cas d'un mur d'épaisseur finie dont la face arrière est isolée ou bien soumise à la même condition de Fourier mais ces relations ne sont applicables que pour des intervalles limités de nombres de Biot et de Fourier.

Vu l'inconvénient de la méthode proposée précédemment, les auteurs étendent leur étude à une méthode globale, prenant en compte l'ensemble des points du thermogramme. Elle consiste à considérer le moment temporel d'ordre 0 de la température : $M_0 = \int_0^{\infty} \theta(t) dt$. Ce moment a été calculé par la méthode des fonctions de

Green transformées de Fourier. Pour un mur d'épaisseur L soumis à une impulsion de Dirac et n'importe quelle condition aux limites, ils aboutissent à l'expression suivante :

$$M_0 = Q \left[\frac{1+r}{2jkq} \frac{1+r' \exp(-2jqL)}{1-r' \exp(-2jqL)} \right]_{q=0} \quad (I.7)$$

q , k et j sont respectivement les variables de Laplace, de Fourier et du nombre complexe.

r et r' sont les coefficients de réflexion de l'onde thermique, respectivement sur les deux face avant et arrière de l'échantillon. Sur la face avant, le coefficient r est lié au coefficient d'échange h par : $r = (jq - h)/(jq + h)$. Sur la face arrière, il dépend des conditions imposées :

$r' = 0$ pour un milieu semi-infini ;

$r' = r$ pour un échantillon subissant des pertes identiques sur les deux faces ;

$r' = 1$ pour une face arrière isolée thermiquement.

L'équation (I.7) permet de calculer le moment temporel pour chaque condition imposée.

Les auteurs trouvent alors :

$$\text{Mur semi-infini : } M_0 = \frac{Q}{h}$$

$$\text{Mur d'épaisseur finie avec face arrière isolée : } M_0 = \frac{Q}{h}$$

$$\text{Mur d'épaisseur finie avec condition de Fourier sur les deux faces : } M_0 = \frac{Q}{h} \frac{1+Bi}{2+Bi}$$

L'utilisation des moments temporels d'ordre 0 se heurte au fait que la convergence de l'intégrale sera d'autant plus longue que les pertes seront faibles, alors qu'expérimentalement les bornes d'intégration sont finies.

Les difficultés expérimentales rencontrées lors d'une telle identification du coefficient de convection, lorsque ce dernier est faible, sont exposées par **Remy et al [10]**. Pour la détermination de ces coefficients les auteurs ont proposé différents modèles de complexité plus ou moins grande. En particulier, une méthode dite à deux flashes permet la réduction du nombre de paramètres à identifier et l'estimation des coefficients d'échange s'étendant du cas de la convection forcée jusqu'à des valeurs proches de celles de la convection naturelle.

Crowther [11] a mesuré le coefficient d'échange convectif naturel et forcé sur une plaque plane. Pour une excitation de type Dirac sur une paroi semi infinie, il définit un moment temporel d'ordre 0 m_0 à partir de l'expression analytique de la température pariétale pour une excitation impulsionnelle :

$$m_0(t) = \frac{W}{h} \left\{ 1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{h\sqrt{t}}{b} \right) \right\} \quad (\text{I.8})$$

Connaissant les propriétés thermophysique du matériau, le temps et la densité d'énergie W , il détermine la courbe $Bi\sqrt{Fo} = f(m_0)$, cette expression lui permet à partir de la valeur de m_0 expérimental de calculer le groupement $Bi\sqrt{Fo}$ et donc le coefficient h

par : $h = \frac{b}{\sqrt{t}} f \left(\frac{m_0(t)b}{W\sqrt{t}} \right)$; la fonction f est approximée par un polynôme du troisième

degré calculé à partir de valeurs numériques issus de la relation (I.8) :

$$\text{Soit : } m_0^* = \frac{m_0(t)b}{W\sqrt{t}} ;$$

$$f(m_0^*) = 5,48 - 13,53 m_0^* + 12,39 (m_0^*)^2 - 4,19 (m_0^*)^3 \quad (\text{I.9})$$

Cette dernière relation est valable pour des valeurs de m_0^* comprises entre 0,3 et 1,1.

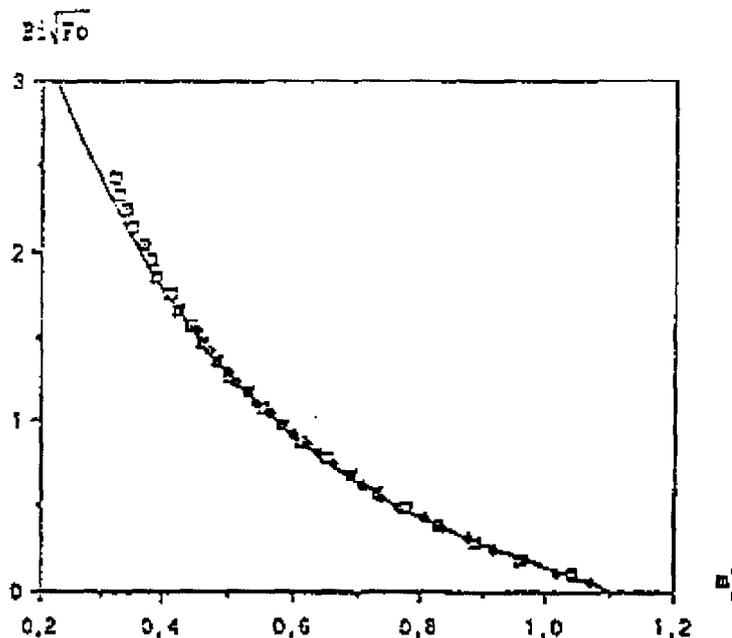


Figure I.1 : Evolution de $Bi\sqrt{Fo}$ en fonction de m_0^*

Pour l'amélioration de l'identification des échanges convectifs entre une plaque plane chauffée uniformément et un écoulement, **Lachi et al. [12, 13]** utilisent un modèle où le coefficient d'échange est supposé constant pendant l'expérience impulsionnelle, et un autre modèle où ils tiennent compte de sa variation dans le temps. Le chauffage de la plaque est assuré par des lampes du même côté que l'écoulement d'air.

Dans le modèle à coefficient d'échange constant, les auteurs supposent que l'énergie émise par les lampes ne perturbe pas les couches limites thermique et dynamique. Le modèle de température choisi est celui obtenu par conduction dans un milieu semi-infini soumis à flux de type Dirac superposé à un échange convectif avec un coefficient constant.

Les auteurs analysent également le cas où la plaque est soumise à un flux de chauffage de type créneau. Le modèle analytique utilisé est obtenu par application du produit de convolution au modèle précédent avec Dirac.

La détermination du coefficient d'échange constant est basée sur la méthode d'identification de paramètres. Les auteurs cherchent alors la valeur du coefficient d'échange h par minimisation des écarts entre le thermogramme expérimental obtenu par une caméra infrarouge et le modèle analytique.

Dans le modèle à coefficient d'échange variable, les auteurs supposent que la couche limite thermique dépend du temps, sous l'action de l'impulsion de flux envoyée par les

lampes. En écrivant les équations de l'énergie et de la conservation de la masse, puis en introduisant la couche limite dynamique et une fonction de courant particulière, ils aboutissent à l'équation différentielle de Blasius. L'extension de la méthode différentielle au régime variable leur a permis de transformer l'équation de l'énergie en équation différentielle qu'ils ont résolu numériquement en même temps que l'équation de Blasius.

Les résultats des auteurs montrent qu'à la suite d'une impulsion brève de type Dirac, le coefficient "h" peut être considéré comme constant car la couche limite n'est pas affectée. Par contre, dans le cas d'une impulsion longue, de types créneau de flux, la couche limite est modifiée et l'hypothèse d'un coefficient h constant n'est plus envisageable. Le modèle de h variable donne dans ce cas de meilleurs résultats, et ceci d'autant plus que la durée du créneau s'allonge ou que la vitesse du fluide augmente.

I.2.2 Excitation thermique par effet électrique

On trouve dans la littérature plusieurs travaux utilisant cette technique dont le but est de caractériser le coefficient d'échange convectif en analysant le régime de relaxation d'une paroi soumise à la décharge électrique d'un condensateur. Parmi ces travaux, on cite ceux de **Petit et al.** [14], **Massard et al.** [15]. Les premiers auteurs identifient le coefficient de convection entre un tube cylindrique et un fluide en écoulement interne en utilisant deux modèles. Dans le premier modèle, les auteurs considèrent que la température du fluide (eau) est constante et cherchent la solution de l'équation de propagation de chaleur dans la paroi par la méthode de séparation des variables. Cette solution a la forme d'une série exponentielle :

$$T_i(M,t) = \sum_{k=1}^n B_{ik} V_{ik}(M) e^{-K_k t} \quad (I.10)$$

Avec : $K_k = -a_1 \omega_{1k}^2 = -a_2 \omega_{2k}^2 = \dots = -a_i \omega_{ik}^2$

i : indice du matériau,

$V_{ik}(M)$: fonctions dépendant de la position du point M,

B_{ik} : constantes à déterminer, à l'aide des conditions limites spatio-temporelles,

ω : solutions d'une équation transcendante.

Le deuxième modèle tient compte de la variation de la température du fluide (air) en traitant les équations de couplage solide-fluide. La résolution de ces équations se fait en utilisant la transformation de Laplace. Le calcul, permet de déterminer les profils de température dans le fluide $\theta(z,t)$ et ainsi dans la paroi $T(z,t)$ sous forme de séries :

$$\theta(z,t) = \frac{K_1 T_0 z}{v} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{K_1 z/v}{n} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(-K_2)^{i-1} t^{i-1}}{(i-1)! (n-i)!} \right] \right\} e^{-(K_2 + K_3)t} \quad (I.11)$$

$$T(z,t) = \left\{ T_0 + \frac{K_1 T_0 K_2 Z}{v} \left[\sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \frac{(K_1 Z/v)^{n-2}}{n-1} \left[\sum_{i=2}^n \frac{(-K_2)^{i-2} t^{i-1}}{(i-2)!(i-1)!(n-i)!} \right] \right] \right\} e^{-(K_2+K_3)t} \quad (I.12)$$

v : vitesse moyenne dans la section z .

T_0 : température initiale.

K_1, K_2, K_3 : constantes dépendant de caractéristiques du matériau et de sa géométrie.

Dans les deux cas, la vitesse du fluide est supposée uniforme, les échanges de chaleur solide-fluide sont représentés par un coefficient d'échange constant et les propriétés thermophysiques de la paroi et du fluide sont constantes.

Les auteurs définissent comme référence la température du thermogramme au moment à partir duquel le régime de relaxation prend une allure exponentielle. Dans cette portion de courbe, ils déterminent le temps nécessaire (t_e) pour lequel la température de la paroi

devienne égale à $\frac{1}{e} T_{ref}$. Ils montrent qu'à chaque valeur de ce temps, correspond une valeur du coefficient d'échange. Ils montrent également, que la valeur du saut de température initial, provoqué par la décharge du condensateur, n'a pas d'influence sur le coefficient d'échange. Les résultats obtenus sont en bon accord avec des corrélations usuelles.

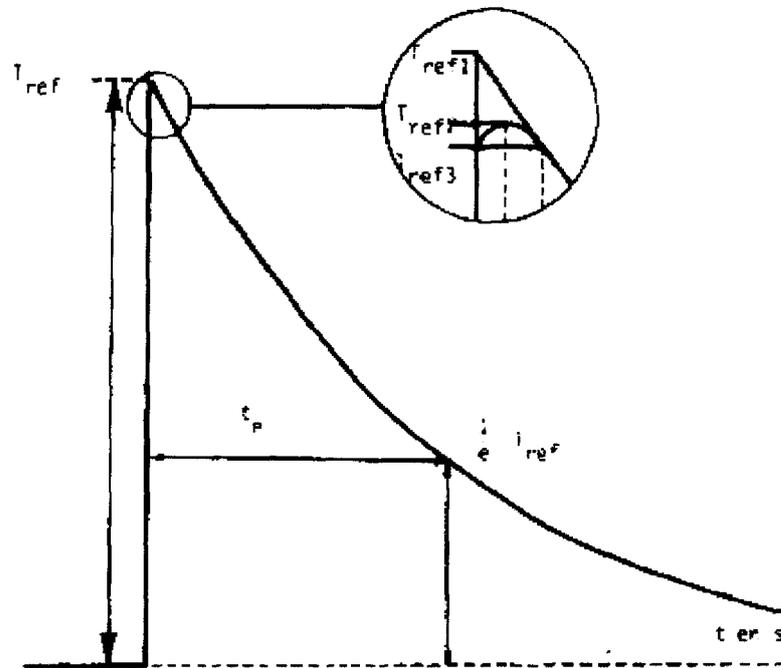


Figure I.2 : Evolution temporelle de la température en régime de relaxation

Massard et al [15] généralisent la méthode précédente en adoptant un modèle qui prend en compte non seulement la conduction axiale mais aussi les perturbations induites par

les électrodes par lesquelles s'effectue la décharge. Les auteurs déterminent les variations spatio-temporelles du coefficient d'échange convectif, à partir de la connaissance du flux et la température instantanée à la surface. Ils trouvent d'une part, un coefficient h constant en fonction du temps dans la zone où le régime thermique est établi et d'autre part, un h qui diminue très rapidement lorsque l'abscisse du point considéré augmente pour prendre une valeur constante.

Hadi et Degiovani [16] traitent, dans leur étude, le cas d'une ailette cylindrique de petites dimensions. L'ailette est soumise à deux types d'excitations : impulsion ou créneau. Les auteurs utilisent la méthode du moment temporel pour calculer la valeur du coefficient d'échange issue du thermogramme expérimental. La valeur de h retenue est celle qui assure l'égalité des moments temporels m_0 expérimental et théorique. Les résultats expérimentaux s'avèrent en bon accord avec ceux fournis par les corrélations.

Le cas d'une perturbation sinusoïdale de la température ou du flux sur une plaque plane, est abordé par **Aboudi et al. [17]**. Les auteurs ont réalisé des cartographies de transfert thermique à l'aide d'une camera de thermographie infrarouge. A l'aide d'un bilan enthalpique sur l'ensemble du système, ils expriment le coefficient h en fonction de la densité de flux transmis au fluide, de la température de la paroi et de la température du fluide. Toutes ces grandeurs sont des fonctions de l'espace et du temps.

I.3 Convection forcée externe en régime transitoire

L'étude de la couche limite laminaire en régime transitoire est le plus souvent basée sur le fait que seul le régime thermique, consécutif à une variation brusque des conditions aux limites thermiques, est instationnaire. Le régime dynamique est supposé permanent et indépendant du champ de température, ce qui implique que les fluides soient non thermodépendants, et newtoniens.

Nous analyserons donc ici les principaux travaux concernant la convection laminaire externe en régime transitoire, inhérente à une variation brusque des conditions aux limites thermiques. Trois types de variations brusques des conditions thermiques sont analysés dans la littérature : échelon de température à la paroi, variation du flux pariétal et changement brusque de la température de l'écoulement. Parmi ces trois types, nous nous intéressons dans cette partie essentiellement à la variation du flux pariétal. La condition de flux imposé à la paroi se rencontre certainement plus souvent que celle d'une température pariétale imposée, car elle correspond à des situations expérimentales plus proches de réalisations courantes (rayonnement reçu par la paroi, puissance dégagée par effet Joule).

I.3.1 Plaque plane d'épaisseur nulle

L'étude du régime transitoire en convection laminaire forcée sur une plaque plane d'épaisseur nulle a été exposée pour la première fois 1957 par **Sparrow** et **Gregg** [18] et en 1961 par **Cess** [19].

Vu les besoins accrus dans le contrôle thermique de différents types d'échangeurs rencontrés dans les équipements aérospatiaux, les systèmes d'énergie nucléaire, les systèmes chimiques et, plus récemment, dans les paquets électroniques et la physique des bâtiments, plusieurs méthodes ont été développées pour résoudre les équations de Navier-Stokes et celles de la couche limite en régime transitoire et permanent.

Parmi les auteurs qui ont étudié le régime transitoire de convection laminaire forcée quand le flux pariétal subit un échelon, citons **Adams, Gebhart** [20], **Polidori et al.** [21]. Ces auteurs ont étendu la méthode intégrale de Karman – Pohlhausen au régime instationnaire. Ils ont adopté plusieurs profils de vitesses dans la couche limite dynamique stationnaire et un profil d'ordre deux pour la température dans la couche limite thermique transitoire.

Quand la plaque est isolée et de capacité calorifique nulle, c'est à dire qu'elle n'intervient pas dans le transfert de chaleur, **Adams et Gebhart** [20] ont montré que la différence entre l'évolution temporelle de la température pariétale en convection forcée, pour un profil de vitesse d'ordre trois, et la solution de la conduction dans un milieu solide semi-infini, était inférieure à 10 %.

Polidori et al. [21], caractérisent le coefficient d'échange convectif entre une couche limite dynamique établie et une plaque d'épaisseur nulle, soumise à un flux variable dans l'espace. Ce flux de chaleur est entièrement réfléchi dans le fluide compte tenu des propriétés de la plaque. La solution du problème est déduite de la méthode de Karman-Pohlhausen.

Le flux imposé à $t > 0$ est :

$$\varphi_0 = -\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{y=0}$$

Le champ de température dans le fluide est défini par un polynôme de la forme :

$$\theta = \frac{\theta_p}{\delta_T^2} y^2 - 2 \frac{\theta_p}{\delta_T} y + \theta_p \quad (\text{I.13})$$

L'épaisseur de la couche limite thermique est alors déduite en remplaçant le terme $\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{y=0}$ par l'expression du flux :

$$\delta_T = \frac{2\lambda_f \theta_p}{\varphi_0} \quad (\text{I.14})$$

L'équation polynomiale du champ de vitesse est quant à elle de la forme :

$$U = U_{\infty} \left(\frac{2y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{5x}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad (\text{I.15})$$

La forme semi intégrale de l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\int_0^{\delta\tau} \frac{\partial\theta}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta\tau} \theta U dy = -a_f \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} \quad (\text{I.16})$$

Les auteurs intègrent ensuite cette équation en remplaçant U et θ par leurs expressions. Puis dans l'expression intégrée, ils remplacent l'expression de la couche limite thermique par son expression en fonction du flux et des températures. Connaissant le profil de température de la plaque, ils calculent ensuite, en faisant appel à la méthode des différences finies, le coefficient d'échange convectif à partir de la relation de Newton en considérant que la valeur du flux $\phi_p(x,t)$ est égale à ϕ_0 , grâce à l'hypothèse stipulant que la totalité du flux est réfléchi par la plaque.

Les auteurs montrent, d'après les résultats expérimentaux, que l'évolution temporelle de la température à la paroi peut être approchée par une loi exponentielle avec une seule constante de temps : $\theta_p(x,t) = \theta_{p0}(x)e^{-t/\tau} + F(x)$

L'évolution spatiale et temporelle de la température pariétale et du coefficient d'échange convectif a été analysée et un bon accord est observé entre le coefficient d'échange convectif instationnaire obtenu numériquement et analytiquement à partir de la loi de régression exponentielle :

$$h(x,t) = 0.435 \lambda_f \text{Pr}^{1/3} \left(\frac{\rho U_{\infty}}{\mu x} \right)^{1/2} \left(1 - e^{-t/\tau(x)} \right)^{-1} \quad (\text{I.17})$$

Une bonne corrélation existe entre les différents résultats des auteurs, ce qui leur permet de conclure qu'il est possible de résoudre certains problèmes de convection en utilisant uniquement une approche analytique.

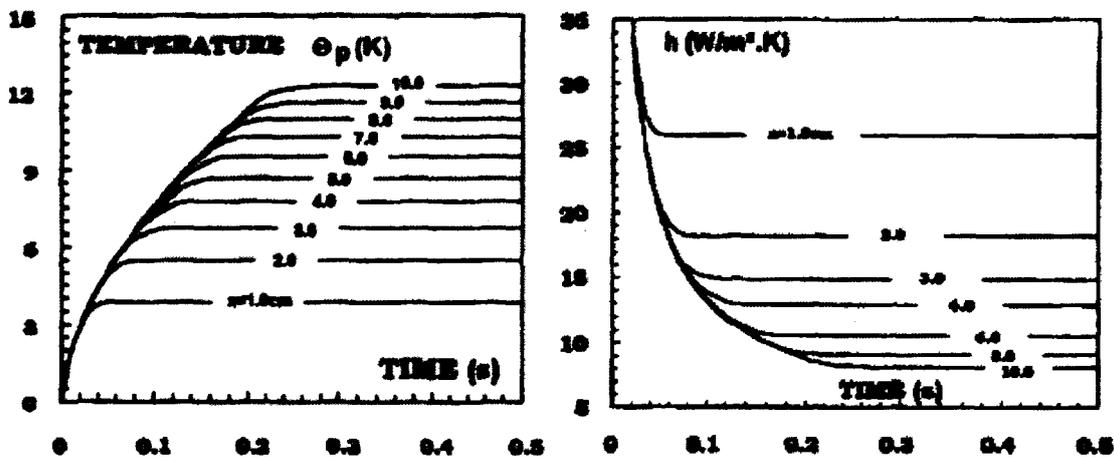


Figure I.3 : thermogramme temporel ; Figure I.4 : coefficient d'échange convectif

Rebay [22] traite le même problème avec la méthode différentielle. Le cas traité concerne toujours une plaque d'épaisseur nulle, en convection laminaire transitoire. Le régime instationnaire apparaît lorsqu'un échelon de flux positif ou négatif est appliqué sous forme d'échauffement ou sous forme de relaxation. Les variations du coefficient d'échange convectif sont étudiées pour différentes valeurs du nombre de Prandtl. Pour un nombre de Prandtl donné, le régime instationnaire dure plus longtemps pour un échelon de flux que pour un échelon de température. La durée du régime instationnaire augmente pour un nombre de Prandtl plus élevé correspondant à la diminution de l'épaisseur de la couche limite thermique.

I.3.2 Couplage fluide-solide (plaque plane avec ou sans capacité calorifique)

De nombreux travaux ont été menés pour l'étude du transfert thermique couplé convection-conduction. La plupart des problèmes de transfert thermique concernant la conduction dans le solide et la convection dans le fluide adjacent. Généralement les problèmes de cette famille sont classés comme problèmes de transfert thermique conjugués ou couplés.

Dans le cas de la convection forcée externe sur une plaque plane, **Suces [23]** étudie l'influence de la chaleur spécifique de la paroi en convection instationnaire, en considérant que la plaque est thermiquement mince. **Chambré [24]** étudie le transfert thermique transitoire pour un écoulement sur une plaque plane avec une grande capacité spécifique de la paroi et une résistance thermique nulle, mais avec une source interne variable dans le temps. **Soliman [25]** et **Chung [26]** étudient le même problème en régime turbulent.

Lachi et al. [27, 28] ont étudié les échanges thermiques avec couplage conduction – convection (capacité calorifique négligeable) entre un écoulement en convection forcée et une plaque plane. Dans leur modèle, ils considèrent le cas d'une plaque plane de longueur semi-infinie et d'épaisseur finie mais négligent la conduction longitudinale en supposant que la longueur de la plaque est très supérieure à son épaisseur. Cette plaque est soumise à un échelon de flux uniforme φ_0 sur toute sa face en contact avec le fluide. L'échelon de flux généré sur l'interface solide-fluide est, supposé, absorbé en partie par le solide et en partie rejeté dans le fluide.

Les auteurs déterminent les profils de température et de vitesse dans le fluide, en utilisant la méthode de Karman – Pohlhausen, et le profil de température dans la plaque à partir d'un modèle analytique. Ces profils sont ensuite injectés dans l'équation intégrale de l'énergie au sein de la couche limite thermique, qui est intégrée puis résolue en utilisant les conditions aux limites. La résolution numérique est réalisée à l'aide de la méthode de différence finie (schéma explicite). La connaissance du profil de

température à l'interface $\theta_p(x,t)$, permet alors de remonter au coefficient d'échange

convectif local et instantané par la relation : $h(x,t) = \frac{\varphi_f(x,t)}{\theta_p(x,t)}$

Les auteurs déduisent alors que les évolutions spatiales de la température à l'interface, paramétrées par le temps, sont monotones croissantes et tendent progressivement vers des valeurs caractéristiques du régime d'équilibre thermique. Les évolutions temporelles du coefficient de convection, paramétrées par la position x , sont également monotones mais décroissent très rapidement au débit de la phase transitoire pour tendre vers des valeurs limites correspondant aux valeurs du régime permanent.

D'autres auteurs se sont attachés à l'étude du même problème en prenant en compte cette fois, l'épaisseur de la paroi ainsi que sa capacité calorifique.

Wang et al. [29] ont considéré le cas d'un échelon de flux appliqué à la face inférieure d'une plaque d'épaisseur finie (l'écoulement principal ayant lieu sur la face supérieure). Ils ont également utilisé la méthode intégrale pour réduire l'équation aux dérivées partielles de l'énergie à une simple équation intégro-différentielle dont l'inconnue est la température à l'interface fluide-paroi. L'équation obtenue est résolue numériquement en utilisant une technique de différence finie. Les auteurs analysent deux cas d'écoulement : un écoulement pariétal cisailé (profil de vitesse uniforme), et un écoulement dont le profil de vitesse dans la couche limite est du troisième ordre. Les auteurs montrent qu'à une abscisse donnée, le coefficient d'échange part d'une valeur relativement élevée pour tendre vers une valeur asymptotique décrivant le régime permanent. Ce coefficient peut passer par un minimum pour les écoulements cisailés. Ils notent également qu'une capacité calorifique élevée de la paroi tend à diminuer la température à l'interface ainsi que le coefficient d'échange convectif. En outre, ils ont démontré que l'effet de la capacité thermique est négligeable en régime permanent.

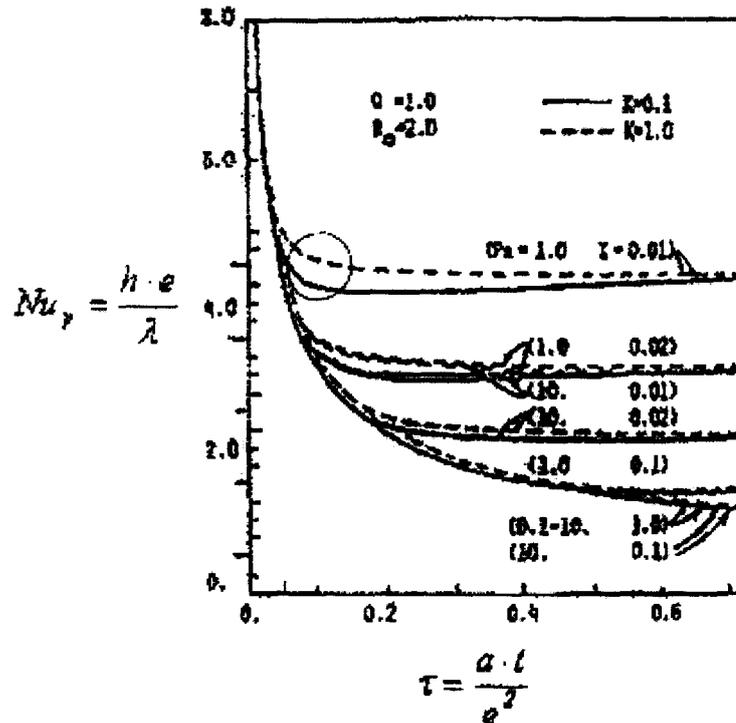


Figure I.5 : L'influence de la conductivité thermique sur la variation du nombre de Nu

I.4 Conclusion

Les travaux décrits dans cette partie bibliographique visent à calculer le profil de température à l'interface fluide-solide et par conséquent l'identification du coefficient d'échange convectif en régime transitoire. La complexité du problème augmente au fur et à mesure que les caractéristiques de la plaque interviennent dans les calculs. Dans ces conditions, le transfert de chaleur devient un transfert couplé. Les études présentées ont montré que l'épaisseur de la plaque a une influence sur le transfert thermique et par conséquent sur l'évolution du coefficient d'échange convectif.

Quant à l'identification du coefficient d'échange par méthode impulsionnelle, les résultats de la littérature permettent difficilement d'apporter une conclusion définitive sur le phénomène de couplage conduction-convection. De ce fait, la perturbation du transfert par l'apport d'énergie pendant l'expérience impulsionnelle, nécessite encore des études plus approfondies.

Dans notre travail, en plus des échelons positifs (échauffement) occasionnés par un flux imposé à la paroi d'une plaque plane, nous traitons le cas des échelons négatifs (relaxation) obtenues par une diminution brusque de flux de chauffage. Le traitement du problème complet d'échauffement + relaxation dans le but de dégager une loi d'évolution temporelle des échanges est relativement innovant et n'a pas été traité dans la littérature jusqu'à maintenant.

Chapitre II

MODELISATION DANS LE SOLIDE

CHAPITRE II : MODELISATION DANS LE SOLIDE

II.1 Introduction

Les méthodes de type différences finies, volumes finis ou éléments finis, utilisées dans l'étude du comportement thermique des objets, sont basées sur la discrétisation spatiale des éléments les constituant. Ces méthodes qui permettent de tenir compte de l'inertie de l'objet, ne fournissent des résultats corrects que si la discrétisation est très fine, ce qui entraîne un allongement des temps de calculs. Nous proposons dans ce travail des méthodes analytiques basées sur la théorie des fonctions de Green, permettant de s'affranchir de ces problèmes.

L'étude du comportement thermique d'une plaque plane soumise à des conditions aux limites variables exige une étude des phénomènes de transfert de chaleur en régime instationnaire. Pour cela, nous avons élaboré dans ce travail un modèle mathématique basé sur la théorie des fonctions de Green à partir de la résolution de l'équation de propagation de la chaleur dans la plaque plane.

La méthode de la fonction de Green, très connue dans de nombreux domaines de la physique où elle s'est définitivement imposée, est encore assez peu utilisée en thermique. Son avantage principal est qu'elle permet de synthétiser le comportement thermique d'une structure solide même complexe. Cet avantage peut à priori paraître purement formel mais il n'en est rien car, comme nous le verrons, cette formulation s'accommode d'hypothèses physiques, concernant les conditions limites, moins restrictives que les méthodes utilisées habituellement, et montre comment traiter des problèmes complexes comme, par exemple, celui des échanges convectifs dépendant du temps.

On se place dans le cas d'une plaque plane constituée d'un matériau homogène, chauffée pendant un temps t_1 sur sa face inférieure par un flux de rayonnement $\varphi_i(t) = \varphi_0$ uniforme et constant puis refroidie grâce à une diminution brusque de ce flux. Cette plaque est soumise sur sa surface supérieure à un écoulement d'air de vitesse U_∞ et de température T_∞ (figure II.1). Le transfert de chaleur superficiel sur la face inférieure est caractérisé par un coefficient d'échange convectif global h_i^0 , constant déterminé à partir des lois de la convection naturelle sur plaque plane. Le champ de température dans la plaque est supposé unidirectionnel et est désigné par $T(x,t)$. La température de la face supérieure de la plaque est mesurée pendant les phases de chauffage (intervalle de temps $0 \leq t \leq t_1$) et de relaxation pour ($t \geq t_1$). Les modèles thermocinétiques développés dans ce travail permettront de définir et de déterminer les échanges convectifs dépendant du temps t .

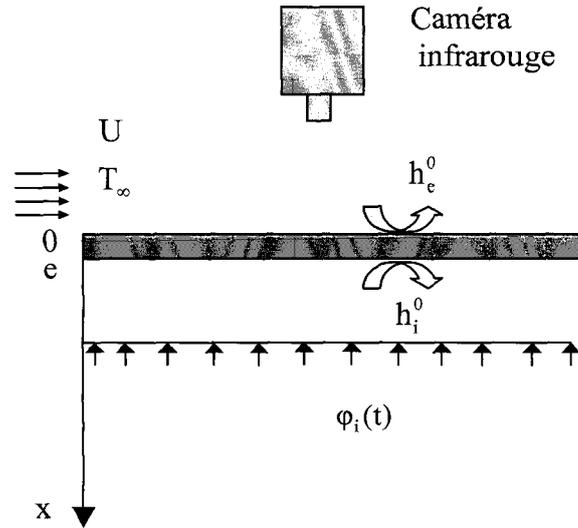


Figure II.1: Représentation schématique des conditions aux limites sur la plaque

II.2 Modèle 1 : Température imposée en $x = 0$

A l'instant initial, l'ensemble du système est à la température ambiante T_∞ . Cette température est prise comme origine des températures et toutes les températures seront dans ce qui suit, évaluées par rapport à celle-ci.

II.2.1 Equation de propagation de la chaleur

La propagation de la chaleur dans la plaque plane est supposée unidirectionnelle, et suit la loi de conduction :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} a = \frac{\lambda_s}{\rho c_p} \\ \lambda_s : \text{conductivité thermique} \\ \rho c_p : \text{chaleur spécifique volumique} \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec la condition initiale : $T(x,0) = T_0(x) = 0$

II.2.2 Conditions limites

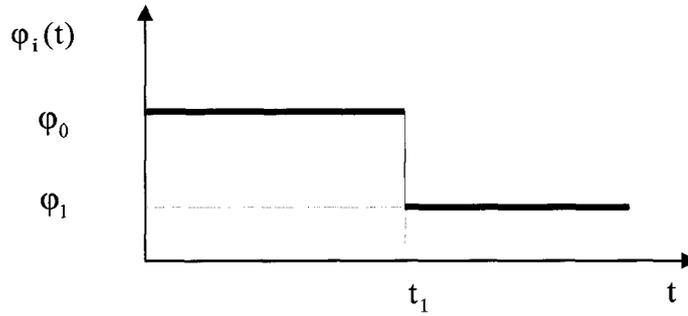
La condition limite sur la face inférieure $x = e$ s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)|_{x=e} = -H_i^0 T(e,t) + \frac{\varphi_i(t)}{\lambda_s} \quad (\text{II.2})$$

$$\text{Avec :} \quad H_i^0 = \frac{h_i^0}{\lambda_s} \quad \text{et} \quad \varphi_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \varphi_0 & \text{si } 0 < t \leq t_1 \\ \varphi_1 < \varphi_0 & \text{si } t > t_1 \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

$\varphi_i(t)$: flux de rayonnement absorbé par la plaque.

h_i^0 : représente le coefficient d'échange thermique en régime permanent sur la face inférieure.



Sur la face supérieure $x = 0$, la condition limite s'écrit :

$$T(0,t) = f(t) \quad (\text{II.4})$$

Où $f(t)$ sera dans ce cas la température superficielle enregistrée par la caméra infrarouge.

La solution du problème (II.1–4) peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux solutions :

$$T(x,t) = T_1(x,t) + T_2(x,t) \quad (\text{II.5})$$

$T_1(x,t)$: solution du problème avec une température nulle en $x = 0$.

$T_2(x,t)$: solution du problème avec un flux absorbé nul $\varphi_i(t) = 0$.

L'équation (II.1) appliquée à T_1 et T_2 devient :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T_j(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 T_j(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad j=1 \quad \text{ou} \quad 2 \quad (\text{II.6})$$

Avec les conditions limites :

$$\begin{cases} T_1(0,t) = 0 \\ \frac{\partial T_1}{\partial x}(x,t)|_{x=e} = -H_i^0 T_1(e,t) + \frac{\varphi_i(t)}{\lambda_s} \\ T_1(x,0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

et

$$\begin{cases} T_2(0,t) = f(t) \\ \frac{\partial T_2}{\partial x}(x,t)|_{x=e} = -H_i^0 T_2(e,t) \\ T_2(x,0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

II.2.3 Recherche de la solution $T_1(x,t)$ par la théorie des fonctions de Green

La fonction de Green $G(x,x',t)$ représente la réponse de la plaque à une impulsion de chaleur unité apportée au point x' à l'instant $t = 0$. La fonction de Green existe toujours et est unique et continue pour les temps strictement positifs. Lorsque $t \rightarrow 0_+$ elle tend vers la distribution de Dirac : $\delta(x - x')\delta(t)$

Pour résoudre analytiquement l'équation de propagation de la chaleur dans la plaque plane, définissons la fonction $G(x,\xi,t)$ comme solution du problème suivant :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial G}{\partial t}(x,x',t) - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,x',t) = \delta(x - x')\delta(t) \quad (\text{II.9})$$

$$\text{Avec} \quad G(x,x',t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leq 0 \quad (\text{II.10})$$

Nous imposons à cette fonction de Green $G(x,\xi,t)$ de vérifier les conditions aux limites :

$$\begin{cases} G(0,x',t) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,x',t)|_{x=e} = -H_1^0 G(e,x',t) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Prenons les transformées de Laplace des équations (II.1) et (II.9) :

$$\begin{cases} \frac{p}{a} \bar{T}(x,p) - \frac{1}{a} T(x,0) - \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2}(x,p) = 0 \\ \frac{p}{a} \bar{G}(x,x',p) - \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2}(x,x',p) = \delta(x-x') \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

En multipliant la première équation par $\bar{G}(x,x',p)$ et la seconde par $\bar{T}(x,p)$, le système (II.12) devient :

$$\begin{cases} \frac{p}{a} \bar{T}\bar{G} - \frac{1}{a} T_0 \bar{G} - \bar{G} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{p}{a} \bar{G}\bar{T} - \bar{T} \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} = \bar{T}\delta(x-x') \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Nous obtenons après soustraction des deux équations :

$$\frac{1}{a} T_0 \bar{G} + \left(\bar{G} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} - \bar{T} \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} \right) = \bar{T}\delta(x-x') \quad (\text{II.14})$$

En intégrant les deux membres de l'égalité dans l'intervalle $[0, e]$, on obtient :

$$\int_0^e \bar{T}(x,p)\delta(x-x')dx = \int_0^e \frac{\bar{G}(x,x',p)}{a} T_0(x) dx + \int_0^e \left(\bar{G} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} - \bar{T} \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} \right) dx \quad (\text{II.15})$$

Sachant que :

$$\int_0^e \bar{T}(x,p)\delta(x-x')dx = \bar{T}(x',p)$$

Et en développant la deuxième intégrale du second membre de l'équation (II.15), on obtient :

$$\bar{T}(x',p) = \int_0^e \frac{\bar{G}(x,x',p)}{a} T_0(x) dx + \left[\begin{array}{l} \bar{G}(e,x',p) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(x,p) \Big|_{x=e} - \bar{T}(e,p) \frac{\partial \bar{G}}{\partial x}(x,x',p) \Big|_{x=e} \\ -\bar{G}(0,x',p) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(x,p) \Big|_{x=0} + \bar{T}(0,p) \frac{\partial \bar{G}}{\partial x}(x,x',p) \Big|_{x=0} \end{array} \right] \quad (\text{II.16})$$

Les deux termes de l'équation (II.16) sont respectivement, les contributions à la solution générale de la condition initiale et des conditions aux frontières.

"e" représente l'épaisseur de la plaque et G et \bar{G} sont respectivement les valeurs de la fonction de Green et de sa transformée de Laplace, évaluées aux points de frontières 0 et e.

Cette forme de $\bar{T}(x',p)$ est très générale. Dans le cas particulier de T_1 , le premier terme est nul et dans le deuxième terme compte tenu des différentes conditions limites, il ne reste que :

$$\bar{T}_1(x,p) = \frac{1}{\lambda_s} \bar{\varphi}_1(p) \bar{G}(x',e,p) \quad (\text{II.17})$$

La transformée inverse de cette dernière donne :

$$T_1(x,t) = \frac{1}{\lambda_s} \int_0^t \varphi_1(\tau) G(x,e,t-\tau) d\tau \quad (\text{II.18})$$

Cette dernière expression permet, connaissant la fonction de Green et le flux absorbé par la plaque, de déterminer l'évolution de la température $T_1(x,t)$.

II.2.4 Recherche de la solution $T_2(x,t)$ (Théorème de Duhamel)

Le problème dont les conditions aux limites sont de type (II.8) présente une non homogénéité qui peut être traitée en appliquant le théorème de Duhamel.

On rappelle que le théorème de Duhamel ne peut s'appliquer que dans le cas des modèles ne présentant qu'une seule non homogénéité (soit par un terme de source de chaleur dans l'équation de propagation de la chaleur, soit par un terme au niveau des conditions limites). Il faut également que le solide soit initialement à température nulle (Identique à température uniforme en faisant un simple changement de variable).

Les conditions limites du système (II.8) présentent une seule non homogénéité par le terme $f(t)$.

En remplaçant $f(t)$ par 1, on obtient le problème auxiliaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 T^*(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ T^*(x,t) \Big|_{x=0} = 1 \\ \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=e} = -H_1^0 T^*(e,t) \\ T^*(x,0) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.19})$$

L'application de la transformée de Laplace sur les deux problèmes initial et auxiliaire permet d'écrire la relation reliant les deux problèmes :

$$\bar{T}_2(x,p) = p\bar{f}(p)\bar{T}^*(x,p) \quad (\text{II.20})$$

Nous obtenons par l'application du théorème de Duhamel relatif au produit de convolution, l'expression de la température $T_2(x,t)$:

$$T_2(x,t) = \int_0^t \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} T^*(x,t-\tau) d\tau + f(0)T^*(x,t) \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{II.21})$$

La solution du problème auxiliaire $T^*(x,t)$ (II.19) peut s'écrire sous la forme de la somme de deux solutions $u^*(x)$ et $w^*(x,t)$ respectivement du régime permanent et transitoire qui se présentent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} = 0 \\ u^*(0) = 1 \\ \left. \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} \right|_{x=e} = -H_i^0 u^*(e) \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

La solution permanente $u^*(x)$ du système (II.22) s'écrit alors :

$$u^*(x) = 1 - \frac{H_i^0}{H_i e + 1} x \quad (\text{II.23})$$

et

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\partial w^*(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w^*(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ w^*(x,t) \Big|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial w^*(x,t)}{\partial x} \right|_{x=e} = -H_i^0 w^*(e,t) \\ w^*(x,0) = -u^*(x) \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

En utilisant la même démarche que pour la résolution du système (II.7), on obtient comme précédemment une solution similaire à (II.16) avec la condition initiale uniquement, soit :

$$w^*(x,t) = - \int_0^e \frac{G(x,x',t)}{a} u^*(x') dx' \quad (\text{II.25})$$

D'où :

$$T^*(x,t) = u^*(x) - \int_0^e \frac{G(x,x',t)}{a} u^*(x') dx' \quad (\text{II.26})$$

La solution de cette dernière expression est explicitée en (Annexe 1).

En reportant la solution $T^*(x,t)$ dans l'expression (II.21), on obtient :

$$T_2(x,t) = u^*(x)f(t) - \int_0^t \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \int_0^e \frac{G(x,x',t-\tau)}{a} u^*(x') dx' d\tau \quad (\text{II.27})$$

Finalement la solution complète du problème s'écrit :

$$T(x,t) = \frac{1}{\lambda_s} \int_0^t \varphi_i(\tau) G(x,e,t-\tau) d\tau + u^*(x)f(t) - \int_0^t \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \int_0^e \frac{G(x,x',t-\tau)}{a} u^*(x') dx' d\tau \quad (\text{II.28})$$

Cette dernière expression nous permet donc, connaissant les fonctions $\varphi_i(t)$, $f(t)$ et la fonction de Green $G(x,x',t)$, de connaître l'évolution spatiale et temporelle de la température de la plaque plane d'épaisseur e , soumise à un flux de chauffage sur la face opposée à l'écoulement d'air.

La transformée de Laplace $\bar{T}(x,p)$ s'écrit :

$$\bar{T}(x,p) = \frac{1}{\lambda_s} \bar{\varphi}_i(p) \bar{G}(x,e,p) + u^*(x) \bar{f}(p) - p \bar{f}(p) \int_0^e \frac{G(x,x',p)}{a} u^*(x') dx' \quad (\text{II.29})$$

On peut obtenir $\bar{T}(x,p)$ également à partir de l'équation (II.16) :

$$\bar{T}(x,p) = \frac{1}{\lambda_s} \bar{\varphi}_i(p) \bar{G}(x,e,p) + \bar{f}(p) \left. \frac{\partial \bar{G}}{\partial x'}(x,x',p) \right|_{x'=0} \quad (\text{II.30})$$

Ces deux expressions sont en fait équivalentes.

II.2.5 Recherche de la fonction de Green

Il existe deux méthodes classiques pour déterminer la fonction de Green, solution du système (II.9 – II.11) :

- la méthode de séparation de variables
- la méthode de la transformée de Laplace

II.2.5.1 Méthode de séparation de variables

II.2.5.1.1 Définition des fonctions propres et valeurs propres

La méthode de séparation de variables revient en fait, à rechercher les valeurs propres et les fonctions propres $\varphi_n(x)$ de l'opérateur différentiel $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, agissant sur l'espace des fonctions continues dans l'intervalle $x \in [0,e]$.

Cet espace étant muni du produit scalaire $\langle \varphi_n | \psi_m \rangle = \int_0^e \varphi(x) \psi(x) dx$, l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ est hermitien (ou plutôt symétrique, puisque nous n'envisageons que des fonctions réelles).

Ces valeurs propres sont donc réelles, les fonctions propres associées sont orthogonales, et il est toujours possible de les normer : $\langle \varphi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$

Afin de trouver la fonction de Green pour ce problème, nous écrivons les transformées de Laplace du système (II.9 – II.11).

$$\frac{p}{a} \bar{G}(x, x', p) - \frac{\partial^2 \bar{G}(x, x', p)}{\partial x^2} = \delta(x - x') \quad (\text{II.31})$$

$$\begin{cases} \bar{G}(0, x', p) = 0 \\ \left. \frac{\partial \bar{G}}{\partial x}(x, x', p) \right|_{x=e} = -H_i^0 \bar{G}(e, x', p) \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

On montre que l'équation (II.31) a pour solution :

$$\bar{G}(x, x', p) = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x) \psi_n(x')}{p + a\alpha_n^2} \quad (\text{II.33})$$

Où $\psi_n(x)$ et α_n sont respectivement les fonctions propres et les valeurs propres du Laplacien.

La transformée inverse de l'équation (II.33) est :

$$G(x, x', t) = a \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \psi_n(x') e^{-a\alpha_n^2 t} \quad (\text{II.34})$$

L'équation aux valeurs propres associées s'écrit :

$$\frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} + \alpha_n^2 \psi_n(x) = 0 \quad 0 < x < e \quad (\text{II.35})$$

Et admet comme solution :

$$\psi_n(x) = A_n \cos(\alpha_n x) + B_n \sin(\alpha_n x) \quad (\text{II.36})$$

Ces fonctions doivent satisfaire les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = e$.

$$\begin{cases} \psi_n(0) = 0 \\ \left. \frac{d\psi_n}{dx}(x) \right|_{x=e} + H_i^0 \psi_n(e) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

Après avoir introduit la solution (II.36) dans le système d'équations (II.37), nous obtenons l'équation transcendante donnant les α_n :

$$\alpha_n \cot(\alpha_n e) = -H_i^0 \quad (\text{II.38})$$

Et celle donnant les fonctions propres $\psi_n(x)$.

$$\psi_n(x) = B_n \sin(\alpha_n x) \quad (\text{II.39})$$

La résolution de l'équation transcendante (II.38), donne un nombre infini discret de valeurs propres.

La normalisation des fonctions propres ψ_n permet de déterminer les coefficients B_n :

$$\int_0^e \psi_n^2(x) dx = B_n^2 \int_0^e \{\sin(\alpha_n x)\}^2 dx = 1 \quad (\text{II.40})$$

Ce qui donne :

$$B_n^2 = 2 \frac{\alpha_n^2 + H_i^{02}}{e(\alpha_n^2 + H_i^{02}) + H_i^0} \quad (\text{II.41})$$

Et finalement :

$$G(x,x',t) = a \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \sin(\alpha_n x) \sin(\alpha_n x') e^{-a\alpha_n^2 t} \quad (\text{II.42})$$

II.2.5.1.2 Calcul numérique des valeurs propres

Il existe plusieurs méthodes de résolution numérique de l'équation transcendante (II.38) en particulier les méthodes numériques de Newton et celle par Dichotomie.

Dans notre travail nous avons opté pour la méthode par Dichotomie.

Cette méthode revient à rechercher les points d'intersection, par encadrement de plus en

plus près, du graphe de la fonction $\cot(\alpha e)$ et celui de la fonction $-\frac{H_i^0}{\alpha}$.

$\cot(\alpha e)$ est une fonction périodique singulière aux points $\alpha = n\pi/e$ s'annulant entre

chaque asymptote verticale et la fonction $-\frac{H_i^0}{\alpha}$ admet une singularité au point $\alpha = 0$.

La recherche de solution par Dichotomie est intéressante ici car on sait à l'avance que les points d'intersection (figure II.2) se trouvent dans chaque intervalle délimité par deux asymptotes consécutives.

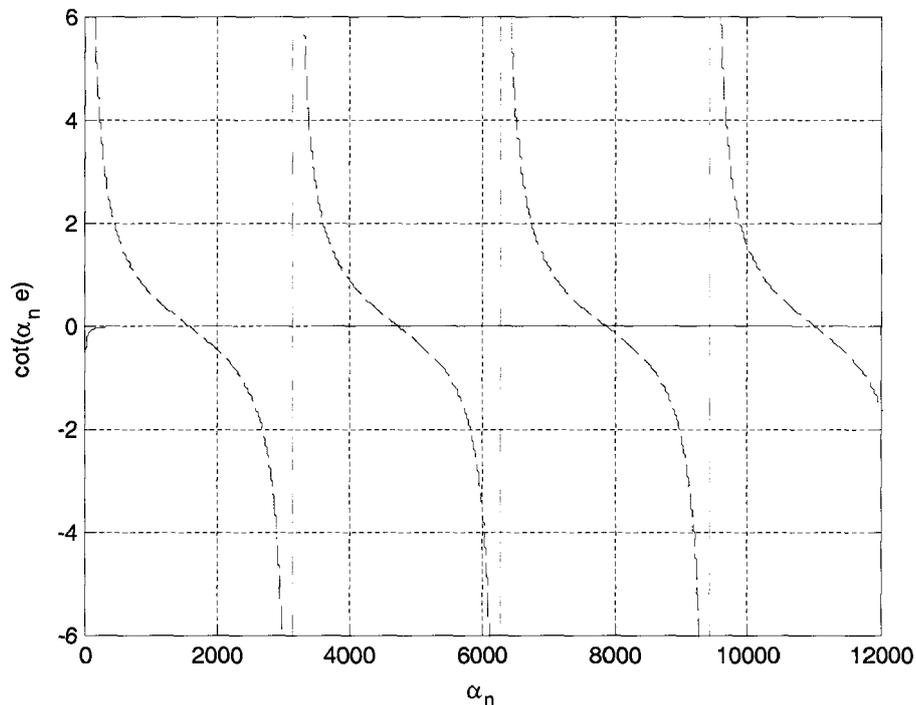


Figure II.2 : Valeurs propres de Laplacien

II.2.5.2 Méthode directe par la transformée de Laplace

Il est possible de calculer analytiquement la transformée de Laplace de la fonction de Green.

La solution de l'équation (II.31) peut s'écrire aussi sous la forme suivante [30] :

$$\bar{G}(x, x', p) = F(p)e^{-q|x-x'|} + D(x, x', p) \quad (\text{II.43})$$

Avec
$$q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

La dérivée première de l'équation (II.43) s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{G}(x, x', p)}{\partial x} = -q \frac{x-x'}{|x-x'|} F(p)e^{-q|x-x'|} + \frac{\partial D}{\partial x} \quad (\text{II.44})$$

Or,
$$\frac{x-x'}{|x-x'|} = 2E(x-x') - 1$$

Et en utilisant la propriété de la fonction de Heaviside $E(x-x')$:

$$\frac{\partial}{\partial x} (E(x-x')) = \delta(x-x') \quad (\text{II.45})$$

La dérivée seconde de (II.43) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \bar{G}(x, x', p)}{\partial x^2} = q^2 F(p)e^{-q|x-x'|} - 2q\delta(x-x')F(p)e^{-q|x-x'|} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \quad (\text{II.46})$$

On reporte l'expression (II.46) dans l'équation (II.31), on obtient :

$$F(p) = \frac{1}{2q} \quad (\text{II.47})$$

Et
$$q^2 D(x, x', p) - \frac{\partial^2 D(x, x', p)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II.48})$$

La solution générale de l'expression (II.48) peut toujours s'écrire :

$$D(x, x', p) = A(x', p)e^{-qx} + B(x', p)e^{qx} \quad (\text{II.49})$$

L'équation (II.43) devient donc :

$$\bar{G}(x, x', p) = \frac{1}{2q} e^{-q|x-x'|} + A(x', p)e^{-qx} + B(x', p)e^{qx} \quad (\text{II.50})$$

La forme de $A(x', p)$ et $B(x', p)$ est explicitée par les conditions aux limites :

$$\bar{G}(x, x', p) \Big|_{x=0} = 0 \quad (\text{II.51})$$

$$\frac{\partial \bar{G}(x, x', p)}{\partial x} \Big|_{x=e} = -H_i^0 \bar{G}(x, x', p) \Big|_{x=e}$$

En remplaçant $\bar{G}(x, x', p)$ par son expression, on aura :

$$\frac{e^{-qx'}}{2q} + A(x', p) + B(x', p) = 0 \quad (\text{II.52})$$

$$\frac{(q - H_i^0)}{2q} e^{-q(e-x)} = (H_i^0 - q) A(x', p) e^{-qe} + (q + H_i^0) B(x', p) e^{qe}$$

Les termes $A(x',p)$ et $B(x',p)$ s'écrivent alors :

$$A(x',p) = \frac{1}{2q} \frac{(q - H_i^0) e^{-q(e-x')} + (q + H_i^0) e^{q(e-x')}}{(H_i^0 - q) e^{-qe} - (q + H_i^0) e^{qe}} \quad (II.53)$$

$$B(x',p) = \frac{1}{2q} \frac{(q - H_i^0) e^{-q(e+x')} + (H_i^0 - q) e^{-q(e-x')}}{(H_i^0 - q) e^{-qe} - (q + H_i^0) e^{qe}}$$

Finalement la transformée de La place de la fonction de Green cherchée a la forme :

$$\bar{G}(x,x',p) = \frac{1}{2q} \left\{ \begin{aligned} & \frac{(q - H_i^0) e^{-q|x-x'|} + (q + H_i^0) e^{-q|x-x'|+2qe}}{(q - H_i^0) + (q + H_i^0) e^{2qe}} + \frac{(H_i^0 - q) e^{-q(x-x')} - (q + H_i^0) e^{-q|x+x'|+2qe}}{(q - H_i^0) + (q + H_i^0) e^{2qe}} \\ & + \frac{(H_i^0 - q) e^{q(x-x')} + (q - H_i^0) e^{q|x+x'|}}{(q - H_i^0) + (q + H_i^0) e^{2qe}} \end{aligned} \right\} \quad (II.54)$$

La forme de la fonction de Green donnée par l'expression (II.54) n'intervient pas dans

les calculs ; seules ses valeurs aux frontières de la plaque, $\bar{G}(e,x',p)$ et $\left. \frac{\partial \bar{G}(x,x',p)}{\partial x} \right|_{x=0}$,

interviennent directement dans les équations du problème (équation II.30):

$$\bar{G}(e,x',p) = \frac{e^{-qe} (e^{qx'} - e^{-qx'})}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \quad (II.55)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{G}(x,x',p)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{(q + H_i^0) e^{-qx'} + (q - H_i^0) e^{qx'-2qe}}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}}$$

L'inversion de ces transformées de Laplace, techniquement très difficile, conduisent de toute façon à la représentation en série (II.42).

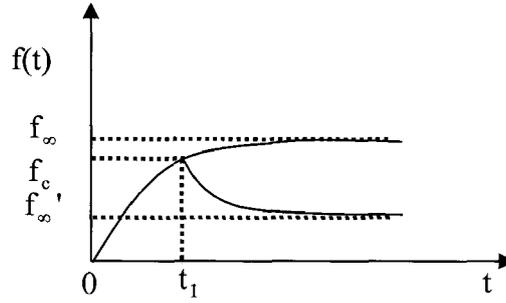
Ces expressions nous permettront en revanche d'étudier le comportement de transformées inverses au voisinage de $t = 0$ et l'infinie, ainsi que les comportements asymptotiques que l'approche par les séries ne permet pas de faire.

II.2.6 Représentation des fonctions $f(t)$ et $\bar{f}(p)$

La température imposée représentée par $f(t)$ est déterminée expérimentalement à l'aide de la caméra infrarouge et est représentée mathématiquement par la forme suivante :

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) = f_\infty \left(1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m t} \right) & \text{si } 0 \leq t \leq t_1 \\ f_2(t) = f_\infty' + (f_c - f_\infty') \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k (t-t_1)} & \text{si } t \geq t_1 \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

$$\text{Avec :} \quad f_c = f_1(t_1) = f_2(t_1) = f_\infty \left(1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m t_1} \right) \quad (\text{II.57})$$



f_∞ et f_∞' sont respectivement les températures du régime permanent de la phase de chauffage et de relaxation et a_m , γ_m , b_k et δ_k : les constantes utilisées dans les lissages des profils de température expérimentaux. Ces séries d'exponentielles doivent vérifier les contraintes suivantes :

$$\text{➤ Condition initiale :} \quad f_1(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=1}^M a_m = 1 \quad (\text{II.58})$$

$$\text{➤ Condition de continuité :} \quad f_1(t_1) = f_2(t_1) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^K b_k = 1 \quad (\text{II.59})$$

La continuité de la fonction $f(t)$ au point $t = t_1$ permet, en utilisant la propriété de superposition des fonctions, d'écrire la fonction $f(t)$ de la manière suivante :

$$f(t) = f_1(t) - E(t - t_1) \{f_1(t) - f_2(t)\} \quad (\text{II.60})$$

$E(t - t_1)$ est la fonction de Heaviside défini par :

$$E(t - t_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_1 \\ 1 & \text{si } t > t_1 \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ est donc :

$$\bar{f}(p) = \bar{f}_1(p) - e^{-pt_1} \{ \bar{f}_1^d(p) - \bar{f}_2^d(p) \} \quad (\text{II.62})$$

$\bar{f}_1(p)$ est la transformée de Laplace de la fonction $f_1(t)$.

$\bar{f}_1^d(p)$ et $\bar{f}_2^d(p)$ sont respectivement les transformées de Laplace des fonctions $f_1(t + t_1)$ et $f_2(t + t_1)$.

II.2.7 Etude du régime d'échauffement

Nous étudions le développement du régime convectif, consécutif à une excitation de flux positif sur la face inférieure de la paroi. Nous supposons que l'air est en écoulement à la température T_∞ et la plaque initialement à la même température T_∞ . A partir d'un instant donné $t = 0^+$, la face inférieure de la plaque est soumise à un flux de chaleur φ_0 uniforme et constant. L'identification de l'échange convectif sur la plaque nécessite la connaissance de l'évolution de sa température.

II.2.7.1 Profil de température

Etudions maintenant l'évolution temporelle et spatiale du profil de température dans la plaque. Durant cette phase de chauffage on note :

$$\begin{cases} f(t) = f_1(t) \\ \varphi_i(t) = \varphi_0 \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \quad (\text{II.63})$$

Après avoir introduit cette dernière dans l'équation (II.28), on obtient l'expression suivante :

$$T_{cf}(x,t) = \frac{\varphi_0}{\lambda_s} \int_0^t G(e,x,t-\tau) d\tau + u^*(x) f_1(t) - \int_0^t \frac{\partial f_1(\tau)}{\partial \tau} \int_0^e \frac{G(x,x',t-\tau)}{a} u^*(x') dx' d\tau \quad (\text{II.64})$$

En remplaçant les fonctions de Green et de température imposée à la surface, donnés respectivement par les expressions (II.42) et (II.56), on obtient le profil de température $T_{cf}(x,t)$ dans la phase de montée en température :

$$\begin{aligned} T_{cf}(x,t) = & \left\{ \frac{\varphi_0}{\lambda_s} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} (1 - e^{-\alpha_n^2 t}) \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x \right) f_\infty \left(1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m t} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^M B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \frac{f_\infty \gamma_m a_m}{a \alpha_n^2 - \gamma_m} (e^{-\gamma_m t} - e^{-\alpha_n^2 t}) \right\} \\ & = T_{cf1}(x,t) + T_{cf2}(x,t) \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

Dans l'expression de :

$$T_{cf1}(x,t) = \frac{\varphi_0}{\lambda_s} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} (1 - e^{-\alpha_n^2 t}) \quad (\text{II.66})$$

La série $\frac{\varphi_0}{\lambda_s} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2}$ est la solution permanente $u(x)$ obéissant au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = 0 \\ u(0) = 0 \\ \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|_{x=e} = -H_i^0 u(e) + \frac{\Phi_0}{\lambda} \end{cases} \quad (\text{II.67})$$

La résolution de cette dernière donne :

$$u(x) = \frac{\Phi_0/\lambda_s}{H_i^0 e + 1} x = \frac{\Phi_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} \quad (\text{II.68})$$

L'autre partie, $-\frac{\Phi_0}{\lambda_s} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} e^{-\alpha_n^2 t}$, représente la solution transitoire.

On voit ici que, si l'on fait tendre le temps vers l'infini, la température tend vers une limite, indépendante de la variable t , correspondant au régime permanent qu'on utilisera plus tard pour la détermination de Φ_0 :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_{cf}(x,t) = \frac{\Phi_0/\lambda_s}{H_i^0 e + 1} x + \left(1 - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x \right) f_{\infty} \quad (\text{II.69})$$

II.2.7.2 Densité de flux de chaleur et coefficient d'échange

La densité de flux de chaleur à la paroi soumise au flux d'air s'exprime, à chaque instant, en fonction du gradient pariétal en $x = 0$; elle a l'expression suivante :

$$\Phi_{cf}(t) = \lambda_s \left. \frac{\partial T_{cf}}{\partial x}(x,t) \right|_{x=0} \quad (\text{II.70})$$

En utilisant l'expression du profil de température donné par l'équation (II.65), la densité de flux de chaleur pariétal en $x=0$ s'écrit :

$$\Phi_{cf}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Phi_0}{H_i^0 e + 1} - \Phi_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e)}{\alpha_n} e^{-\alpha_n^2 t} - \frac{h_i^0 f_{\infty}}{H_i^0 e + 1} \left(1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m t} \right) \\ -\lambda_s f_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^M B_n^2 \frac{\gamma_m a_m}{\alpha_n^2 - \gamma_m} \left(e^{-\gamma_m t} - e^{-\alpha_n^2 t} \right) \end{array} \right\} \quad (\text{II.71})$$

Ce flux s'annule en $t = 0$ car la série $\Phi_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e)}{\alpha_n}$ converge vers $\frac{\Phi_0}{H_i^0 e + 1}$. Cela peut se vérifier en démontrant l'égalité suivante (voir annexe 1) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} = 1 - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{II.72})$$

$$\text{D'où} \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e)}{\alpha_n} = \frac{1}{H_i^0 e + 1} \quad (\text{II.73})$$

Quand t tend vers l'infini, le flux s'approche exponentiellement d'une valeur limite correspondant au régime permanent :

$$\Phi_{cf}(t \rightarrow \infty) = \frac{\Phi_0}{H_i^0 e + 1} - \frac{h_i^0}{H_i^0 e + 1} f_\infty \quad (\text{III.74})$$

Mais cette représentation analytique du flux ne permet pas de déterminer son comportement au voisinage de $t = 0$. Pour cette raison nous utilisons la transformée de Laplace de la température pour déterminer la transformée de Laplace de la densité de flux en $x = 0$.

En effet certains théorèmes sur la transformée de Laplace permettent de déterminer le comportement d'une fonction $f(t)$ au voisinage de $t = 0$ à partir du comportement asymptotique ($p \rightarrow \infty$) de sa transformée de Laplace $\bar{f}(p)$.

De même, sous certaines conditions, le comportement de $\bar{f}(p)$ au voisinage de $p = 0$ permet de déterminer le comportement asymptotique de $f(t)$ ($t \rightarrow \infty$).

D'où l'intérêt de la formulation des solutions sous forme de transformées de Laplace.

En utilisant les fonctions (II.55) dans l'équation (II.29) ou (II.30), la transformée de Laplace de la température dans la phase de chauffage prend la forme suivante :

$$\bar{T}_{cf}(x,p) = \frac{1}{\lambda_s} \frac{e^{-qe} (e^{qx} - e^{-qx})}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \frac{\Phi_0}{p} + \bar{f}_1(p) \frac{(q + H_i^0) e^{-qx} + (q - H_i^0) e^{qx-2qe}}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \quad (\text{II.75})$$

Les solutions sous forme de séries infinies permettent des calculs numériques performants, après réduction de celles-ci en séries finies, sauf au voisinage de changements brusques.

L'expression (II.75) permet, en utilisant la loi de Newton de remonter à la densité de flux de chaleur :

$$\bar{\Phi}_{cf}(x,p) = \frac{qe^{-qe} (e^{qx} + e^{-qx})}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \frac{\Phi_0}{p} + \lambda_s \bar{f}_1(p) q \frac{-(q + H_i^0) e^{-qx} + (q - H_i^0) e^{qx-2qe}}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \quad (\text{II.76})$$

La densité de flux de chaleur à la surface $x = 0$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{cf}(p) &= \frac{2qe^{-qe}}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \frac{\Phi_0}{p} + \lambda_s \bar{f}_1(p) q \frac{(q - H_i^0) e^{-2qe} - (q + H_i^0)}{(q - H_i^0) e^{-2qe} + (q + H_i^0)} \\ &= \frac{2q}{(q + H_i^0) e^{qe} + (q - H_i^0) e^{-qe}} \frac{\Phi_0}{p} - \frac{\lambda_s f_\infty}{p} \left(1 - \sum_{m=1}^M \frac{a_m}{\gamma_m + 1} \right) q \frac{1 - \frac{(q - H_i^0)}{(q + H_i^0)} e^{-2qe}}{1 + \frac{(q - H_i^0)}{(q + H_i^0)} e^{-2qe}} \end{aligned}$$

Lorsque p (ou q) est très grand :

$$\frac{1}{\left(\frac{\gamma_m}{p} + 1 \right)} \rightarrow \left(1 - \frac{\gamma_m}{p} + \frac{\gamma_m^2}{p^2} + \dots \right) \quad \text{et} \quad 1 \pm \frac{(q - H_i^0)}{(q + H_i^0)} e^{-2qe} \rightarrow 1 \quad (\text{II.77})$$

D'où la fonction $\bar{\Phi}_{cf}(p)$ s'écrit, en négligeant le terme en e^{-2qe} :

$$\overline{\Phi}_{cf}(p) = \frac{2\varphi_0}{a} \frac{e^{-qe}}{q(q+H_i^0)} - \frac{\lambda_s f_\infty}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{p^{3/2}} \sum_m a_m \gamma_m - \frac{1}{p^{5/2}} \sum_m a_m \gamma_m^2 + \dots \right) \quad (\text{II.78})$$

La transformée inverse du flux s'écrit alors :

$$\Phi_{cf}(t) = \frac{2\varphi_0}{a} a e^{(H_i^0 e + a H_i^{02} t)} \operatorname{erfc} \left(\frac{e}{2\sqrt{at}} + H_i^0 \sqrt{at} \right) - \frac{\lambda_s f_\infty}{\sqrt{a}} \left(\sum_m a_m \gamma_m \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(3/2)} - \sum_m a_m \gamma_m^2 \frac{t^{3/2}}{\Gamma(5/2)} + \dots \right) \quad (\text{II.79})$$

Γ représente la fonction gamma $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ avec $s > -1$.

Lorsque $t \rightarrow 0$, le terme $\frac{e}{2\sqrt{at}} + H_i^0 \sqrt{at}$ tend vers $\rightarrow \infty$

$$\text{Et lorsque } x \rightarrow \infty \quad \operatorname{erfc}(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \dots \right) \quad (\text{II.80})$$

Ainsi, au voisinage de $t = 0$, le flux $\Phi_{cf}(t)$ prend la forme suivante :

$$\Phi_{cf}(t) = \frac{4\varphi_0}{e} \sqrt{\frac{at}{\pi}} e^{-\frac{e^2}{4at}} - \frac{\lambda_s f_\infty}{\sqrt{a}} \left(\sum_m a_m \gamma_m \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(3/2)} - \sum_m a_m \gamma_m^2 \frac{t^{3/2}}{\Gamma(5/2)} + \dots \right) \quad (\text{II.81})$$

Toutes les dérivées d'ordres successifs de la première fonction de l'équation (II.81) s'annulent en $t = 0$ (cette fonction n'a pas de développement limité au voisinage de

$t = 0$ et est positive $\forall t$). Dans l'expression (II.81), $f_\infty \sum_m a_m \gamma_m = \left. \frac{df_1(t)}{dt} \right|_{t=0}$ représente la

pente de la fonction $f_1(t)$, de ce fait, au voisinage de $t = 0$, le flux se comporterait en $-\sqrt{t}$ si la température superficielle croissait linéairement au voisinage de $t = 0$.

Cela indique que si la température $f_1(t)$ croît linéairement au voisinage de $t = 0$, alors nécessairement le flux sortant par la face supérieure et pénétrant dans le fluide est forcément négatif pendant un temps très court.

En revanche si la dérivée première de $f_1(t)$ s'annule en $t = 0$, alors le flux reste toujours positif et croît en $t^{3/2}$ au voisinage des temps très faibles.

De la même façon qu'en régime permanent, on définit un coefficient d'échange h_{cf} sur la face supérieure par la relation :

$$h_{cf}(t) = \frac{\lambda_s \left. \frac{\partial T_{cf}}{\partial x}(x,t) \right|_{x=0}}{f_1(t)} = h_{cf}^c(t) + h_{cf}^r(t) \quad (\text{II.82})$$

Avec h_{cf}^c le coefficient d'échange convectif et h_{cf}^r le coefficient d'échange par rayonnement défini à partir du flux perdu par la plaque :

$$\Phi_r(t) = \varepsilon \sigma (\theta_p^4 - \theta_\infty^4) = \varepsilon \sigma (\theta_p^2 + \theta_\infty^2) (\theta_p + \theta_\infty) T_p(t) = h_{cf}^r(t) T_p(t) \quad (\text{II.83})$$

Avec :

$$h_{cf}^r = \varepsilon \sigma (\theta_p^2 + \theta_\infty^2) (\theta_p + \theta_\infty)$$

θ : la température en Kelvin

$$\theta(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273$$

Connaissant l'émissivité et la température de surface de la plaque, on peut calculer $h_{cf}^r(t)$ à chaque instant.

Le coefficient de convection durant cette première phase s'écrit alors :

$$h_{cf}^c(t) = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi_0}{H_i^0 e + 1} - \varphi_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e)}{\alpha_n} e^{-\alpha_n^2 t} - \frac{h_i^0 f_{\infty}}{H_i^0 e + 1} \left(1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m t} \right) \\ - \lambda_s f_{\infty} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\gamma_m a_m}{\alpha_n^2 - \gamma_m} \left(e^{-\gamma_m t} - e^{-\alpha_n^2 t} \right) \end{array} \right\}}{f_{\infty} \left(1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m t} \right)} - h_{cf}^r(t) \quad (\text{II.84})$$

Quand t tend vers l'infini, ce coefficient tend vers une limite constante correspondant au régime permanent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{cf}^c(t) = h_{cf}^{c0} = \frac{\varphi_0 - h_i^0 f_{\infty}}{f_{\infty} (H_i^0 e + 1)} - h_{cf}^{r0} \quad (\text{II.85})$$

Au voisinage $t = 0$ le coefficient $h_{cf}^c(t)$ comportera une singularité en $-\frac{1}{\sqrt{t}}$ provenant du premier terme de la relation (II.84).

II.2.8 Etude du régime de relaxation

Ce régime correspond au cas où le flux absorbé $\varphi_i(t)$ par la paroi inférieure change brusquement à l'instant t_1 . Deux cas de figures se présentent :

Cas 1 - $\varphi_i(t) = 0$ pour $t > t_1$. Dans ce cas, la plaque se refroidit pour prendre une température uniforme égale à T_{∞} correspondant à $T = 0$. Cette étude est présentée en (annexe 2).

Cas 2 - $\varphi_i(t) = \varphi_1 < \varphi_0$ pour $t > t_1$. La température de la paroi supérieure passe à une valeur f'_{∞} inférieure à sa valeur initiale f_{∞} mais qui reste tout de même supérieure à 0. L'étude de ce cas est présentée ci-dessous.

II.2.8.1 Profil de température

L'étude est la même que celle de la phase d'échauffement. La seule différence est que le flux absorbé par la paroi diminue brusquement de φ_0 à φ_1 .

$$\begin{cases} f(t) = f_2(t) \\ \varphi_i(t) = \varphi_1 \end{cases} \quad \text{pour } t \geq t_1 \quad (\text{II.86})$$

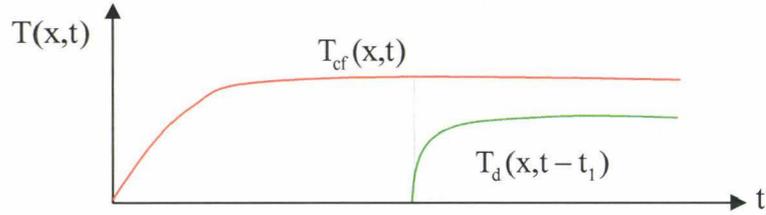
La solution en température donnée par l'équation (II.30) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\bar{T}_{re}(x,p) = \bar{T}_{cf}(x,p) - e^{-pt_1} \bar{T}_d(x,p) \quad (\text{II.87})$$

Dont l'originale est :

$$T_{re}(x,t) = T_{cf}(x,t) - E(t-t_1)T_d(x,t-t_1) \quad (\text{II.88})$$

$T_d(x,t-t_1)$ est une température analogue à $T_{cf}(x,t)$ mais décalée d'un temps t_1 .



En utilisant l'expression (II.28), $T_d(x,t)$ a la même forme que $T_{cf}(x,t)$ et s'écrit :

$$T_d(x,t) = \left\langle \begin{aligned} & \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)}{\lambda_s} \int_0^t G(e,x,t-\tau) d\tau + u^*(x) \{f_1(t+t_1) - f_2(t+t_1)\} \\ & - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{f_1(\tau+t_1) - f_2(\tau+t_1)\} \int_0^e \frac{G(x,x',t-\tau)}{a} u^*(x) dx' d\tau \end{aligned} \right\rangle \quad (\text{II.89})$$

La fonction $f_1(t)$ est simplement remplacée par la fonction $f'(t) = f_1(t+t_1) - f_2(t+t_1)$ (de transformée de Laplace $\bar{f}'(p) = \bar{f}_1^d(p) - \bar{f}_2^d(p)$) : elle s'annule en $t=0$ et tend exponentiellement vers $f_\infty - f_\infty'$ quand $t \rightarrow \infty$ et le flux φ_0 est remplacé par $\varphi_0 - \varphi_1$.

$$f'(t) = (f_\infty - f_\infty') - f_\infty \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m(t+t_1)} - (f_c - f_\infty') \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k t} \quad (\text{II.90})$$

Le comportement de la fonction T_d sera analogue à celui de T_{cf} .

Après avoir introduit les expressions de $G(x,x',t-\tau)$, $f'(t)$ et $u^*(x)$, la fonction $T_d(x,t)$ s'écrit :

$$T_d(x,t) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)}{\lambda_s} \left\{ \frac{x}{H_1^0 e + 1} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} e^{-\alpha_n^2 t} \right\} \\ & - \left(1 - \frac{H_1^0}{H_1^0 e + 1} x \right) \left\{ (f_\infty - f_\infty') - f_\infty \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m(t+t_1)} - (f_c - f_\infty') \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k t} \right\} \\ & - (f_c - f_\infty') \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^K B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \frac{b_k \delta_k}{\alpha_n^2 - \delta_k} (e^{-\delta_k t} - e^{-\alpha_n^2 t}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^M B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \frac{f_\infty a_m \gamma_m}{\alpha_n^2 - \gamma_m} e^{-\gamma_m t_1} (e^{-\gamma_m t} - e^{-\alpha_n^2 t}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.91})$$

De même la transformée de Laplace s'écrit :

$$\overline{T_d}(x,p) = \frac{1}{\lambda_s} \frac{e^{-qe} (e^{qx} - e^{-qx})}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \frac{\Phi_0}{p} + \left\{ \overline{f_1^d}(p) - \overline{f_2^d}(p) \right\} \frac{(q + H_i^0) e^{-qx} + (q - H_i^0) e^{qx-2qe}}{(q + H_i^0) + (q - H_i^0) e^{-2qe}} \quad (\text{II.92})$$

II.2.8.2 Densité de flux de chaleur et coefficient d'échange thermique

De la même façon que dans le régime d'échauffement, la densité de flux de chaleur $\Phi(t)$ à la paroi soumise au flux d'air en régime de relaxation s'exprime, à chaque instant, en fonction du gradient pariétal de T par rapport à x .

Pour les mêmes raisons que dans le paragraphe précédent, $\Phi(t)$ pourra s'écrire :

$$\Phi_{re}(t) = \Phi_{cf}(t) - E(t - t_1) \Phi_d(t - t_1) \quad (\text{II.93})$$

Dont la transformée de Laplace est :

$$\overline{\Phi_{re}}(p) = \overline{\Phi_{cf}}(p) - e^{-pt_1} \overline{\Phi_d}(p) \quad (\text{II.94})$$

Où :

$$\Phi_d(t) = \left\{ \begin{array}{l} (\Phi_0 - \Phi_1) \left\{ \frac{1}{H_i^0 e + 1} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e)}{\alpha_n} e^{-\alpha_n^2 t} \right\} \\ + \frac{h_i^0}{H_i^0 e + 1} \left\{ (f_{\infty} - f_{\infty}') - f_{\infty} \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m(t+t_1)} - (f_c - f_{\infty}') \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k t} \right\} \\ - \lambda_s (f_c - f_{\infty}') \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{b_k \delta_k}{\alpha_n^2 - \delta_k} (e^{-\delta_k t} - e^{-\alpha_n^2 t}) - \lambda_s \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{f_{\infty} \gamma_m a_m}{\alpha_n^2 - \gamma_m} e^{-\gamma_m t_1} (e^{-\gamma_m t} - e^{-\alpha_n^2 t}) \end{array} \right\} \quad (\text{II.95})$$

et :

$$\overline{\Phi_d}(p) = \frac{2\Phi_0}{a} \frac{e^{-qe}}{q(q + H_i^0)} + \lambda_s \left\{ \frac{f_{\infty} - f_{\infty}'}{p} - f_{\infty} \sum_m \frac{a_m}{\gamma_m + p} e^{-\gamma_m t_1} - (f_c - f_{\infty}') \sum_n \frac{b_k}{\delta_k + p} \right\} q \frac{(q - H_i^0) e^{-2qe} - (q + H_i^0)}{(q - H_i^0) e^{-2qe} + (q + H_i^0)} \quad (\text{II.96})$$

L'étude asymptotique de $\overline{\Phi_d}(p)$ au voisinage de $p \rightarrow \infty$ permettra de calculer sa transformée inverse au voisinage de $t = 0$. Ainsi, lorsque $p \rightarrow \infty$ (ou $q \rightarrow \infty$), la fonction $\overline{\Phi_d}(p)$ se comporte comme :

$$\overline{\Phi_d}(p) = \frac{2\Phi_0}{a} \frac{e^{-qe}}{q(q + H_i^0)} - \lambda_s \frac{q}{p^2} \underbrace{\left\{ f_{\infty} \sum_m a_m \gamma_m e^{-\gamma_m t_1} + (f_c - f_{\infty}') \sum_k b_k \delta_k \right\}}_{A_{mk}} \quad (\text{II.97})$$

Dont l'originale est :

$$\Phi_d(t) = \frac{4\Phi_0}{e} \sqrt{\frac{at}{\pi}} e^{-\frac{e^2}{4at}} - \frac{\lambda_s A_{mn}}{\Gamma(3/2) \sqrt{a}} \sqrt{t} \quad (\text{II.98})$$

Cette dernière relation montre que $\Phi(t)$ se comporte asymptotiquement comme $-\sqrt{t}$.

La valeur de $h(t)$ s'exprime en fonction de la densité de flux et de la température à la

$$\text{paroi de la façon suivante : } h_{re}(t) = \frac{-\lambda_s \left. \frac{\partial T_{re}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0}}{T_{re}(0,t)} = \frac{\Phi_{re}(t)}{T_{re}(0,t)}$$

$$h_{re}(t) = \frac{\Phi_{cf}(t) - E(t-t_1)\Phi_d(t-t_1)}{T_{re}(0,t)} \quad (\text{II.99})$$

Le coefficient de convection correspondant au flux $\Phi_{re}(t)$ dans cette phase s'écrit :

$$h_{re}^c(t) = \frac{\Phi_{cf}(t) - E(t-t_1)\Phi_d(t-t_1)}{f_{\infty}' + (f_c - f_{\infty}') \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k(t-t_1)}} - h_{re}^r(t) \quad (\text{II.100})$$

Où le coefficient h_{re}^r est donné par l'expression :

$$h_{re}^r = \varepsilon \sigma (\theta_p^2 + \theta_{\infty}^2) (\theta_p + \theta_{\infty}) \quad (\text{II.101})$$

II.3 Modèle 2 : Condition limite de convection en $x = 0$

Dans cette partie, nous traitons le même problème thermique que précédemment mais avec une condition limite de 3^{ème} espèce en $x = 0$. De la même façon que dans le premier modèle, nous utilisons la méthode des fonctions de Green pour chercher la solution en température en régime transitoire.

II.3.1 Conditions limites et initiale

On reprend les équations (II.1 à 4) du modèle 1, mais on modifie l'écriture de la condition limite de température imposée (II.4) par une condition d'échange convectif/radiatif à la paroi :

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \right|_{x=0} = H_e(t) T(0,t) \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \right|_{x=e} = -H_i^0 T(e,t) + \frac{\varphi_i(t)}{\lambda_s} \\ T(x,0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.102})$$

$$H_e(t) = H_e^0 + \delta H_e(t) \quad (\text{II.103})$$

Où H_e^0 est le coefficients d'échange thermique en régime permanent et $H_e(t)$, est le coefficient d'échange thermique en régime transitoire.

Avec :

$$H_e(t) = \frac{h_e(t)}{\lambda_s} = \frac{h_e^c(t) + h_e^r(t)}{\lambda_s}$$

$h_e^c(t)$ et $h_e^r(t)$ étant des coefficients de convection et de rayonnement qui dépendent du temps.

La transformée de Laplace du système (II.102) est :

$$\begin{cases} q^2 \bar{T} - \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = 0 \\ \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right|_{x=0} = \overline{H_e(t)T(0,t)} \\ \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right|_{x=e} = -H_i^0 \bar{T}(e,p) + \frac{\bar{\varphi}_i(p)}{\lambda_s} \\ \bar{T}(x,0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.104})$$

II.3.2 Résolution de l'équation de propagation par la théorie des fonctions de Green

La fonction de Green relative à ce problème vérifie le système d'équations suivant :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial G}{\partial t}(x,x',t) - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,x',t) = \delta(x-x')\delta(t) \quad (\text{II.105})$$

$$\text{Avec :} \quad G(x,x',t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leq 0 \quad (\text{II.106})$$

Et comme conditions aux limites :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial G}{\partial x}(x,x',t) \right|_{x=0} = H_e^0 G(0,x',t) \\ \left. \frac{\partial G}{\partial x}(x,x',t) \right|_{x=e} = -H_i^0 G(e,x',t) \end{cases} \quad (\text{II.107})$$

La transformée de Laplace de (II.105 – II.107) est :

$$\begin{cases} q^2 \bar{G} - \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} = \delta(x-x') \\ \left. \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} \right|_{x=0} = H_e^0 \bar{G}(0,x',p) \\ \left. \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} \right|_{x=e} = -H_i^0 \bar{G}(e,x',p) \end{cases} \quad (\text{II.108})$$

En introduisant les conditions limites et initiale dans l'équation (II.16) du modèle 1, on obtient le profil transformé de Laplace de température en tout point x de la plaque :

$$\bar{T}(x,p) = \frac{1}{\lambda_s} \bar{G}(e,x,p) \bar{\varphi}_i(p) - \frac{1}{\lambda_s} \bar{G}(0,x,p) \overline{\delta h_e(t)T(0,t)} \quad (\text{II.109})$$

II.3.3 Recherche de la fonction de Green

II.3.3.1 Méthode de séparation des variables

II.3.3.1.1 Définition des fonctions propres et valeurs propres

En reprenant la définition de la fonction de Green donnée par l'équation (II.34) du premier modèle, et la solution de l'équation aux valeurs propres associées :

$$\psi_n(x) = A_n \cos(\alpha_n x) + B_n \sin(\alpha_n x) \quad (\text{II.110})$$

Ces fonctions doivent satisfaire les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = e$.

$$\begin{cases} \left. \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right|_{x=0} = H_e^0 \psi_n(0) \\ \left. \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right|_{x=e} = -H_i^0 \psi_n(e) \end{cases} \quad (\text{II.111})$$

Après avoir remplacé le système d'équations (II.111) dans la solution (II.110), on obtient l'équation transcendante donnant les α_n :

$$\tan(\alpha_n e) = \frac{\alpha_n (H_i^0 + H_e^0)}{\alpha_n^2 - H_i^0 H_e^0} \quad (\text{II.112})$$

Et celle donnant les fonctions propres $\psi_n(x)$

$$\psi_n(x) = B_n \left\{ \cos(\alpha_n x) + \frac{H_e^0}{\alpha_n} \sin(\alpha_n x) \right\} \quad (\text{II.113})$$

La résolution de l'équation transcendante, donne un nombre infini discret de valeurs propres. La normalisation des fonctions propres ψ_n permet de déterminer les coefficients B_n tel que :

$$\frac{1}{B_n^2} = \frac{1}{2} \left\{ (\alpha_n^2 + H_e^{02}) \left(e + \frac{H_i^0}{\alpha_n^2 + H_i^{02}} \right) + H_e^0 \right\} \quad (\text{II.114})$$

Et donc finalement :

$$G(x, x', t) = a \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 (\alpha_n \cos(\alpha_n x) + H_e^0 \sin(\alpha_n x)) (\alpha_n \cos(\alpha_n x') + H_e^0 \sin(\alpha_n x')) e^{-a\alpha_n^2 t} \quad (\text{II.115})$$

II.3.3.1.2 Calcul numérique des valeurs propres

L'équation transcendante (II.112) est résolue de la même manière que celle du premier modèle (méthode de Dichotomie). On cherche donc les points d'intersection du graphe de la fonction $\text{tg}(\alpha e)$ périodique singulière aux points $\alpha = (2n+1)\pi/2e$ s'annulant entre chaque asymptote verticale, et du graphe de la fonction $\frac{\alpha(H_i^0 + H_e^0)}{\alpha^2 - H_i^0 H_e^0}$ qui admet deux

singularités aux points $\alpha = \pm \sqrt{H_i^0 H_e^0}$ (figure II.3).

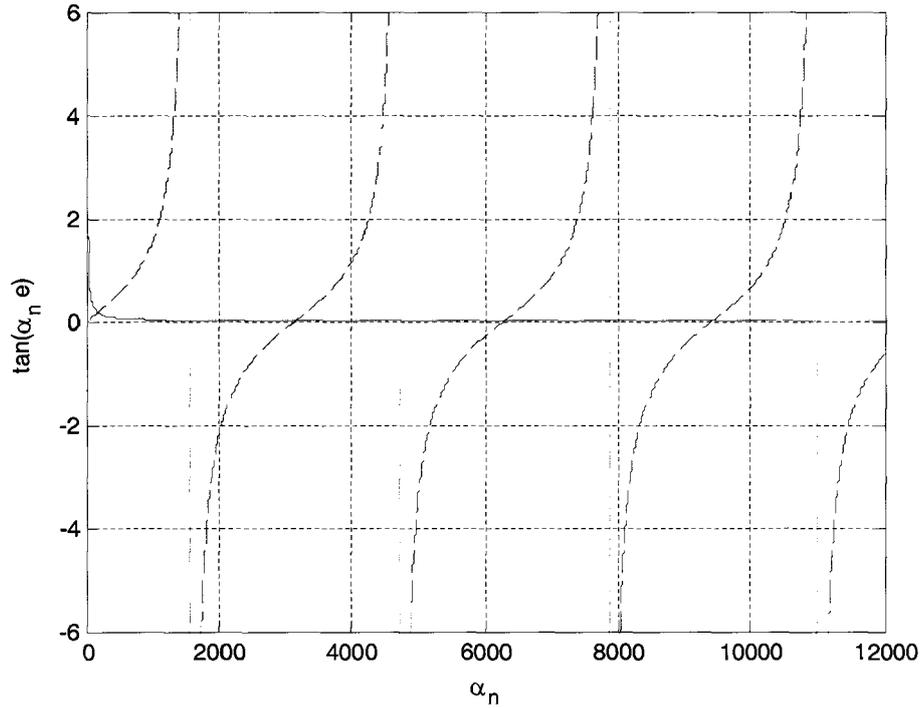


Figure II.3 : Valeurs propres du Laplacien

II.3.3.2 Méthode directe par la transformée de Laplace

En reprenant la transformée de Laplace de la fonction de Green donnée par l'équation (II.50) du modèle 1 :

$$\bar{G}(x,x',p) = \frac{1}{2q} e^{-q|x-x'|} + A(x',p)e^{-qx} + B(x',p)e^{qx} \tag{II.116}$$

La forme de $A(x',p)$ et $B(x',p)$ est explicitée par les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{G}}{\partial x}(x,x',p)|_{x=0} = H_e^0 \bar{G}(0,x',p) \\ \frac{\partial \bar{G}}{\partial x}(x,x',p)|_{x=e} = -H_i^0 \bar{G}(e,x',p) \end{cases} \tag{II.117}$$

On y remplace l'expression de $\bar{G}(x,x',p)$ (II.116)

$$\begin{cases} \frac{e^{-qx'}}{2q} (q - H_e^0) = (H_e^0 + q) A(x',p) + (H_e^0 - q) B(x',p) \\ \frac{e^{-q(e-x')}}{2q} (H_i^0 - q) = A(x',p)e^{-qe} (q - H_i^0) - B(x',p)e^{qe} (q + H_i^0) \end{cases} \tag{II.118}$$

Les termes $A(x',p)$ et $B(x',p)$ s'écrivent :

$$A(x',p) = \frac{\frac{e^{-q(x'-e)}}{2q} (H_i^0 - q)(H_e^0 - q) + \frac{e^{-q(e-x')}}{2q} (q - H_e^0)(q + H_i^0)}{(H_e^0 + q)(q + H_i^0)e^{qe} + (q - H_i^0)(H_e^0 - q)e^{-qe}} \quad (\text{II.119})$$

$$B(x',p) = \frac{\frac{e^{-q(x'-e)}}{2q} (q - H_e^0)(q - H_i^0) + \frac{e^{q(x'-e)}}{2q} (H_i^0 - q)(H_e^0 + q)}{(H_e^0 + q)(q + H_i^0)e^{qe} + (q - H_i^0)(H_e^0 - q)e^{-qe}} \quad (\text{II.120})$$

Finalement la transformée de Laplace de la fonction de Green cherchée a la forme :

$$\bar{G}(x,x',p) = \frac{1}{2q} \left\{ \begin{aligned} & \frac{(q - H_i^0)(H_e^0 - q)[e^{-q|x-x'|} - e^{q(x'-x)} - e^{-q(x'-x)}]}{(H_e^0 - q)(q - H_i^0) + (q + H_i^0)(q + H_e^0)e^{2qe}} + \frac{(q - H_e^0)(q + H_i^0)e^{q(2e-x'-x)}}{(H_e^0 - q)(q - H_i^0) + (q + H_i^0)(q + H_e^0)e^{2qe}} \\ & + \frac{(q - H_i^0)(q + H_e^0)e^{q(x+x')} + (q + H_i^0)(H_e^0 + q)e^{-q|x-x'|+2qe}}{(H_e^0 - q)(q - H_i^0) + (q + H_i^0)(q + H_e^0)e^{2qe}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.121})$$

La forme de la fonction de Green donnée par l'expression (II.121) n'intervient pas dans les calculs ; seules ses valeurs aux frontières de la paroi, $\bar{G}(0,e,p)$ et $\bar{G}(0,0,p)$, interviennent directement dans les équations du problème (II.109) :

$$\bar{G}(0,e,p) = \frac{2qe^{-qe}}{(H_e^0 - q)(q - H_i^0)e^{-2qe} + (q + H_i^0)(q + H_e^0)} \quad (\text{II.122})$$

$$\bar{G}(0,0,p) = \frac{(q - H_i^0)e^{-2qe} + (q + H_i^0)}{(H_e^0 - q)(q - H_i^0)e^{-2qe} + (q + H_i^0)(q + H_e^0)} \quad (\text{II.123})$$

Ces expressions permettent d'étudier le comportement de leurs originaux au voisinage de $t = 0$.

II.3.4 Cas de h_e indépendant du temps

Dans cette étude, on suppose que le coefficient d'échange thermique $h_e(t)$ est indépendant du temps et est égal à celui du régime permanent h_e^0 . Dans ce cas l'équation (II.109) devient :

$$\bar{T}(x,p) = \frac{1}{\lambda_s} \bar{G}(e,x,p) \bar{\varphi}_i(p) \quad (\text{II.124})$$

II.3.4.1 Profil de température et flux de chaleur dans la phase de chauffage

On étudie l'évolution du profil de température dans la plaque plane dans le cas du coefficient d'échange h_e^0 constant. En remplaçant dans ce cas $\varphi_i(t)$ par φ_0 , l'équation (II.124) devient :

$$\overline{T_{cf}}(x,p) = \frac{\varphi_0}{\lambda_s} \frac{\overline{G}(e,x,p)}{p}$$

La transformée inverse de cette dernière donne :

$$T_{cf}(x,t) = \frac{\varphi_0}{\lambda_s} \int_0^t G(e,x,\tau) d\tau \quad (II.125)$$

La fonction de Green étant connue (II.115), la distribution de la température $T_{cf}(x,t)$ dans la plaque est déterminée en introduisant l'expression de $G(x,x',\tau)$ dans l'équation (II.125).

Le profil de température durant cette phase s'écrit :

$$T_{cf}(x,t) = \frac{\varphi_0}{\lambda_s} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \left\{ \cos(\alpha_n e) + \frac{H_e^0}{\alpha_n} \sin(\alpha_n e) \right\} \left\{ \cos(\alpha_n x) + \frac{H_e^0}{\alpha_n} \sin(\alpha_n x) \right\} (1 - e^{-\alpha_n^2 t}) \quad (II.126)$$

Dans cette dernière, on voit l'apparition d'un terme indépendant du temps, il s'agit donc du régime permanent. Ceci implique que l'on peut considérer cette solution comme la somme d'une solution transitoire $w(x,t)$ et une solution permanente $u(x)$:

$$T_{cf}(x,t) = u(x) + w(x,t) \quad (II.127)$$

Avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = 0 \\ u(0) = 0 \\ \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|_{x=e} = -H_i^0 u(e) + \frac{\varphi_0}{\lambda_s} \end{cases} \quad (II.128)$$

Pour calculer $w(x,t)$, nous suivons la même démarche que lors du calcul de la solution donnée par l'équation (II.126) et nous montrons que $T_{cf}(x,t)$ prend la forme suivante :

$$T_{cf}(x,t) = \left\{ u(x) - \frac{\varphi_0}{\lambda_s} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \left\{ \cos(\alpha_n e) + \frac{H_e^0}{\alpha_n} \sin(\alpha_n e) \right\} \right\} \left\{ \cos(\alpha_n x) + \frac{H_e^0}{\alpha_n} \sin(\alpha_n x) \right\} e^{-\alpha_n^2 t} \quad (II.129)$$

$u(x)$ est la solution du système en u donné par (II.128) :

$$u(x) = \frac{\varphi_0/\lambda_s}{1 + H_i^0 e + H_i^0/H_e^0} \left(x + \frac{1}{H_e^0} \right) \quad (II.130)$$

On voit que, si l'on fait tendre le temps vers l'infini, le profil de température tend vers une limite, indépendante de la variable t , correspondant au régime permanent $u(x)$.

La densité de flux pariétal $\Phi_{cf}(t)$ à $x = 0$ en régime transitoire s'exprime, à chaque instant, en fonction du gradient pariétal de T_{cf} par rapport à x ; elle a l'expression suivante :

$$\Phi_{cf}(t) = \lambda_s \left. \frac{\partial T_{cf}}{\partial x}(x,t) \right|_{x=0} \quad (\text{II.131})$$

En utilisant la solution $T_{cf}(x,t)$ donnée par (II.129) dans cette dernière, le flux à la paroi s'écrit :

$$\Phi_{cf}(t) = \varphi_0 H_e^0 \left\{ \frac{1}{H_e^0 + H_i^0 H_e^0 e + H_i^0} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \left\{ \cos(\alpha_n e) + \frac{H_e^0}{\alpha_n} \sin(\alpha_n e) \right\} e^{-\alpha_n^2 t} \right\} \quad (\text{II.132})$$

En faisant tendre t vers l'infini, pendant la phase de chauffage on obtient l'expression du flux limite correspondant au régime permanent :

$$\Phi_{cf}(t \rightarrow \infty) = \frac{\varphi_0 H_e^0}{H_e^0 + H_i^0 H_e^0 e + H_i^0} = h_e^0 f_{\infty} \quad (\text{II.133})$$

II.3.4.2 Profil de température et flux de chaleur dans la phase de relaxation

Le profil de température $T_{re}(x,t)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$T_{re}(x,t) = T_{cf}(x,t) - E(t - t_1) T_d(x, t - t_1) \quad (\text{II.134})$$

$T_d(x, t - t_1)$ est analogue à la température $T_{cf}(x,t)$ décalée d'un temps t_1 .

La densité de flux absorbé φ_0 est tout simplement remplacée par $\varphi_0 - \varphi_1$; On écrit donc :

$$T_d(x,t) = \left\{ u'(x) - \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)}{\lambda_s} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \left\{ \cos(\alpha_n e) + \frac{H_e^0}{\alpha_n} \sin(\alpha_n e) \right\} \right\} \left\{ \cos(\alpha_n x) + \frac{H_e^0}{\alpha_n} \sin(\alpha_n x) \right\} e^{-\alpha_n^2 t} \quad (\text{II.135})$$

$$\text{Avec} \quad u'(x) = \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)/\lambda_s}{1 + H_i^0 e + H_i^0/H_e^0} \left(x + \frac{1}{H_e^0} \right) \quad (\text{II.136})$$

En utilisant le même raisonnement que lors de la détermination de la solution en température, la densité de flux de chaleur $\Phi_d(t)$ s'écrit alors :

$$\Phi_d(t) = (\varphi_0 - \varphi_1) H_e^0 \left\{ \frac{1}{H_e^0 + H_i^0 H_e^0 e + H_i^0} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \left\{ \cos(\alpha_n e) + \frac{H_e^0}{\alpha_n} \sin(\alpha_n e) \right\} e^{-\alpha_n^2 t} \right\} \quad (\text{II.137})$$

II.3.5 Cas de h_e dépendant du temps

Dans ce cas, on suppose que le coefficient d'échange $h_e(t)$ peut être la somme d'un coefficient constant (celui du régime permanent) et d'un coefficient transitoire $\delta h_e(t)$.

Le profil de température est donné par l'expression (II.109) et sa transformée inverse est :

$$T(x,t) = \frac{1}{\lambda_s} \int_0^t G(e,x,t-\tau) \varphi_i(\tau) d\tau - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^t G(0,x,t-\tau) \delta h_e(\tau) T(0,\tau) d\tau \quad (\text{II.138})$$

Le terme $\delta h_e(\tau)$ est difficile à approcher mathématiquement.

En $x = 0$, l'expression (II.109) s'écrit :

$$\overline{h_e(t)f(t)} = \frac{\overline{G(e,0,p)} \overline{\varphi_i(p)} - \lambda_s \overline{f(p)} + h_e^0 \overline{G(0,0,p)} \overline{f(p)}}{\overline{G(0,0,p)}} \quad (\text{II.139})$$

Par définition, $\overline{h_e(t)f(t)}$ est la densité de flux de chaleur $\overline{\Phi(p)}$ échangée entre la surface supérieure de la plaque plane et l'écoulement d'air. Ceci permet d'écrire :

$$\overline{\Phi(p)} = h_e^0 \overline{f(p)} + \frac{\overline{G(e,0,p)}}{\overline{G(0,0,p)}} \overline{\varphi_i(p)} - \lambda_s \frac{\overline{f(p)}}{\overline{G(0,0,p)}} \quad (\text{II.140})$$

En remplaçant les expressions de $\overline{G(e,0,p)}$ et $\overline{G(0,0,p)}$ données respectivement par les équations (II.122) et (II.123) dans cette dernière, on obtient :

$$\overline{\Phi(p)} = \frac{2\overline{\varphi_i(p)} q e^{-qe}}{(q+H_i^0) + (q-H_i^0) e^{-2qe}} + \lambda_s \overline{f(p)} q \frac{(q-H_i^0) e^{-2qe} - (q+H_i^0)}{(q-H_i^0) e^{-2qe} + (q+H_i^0)} \quad (\text{II.141})$$

L'expression de la densité de flux de chaleur donnée par cette dernière (utilisation de la condition limite de convection en $x = 0$ avec h_e dépendant du temps) est la même que celle du cas d'une température imposée en $x = 0$, donnée par l'équation (II.76) du premier modèle. Ceci prouve d'une part qu'on aboutit aux mêmes résultats par l'utilisation de l'une ou l'autre des conditions limites et d'autre part, que le coefficient d'échange thermique est dépendant du temps quand le régime thermique est transitoire dans la plaque.

II.4 Conclusion

Nous avons développé un modèle théorique pour le calcul du coefficient d'échange convectif en régime transitoire sur plaque plane chauffée. Ce modèle, couplé aux essais expérimentaux représentant les profils de température de surface de la plaque, nous a permis de déterminer le flux de chaleur pariétal et de déduire le coefficient d'échange convectif.

Au niveau de la formulation du modèle mathématique traduisant le modèle physique en équation, nous avons choisi d'utiliser la méthode de la fonction de Green pour étudier l'échange de chaleur entre l'écoulement de l'air et la plaque. L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que la fonction G est relativement facile à manipuler et peut être définie et calculée analytiquement. Cette méthode présente également l'intérêt de ne pas

nécessiter l'utilisation du champ de température dans toute la structure, pour calculer le flux à la paroi, seules interviennent les températures superficielles, d'où une simplification appréciable du modèle mathématique et un gain de temps de calcul considérable par réduction du nombre d'inconnues.

Chapitre III

MODELISATION DANS LE FLUIDE

CHAPITRE III : MODELISATION DANS LE FLUIDE

III.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse des mécanismes de transfert thermique entre un fluide en convection forcée, et les parois solides qu'il baigne, en régime transitoire. Une méthode originale, utilisant la méthode des fonctions de Green, a été mise au point permettant la résolution de l'équation de l'énergie dans le fluide dans le cas d'un flux de chaleur appliqué à l'interface solide-fluide.

Nous étudions le problème de la convection forcée sur une plaque plane en régime thermique transitoire avec des conditions aux limites variables. L'objectif étant de déterminer le champ de température dans le fluide et particulièrement la température pariétale dans le but d'identifier l'évolution du coefficient d'échange en fonction du temps et de la position.

On suppose que le fluide est incompressible et de propriétés thermophysiques indépendantes de la température.

Vu les difficultés d'utilisation des méthodes numériques et leur influence sur la précision des résultats de calcul, nous avons opté pour l'utilisation de méthodes analytiques basées essentiellement sur la théorie des fonctions de Green.

Nous posons en premier lieu le problème dans le cas général d'un canal rectangulaire, puis nous aborderons le problème de la convection laminaire forcée en régime thermique transitoire dans le cas d'une plaque plane infinie, dont une portion ayant la forme d'une bande de longueur infinie, émet un flux de chaleur pénétrant dans le fluide. Le profil de vitesse sera approché par un polynôme d'ordre 2 (Paulhausen) dont on définira de façon conventionnelle "une épaisseur de couche limite dynamique δ " correspondant à la zone dans laquelle la variation de vitesse est la plus marquée.

III.2 Equation de l'énergie

III.2.1 Position du problème

Nous nous intéressons donc au problème de la recherche du champ de température dans un fluide en convection forcée dans une conduite rectiligne de section droite rectangulaire, dont les dimensions latérales L_1 et L_2 peuvent éventuellement être infinies :

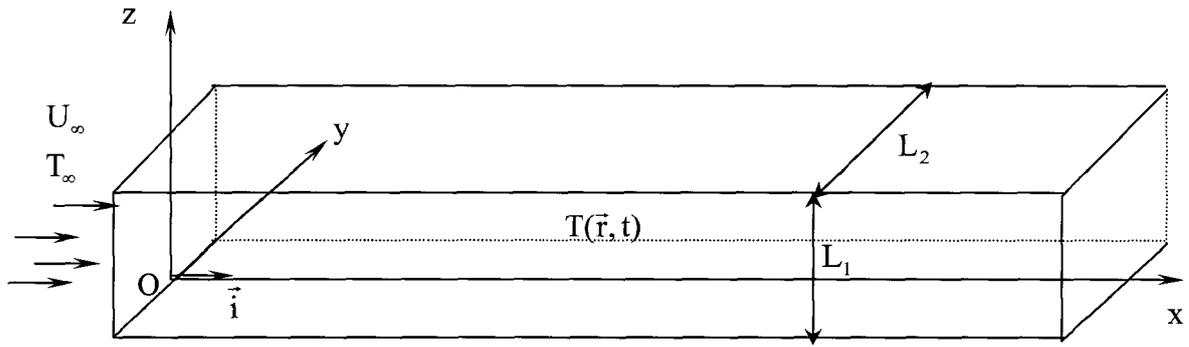


Figure III.1 : Représentation de l'écoulement dans un canal rectangulaire

Le fluide de propriétés physiques constantes est le siège d'un champ de vitesse $\vec{U}(\vec{r}, t)$. Ce champ de vitesse dépend en général de la position du point et du temps, supposée isovolume ($\text{div}\vec{U} = 0$) et s'annule sur les parois solides avec lesquelles il est en contact. L'équation de propagation du champ de température $T(\vec{r}, t)$ dans le fluide, prend alors la forme :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} - \Delta T(\vec{r}, t) + \frac{1}{a} \text{div} \vec{U}(\vec{r}, t) T(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{III.1})$$

Avec $a = \frac{\lambda_f}{\rho c_p}$ et $\vec{r} = (x, y, z)$

L'équation (III.1) peut être considérée comme le noyau linéaire (dominant en général dans les problèmes d'écoulement forcé) des équations complètes non linéaires (équation de propagation couplée à l'équation de Navier-Stokes et l'équation d'état).

La résolution de cette équation permet de déterminer la température T lorsque la vitesse \vec{U} est préalablement calculée par résolution des équations de Navier-Stokes.

On peut toujours écrire $\vec{U}(\vec{r}, t) = U_\infty \vec{i} + \vec{v}(\vec{r}, t)$ où U_∞ est, par exemple, le champ de vitesse normal moyen sur une section droite S_d (vitesse débitante :

$U_\infty = \frac{1}{S_d} \iint_{S_d} \vec{U}(\vec{r}, t) d\vec{S}$, uniforme par construction et constante en écoulement permanent), ou encore la valeur maximale de la vitesse (au centre de la canalisation par exemple).

Le champ $\vec{v}(\vec{r}, t)$, qui mesure l'écart du champ de vitesse réel par rapport au champ uniforme $U_\infty \vec{i}$, est à divergence nulle et est égal à $-U_\infty \vec{i}$ sur les parois latérales.

L'équation de propagation devient alors :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T + \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{a} \text{div} \vec{v} T = 0 \quad (\text{III.2})$$

Ou encore :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T + \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{a} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = 0 \quad (\text{III.3})$$

On suppose que l'écoulement est établi depuis un temps infini (ce qui n'entraîne pas nécessairement que \vec{v} soit indépendant du temps) avec une température d'entrée (section d'entrée $S_e = S_d(x=0)$ qui peut être éventuellement rejetée à l'infini : $x = -\infty$) constante et uniforme, ce qui entraîne qu'à l'instant initial le champ $T(\vec{r}, t=0)$ est uniforme dans le fluide. Cette valeur est prise comme référence et toutes les températures seront dans ce qui suit, évaluées par rapport à celle-ci.

La condition initiale s'écrit donc : $T_{\text{init}}(\vec{r}) = 0$

III.2.2 Conditions aux limites thermiques

Soit P un point quelconque des parois latérales ; appelons $\Phi(\vec{\rho}, t)$ la densité de flux de chaleur normal entrant dans le fluide par conduction au point P où $\Phi(\vec{\rho}, t < 0) = 0$ et $\vec{\rho} = \overrightarrow{OP}$.

Nous avons alors en tout point P de chaque paroi latérale :

$$\lambda_f \vec{\nabla} T(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \Big|_{\vec{r}=\vec{\rho}} = \Phi(\vec{\rho}, t) \quad (\text{III.4})$$

Avec \vec{n} : normale extérieure au fluide au point P de la paroi considérée.

Appelons de même $T(\vec{\rho}, t)$; $T(\vec{\rho}, t < 0) = 0$ la température pariétale au même point.

Appelons d'autre part $T_e(y, z, t)$ ($T_e(y, z, t < 0) = 0$), le champ de température sur la section d'entrée.

Nous allons maintenant établir une relation mathématique exacte entre le champ $T(\vec{r}, t)$ et les champs pariétaux, $\Phi(\vec{\rho}, t)$ ou $T(\vec{\rho}, t)$ et $T_e(y, z, t)$.

III.3 Résolution de l'équation de l'énergie par la méthode des fonctions de Green

L'équation (III.3) peut se mettre sous la forme d'une équation de conduction pure.

En effet, en posant $T(\vec{r}, t) = e^{\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty}{2} t \right)} T_1(\vec{r}, t)$, on vérifie que le champ inconnu $T_1(\vec{r}, t)$ doit satisfaire l'équation suivante :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T_1(\vec{r}, t)}{\partial t} - \Delta T_1(\vec{r}, t) + \frac{1}{a} \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} \vec{\nabla} e^{\frac{U_\infty}{2a} x} T_1(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{III.5})$$

qui est une équation de conduction pure avec un terme source $\frac{1}{a} \vec{v} \cdot e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} \vec{\nabla} e^{\frac{U_\infty}{2a} x} T_1$ dépendant linéairement du champ inconnu T_1 .

III.3.1 Résolution par la méthode des fonctions de Green

Soit alors $G(\vec{r}, \vec{r}', t)$ la solution, (fonction de Green définie dans le domaine fluide (D) limité par les surfaces S_e, S_l (4 parois latérales), $S_\infty = S_d(x \rightarrow +\infty)$), des équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} G(\vec{r}, \vec{r}', t) - \Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}', t) = \delta(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ G(\vec{r}, \vec{r}', t < 0) = 0 \\ G(\vec{r}, \vec{r}', t) \Big|_{\vec{r} \in S_e} = 0 \quad \forall \vec{r}' \\ G(\vec{r}, \vec{r}', t) \Big|_{\vec{r} \in S_\infty} = 0 \quad \forall \vec{r}' \end{array} \right. \quad (\text{III.6})$$

Et sur les parois latérales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_f \vec{\nabla}_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}', t) \cdot \vec{n} \Big|_{\vec{r} \in S_l} = 0 \quad \forall \vec{r}' \quad \text{choix 1} \\ \text{ou} \\ G(\vec{r}, \vec{r}', t) \Big|_{\vec{r} \in S_l} = 0 \quad \forall \vec{r}' \quad \text{choix 2} \end{array} \right. \quad (\text{III.7})$$

La transformée de Laplace de $T_1(\vec{r}', t)$, $\bar{T}_1(\vec{r}', p)$, s'écrit alors rigoureusement, en un point quelconque \vec{r}' du domaine (D) (voir annexe3) [30, 31, 32] :

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(\vec{r}', p) = & - \iint_{S_e} e^{-\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty t}{2} \right)} T_e(\vec{r}, t) \vec{\nabla}_{\vec{r}} \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) dS_e + \iint_{S_l} \left(\bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) \vec{\nabla}_{\vec{r}} \bar{T}_1(\vec{r}, p) - \bar{T}_1(\vec{r}, p) \vec{\nabla}_{\vec{r}} \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) \right) d\vec{S}_l \\ & - \frac{1}{a} \iiint_{(D)} d^3r \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} \vec{\nabla}_{\vec{r}} e^{\frac{U_\infty}{2a} x} T_1(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Le choix (2) conduirait à :

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(\vec{r}', p) = & - \iint_{S_e} e^{-\frac{U}{2a} \left(x - \frac{U t}{2} \right)} T_e(\vec{r}, t) \vec{\nabla}_{\vec{r}} \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) dS_e - \iint_{S_l} \left(\bar{T}_1(\vec{r}, p) \vec{\nabla}_{\vec{r}} \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) \right) d\vec{S}_l \\ & - \frac{1}{a} \iiint_{(D)} d^3r \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U}{2a} x} \vec{\nabla}_{\vec{r}} e^{\frac{U}{2a} x} T_1(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

C'est une équation intégrale établissant une relation entre le champ de température du fluide et la température pariétale : son traitement nécessite la connaissance de cette dernière, sur toute les parois solides bornant l'écoulement, pour en déduire le flux qui pénètre dans le fluide.

Le choix (1), en revanche établit directement une relation entre le champ de température du fluide et le flux pénétrant par les parois. Il est possible ensuite d'en déduire le champ de température pariétale : c'est ce choix que nous traitons dans la suite.

On obtient alors, en notant \bar{G}_φ la fonction de Green associée :

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(\vec{r}, p) = & - \iint_{S_e} e^{-\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty}{2} t \right)} T_e(\vec{r}, t) \bar{\nabla}_{\vec{r}} \bar{G}_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, p) dS_e + \iint_{S_\ell} \bar{G}_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, p) \bar{\nabla}_{\vec{r}} \bar{T}_1(\vec{r}, p) d\bar{S}_\ell \\ & - \frac{1}{a} \iiint_{(D)} d^3 r \bar{G}_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, p) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} \bar{\nabla}_{\vec{r}} e^{\frac{U_\infty}{2a} x} T_1(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (III.10)$$

Soit en remontant à l'original :

$$\begin{aligned} T_1(\vec{r}, t) = & - \int_0^t d\tau \iint_{S_e} e^{-\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty}{2} \tau \right)} T_e(\vec{r}, \tau) \bar{\nabla}_{\vec{r}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) dS_e + \int_0^t d\tau \iint_{S_\ell} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) \bar{\nabla}_{\vec{r}} T_1(\vec{r}, \tau) d\bar{S}_\ell \\ & - \frac{1}{a} \int_0^t d\tau \iiint_{(D)} d^3 r G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) \cdot \vec{v}(\vec{r}, \tau) \cdot e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} \bar{\nabla}_{\vec{r}} e^{\frac{U_\infty}{2a} x} T_1(\vec{r}, \tau) \end{aligned} \quad (III.11)$$

Les deux premiers termes de l'équation (III.11), qui représentent la solution dans le cas où la vitesse d'écoulement est uniforme, sont respectivement la contribution à la solution générale de la température à l'entrée, et de l'échange de chaleur à l'interface solide-fluide. Le troisième terme qui fait intervenir la couche limite permet de traiter le problème dans le cas où la vitesse d'écoulement est non uniforme.

Et puisque sur les parois latérales $d\bar{S}_\ell$ est orthogonale à la direction x , on peut écrire :

$$\bar{\nabla}_{\vec{r}} T_1(\vec{r}, \tau) d\bar{S}_\ell = \bar{\nabla}_{\vec{r}} e^{-\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty}{2} \tau \right)} T(\vec{r}, \tau) d\bar{S}_\ell = e^{-\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty}{2} \tau \right)} \bar{\nabla}_{\vec{r}} T(\vec{r}, \tau) d\bar{S}_\ell$$

Cette dernière expression nous permet de réécrire (III.11) sous la forme suivante (Annexe 4) :

$$\begin{aligned} T_1(\vec{r}, t) = & - \int_0^t d\tau e^{\frac{U_\infty^2}{4a} \tau} \iint_{S_e} e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} T_e(\vec{r}, \tau) \bar{\nabla}_{\vec{r}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) dS_e \\ & + \int_0^t d\tau e^{\frac{U_\infty^2}{4a} \tau} \iint_{S_\ell} e^{\frac{U_\infty}{2a} x} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) \bar{\nabla}_{\vec{r}} T(\vec{r}, \tau) d\bar{S}_\ell \\ & - \frac{1}{a} \int_0^t d\tau e^{\frac{U_\infty^2}{4a} \tau} \iiint_{(D)} d^3 r e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) \vec{v}(\vec{r}, \tau) \cdot \bar{\nabla}_{\vec{r}} T(\vec{r}, \tau) \end{aligned}$$

Soit en utilisant les conditions aux limites citées dans le paragraphe (III.2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} T(\vec{r}, t) = & - \int_0^t d\tau e^{-\frac{U_\infty^2}{4a} (t-\tau)} \iint_{S_e} e^{\frac{U_\infty}{2a} (x'-x)} T_e(\vec{r}, \tau) \bar{\nabla}_{\vec{r}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) dS_e \\ & + \frac{1}{\lambda_f} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U_\infty^2}{4a} (t-\tau)} \iint_{S_\ell} e^{\frac{U_\infty}{2a} (x'-x)} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) \Phi(\vec{r}, \tau) d\bar{S}_\ell \\ & - \frac{1}{a} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U_\infty^2}{4a} (t-\tau)} \iiint_{(D)} d^3 r e^{\frac{U_\infty}{2a} (x'-x)} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) \vec{v}(\vec{r}, \tau) \bar{\nabla}_{\vec{r}} T(\vec{r}, \tau) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{terme} \\ \text{correctif} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (III.12)$$

Des simplifications peuvent être apportées à cette dernière expression. En effet le profil de vitesse possède une propriété très importante $\left\{ \text{div}(\vec{v}(\vec{r}, \tau)) = 0 \right\}$ que l'on a tout intérêt à

utiliser pour simplifier le calcul du 3^{ème} terme. Donc en utilisant cette propriété, l'intégrale triple du 3^{ème} terme s'écrit :

$$\iiint_{(D)} d^3r \left(\operatorname{div} \left(e^{\frac{U_\infty}{2a}(x'-x)} G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \cdot \vec{v}(\vec{r}, \tau) T(\vec{r}, \tau) \right) - T(\vec{r}, \tau) \vec{v}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{\nabla} \left(e^{\frac{U_\infty}{2a}(x'-x)} G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \right) \right)$$

dont on vérifie que la première partie, qui se transforme en intégrale double sur les frontières du système, s'annule. Finalement on obtient, en posant $\frac{U_\infty}{2a} = \frac{1}{\ell}$, ℓ étant une grandeur caractéristique du phénomène de convection ayant la dimension d'une longueur, l'expression :

$$\begin{aligned} T(\vec{r}, t) = & -e^{\frac{x'}{\ell}} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}(t-\tau)} \iint_{S_e} dydz e^{-\frac{x}{\ell}} T_e(\vec{r}, \tau) \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \\ & + \frac{1}{\lambda_f} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}(t-\tau)} \iint_{S_f} e^{\frac{(x'-x)}{\ell}} G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \Phi(\vec{r}, \tau) dS_\ell \\ & + \frac{1}{a} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}(t-\tau)} \iiint_{(D)} d^3r T(\vec{r}, \tau) \vec{v}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left(e^{\frac{(x'-x)}{\ell}} G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Cette expression est une relation linéaire intégrale exacte (mais implicite puisque $T(\vec{r}, \tau)$ figure dans le second membre) entre le champ de température régnant dans tout le fluide, et le flux entrant par conduction dans celui-ci par les parois, compte tenu de la température d'entrée dans la conduite. Ce type d'équation peut être, en principe, résolu par itération.

L'équation (III.13) se simplifie si l'on admet que la face d'entrée est renvoyée vers $x \rightarrow -\infty$ avec une température d'entrée $T_e(\vec{r}, t) = 0$ et si $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est indépendante du temps. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} T(\vec{r}, t) = & \frac{1}{\lambda_f} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}(t-\tau)} \iint_{S_f} e^{\frac{(x'-x)}{\ell}} G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \Phi(\vec{r}, \tau) dS_\ell \\ & + \frac{1}{a} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}(t-\tau)} \iiint_{(D)} d^3r T(\vec{r}, \tau) \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left(e^{\frac{(x'-x)}{\ell}} G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Dont la transformée de Laplace est :

$$\begin{aligned} \overline{T(\vec{r}, p)} = & \frac{1}{\lambda_f} \iint_{S_f} e^{\frac{(x'-x)}{\ell}} \overline{G_\phi \left(\vec{r}, \vec{r}', p + \frac{U_\infty}{2\ell} \right)} \overline{\Phi(\vec{r}, p)} dS_\ell \\ & + \frac{1}{a} \iiint_{(D)} d^3r \overline{T(\vec{r}, p)} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left(e^{\frac{(x'-x)}{\ell}} \overline{G_\phi \left(\vec{r}, \vec{r}', p + \frac{U_\infty}{2\ell} \right)} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Où $\overline{G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', p)}$ est la transformée de Laplace de la fonction de Green.

$$\left\{ \begin{array}{l} q^2 \bar{G}_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', p) - \Delta_{\vec{r}} \bar{G}_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', p) = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \\ \bar{G}_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', p) \Big|_{\vec{r} \in S_\infty} = 0 \quad \forall \vec{r}' \\ \bar{G}_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', p) \Big|_{\vec{r} \in S_\varphi} = 0 \quad \forall \vec{r}' \end{array} \right. \quad q^2 = \frac{p}{a} \quad (\text{III.16})$$

$$\text{Et sur les parois latérales :} \quad \lambda_f \bar{\nabla}_{\vec{r}} \bar{G}_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', p) \cdot \vec{n} \Big|_{\vec{r}=\vec{p}} = 0 \quad (\text{III.17})$$

III.3.2 Réponse indicielle

Appelons $T_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r}', t)$ le champ de température dans le fluide, solution des équations précédentes, pour une impulsion de flux localisée en un point \vec{r}_i donné des parois latérales : $\Phi(\vec{p}, t) = \delta(\vec{p} - \vec{r}_i)\delta(t)$.

L'intérêt de l'introduction de ce champs est que, pour un flux quelconque $\Phi(\vec{r}_i, t)$ (avec : $\vec{r}_i \in S_\ell$), le champ de température dans le fluide s'écrira :

$$T(\vec{r}, t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_\ell} dS_{\vec{r}_i} T_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r}, t - \tau) \Phi(\vec{r}_i, t) \quad (\text{III.18})$$

La transformée de Laplace de $T_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r}', t)$ s'écrit :

$$\bar{T}_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r}, p) = \bar{T}_{\delta\vec{r}_i}^0(\vec{r}, p) + \frac{1}{a} \iiint_{(D)} d^3r \bar{T}_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r}, p) \vec{v}(\vec{r}) \cdot \bar{\nabla}_{\vec{r}} \left(e^{\frac{(x-x')}{\ell}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', q') \right) \quad (\text{III.19})$$

$$\text{Avec :} \quad \bar{T}_{\delta\vec{r}_i}^0(\vec{r}, p) = \frac{1}{\lambda_f} e^{\frac{(x-x_1)}{\ell}} G_\varphi(\vec{r}_i, \vec{r}, q') \quad \text{et} \quad q' = \sqrt{\frac{p + \frac{U_\infty}{2\ell}}{a}}$$

$$\text{Ou encore :} \quad \bar{T}_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r}, p) = \bar{T}_{\delta\vec{r}_i}^0(\vec{r}, p) + \frac{1}{a} \iiint_{(D)} d^3r'' \bar{T}_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r}'', p) \vec{v}(\vec{r}'') \cdot \bar{\nabla}_{\vec{r}''} \left(e^{\frac{(x-x'')}{\ell}} G_\varphi(\vec{r}'', \vec{r}, q') \right) \quad (\text{III.20})$$

En substituant l'équation (III.20) dans (III.19), $\bar{T}_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r}, p)$ peut se réécrire :

$$\bar{T}_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r}, p) = \bar{T}_{\delta\vec{r}_i}^0(\vec{r}, p) + \frac{1}{a} \iiint_{(D)} \left\{ \begin{array}{l} \bar{T}_{\delta\vec{r}_i}^0(\vec{r}, p) \\ + \frac{1}{a} \iiint_{(D)} d^3r'' \bar{T}_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r}'', p) \vec{v}(\vec{r}'') \cdot \bar{\nabla}_{\vec{r}''} \left(e^{\frac{(x-x'')}{\ell}} G_\varphi(\vec{r}'', \vec{r}, q') \right) \\ \times \vec{v}(\vec{r}) \bar{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \left(e^{\frac{(x-x)}{\ell}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', q') \right) \end{array} \right\} \quad (\text{III.21})$$

Soit finalement en réitérant l'opération et en posant :

$$\bar{T}_{\delta\vec{r}_i}(\vec{r}, p) = \bar{T}_{\delta\vec{r}_i}^0(\vec{r}, p) + \bar{T}_{\delta\vec{r}_i}^1(\vec{r}, p) + \bar{T}_{\delta\vec{r}_i}^2(\vec{r}, p) + \dots \quad (\text{III.22})$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{\delta\bar{q}}^1(\bar{r},p) &= \frac{1}{a} \iiint_{(D)} d^3r \bar{T}_{\delta\bar{q}}^0(\bar{r},p) \bar{v}(\bar{r}) \cdot \bar{\nabla}_{\bar{r}} \left(e^{\frac{(x'-x)}{\ell}} G_{\phi}(\bar{r},\bar{r},q') \right) \\
&= \frac{1}{a\lambda_f} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} \underbrace{\iiint_{(D)} d^3r G_{\phi}(\bar{r}_1,\bar{r},q') \left(\bar{v}(\bar{r}) \cdot \bar{\nabla}_{\bar{r}} G_{\phi}(\bar{r},\bar{r},q') - \frac{\bar{v}(\bar{r}) \cdot \bar{i}}{\ell} G_{\phi}(\bar{r},\bar{r},q') \right)}_{A(\bar{r}_1,\bar{r},q')}
\end{aligned} \tag{III.23}$$

D'où :

$$\bar{T}_{\delta\bar{q}}^1(\bar{r},p) = \frac{1}{a\lambda_f} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} A(\bar{r}_1,\bar{r},q') \tag{III.24}$$

Puis :

$$\bar{T}_{\delta\bar{q}}^2(\bar{r},p) = \frac{1}{a} \iiint_{(D)} d^3r \left(\frac{1}{a} \iiint_{(D)} d^3r'' \bar{T}_{\delta\bar{q}}^0(\bar{r}'',p) \bar{v}(\bar{r}'') \cdot \bar{\nabla}_{\bar{r}''} \left(e^{\frac{(x-x'')}{\ell}} G_{\phi}(\bar{r}'',\bar{r},q') \right) \right) \times \bar{v}(\bar{r}) \cdot \bar{\nabla}_{\bar{r}} \left(e^{\frac{(x'-x)}{\ell}} G_{\phi}(\bar{r},\bar{r},q') \right) \tag{III.25}$$

Et ainsi de suite pour les termes $\bar{T}_{\delta\bar{q}}^3(\bar{r},p)$, $\bar{T}_{\delta\bar{q}}^4(\bar{r},p)$ etc.

On remonte à l'original.

$$T_{\delta\bar{q}}(\bar{r},t) = T_{\delta\bar{q}}^0(\bar{r},t) + T_{\delta\bar{q}}^1(\bar{r},t) + T_{\delta\bar{q}}^2(\bar{r},t) + \dots \tag{III.26}$$

III.3.3 Définition de la fonction de Green

L'intérêt de la géométrie utilisée est que la fonction de Green, solution du système (III.6) se factorise :

$G_{\phi}(\bar{r},\bar{r},t) = G_{\phi}^1(x,x',t)G_{\phi}^2(y,y',t)G_{\phi}^3(z,z',t)$ et que chacune des 3 parties, aisées à calculer présente des propriétés intéressantes.

La solution du problème (III.16) s'écrit en effet :

$$\bar{G}_{\phi}(\bar{r},\bar{r},p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-ikx} \varphi_n(y) \varphi_n(y') \psi_m(z) \psi_m(z')}{q^2 + k^2 + \alpha_n^2 + \beta_m^2} \tag{III.27}$$

Où les fonctions $\varphi_n(y)$ et $\psi_m(z)$ sont les fonctions propres normalisées, de valeurs propres $\alpha_n^2 + \beta_m^2$, du Laplacien bidimensionnel, satisfaisant la condition de flux normal nul sur les parois latérales.

On a par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi_n(y)}{\partial y^2} = -\alpha_n^2 \varphi_n(y) \quad ; \quad \varphi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{L_2}} \cos \frac{n\pi}{L_2} \left(y - \frac{L_2}{2} \right) \quad ; \quad \alpha_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L_2^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_m(z)}{\partial z^2} = -\beta_m^2 \psi_m(z) \quad ; \quad \psi_m(z) = \sqrt{\frac{2}{L_1}} \cos \frac{m\pi}{L_1} z \quad ; \quad \beta_m^2 = \frac{m^2 \pi^2}{L_1^2} \end{array} \right\} \tag{III.28}$$

L'originale de l'expression (III.27) s'écrit alors [32, 35, 36, 37] :

$$G_{\phi}(\bar{r},\bar{r},t) = \frac{a}{2\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-x')} \varphi_n(y) \varphi_n(y') \psi_m(z) \psi_m(z') e^{-a(k^2 + \alpha_n^2 + \beta_m^2)t} \tag{III.29}$$

Qui se factorise en trois facteurs indépendants :

$$G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', t) = \frac{1}{a^2} \underbrace{\left(\frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-x')} e^{-ak^2 t} \right)}_{G_\phi^1(x, x', t)} \underbrace{\left(a \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(y) \phi_n(y') e^{-a\alpha_n^2 t} \right)}_{G_\phi^2(y, y', t)} \underbrace{\left(a \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(z) \psi_m(z') e^{-a\beta_m^2 t} \right)}_{G_\phi^3(z, z', t)} \quad (\text{III.30})$$

On vérifie sans difficulté que $G_\phi^1(x, x', t)$ est la solution du système (III.31) :

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} G_\phi^1(x, x', t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_\phi^1(x, x', t) = \delta(t) \delta(x - x') \\ G_\phi^1(x, x', t < 0) = 0 \quad ; \quad G_\phi^1(x, x', t) \Big|_{x=\pm\infty} = 0 \quad \forall x' \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

$G_\phi^2(y, y', t)$ est solution du système (III.32) :

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} G_\phi^2(y, y', t) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_\phi^2(y, y', t) = \delta(t) \delta(y - y') \\ G_\phi^2(y, y', t < 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} G_\phi^2(y, y', t) \Big|_{y=-\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2}} = 0 \quad \forall y' \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

Et enfin, $G_\phi^3(z, z', t)$ est solution du système (III.33) :

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} G_\phi^3(z, z', t) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} G_\phi^3(z, z', t) = \delta(t) \delta(z - z') \\ G_\phi^3(z, z', t < 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} G_\phi^3(z, z', t) \Big|_{z=0, L_1} = 0 \quad \forall z' \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

Les solutions pour $G_\phi^1(x, x', t)$, $G_\phi^2(y, y', t)$, $G_\phi^3(z, z', t)$ (détaillées en annexe 5) peuvent encore s'écrire sous la forme :

$$G_\phi^1(x, x', t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4at}} \quad (\text{III.34})$$

$$\text{Et : } G_\phi^2(y, y', t) = \begin{cases} a \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(y) \phi_n(y') e^{-a\alpha_n^2 t} & ; \quad \text{si } L_2 \text{ est finie} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{(y-y')^2}{4at}} & ; \quad \text{si } L_2 \text{ est infinie} \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

$$\text{Et : } G_\phi^3(z, z', t) = \begin{cases} a \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(z) \psi_m(z') e^{-a\beta_m^2 t} & ; \quad \text{si } L_1 \text{ est finie} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \left(e^{-\frac{(z-z')^2}{4at}} + e^{-\frac{(z+z')^2}{4at}} \right) & ; \quad \text{si } L_1 \text{ est infinie} \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

III.4 Comportement thermique d'une plaque plane semi-infinie

Appliquons maintenant ce qui précède au problème simplifié suivant :

Trois parois latérales de la conduite sont rejetées à l'infini ($L_1, L_2 = \infty$). Seul subsiste le plan $z = 0$ supposé parfaitement isolant : $\Phi(\vec{\rho}, t)|_{z=0} = 0$, sauf sur une portion rectangulaire (plaque chauffante parallèle à l'écoulement) (S_0) où :

$$\Phi_0(\vec{\rho}, t) = \Phi_0(x, y, t) \begin{cases} x_0 - \frac{c}{2} < x < x_0 + \frac{c}{2} \\ y_0 - \frac{b}{2} < y < y_0 + \frac{b}{2} \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

La température d'entrée du fluide $T_e(y, z, t)$ en $x \rightarrow -\infty$ étant nulle. Nous supposons également que le champ de vitesse dans le fluide est indépendant du temps.

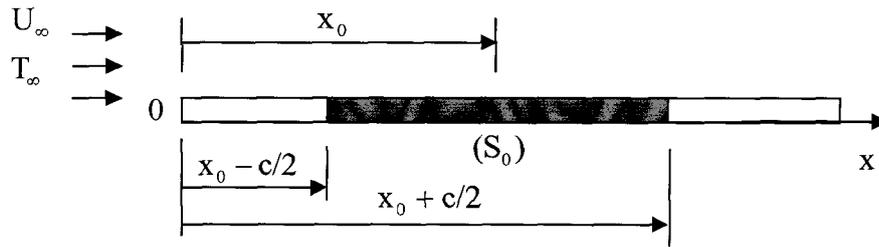


Figure III.2 : Représentation schématique d'une plaque plane chauffée à partir d'une distance $x_0 - c/2$

Nous sommes donc dans les conditions du paragraphe III.3.2

$$T(\vec{r}, t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_f} dS_{\vec{r}_f} T_{\delta_{\vec{r}_f}}(\vec{r}, t - \tau) \Phi(\vec{r}_f, t) \quad (\text{III.38})$$

Avec :

$$T_{\delta_{\vec{r}_f}}(\vec{r}, t) = T_{\delta_{\vec{r}_f}}^0(\vec{r}, t) + T_{\delta_{\vec{r}_f}}^1(\vec{r}, t) + T_{\delta_{\vec{r}_f}}^2(\vec{r}, t) + \dots \quad (\text{III.39})$$

$$\begin{aligned} T_{\delta_{\vec{r}_f}}^0(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\lambda_f} e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}\tau} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\varphi(x_1, y_1, z_1 = 0, \vec{r}, t) \\ &= \frac{1}{\lambda_f} e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}\tau} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\varphi^3(z_1 = 0, z', \tau) G_\varphi^2(y_1, y', t) G_\varphi^1(x_1, x', t) \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

$$G_\varphi^3(z_1 = 0, z', \tau) = \sqrt{\frac{a}{\pi\tau}} e^{-\frac{z'^2}{4a\tau}} ; G_\varphi^2(y_1, y', \tau) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi\tau}} e^{-\frac{(y_1 - y')^2}{4a\tau}} ; G_\varphi^1(x_1, x', \tau) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi\tau}} e^{-\frac{(x_1 - x')^2}{4a\tau}}$$

Choisissons alors un flux uniforme de la forme $\Phi_0(x_1, y_1, t) = \Phi_0 E(t)$

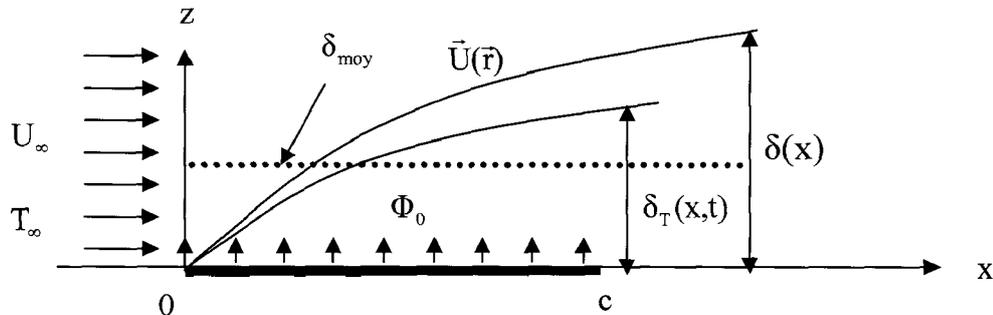


Figure III.3 : Schéma et notation du problème de la convection forcée sur la plaque plane

III.4.1 Température locale

Le premier terme s'écrit :

$$T_0(\vec{r}, t) = \Phi_0 \int_0^t d\tau \iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\vec{r}}^0(\vec{r}, \tau) \quad (\text{III.41})$$

Soit :

$$\frac{\Phi_0}{\lambda_f a^2} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}\tau} G_\phi^3(z_1=0, z', \tau) \int_{y_0-\frac{b}{2}}^{y_0+\frac{b}{2}} dy_1 G_\phi^2(y_1, y', \tau) \int_{x_0-\frac{c}{2}}^{x_0+\frac{c}{2}} dx_1 e^{-\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\phi^1(x_1, x', \tau) \quad (\text{III.42})$$

D'où :

$$T_0(\vec{r}, t) = \frac{\Phi_0}{4\lambda_f a^2} \int_0^t d\tau \left(\frac{a}{\pi\tau}\right)^{3/2} e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}\tau} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-\frac{(y_1-y')^2}{4a\tau}} dy_1 \int_{x_0-\frac{c}{2}}^{x_0+\frac{c}{2}} dx_1 e^{-\frac{(x'-x_1)}{\ell}} \left(e^{-\frac{(x_1-x')^2}{4a\tau}} - e^{-\frac{(x_1+x')^2}{4a\tau}} \right) e^{-\frac{z'^2}{4a\tau}} \quad (\text{III.43})$$

Les intégrales spatiales s'effectuent sans difficultés :

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-\frac{(y-y')^2}{4a\tau}} dy = \sqrt{\pi a\tau} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{b/2-y'}{2\sqrt{a\tau}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{b/2+y'}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 2\sqrt{\pi a\tau}$$

$$\int_{x_0-\frac{c}{2}}^{x_0+\frac{c}{2}} dx e^{-\frac{(x-x')}{\ell}} \left(e^{-\frac{(x-x')^2}{4a\tau}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4a\tau}} \right) = e^{-\frac{U}{2\ell}\tau} \sqrt{\pi a\tau} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x_0+\frac{c}{2}-x'+U_\infty\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_0-\frac{c}{2}-x'+U_\infty\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right)$$

Et finalement :

$$T_0(\vec{r}, t) = \frac{\Phi_0}{4\lambda_f} \int_0^t d\tau \left(\frac{a}{\pi\tau}\right)^{1/2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{b/2-y'}{2\sqrt{a\tau}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{b/2+y'}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x_0+\frac{c}{2}-x'+U_\infty\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_0-\frac{c}{2}-x'+U_\infty\tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right) e^{-\frac{z'^2}{4a\tau}} \quad (\text{III.44})$$

Ou encore, en introduisant le changement de variable $u^2 = 4a\tau$.

$$T_0(\vec{r}, t) = \frac{\Phi_0}{4\lambda_f \sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{a\tau}} du \left(\operatorname{erf}\left(\frac{b/2-y'}{u}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{b/2+y'}{u}\right) \right) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x_0+\frac{c}{2}-x'+\frac{u}{2\ell}}{u}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_0-\frac{c}{2}-x'+\frac{u}{2\ell}}{u}\right) \right) e^{-\frac{z'^2}{u^2}} \quad (\text{III.45})$$

Qui se simplifie dans le cas d'une bande chauffante $b \rightarrow \infty$:

$$T_0(x', z', t) = \frac{\Phi_0}{2\lambda_f \sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{a\tau}} du \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x_0+\frac{c}{2}-x'+\frac{u}{2\ell}}{u}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_0-\frac{c}{2}-x'+\frac{u}{2\ell}}{u}\right) \right) e^{-\frac{z'^2}{u^2}} \quad (\text{III.46})$$

Et la température du fluide sur la plaque chauffante, c-à-d pour $z'=0$;

$x_0 - \frac{c}{2} < x' < x_0 + \frac{c}{2}$, a donc pour valeur dans ce cas :

$$T_0(x,t) = \Phi_0 \left(\frac{1}{2\lambda_f \sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{at}} du \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x_0 + \frac{c}{2} - x}{u} + \frac{u}{2\ell} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x_0 - \frac{c}{2} - x}{u} + \frac{u}{2\ell} \right) \right) \right) = \Phi_0 R(x,t) \quad (\text{III.47})$$

La quantité $R(x,t)$ est donc analogue à une résistance thermique de convection définie sur la portion chauffante, locale et transitoire.

Son inverse $H(x,t) = 1/R(x,t)$ est équivalent à un coefficient d'échange convectif local, et dépendant du temps, qui n'est défini évidemment que sur la partie émettant le flux de chaleur.

Pour un point situé à la hauteur z , et en prenant : $x_0 = \frac{c}{2}$, on peut écrire:

$$T_0(\bar{r},t) = \frac{\Phi_0}{2\lambda_f \sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{at}} du \left(\operatorname{erf} \left(\frac{c-x}{u} + \frac{u}{2\ell} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{u} - \frac{u}{2\ell} \right) \right) e^{-\frac{z^2}{u^2}} \quad (\text{III.48})$$

Cette expression va nous permettre d'étudier la forme et l'évolution de la couche limite thermique qui s'établirait dans le fluide si la vitesse y était partout uniforme.

Lorsque $0 < x < c$ la fonction $k(u) = \operatorname{erf} \left(\frac{c-x}{u} + \frac{u}{2\ell} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{u} - \frac{u}{2\ell} \right)$ se comporte quasiment comme un créneau égal à 2 pour $0 < u < u_0(x)$ et nulle pour $u_0(x) < u$, où la fonction $u_0(x)$ peut être déterminée numériquement, ainsi que le montre les figures III.4 et 5.

Il est donc légitime, en première approximation, d'écrire :

$$T_0(x,z,t) = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{\lambda_f \sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{at}} du e^{-\frac{z^2}{u^2}} = \frac{\Phi_0}{\lambda_f} \int_0^t d\tau \frac{e^{-\frac{z^2}{4a\tau}}}{\sqrt{\pi a \tau}} & ; \quad \text{si } t < \frac{u_0^2(x)}{4a} \\ \frac{\Phi_0}{\lambda_f \sqrt{\pi}} \int_0^{u_0(x)} du e^{-\frac{z^2}{u^2}} = \frac{\Phi_0}{\lambda_f} \int_0^{\frac{u_0^2(x)}{4a}} d\tau \frac{e^{-\frac{z^2}{4a\tau}}}{\sqrt{\pi a \tau}} & ; \quad \text{si } t > \frac{u_0^2(x)}{4a} \end{cases}$$

Soit puisque la primitive de $\frac{e^{-\frac{z^2}{4a\tau}}}{\sqrt{\pi a \tau}}$ est $\left(2\sqrt{\frac{a\tau}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4a\tau}} - z \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right)$;

$$T_0(x,z,t) = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{\lambda_f} \left(2\sqrt{\frac{at}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4at}} - z \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \right) & ; \quad \text{si } t < \frac{u_0^2(x)}{4a} \\ \frac{\Phi_0}{\lambda_f} \left(\frac{u_0(x)}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{u_0^2(x)}} - z \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{u_0(x)} \right) \right) & ; \quad \text{si } \frac{u_0^2(x)}{4a} < t \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

Et en $z = 0$:

$$T_0(x, z = 0, t) = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{\lambda_f} 2\sqrt{\frac{at}{\pi}} & ; \quad \text{si } t < \frac{u_0^2(x)}{4a} \\ \frac{\Phi_0}{\lambda_f} \frac{u_0(x)}{\sqrt{\pi}} & ; \quad \text{si } \frac{u_0^2(x)}{4a} < t \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

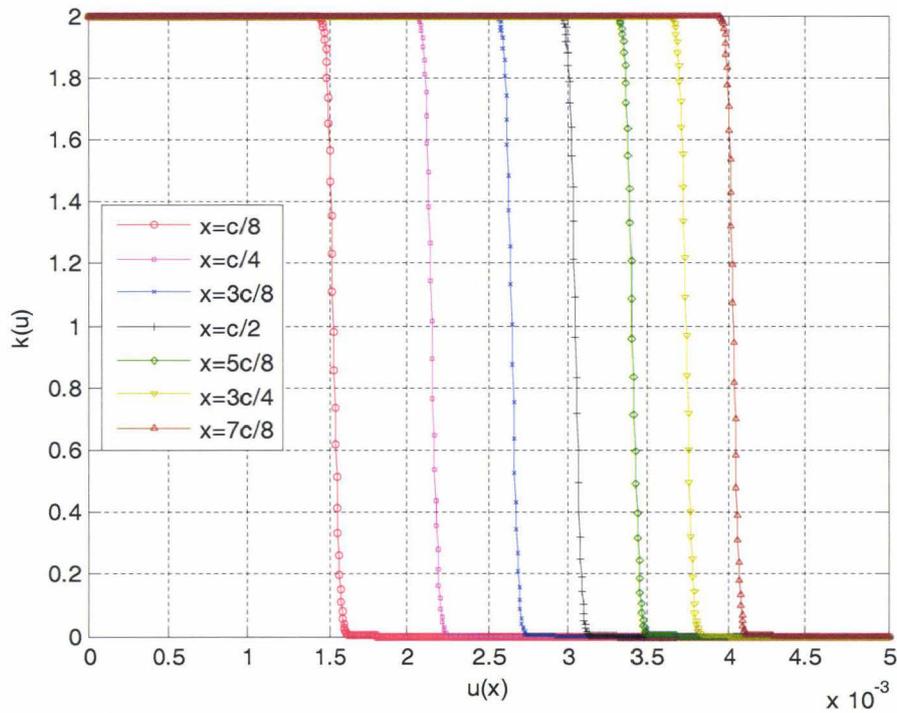


Figure III.4 : Evolution de la fonction $k(u)$ en fonction de u pour différents x

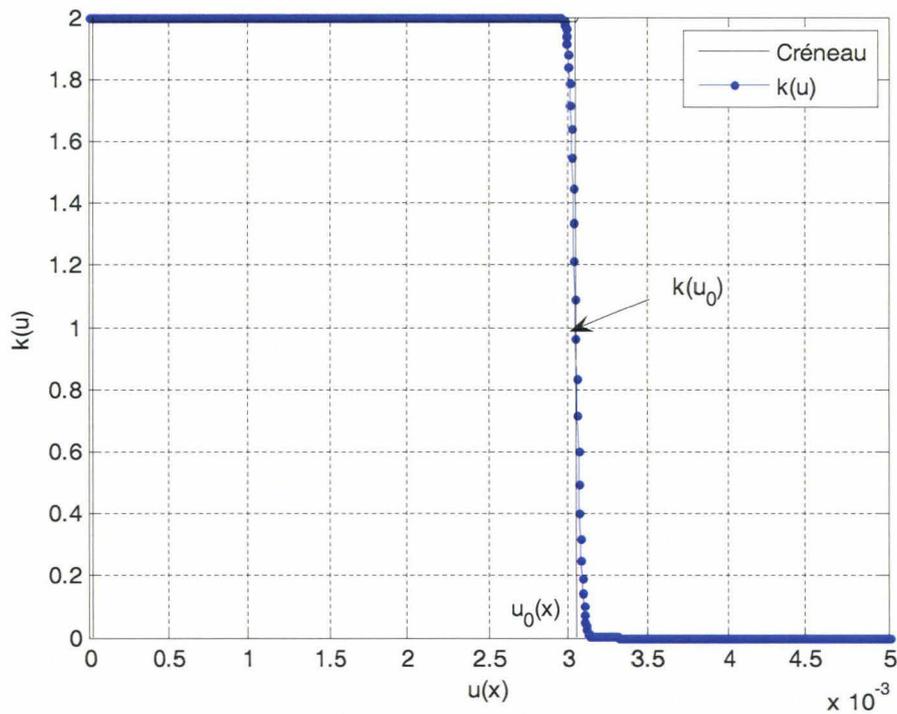


Figure III.5 : Représentation de la fonction $k(u)$ par un créneau pour $x = c/2$

III.4.2 Coefficient d'échange convectif local

Les relations III.50 permettent, par analogie avec la loi de Newton, de définir un coefficient d'échange convectif $h_0(x,t)$ dû à ce premier terme, fonction de la position x et du temps t . Il a l'expression suivante :

$$h_0(x,t) = \begin{cases} \frac{\lambda_f}{2} \sqrt{\frac{\pi}{at}} & ; \quad \text{si } t < \frac{u_0^2(x)}{4a} \\ \frac{\lambda_f \sqrt{\pi}}{u_0(x)} & ; \quad \text{si } \frac{u_0^2(x)}{4a} < t \end{cases} \quad (\text{III.51})$$

On remarque que le coefficient d'échange convectif $h_0(x,t)$ varie en $\frac{1}{\sqrt{t}}$ pendant un

temps $t_c = \frac{u_0^2(x)}{4a}$ qui dépend implicitement de x . Au-delà de ce temps t_c , qui correspond à la durée du régime transitoire au lieu considéré, $h_0(x,t)$ est constant et dépend uniquement de x : le régime permanent est atteint en ce point.

Il est important de définir la durée du régime transitoire en convection forcée, car elle représente un paramètre important de contrôle du pilotage des installations industrielles. Dans ce paragraphe, nous déterminerons la distribution de température dans le fluide en fonction du temps et du point, ainsi que l'évolution temporelle et spatiale du coefficient d'échange convectif, dans les conditions suivantes :

Echelon de flux unité, distribué sur toute la surface de la bande plane de largeur $c = 0,21$ m, avec une vitesse de l'air à l'infini $U_\infty = 1$ m/s et une température $T_\infty = 25^\circ\text{C}$.

On fixe donc la vitesse du fluide et nous suivons la dynamique de température à l'interface solide-fluide le long de la plaque.

Remarquons tout d'abord que la durée du régime transitoire croît avec l'abscisse x (Tableau III.1).

x (m)	$c/8$	$c/4$	$3c/8$	$c/2$	$5c/8$	$3c/4$	$7c/8$
t_c (s)	0,026	0,052	0,078	0,105	0,130	0,157	0,183

Tableau III.1 : Durée du régime transitoire pour différentes abscisses de la plaque

On remarque en outre que ce temps correspond presque exactement au temps mis par une particule fluide pour parcourir la distance x entre le bord d'entrée de la plaque et le point considéré, soit $t_c(x) \cong \frac{x}{U_\infty}$.

La figure suivante (III.6) montre l'évolution en fonction du temps de la température pariétale en différents points de la bande chauffante. Ces courbes sont calculées en utilisant la formule (III.48) pour $z = 0$. Les courbes obtenues numériquement à partir de la formule III.50 sont quasi-confondues avec les précédentes.

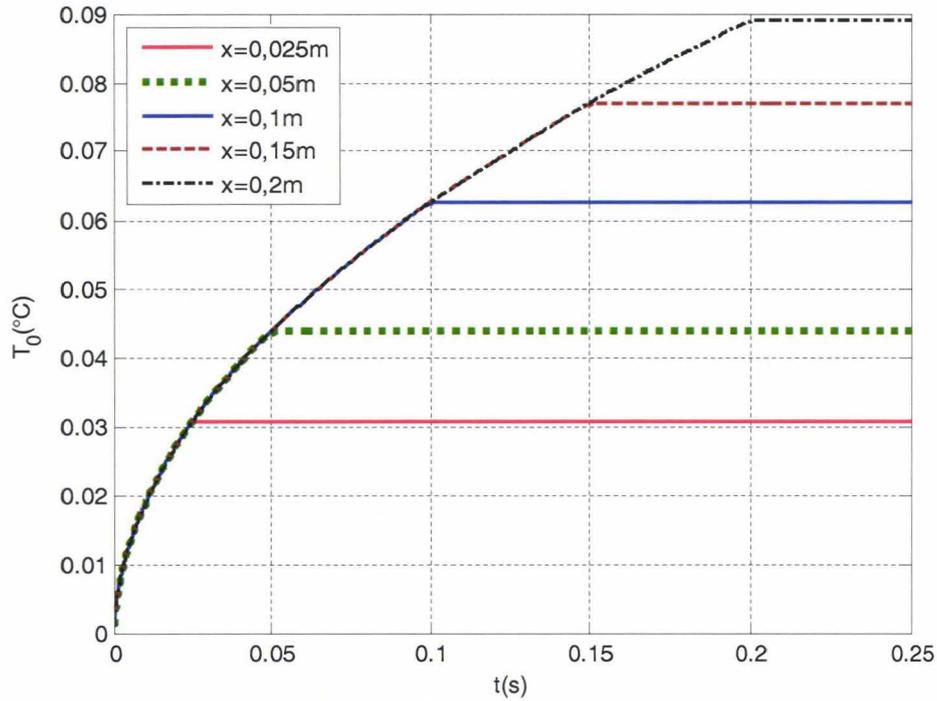


Figure III.6 : Evolution temporelle de la température pariétale T_0 pour différents x

Ces courbes mettent nettement en évidence une transition instantanée entre régime transitoire et régime permanent se produisant au temps $t_c(x)$. Ce phénomène peut s'expliquer de la façon suivante :

La formule III.50 peut se réécrire :

$$T_0(x, z = 0, t) = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{\lambda_f} \left(2\sqrt{\frac{at}{\pi}} \right) & \text{si } t < t_c(x) = \frac{u_0^2(x')}{4a} \cong \frac{x}{U_\infty} \\ \frac{\Phi_0}{\lambda_f} \left(2\sqrt{\frac{ax}{\pi U_\infty}} \right) & \text{si } t > \frac{u_0^2(x')}{4a} \cong \frac{x}{U_\infty} \end{cases} \quad (\text{III.52})$$

La température croît donc proportionnellement à \sqrt{t} quelque soit x et indépendamment de x en tout point x tel que $t < \frac{x}{U_\infty}$. Ce régime transitoire est un régime strictement

conductif ; en effet la vitesse du fluide n'intervient pas dans le facteur de proportionnalité et nous aurions le même comportement (mais qui continuerait indéfiniment) si le fluide était immobile et se comportait comme un solide conducteur.

La première partie de la relation III.52 décrit donc la pénétration de la chaleur par conduction dans le fluide.

On peut s'attendre ensuite intuitivement à ce que le phénomène de convection se manifeste en un point donné, lorsque toute la chaleur émise par conduction en tout les points le précédant, atteint celui-ci.

C'est bien ce que montre la deuxième partie de la formule (III.52), qui montre en outre que si la couche limite dynamique était réellement infiniment mince, la valeur de la température en régime permanent serait celle qui est atteinte à la fin du régime conductif.

N'oublions cependant pas que T_0 n'est qu'une partie de la solution ; nous verrons plus loin, en étudiant les termes correctifs tenant compte de la couche limite dynamique que la transition conduction-convection est encore plus brutale et conduit à une température en régime permanent beaucoup plus élevée, mais se produit toujours au même moment. La courbe suivante présente l'évolution du coefficient d'échange convectif pour différents points x sur la plaque (figure III.7).

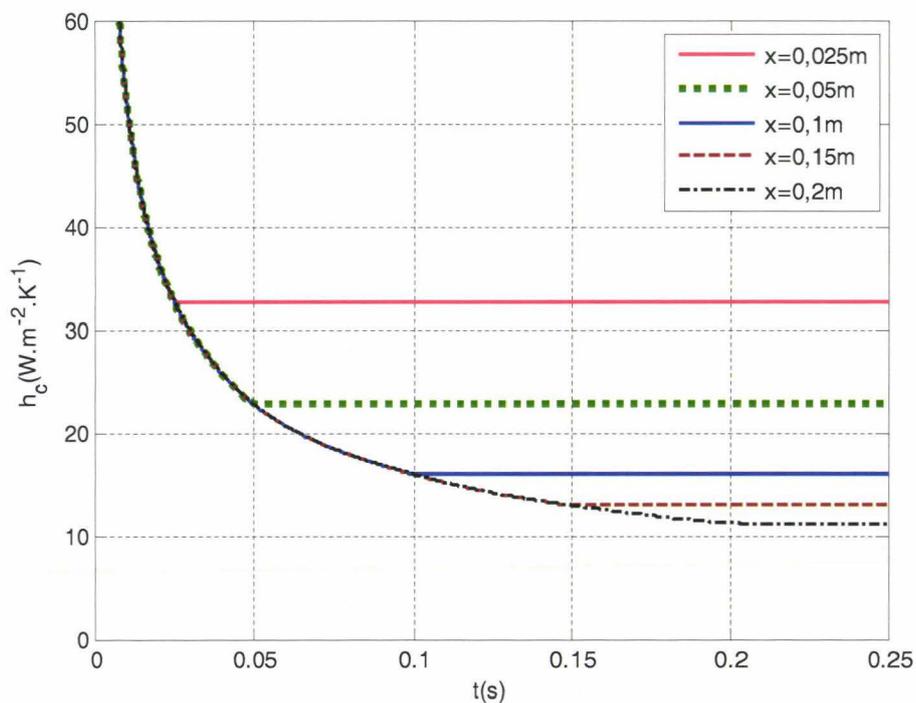


Figure III.7 : Evolution temporelle du coefficient d'échange pour différents x

Les valeurs infinies que prend le coefficient d'échange au démarrage de la phase transitoire (en $\frac{1}{\sqrt{t}}$) sont dues aux valeurs nulles de la température pariétale $T_0(x,t)$ (fig.

III.6). Les valeurs en régime permanent vers lesquelles tend $h_0(x,t)$, ont pour

$$\text{expression } h_0(x) \cong \frac{\lambda_f}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi U_\infty}{ax}} \right).$$

Les courbes suivantes III.8-10 montrent, à différents instants, la variation en fonction de x , de la température pour différentes hauteurs z au dessus de la plaque. Ces courbes

sont tracées en utilisant la formule exacte III.48 et les formules approchées III.49, qui peuvent s'écrire, à un instant choisi t_1 :

$$T_0(x,z,t_1) = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{\lambda_f} \left(2\sqrt{\frac{at_1}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4at_1}} - z.\text{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{at_1}}\right) \right) & ; \text{ si } x < U_\infty t_1 \\ \frac{\Phi_0}{\lambda_f} \left(\frac{2\sqrt{ax}}{\sqrt{\pi U_\infty}} e^{-\frac{U_\infty z^2}{4ax}} - z.\text{erfc}\left(\frac{z\sqrt{U_\infty}}{2\sqrt{ax}}\right) \right) & ; \text{ si } x > U_\infty t_1 \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

Soit pour $z = 0$:

$$T_0(x,z=0,t_1) = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{\lambda_f} \left(2\sqrt{\frac{at_1}{\pi}} \right) = \text{Cste} & ; \text{ si } x < U_\infty t_1 \\ \frac{\Phi_0}{\lambda_f} \left(\frac{2\sqrt{ax}}{\sqrt{\pi U_\infty}} \right) = f(x) & ; \text{ si } x > U_\infty t_1 \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

Elles montrent l'évolution et la progression, au dessus de la plaque, du "panache" chaud qui s'établit et se propage dans le fluide à partir de l'instant où le flux de chaleur y est forcé.

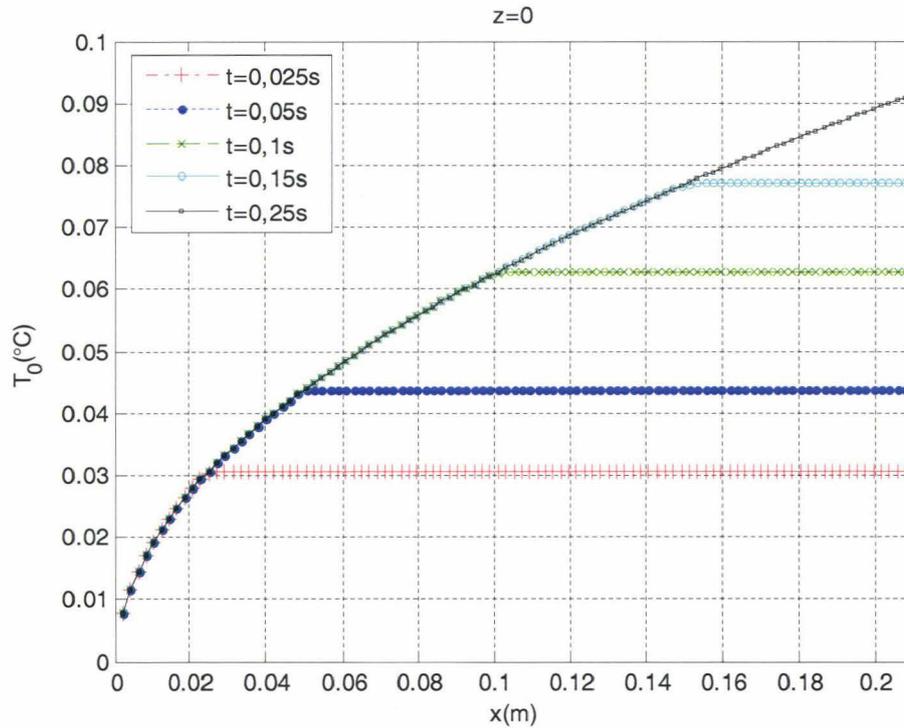


Figure III.8 : Évolution spatiale de la température pariétale pour différents instants

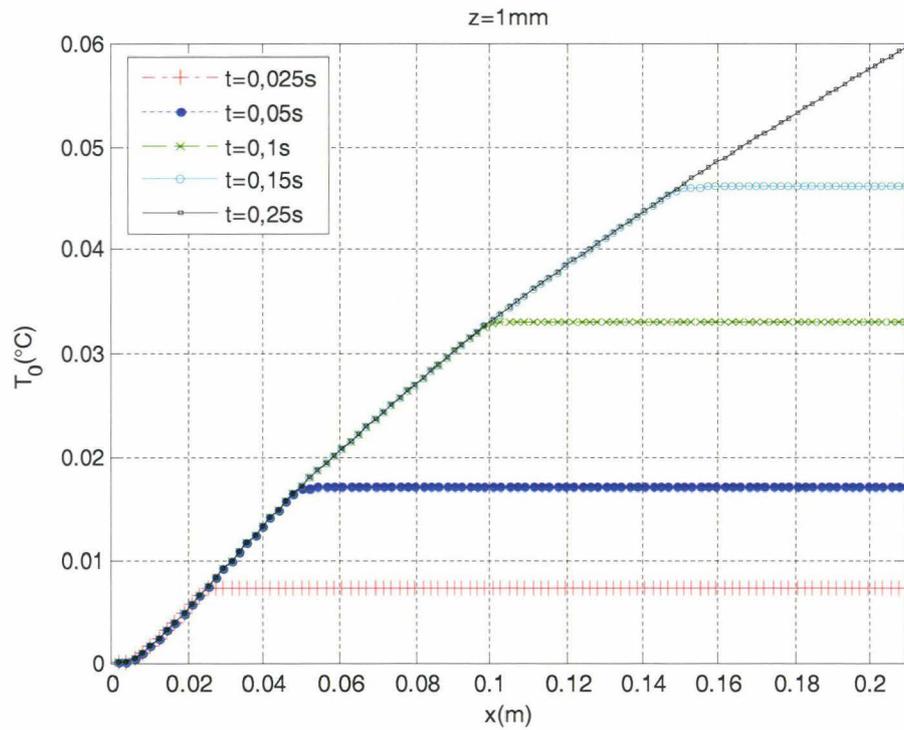


Figure III.9 : Evolution spatiale de la température du fluide en $z = 1 \text{ mm}$

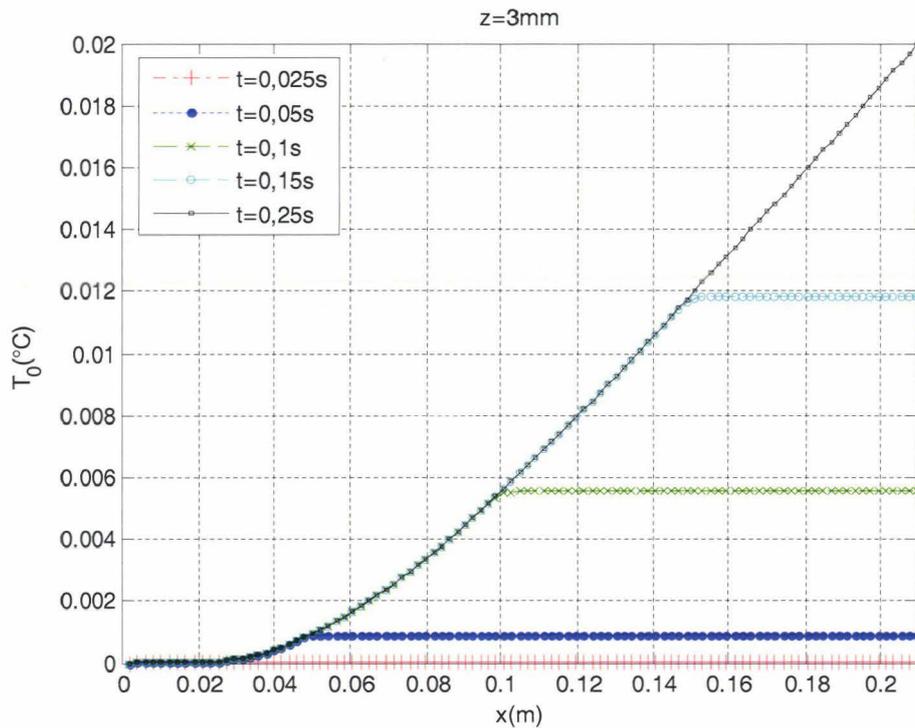


Figure III.10 : Evolution spatiale de la température du fluide en $z = 3 \text{ mm}$

En régime permanent ($t \rightarrow \infty$) :

$$T_0(x,z,t \rightarrow \infty) \cong \frac{\Phi_0}{\lambda_f} \left(2 \sqrt{\frac{ax}{\pi U_\infty}} e^{-\frac{U_\infty z^2}{4ax}} - \text{zerfc} \left(\frac{z \sqrt{U_\infty}}{2\sqrt{ax}} \right) \right) \quad (\text{III.55})$$

Enfin les figures tridimensionnelles suivantes, obtenues par les équations (III.53 et III.55) visualisent, en régime transitoire ($t = 0,05$ s, $0,1$ s, $0,15$ s) et en régime permanent, la couche limite thermique qui s'établit, même en l'absence de couche limite dynamique, au dessus de la plaque.

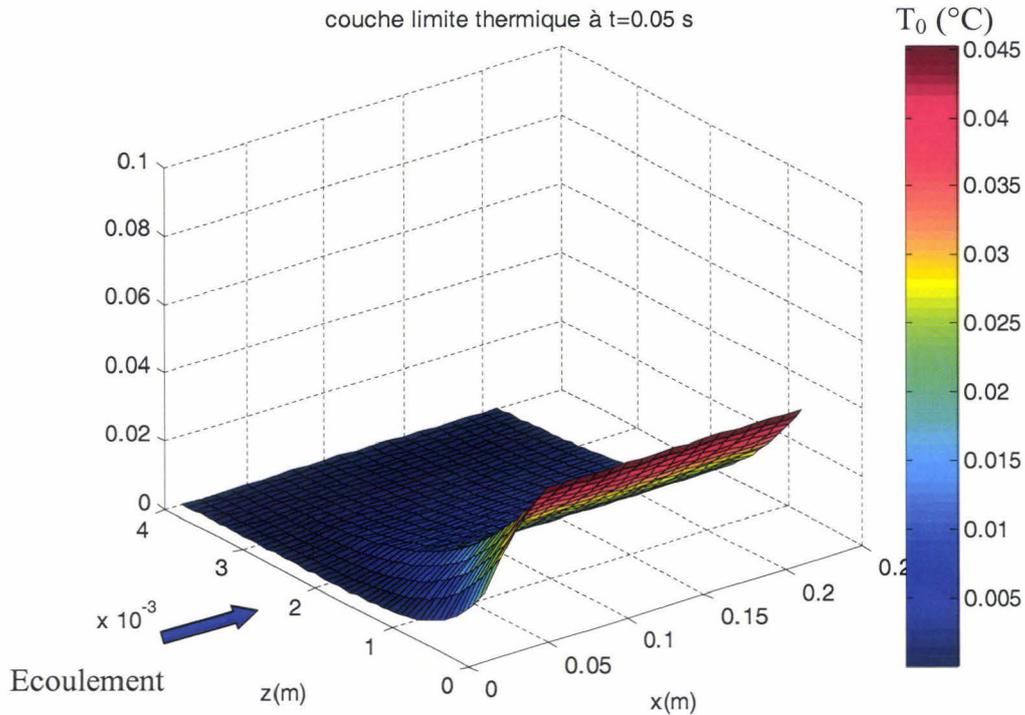


Figure III.11 : Evolution spatiale du profil de température en régime transitoire $t=0,05$ s

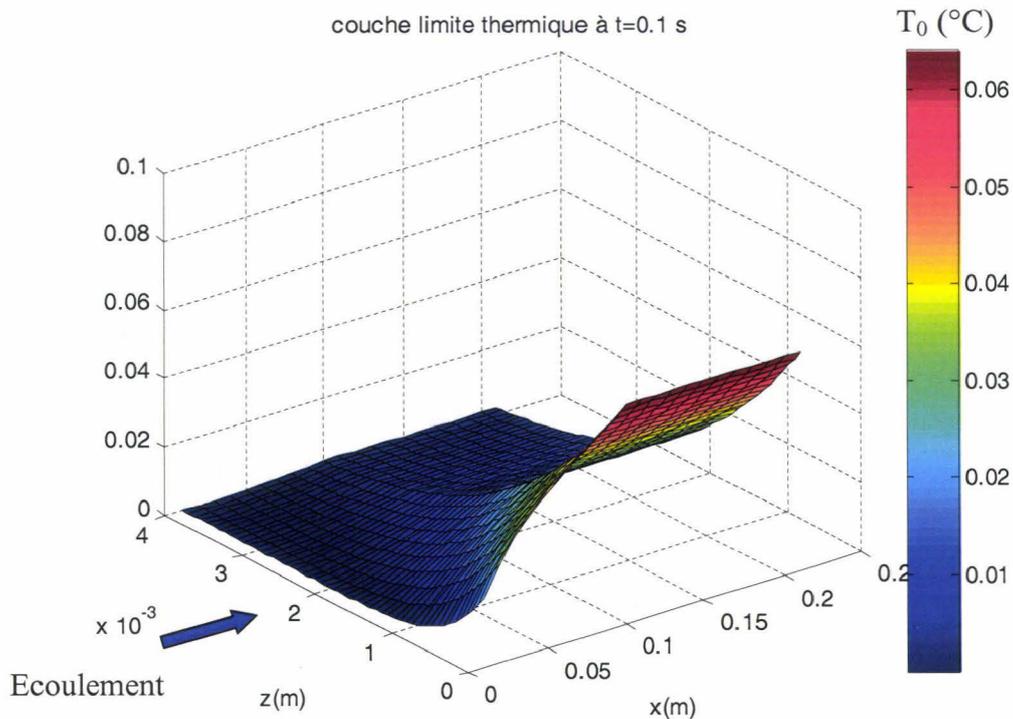


Figure III.12 : Evolution spatiale du profil de température en régime transitoire $t=0,1$ s

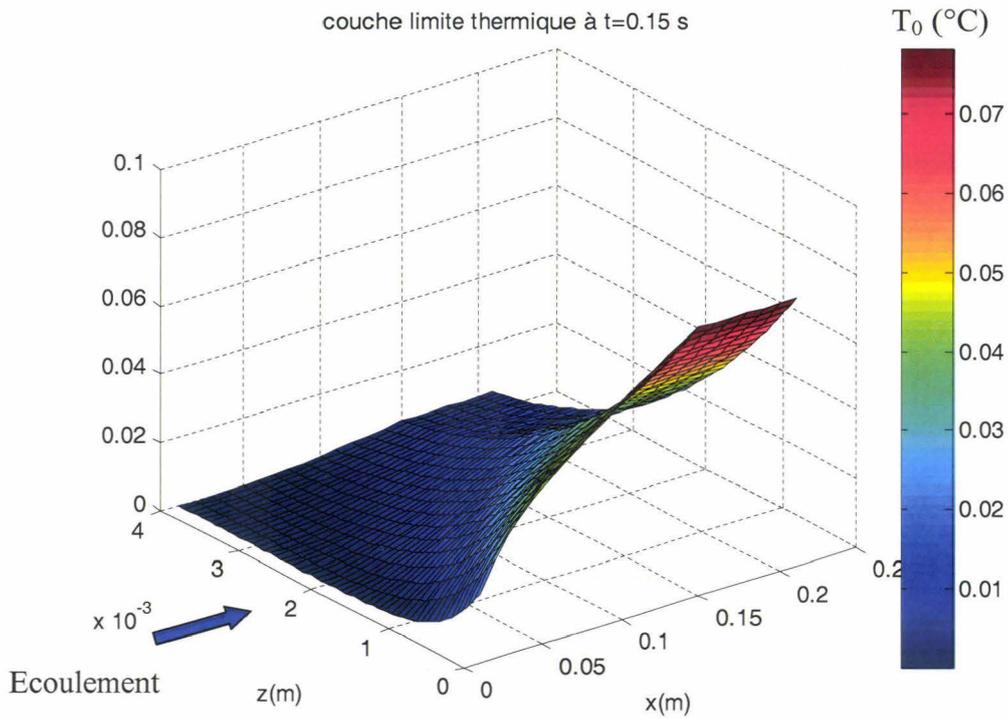


Figure III.13 : Evolution spatiale du profil de température en régime transitoire $t=0,15$ s

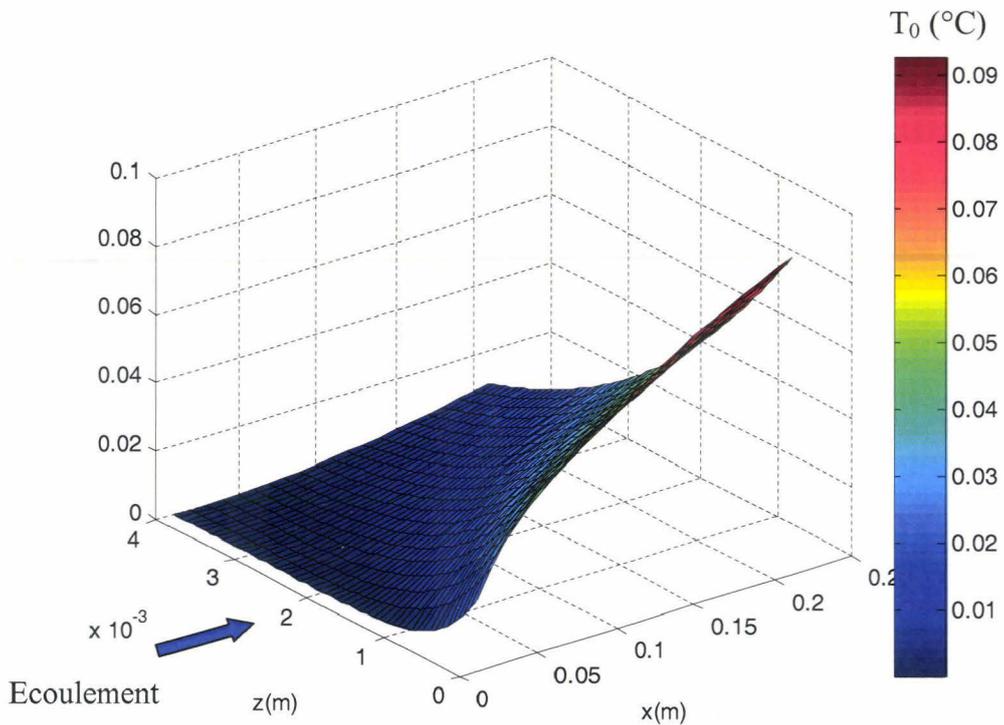


Figure III.14 : Evolution spatiale du profil de température en régime permanent

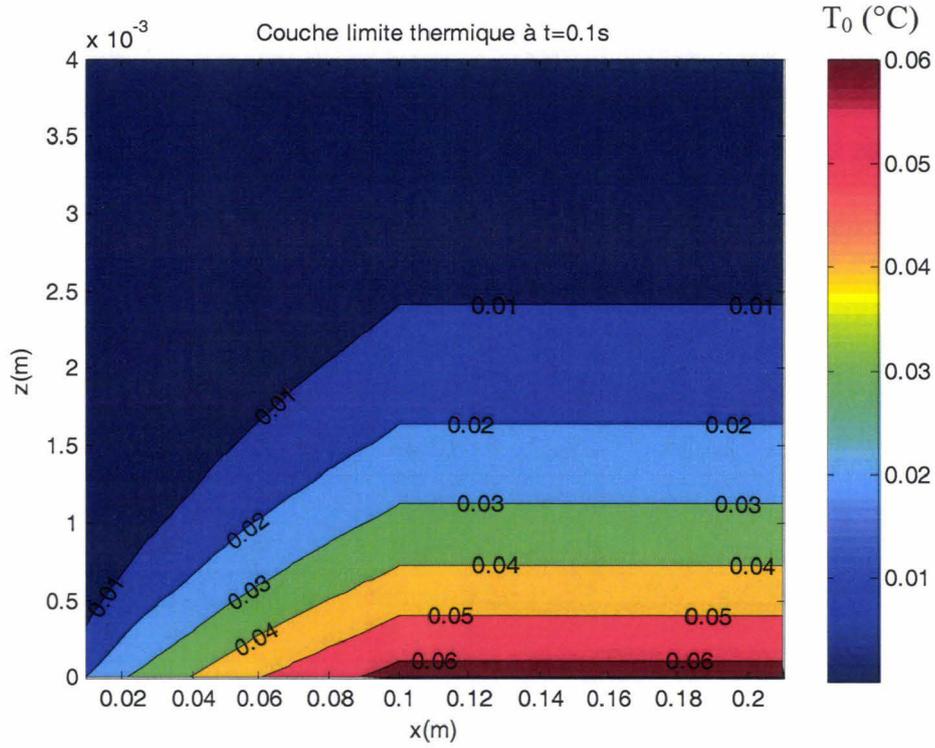


Figure III.15 : Couche limite thermique en régime transitoire

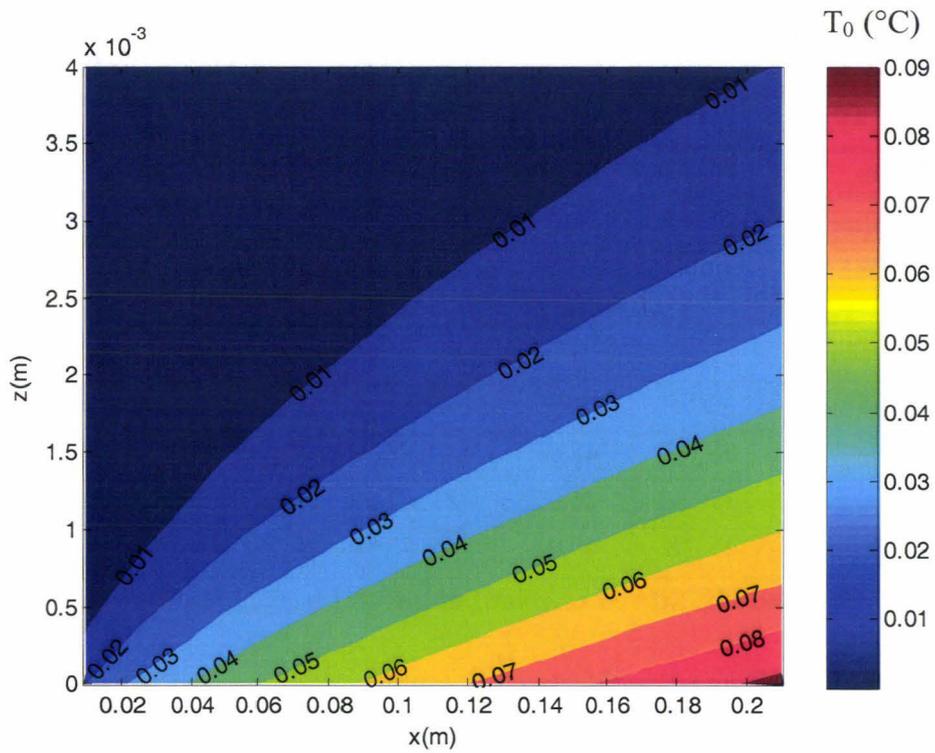


Figure III.16 : Couche limite thermique en régime permanent

III.5 Comparaison entre h_0 et $h_{\text{Corrélation}}$ en régime permanent

Nous donnons ci-dessous un tableau comparant les valeurs de h_0 en régime permanent, entre les abscisses $x = c/8$ m et $x = 7c/8$ m, avec celles obtenues par la corrélation

$$h_c(x) = CPr^{1/3} \lambda_f \left(\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \right) \text{ issue de la littérature [39] pour différentes vitesses développée}$$

en annexe 6.

$x(U_\infty=0,5\text{m/s})$	$c/8$	$c/4$	$3c/8$	$c/2$	$5c/8$	$3c/4$	$7c/8$
h_0	21,55	15,22	12,43	10,77	9,63	8,79	8,14
$h_{\text{Corrélation}}$	11,77	8,32	6,79	5,88	5,26	4,80	4,44
$\Delta(\%)$	45,38	45,32	45,36	45,38	45,36	45,36	45,37

Tableau III.2.a : $\Delta(\%)$: Ecart relatif entre h_0 et $h_{\text{littérature}}$ pour $x < c$, $U_\infty = 0,5$ m/s

$x(U_\infty=1\text{m/s})$	$c/8$	$c/4$	$3c/8$	$c/2$	$5c/8$	$3c/4$	$7c/8$
h_0	30,48	21,55	17,60	15,24	13,62	12,43	11,52
$h_{\text{Corrélation}}$	16,64	11,77	9,61	8,32	7,44	6,79	6,29
$\Delta(\%)$	45,40	45,38	45,41	45,40	45,36	45,36	45,39

Tableau III.2.b : Ecart relatif entre h_0 et $h_{\text{littérature}}$ pour $x < c$, $U_\infty = 1$ m/s

$x(U_\infty=2\text{m/s})$	$c/8$	$c/4$	$3c/8$	$c/2$	$5c/8$	$3c/4$	$7c/8$
h_0	43,10	30,48	24,87	21,55	19,26	17,60	16,28
$h_{\text{Corrélation}}$	23,54	16,64	13,59	11,77	10,52	9,61	8,89
$\Delta(\%)$	45,38	45,40	45,36	45,38	45,36	45,41	45,37

Tableau III.2.c : Ecart relatif entre h_0 et $h_{\text{littérature}}$ pour $x < c$, $U_\infty = 2$ m/s

$x(U_\infty=5\text{m/s})$	$c/8$	$c/4$	$3c/8$	$c/2$	$5c/8$	$3c/4$	$7c/8$
h_0	68,02	48,07	39,37	34,01	30,48	27,85	25,77
$h_{\text{Corrélation}}$	37,22	26,32	21,49	18,61	16,64	15,19	14,06
$\Delta(\%)$	45,28	45,25	45,41	45,28	45,40	45,45	45,41

Tableau III.2.d : Ecart relatif entre h_0 et $h_{\text{littérature}}$ pour $x < c$, $U_\infty = 5$ m/s

Nous constatons que l'écart relatif Δ entre le coefficient d'échange obtenu par notre modèle théorique et par la corrélation est de l'ordre de 45% et quasi indépendant de la vitesse et de la position x . On peut donc en conclure que le premier terme du développement itératif du modèle théorique fournit déjà près de 50% de la solution classique, tout en respectant la même loi de variation en fonction de la position et de la vitesse, ainsi que le montrent les figures suivantes, dans des plages de vitesses plus larges.

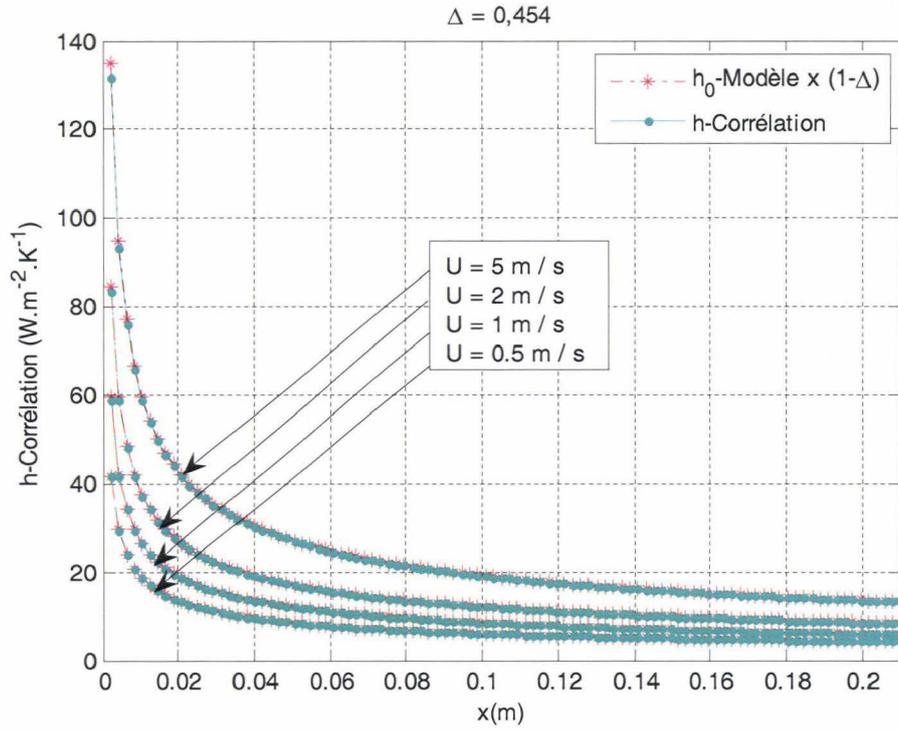


Figure III.17 : Comparaison du $h_0(x)$ du modèle et de la corrélation pour différentes vitesses U_∞

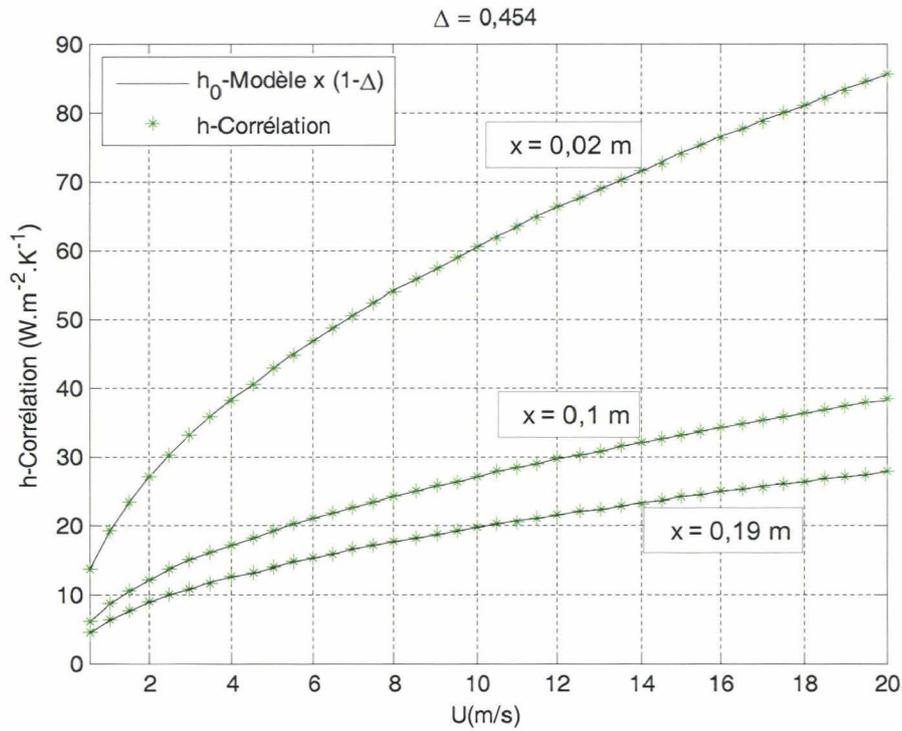


Figure III.18 : Comparaison du $h_0(x)$ du modèle et de la corrélation ($0,5 < U_\infty < 20 \text{ m/s}$)

Ce résultat s'explique évidemment par le fait que $h_0(x)$ est proportionnel à $\sqrt{\frac{U_\infty}{x}}$;

$$\left(h_0(x) \cong \frac{\lambda_f}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{\frac{U_\infty}{x}} \right) \text{ tout comme } h_c(x) ; \left(h_c(x) = \frac{C.Pr^{1/3} \lambda_f}{\sqrt{\nu}} \left(\sqrt{\frac{U_\infty}{x}} \right) \right).$$

III.5.1 Température moyenne et coefficient d'échange convectif moyen

Toujours dans le cas d'un échelon de flux unité et uniforme sur la plaque chauffante, nous définissons un coefficient d'échange convectif moyen $h_{\text{moy}}(t) = \frac{1}{T_{\text{moy}}(t)}$ sur la

plaque où $T_{\text{moy}}(t) = \frac{1}{S_0} \iint_{S_0} dS_0 T_0(\bar{\rho}, t)$ et S_0 est l'aire de la plaque lorsque celle-ci est de dimensions finies.

Nous obtenons alors, pour une plaque de largeur b :

$$T_{\text{moy}}(t) = \frac{1}{4\lambda_f c} \int_0^t d\tau \sqrt{\frac{a}{\pi\tau}} dy' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\begin{array}{l} \text{erf}\left(\frac{b/2 - y'}{2\sqrt{a\tau}}\right) \\ + \text{erf}\left(\frac{b/2 + y'}{2\sqrt{a\tau}}\right) \end{array} \right) \int_{x_0 - \frac{c}{2}}^{x_0 + \frac{c}{2}} dx' \left(\begin{array}{l} \text{erf}\left(\frac{x_0 + \frac{c}{2} - x' + U_\infty \tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) \\ - \text{erf}\left(\frac{x_0 - \frac{c}{2} - x' + U_\infty \tau}{2\sqrt{a\tau}}\right) \end{array} \right) \quad (\text{III.51})$$

Cette expression s'intègre spatialement sans difficultés [34] :

$$T_{\text{moy}}(t) = \frac{2}{\lambda_f b c} \int_0^t d\tau \sqrt{\frac{a^3 t}{\pi}} \left(\begin{array}{l} \frac{b}{2\sqrt{at}} \text{erf}\left(\frac{b}{2\sqrt{at}}\right) \\ + \frac{e^{\frac{b^2}{4at}} - 1}{\sqrt{\pi}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \frac{c - U_\infty t}{2\sqrt{at}} \text{erf}\left(\frac{c - U_\infty t}{2\sqrt{at}}\right) + \frac{c + U_\infty t}{2\sqrt{at}} \text{erf}\left(\frac{c + U_\infty t}{2\sqrt{at}}\right) \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{(c - U_\infty t)^2}{4at}} - e^{-\frac{(c + U_\infty t)^2}{4at}} \right) \\ - 2 \left(\frac{U_\infty t}{2\sqrt{at}} \text{erf}\left(\frac{U_\infty t}{2\sqrt{at}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{U_\infty^2 t}{4a}} \right) \end{array} \right) \quad (\text{III.52})$$

On obtient l'expression analytique de l'évolution de la température pariétale moyenne sur une plaque plane à partir de l'équation (III.52), en faisant tendre b vers l'infini ($b \rightarrow \infty$) :

$$T_{\text{moy}}(t) = \frac{1}{\lambda_f c} \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \left(\begin{array}{l} \frac{c - U_\infty t}{2\sqrt{at}} \text{erf}\left(\frac{c - U_\infty t}{2\sqrt{at}}\right) + \frac{c + U_\infty t}{2\sqrt{at}} \text{erf}\left(\frac{c + U_\infty t}{2\sqrt{at}}\right) \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{(c - U_\infty t)^2}{4at}} - e^{-\frac{(c + U_\infty t)^2}{4at}} \right) - 2 \left(\frac{U_\infty t}{2\sqrt{at}} \text{erf}\left(\frac{U_\infty t}{2\sqrt{at}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{U_\infty^2 t}{4a}} \right) \end{array} \right) \quad (\text{III.53})$$

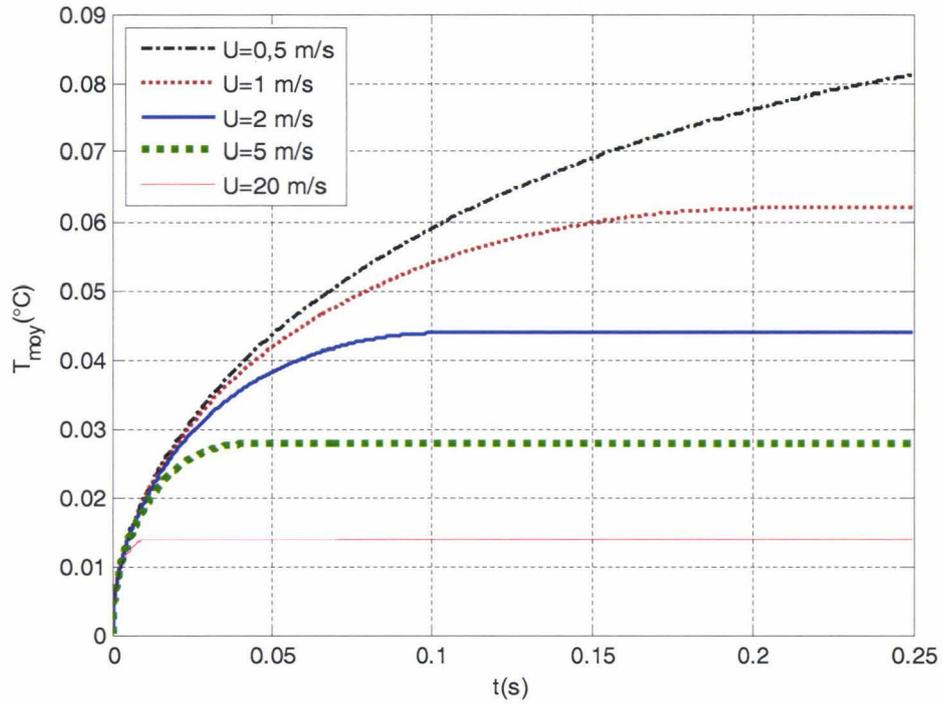


Figure III.19 : Evolution temporelle de la température pariétale moyenne pour différentes vitesses d'écoulement U_∞

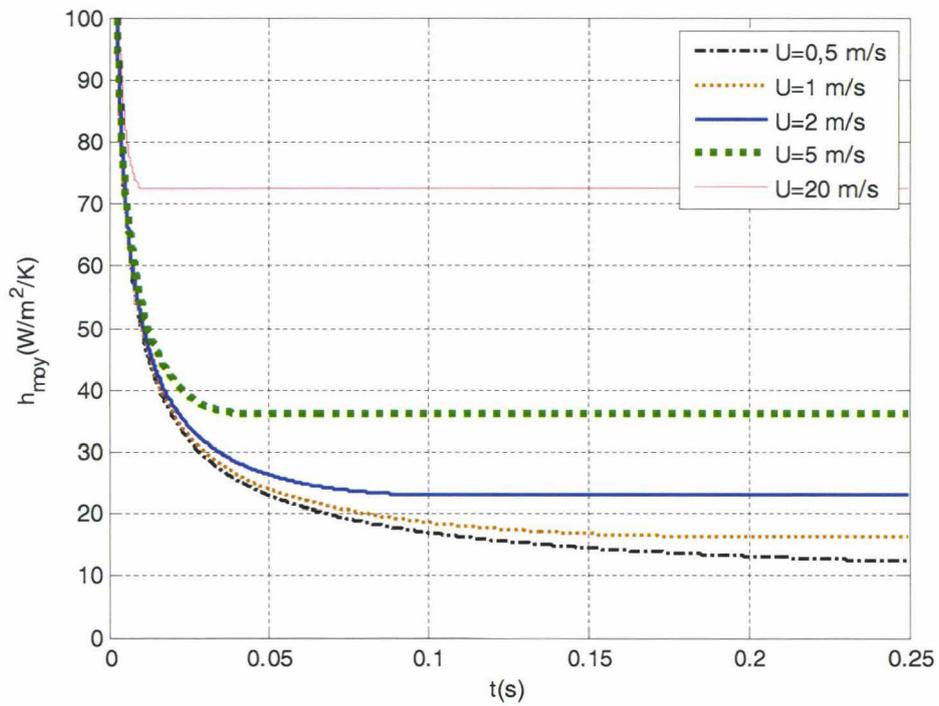


Figure III.20 : Evolution temporelle du coefficient d'échange convectif moyen pour différentes vitesses d'écoulement U_∞

Soit en posant $u = 2\sqrt{at}$:

$$T_{\text{moy}}(t) = \frac{1}{2\lambda_f c} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t u du \left(\left(\frac{c}{u} - \frac{U_\infty u}{4a} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{c}{u} - \frac{U_\infty u}{4a} \right) + \left(\frac{c}{u} + \frac{U_\infty u}{4a} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{c}{u} + \frac{U_\infty u}{4a} \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\left(\frac{c}{u} - \frac{U_\infty u}{4a}\right)^2} - e^{-\left(\frac{c}{u} + \frac{U_\infty u}{4a}\right)^2} \right) - 2 \left(\frac{U_\infty u}{4a} \operatorname{erf} \left(\frac{U_\infty u}{4a} \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{U_\infty^2 u^2}{16a^2}} \right) \right) \quad (\text{III.54})$$

Le calcul numérique pour une bande finie montre en effet, que l'évolution temporelle de la température pariétale moyenne est assez proche de celle d'une bande infinie.

III.5.2 Comparaison entre h_{moy} et $h_{\text{Corrélation}}$ en régime permanent

Les courbes suivantes montrent les mêmes propriétés qu'auparavant.

L'écart relatif entre h_{moyen} du modèle ($h_{\text{moy}}(t) = \frac{\Phi_0}{T_{\text{moy}}(t)} = \frac{1}{T_{\text{moy}}(t)}$) et h_{moyen} de la littérature est pratiquement constant, de l'ordre de 50 %, et les deux coefficients suivent la même loi de variation en fonction de la vitesse :

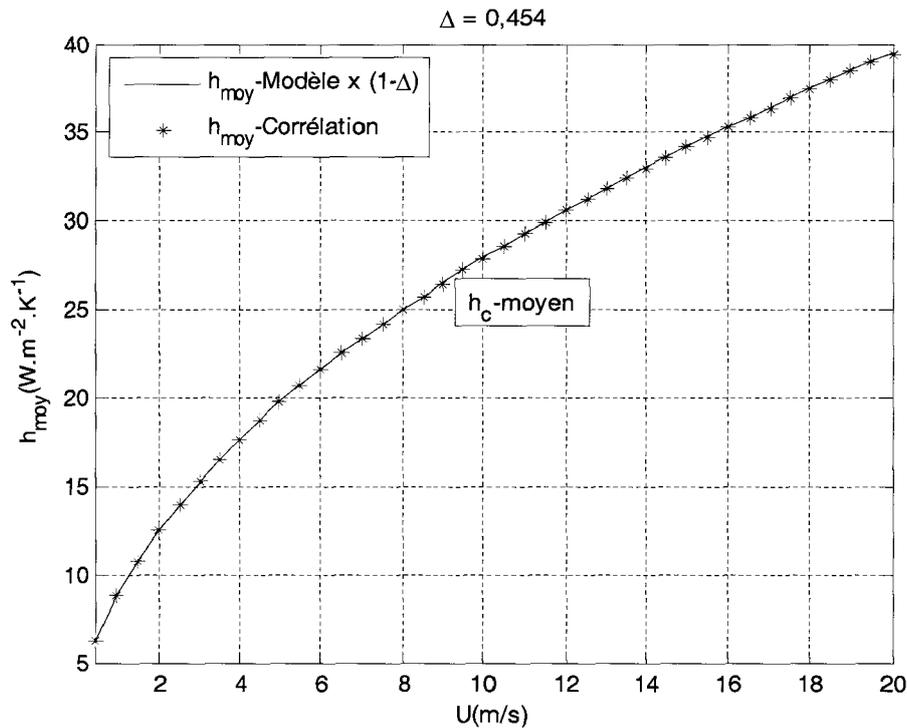


Figure III.21 : Comparaison du h_{moy} du modèle et de la corrélation ($0,5 < U_\infty < 20$ m/s)

III.6 Calcul du premier terme correctif

Dans ce paragraphe, nous calculons le terme correctif dû à la première itération. Ce terme s'écrit :

$$T_1(\vec{r}, t) = \Phi_0 \int_0^t d\tau \iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\vec{r}_1}^1(\vec{r}, \tau) \quad (\text{III.55})$$

$T_{\delta\bar{r}_i}^1(\bar{r}, t)$ est la transformée inverse de $\bar{T}_{\delta\bar{r}_i}^{-1}(\bar{r}, p)$ donnée par l'expression (II.24).

$$T_{\delta\bar{r}_i}^1(\bar{r}, t) = \frac{1}{a\lambda_f} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} A(\bar{r}_i, \bar{r}, t) = \frac{1}{a\lambda_f} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} e^{-\frac{U_\infty t}{2\ell}} B(\bar{r}_i, \bar{r}, t)$$

$$\text{Avec : } B(\bar{r}_i, \bar{r}, t) = \int_0^t d\tau \iiint_{(D)} d^3r G_\varphi(\bar{r}_i, \bar{r}, t - \tau) \left(\bar{v}(\bar{r}) \bar{\nabla}_{\bar{r}} G_\varphi(\bar{r}, \bar{r}, \tau) - \frac{\bar{v}(\bar{r}) \bar{i}}{\ell} G_\varphi(\bar{r}, \bar{r}, \tau) \right)$$

D'où puisque $\bar{r}_i = (x_1, y_1, z_1)$:

$$T_{\delta\bar{r}_i}^1(\bar{r}, t) = \frac{1}{\lambda_f a} e^{-\frac{U_\infty t}{2\ell}} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} \int_0^t d\tau \iiint_{(D)} d^3r \bar{v}(\bar{r}) \cdot \left(\begin{array}{l} G_\varphi(x_1, y_1, z_1 = 0, \bar{r}, \tau) \bar{\nabla}_{\bar{r}} G_\varphi(\bar{r}, \bar{r}, t - \tau) \\ - \frac{1}{\ell} G_\varphi(x_1, y_1, z_1 = 0, \bar{r}, \tau) G_\varphi(\bar{r}, \bar{r}, t - \tau) \bar{i} \end{array} \right) \quad (\text{III.56})$$

Nous ne traiterons dans ce travail qu'un cas de couche limite dynamique très simplifiée.

Admettons que le champ de vitesse $\bar{U}(\bar{r})$ soit de la forme :

$$\bar{U}(x, z) = \begin{cases} U_\infty \{E(z - f(x)) + g(z, f(x))E(f(x) - z)\} \bar{i} + U_z(x, z)E(f(x) - z) \bar{k} \\ U_\infty \bar{i} + U_\infty \{g(z, f(x)) - 1\} E(f(x) - z) \bar{i} + U_z(x, z)E(f(x) - z) \bar{k} \end{cases} \quad (\text{III.57})$$

$E(z - f(x))$ est la fonction de Heaviside qui est égale à l'unité pour $z > f(x)$ et est nulle pour $z < f(x)$.

La fonction $g(z, f(x))$ vérifiant :

$$\begin{cases} g(z = 0, f(x)) = 0 \quad \forall x \\ g(f(x), f(x)) = 1 \quad \forall x \\ \left. \frac{\partial g(z, f(x))}{\partial z} \right|_{z=f(x)} = 0 \quad \forall x \\ \left. \frac{\partial^2 g(z, f(x))}{\partial z^2} \right|_{z=f(x)} = 0 \quad \forall x \end{cases} \quad (\text{III.58})$$

$$\text{et } U_z(x, z) \rightarrow \begin{cases} U_z(x, z = 0) = 0 \\ U_z(x, z = f(x)) = 0 \\ \left. \frac{\partial U_z(x, z)}{\partial z} \right|_{z=f(x)} = 0 \quad \forall x \\ \left. \frac{\partial^2 U_z(x, z)}{\partial z^2} \right|_{z=f(x)} = 0 \quad \forall x \end{cases} \quad (\text{III.59})$$

Cette expression analytique du champ de vitesse décrit une couche limite dynamique de hauteur $z = f(x)$, dans laquelle la composante suivant x est $g(z, f(x))$ et la composante suivant z est $U_z(x, z)$. Le champ en dehors de cette couche est uniforme : $U_\infty \bar{i}$, et il y a continuité des composantes, et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2, à la frontière de la couche limite. Bien évidemment ces fonctions doivent être telle que la condition de divergence nulle soit satisfaite ainsi que les équations de Navier-Stokes.

$$\text{On a donc :} \quad \vec{v}(\vec{r}) = E(f(x) - z) \left(U_\infty (g(z, f(x)) - 1) \vec{i} + U_z(x, z) \vec{k} \right) \quad (\text{III.60})$$

Nous simplifierons cette expression, tout d'abord, en ne tenant pas compte de la composante suivant z . On obtient donc :

$$T_{\delta\vec{q}}^1(\vec{r}, t) = \frac{U_\infty}{\lambda_f a^5} e^{-\frac{U_\infty t}{2\ell}} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} \int_0^t d\tau \iiint_{(D)} d^3r E(f(x) - z) (g(z, f(x)) - 1) \times$$

$$G_\phi^3(z_1 = 0, z, \tau) G_\phi^3(z, z', t - \tau) G_\phi^2(y_1, y, \tau) G_\phi^2(y, y', t - \tau) G_\phi^1(x_1, x, \tau) \left(\begin{array}{c} \frac{\partial G_\phi^1(x, x', t - \tau)}{\partial x} \\ -\frac{1}{\ell} G_\phi^1(x, x', t - \tau) \end{array} \right) \quad (\text{III.61})$$

Soit, en posant $K(x, z', \tau, t - \tau) = \int_0^{f(x)} dz G_\phi^3(z_1 = 0, z, \tau) G_\phi^3(z, z', t - \tau) (g(z, f(x)) - 1)$:

$$T_{\delta\vec{q}}^1(\vec{r}, t) = \frac{U_\infty}{\lambda_f a^4} e^{-\frac{U_\infty t}{2\ell}} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\phi^2(y_1, y', t) \int_0^t d\tau \int_0^\infty dx G_\phi^1(x_1, x, \tau) \left(\begin{array}{c} \frac{\partial G_\phi^1(x, x', t - \tau)}{\partial x} \\ -\frac{1}{\ell} G_\phi^1(x, x', t - \tau) \end{array} \right) K(x, z', \tau, t - \tau) \quad (\text{III.62})$$

Le calcul purement analytique du terme correctif n'est relativement aisé que si l'on peut accéder analytiquement au calcul de l'intégrale suivant x . Cela est possible dans le cas où $f(x) = \text{constante} = \delta$: couche limite dynamique d'épaisseur constante.

Afin d'évaluer l'importance de ce terme correctif, nous prenons, dans un premier temps, à l'intérieur de la zone $z < \delta$ une forme spatiale simple, (ne vérifiant pas nécessairement

toutes les conditions citées précédemment) : $f(x) = \text{Cste} = \delta$, $g(z, f(x)) = \frac{z}{\delta} \left(2 - \frac{z}{\delta} \right)$

Dans ce cas $K(x, z', \tau, t - \tau) = \int_0^\delta dz G_\phi^3(z_1 = 0, z, \tau) G_\phi^3(z, z', t - \tau) \left(\frac{z}{\delta} \left(2 - \frac{z}{\delta} \right) - 1 \right)$ est

indépendant de x et :

$$T_{\delta\vec{q}}^1(\vec{r}, t) = \frac{U_\infty}{\lambda_f a^4} e^{-\frac{U_\infty t}{2\ell}} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\phi^2(y_1, y', t) \int_0^t d\tau K(\delta, z', \tau, t - \tau) \int_0^\infty dx G_\phi^1(x_1, x, \tau) \left(\begin{array}{c} \frac{\partial G_\phi^1(x, x', t - \tau)}{\partial x} \\ -\frac{1}{\ell} G_\phi^1(x, x', t - \tau) \end{array} \right) \quad (\text{III.63})$$

Or, on a la propriété (démontrer en Annexe 5) :

$$\int_0^\infty dx G_\phi^1(x_1, x, \tau) \left(\begin{array}{c} \frac{\partial G_\phi^1(x, x', t - \tau)}{\partial x} \\ -\frac{1}{\ell} G_\phi^1(x, x', t - \tau) \end{array} \right) = a \left(\frac{\partial G_\phi^1(x_1, x', t)}{\partial x_1} - \frac{1}{\ell} G_\phi^1(x_1, x', t) \right)$$

On obtient donc :

$$T_{\delta\bar{r}}^1(\vec{r},t) = \frac{U_\infty}{\lambda_f a^3} e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}t} G_\phi^2(y_1, y', t) e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} \left(\frac{\partial G_\phi^1(x_1, x', t)}{\partial x_1} - \frac{1}{\ell} G_\phi^1(x_1, x', t) \right) \int_0^t d\tau K(\delta, z', \tau, t - \tau)$$

Ou encore :

$$T_{\delta\bar{r}}^1(\vec{r},t) = \frac{U_\infty}{\lambda_f a^3} e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}t} G_\phi^2(y_1, y', t) \frac{\partial \left(e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\phi^1(x_1, x', t) \right)}{\partial x_1} \int_0^t d\tau K(\delta, z', \tau, t - \tau) \quad (\text{III.64})$$

$$\text{Avec : } \int_0^t d\tau K(\delta, z', \tau, t - \tau) = \int_0^\delta dz \left(\frac{z}{\delta} \left(2 - \frac{z}{\delta} \right) - 1 \right) \int_0^t d\tau G_\phi^3(z_1 = 0, z, \tau) G_\phi^3(z, z', t - \tau)$$

Et l'on peut poser $K_\delta^1(z', t) = \int_0^t d\tau K(\delta, z', \tau, t - \tau)$.

$$\text{D'où : } T_{\delta\bar{r}}^1(\vec{r},t) = \frac{U_\infty}{\lambda_f a^3} e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}t} G_\phi^2(y_1, y', t) \frac{\partial \left(e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\phi^1(x_1, x', t) \right)}{\partial x_1} K_\delta^1(z', t) \quad (\text{III.65})$$

Et dans le cas d'une bande infinie ($b \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\bar{r}}^1(\vec{r}, \tau) &= \frac{U_\infty}{\lambda_f a^3} e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}\tau} K_\delta^1(z', \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 G_\phi^2(y_1, y', \tau) \int_{x_0 - \frac{c}{2}}^{x_0 + \frac{c}{2}} dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\phi^1(x_1, x', \tau) \right) \\ &= \frac{U_\infty}{\lambda_f} \frac{1}{2a^2} \sqrt{\frac{a}{\pi\tau}} e^{-\frac{U_\infty}{2\ell}\tau} \left(e^{-\frac{(x' - (x_0 + \frac{c}{2}))}{\ell}} e^{-\frac{((x_0 + \frac{c}{2}) - x')^2}{4a\tau}} - e^{-\frac{(x' - (x_0 - \frac{c}{2}))}{\ell}} e^{-\frac{((x_0 - \frac{c}{2}) - x')^2}{4a\tau}} \right) K_\delta^1(z', \tau) \end{aligned}$$

Soit finalement en prenant $x_0 = \frac{c}{2}$:

$$\iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\bar{r}}^1(\vec{r}, \tau) = \frac{U_\infty}{\lambda_f a^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi\tau}} \left(e^{-\frac{(x'-c-U\tau)^2}{4a\tau}} - e^{-\frac{(x'-U\tau)^2}{4a\tau}} \right) K_\delta^1(z', \tau)$$

Et le premier terme correctif s'écrit :

$$T_1(\vec{r}, t) = \Phi_0 \frac{U_\infty}{2\lambda_f a^2} \int_0^t d\tau \sqrt{\frac{a}{\pi\tau}} \left(e^{-\frac{(x-c-U\tau)^2}{4a\tau}} - e^{-\frac{(x-U\tau)^2}{4a\tau}} \right) K_\delta^1(z, \tau) \quad (\text{III.66})$$

Ou encore :

$$T_1(\vec{r}, t) = \Phi_0 \frac{U_\infty}{2\lambda_f a^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{a\tau}} du \left(e^{-\frac{(x'-c-u)^2}{u \cdot 2\ell}} - e^{-\frac{(x'-u)^2}{u \cdot 2\ell}} \right) K_\delta^1(z', u) \quad (\text{III.67})$$

La fonction $f(u, x) = \left(e^{-\frac{(x'-c-u)^2}{u \cdot 2\ell}} - e^{-\frac{(x'-u)^2}{u \cdot 2\ell}} \right)$ se présente numériquement sous la forme

de pics négatifs "triangulaires" extrêmement étroits semblable pour chaque valeur de x (figure III.22).

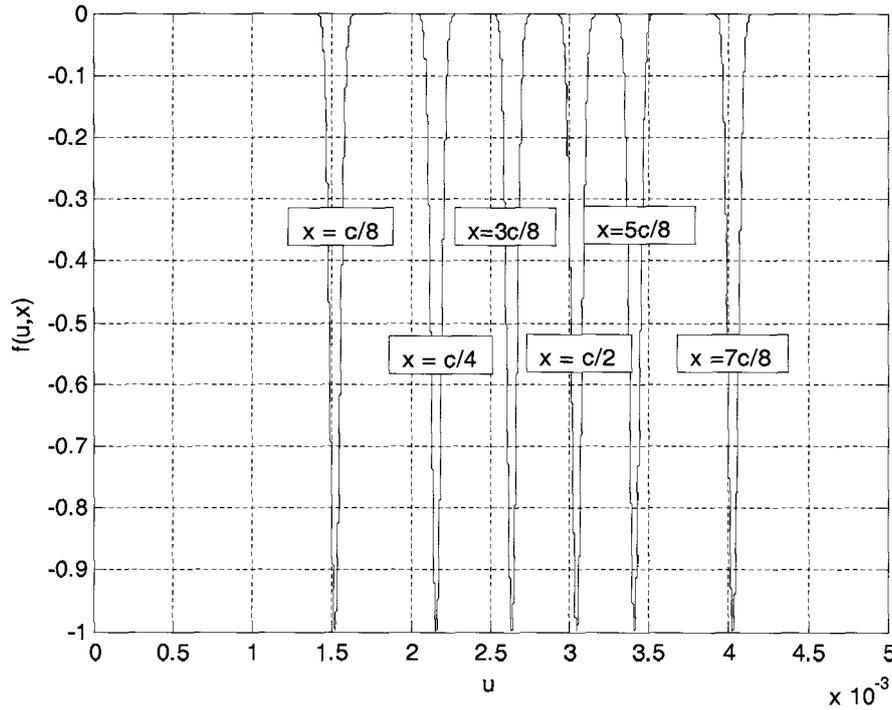


Figure III.22 : Évolution de la fonction f en fonction de u ($u = 2\sqrt{at}$)

III.6.1 Calcul du terme $\overline{K}_\delta^1(z, p)$ dans le domaine de Laplace

Il s'agit maintenant de calculer $\overline{K}_\delta^1(z, p)$:

On a :

$$K_\delta^1(z, t) = \int_0^\delta dz' \left(\frac{z'}{\delta} \left(2 - \frac{z'}{\delta} \right) - 1 \right) \int_0^t d\tau G_\phi^3(z_1 = 0, z', \tau) G_\phi^3(z, z', t - \tau) \quad (III.68)$$

Mais l'expression $\int_0^t d\tau G_\phi^3(z_1 = 0, z', \tau) G_\phi^3(z, z', t - \tau)$ a comme transformée de Laplace :

$$a \frac{\left(e^{-q(|z'|+|z-z'|)} + e^{-q(|z'|+|z+z'|)} \right)}{2p}$$

Posons $\overline{K}_\delta^1(z, p)$ la transformée de Laplace $K_\delta^1(z, t)$. $\overline{K}_\delta^1(z, p)$ s'écrit alors :

$$\overline{K}_\delta^1(z, p) = \frac{a}{2p} \int_0^\delta dz' f(z') e^{-qz'} \left(e^{-q|z-z'|} + e^{-q|z+z'|} \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{a}{2p} \left(e^{-qz} \int_0^z dz' f(z') (1 + e^{-2qz'}) + (e^{qz} + e^{-qz}) \int_z^\delta f(z') e^{-2qz'} dz' \right) & ; \text{ si } z < \delta \\ \frac{a}{2p} e^{-qz} \int_0^\delta f(z') (1 + e^{2qz'}) dz' & ; \text{ si } z > \delta \end{cases} \quad (III.69)$$

Soit, si $f(z)$ est un polynôme de second degré :

$$f(z') = \left(\frac{z'}{\delta} \left(2 - \frac{z'}{\delta} \right) - 1 \right) = -\frac{(z' - \delta)^2}{\delta^2} \quad (\text{III.70})$$

Le détail de calcul se trouve en (annexe 7)

$$\overline{K}_\delta^1(z,p) = \begin{cases} \frac{a}{2p} \left(\frac{e^{-q(2\delta+z)} + e^{-q(2\delta-z)}}{4\delta^2 q^3} - e^{-qz} \left(\frac{(z-\delta)^3}{3\delta^2} + \frac{\delta}{3} + \frac{1}{2\delta^2 q^3} + \frac{z-2\delta}{2\delta^2 q^2} + \frac{\delta^2 + (z-\delta)^2}{2\delta^2 q} \right) \right) & \text{si } z < \delta \\ \frac{a}{2p} e^{-qz} \left(-\frac{(z-\delta)^3}{3\delta^2} - \frac{\delta}{3} + \frac{e^{-2q\delta}}{4\delta^2 q^3} - \left(\frac{1}{4\delta^2 q^3} + \frac{1}{2\delta q^2} + \frac{1}{2q} \right) \right) & \text{si } z > \delta \end{cases} \quad (\text{III.71})$$

En particulier si $z = 0$:

$$\overline{K}_\delta^1(0,p) = \frac{a}{2p} \left(\frac{e^{-q2\delta}}{2\delta^2 q^3} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\delta q^2} - \frac{1}{2\delta^2 q^3} \right) = \left(a \frac{e^{-q2\delta} - 1}{4\delta^2 p q^3} - \frac{a}{2pq} + \frac{a}{2\delta p q^2} \right) \quad (\text{III.72})$$

III.6.2 Retour dans le domaine temporel $K_\delta^1(z,t)$

Le passage dans le domaine de Laplace nous a donc permis d'accéder à $\overline{K}_\delta^1(z,p)$. Il faut maintenant, retourner dans le domaine réel pour déterminer $K_\delta^1(z,t)$.

L'originale s'obtient en utilisant judicieusement les tables de transformées et nous trouvons :

$$K_\delta^1(z,t) = a \begin{cases} \left(\frac{(at)^{3/2}}{\delta^2} \left(i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z}{2\sqrt{at}} \right) + i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z}{2\sqrt{at}} \right) - 2i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \right) \right. \\ \left. - (z-2\delta) \frac{(at)}{\delta^2} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) - (\delta^2 + (z-\delta)^2) \frac{(at)^{1/2}}{2\delta^2} i \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \right) & \text{si } z < \delta \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{(z-\delta)^3}{3\delta^2} + \frac{\delta}{3} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \right) & \end{cases} \quad (\text{III.73})$$

$$K_\delta^1(z,t) = a \begin{cases} \left(-\frac{(z-\delta)^3}{6\delta^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{\delta}{6} \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(4at)^{3/2}}{8\delta^2} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z}{2\sqrt{at}} \right) \right. \\ \left. - \frac{(4at)^{3/2}}{8\delta^2} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(4at)}{4\delta} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(4at)^{1/2}}{4} i \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \right) & \text{si } z > \delta \end{cases} \quad (\text{III.74})$$

Avec, en particulier, en $x = 0$:

$$K_\delta^1(0,t) = \frac{2a}{\delta^2} (at)^{3/2} \left(i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{\delta}{\sqrt{at}} \right) - \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \right) - a \sqrt{\frac{at}{\pi}} + \frac{a^2}{2\delta} t \quad (\text{III.75})$$

On obtient, après simplification :

$$K_{\delta}^1(0,t) = a \left(-\frac{\delta}{3} - \frac{\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\delta}{3} \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{\sqrt{at}}\right) + \sqrt{\frac{at}{\pi}} \frac{e^{-\frac{\delta^2}{at}}}{3} + \frac{at}{2\delta} \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{\sqrt{at}}\right) - \frac{(at)^{\frac{3}{2}} \left(1 - e^{-\frac{\delta^2}{at}}\right)}{3\delta^2 \sqrt{\pi}} \right) \quad (\text{III.76})$$

Et donc :

$$K_{\delta}^1(0,u) = a \left(-\frac{\delta}{3} - \frac{u}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\delta}{3} \operatorname{erf}\left(\frac{2\delta}{u}\right) + \frac{u}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{4\delta^2}{u^2}}}{3} + \frac{u^2}{8\delta} \operatorname{erf}\left(\frac{2\delta}{u}\right) - \frac{u^3 \left(1 - e^{-\frac{4\delta^2}{u^2}}\right)}{24\delta^2 \sqrt{\pi}} \right) \quad (\text{III.77})$$

La limite de $K_{\delta}^1(0,t)$ au voisinage de ∞ : $\lim_{t \rightarrow \infty} K_{\delta}^1(0,t) = -\frac{a\delta}{3}$

Finalement on a :

$$T_1(\bar{r},t) = \Phi_0 \frac{U_{\infty}}{2\lambda_r a^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{at}} \left\{ \begin{array}{l} du \left(e^{-\left(\frac{x-c}{u} - \frac{u}{2\ell}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x}{u} - \frac{u}{2\ell}\right)^2} \right) \\ \times a \left(-\frac{(z-\delta)^3}{6\delta^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) - \frac{\delta}{6} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) + \frac{(4at)^{3/2}}{8\delta^2} i^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{2\delta+z}{u}\right) \right. \\ \left. - \frac{u^2}{8\delta^2} i^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) - \frac{u^2}{4\delta} i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) - \frac{u}{4} i \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) \right) \end{array} \right\} \quad (\text{III.78})$$

Et pour $z = 0$:

$$T_1(0,t) = \Phi_0 \frac{U_{\infty}}{2\lambda_r a^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{at}} \left\{ \begin{array}{l} du \left(e^{-\left(\frac{x-c}{u} - \frac{u}{2\ell}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x}{u} - \frac{u}{2\ell}\right)^2} \right) \\ \times a \left(-\frac{\delta}{3} - \frac{u}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\delta}{3} \operatorname{erf}\left(\frac{2\delta}{u}\right) + \frac{u}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{4\delta^2}{u^2}}}{3} + \frac{u^2}{8\delta} \operatorname{erf}\left(\frac{2\delta}{u}\right) - \frac{u^3 \left(1 - e^{-\frac{4\delta^2}{u^2}}\right)}{24\delta^2 \sqrt{\pi}} \right) \end{array} \right\} \quad (\text{III.79})$$

III.7 Calcul du deuxième terme correctif $K_{\delta}^2(z,t)$

L'objectif de ce paragraphe est de dégager une loi qui permet de calculer tous les termes d'ordre supérieur ; ceci afin d'aboutir à une solution complète du problème. Pour cela,

nous calculons le deuxième terme d'itération. Ce terme peut se mettre sous la forme équivalente à (III.55) :

$$T_2(\vec{r}, t) = \Phi_0 \int_0^t d\tau \iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\vec{q}}^2(\vec{r}, \tau) \quad (\text{III.80})$$

$T_{\delta\vec{q}}^2(\vec{r}, t)$ est la transformée inverse de $\bar{T}_{\delta\vec{q}}^2(\vec{r}, p)$ donnée par l'expression (III.25) et qui peut être développée comme suit :

$$\bar{T}_{\delta\vec{q}}^2(\vec{r}, p) = \frac{1}{a^2 \lambda_f} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} \iiint_{(D)} d^3r \begin{pmatrix} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', q') \\ -\frac{\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{i}}{\ell} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', q') \end{pmatrix} \iiint_{(D)} d^3r'' G_\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}'', q') \begin{pmatrix} \vec{v}(\vec{r}'') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}''} G_\varphi(\vec{r}'', \vec{r}, q') \\ -\frac{\vec{v}(\vec{r}'') \cdot \vec{i}}{\ell} G_\varphi(\vec{r}'', \vec{r}, q') \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\bar{T}_{\delta\vec{q}}^2(\vec{r}, p) = \frac{1}{a^2 \lambda_f} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} \iiint_{(D)} d^3r A(\vec{r}_1, \vec{r}, q') \begin{pmatrix} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', q') \\ -\frac{\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{i}}{\ell} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', q') \end{pmatrix} \quad (\text{III.81})$$

En remontant à l'original, nous aurons :

$$T_{\delta\vec{q}}^2(\vec{r}, t) = \frac{1}{a^2 \lambda_f} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} e^{-\frac{U_\infty}{2\ell} t} \int_0^t d\tau \iiint_{(D)} d^3r B(\vec{r}_1, \vec{r}, t - \tau) \begin{pmatrix} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', \tau) \\ -\frac{\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{i}}{\ell} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', \tau) \end{pmatrix} \quad (\text{III.82})$$

Avec :

$$B(\vec{r}_1, \vec{r}, t) = \int_0^t d\tau \iiint_{(D)} d^3r G_\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}, t - \tau) \begin{pmatrix} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', \tau) \\ -\frac{\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{i}}{\ell} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', \tau) \end{pmatrix}$$

Pour $z_1 = 0$;

$$T_{\delta\vec{q}}^2(\vec{r}, t) = \frac{1}{a^2 \lambda_f} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} e^{-\frac{U_\infty}{2\ell} t} \int_0^t d\tau \iiint_{(D)} d^3r B(x_1, y_1, z_1 = 0, \vec{r}, t - \tau) \begin{pmatrix} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', \tau) \\ -\frac{\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{i}}{\ell} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', \tau) \end{pmatrix} \quad (\text{III.83})$$

Après avoir introduit l'expression de la fonction $G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t)$ donnée plus haut, la fonction $B(x_1, y_1, z_1 = 0, \vec{r}', t)$ devient :

$$B(x_1, y_1, z_1 = 0, \vec{r}', t) = \frac{1}{a^4} \int_0^t d\tau \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy G_\varphi^2(y_1, y', t - \tau) G_\varphi^2(y, y', \tau) \int_0^\delta dz G_\varphi^3(z_1 = 0, z, t - \tau) v(z) G_\varphi^3(z, z', \tau) \right) \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx \begin{pmatrix} G_\varphi^1(x_1, x, t - \tau) \frac{\partial}{\partial x} G_\varphi^1(x, x', \tau) \\ -\frac{1}{\ell} G_\varphi^1(x_1, x, t - \tau) G_\varphi^1(x, x', \tau) \end{pmatrix}$$

Si $b \rightarrow \infty$:

$$B(x_1, y_1, z_1 = 0, \vec{r}', t) = \frac{1}{a^2} G_\varphi^2(y_1, y', t) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} G_\varphi^1(x_1, x', t) - \frac{1}{\ell} G_\varphi^1(x_1, x', t) \right) \\ \times \underbrace{\int_0^\delta dz v(z) \int_0^t d\tau \left(G_\varphi^3(z_1 = 0, z, t - \tau) G_\varphi^3(z, z', \tau) \right)}_{K_\delta^1(z', t)}$$

Et $T_{\delta\vec{q}}^2(\vec{r}', t)$ s'écrit sous la forme :

$$T_{\delta\bar{r}_1}^2(\vec{r},t) = \frac{e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} e^{\frac{U_\infty}{2\ell}t}}{a^6\lambda_f} \int_0^t dt \iiint_{(D)} d^3r \begin{pmatrix} G_\phi^2(y_1,y,t-\tau) \\ \times G_\phi^2(y,y',\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_\delta^1(z,t-\tau)v(z) \\ \times G_\phi^3(z,z',\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} G_\phi^1(x_1,x,t-\tau) \\ -\frac{1}{\ell} G_\phi^1(x_1,x,t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} G_\phi^1(x,x',\tau) \\ -\frac{1}{1} G_\phi^1(x,x',\tau) \end{pmatrix}$$

Cette dernière peut s'écrire finalement :

$$T_{\delta\bar{r}_1}^2(\vec{r},t) = \frac{1}{a^4\lambda_f} e^{\frac{U_\infty}{2\ell}t} G_\phi^2(y_1,y,t) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\phi^1(x_1,x',t) \right) K_\delta^2(z,t) \quad (\text{III.84})$$

$$\text{Avec :} \quad K_\delta^2(z,t) = \int_0^\delta dz v(z) \int_0^t dt K_\delta^1(z,t-\tau) G_\phi^3(z,z',\tau) \quad (\text{III.85})$$

Appliquons maintenant ce qui précède au calcul du deuxième terme correctif pour une bande infinie.

$$\iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\bar{r}_1}^2(\vec{r},\tau) = \frac{U_\infty^2}{\lambda_f a^4} e^{\frac{U_\infty}{2\ell}\tau} K_\delta^1(z,\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 G_\phi^2(y_1,y',\tau) \int_0^c dx_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\phi^1(x_1,x',\tau) \right)$$

$$\iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\bar{r}_1}^2(\vec{r},\tau) = \frac{U_\infty^2}{2\lambda_f a^3} \sqrt{\frac{a}{\pi\tau}} K_\delta^2(z,\tau) \left(-\left(\frac{c-x'}{2a\tau} + \frac{1}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{x'-c}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{\sqrt{a\tau}}{\ell} \right)^2} - \left(\frac{x'}{2a\tau} - \frac{1}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{x'}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{\sqrt{a\tau}}{\ell} \right)^2} \right)$$

Et le deuxième terme correctif s'écrit :

$$T_2(\vec{r},t) = \Phi_0 \frac{U_\infty^2}{2\lambda_f a^3} \int_0^t d\tau \sqrt{\frac{a}{\pi\tau}} \left(-\left(\frac{c-x}{2a\tau} + \frac{1}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{x-c}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{\sqrt{a\tau}}{\ell} \right)^2} - \left(\frac{x}{2a\tau} - \frac{1}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{\sqrt{a\tau}}{\ell} \right)^2} \right) K_\delta^2(z,\tau) \quad (\text{III.86})$$

Ou encore :

$$T_2(\vec{r},t) = \Phi_0 \frac{U_\infty^2}{2\lambda_f a^3 \sqrt{\pi}} \int_0^t du \left(-\left(2\frac{c-x}{u^2} + \frac{1}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{x-c}{u} - \frac{u}{2\ell} \right)^2} - \left(\frac{2x}{u^2} - \frac{1}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{x}{u} - \frac{u}{2\ell} \right)^2} \right) K_\delta^2(z,u) \quad (\text{III.87})$$

$K_\delta^2(z,\tau)$ est calculé en suivant les mêmes démarches que celles présentées dans le paragraphe (III.6.2) et le détail du calcul est montré en (annexe 8).

Finalement on a :

$$T_2(\vec{r},t) = \Phi_0 \frac{U_\infty^2}{2\lambda_f a^3 \sqrt{\pi}} \int_0^t du \left\{ \begin{aligned} & \left(-\left(2\frac{c-x}{u^2} + \frac{1}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{x-c}{u} - \frac{u}{2\ell} \right)^2} - \left(\frac{2x}{u^2} - \frac{1}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{x}{u} - \frac{u}{2\ell} \right)^2} \right) \\ & \times \frac{a}{2} (I_{-1}(z,u) + I_{-2}(z,u) + \dots + I_{-12}(z,u)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.88})$$

Le calcul du premier et du deuxième terme permet de déduire la forme suivante :

$$T_{\delta\bar{r}_1}^n(\vec{r},t) = \frac{1}{a^{n+2}\lambda_f} e^{\frac{U}{2\ell}t} G_\phi^2(y_1,y,t) \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \left(e^{\frac{(x-x_1)}{\ell}} G_\phi^1(x_1,x,t) \right) K_\delta^n(z,t) \quad (\text{III.89})$$

Avec :
$$K_{\delta}^n(z,t) = \int_0^{\delta} dz' v(z') \int_0^t d\tau K_{\delta}^{n-1}(z',t-\tau) G_{\phi}^3(z,z',\tau)$$

n : correspond au nombre de termes correctifs.

Et pour les termes d'ordre supérieur, il suffit d'exploiter directement l'expression (III.89) et calculer seulement $K_{\delta}^n(z,t)$.

III.8 Profil de température pour un flux de chaleur réel : produit de convolution

On rappelle ici que le profil de température déterminé précédemment $T_0(x',z',t)$ est donné pour un flux échelon unité uniforme sur la bande chauffante. On peut cependant utiliser l'expression (III.18) pour déterminer le champ de température pour un flux de chaleur dépendant du temps.

Examinons ici le premier terme de la solution générale $T_0(\vec{r},t)$:

$T_0(\vec{r},t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\vec{r}}^0(\vec{r},\tau) \Phi_0(x_1,y_1,t-\tau)$, cette expression peut être simplifiée si

le flux Φ_0 est indépendant des points x et y :

$$T_0(\vec{r},t) = \int_0^t d\tau \Phi_0(t-\tau) \iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\vec{r}}^0(\vec{r},\tau) \quad (III.90)$$

L'intégrale double : $\iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\vec{r}}^0(\vec{r},\tau)$ a été calculé dans le paragraphe (III.4.1)

Pour un flux de chaleur de la forme : $\Phi_0(t) = \Phi_0 \left(1 - \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \right)$, l'expression (III.90)

devient :

$$T_0(x',t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Phi_0}{2\lambda_f \sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{at}} du \left(\operatorname{erf} \left(\frac{c-x'}{u} + \frac{u}{2\ell} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x'}{u} - \frac{u}{2\ell} \right) \right) e^{-\frac{z'^2}{u^2}} \\ - \frac{\Phi_0}{2\lambda_f \sqrt{\pi}} \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \int_0^{2\sqrt{at}} du \left(\operatorname{erf} \left(\frac{c-x'}{u} + \frac{u}{2\ell} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x'}{u} - \frac{u}{2\ell} \right) \right) e^{\frac{\gamma_n u^2}{4a}} e^{-\frac{z'^2}{u^2}} \end{array} \right\} \quad (III.91)$$

Cette expression peut encore se simplifier en introduisant le comportement de la

fonction $k(u) = \operatorname{erf} \left(\frac{c-x'}{u} + \frac{u}{2\ell} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x'}{u} - \frac{u}{2\ell} \right)$ schématisée dans la figure III.5.

$$T_0(x',t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Phi_0}{\lambda_f \sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{at}} du e^{-\frac{z'^2}{u_0^2(x')}} - \frac{\Phi_0}{2\lambda_f \sqrt{\pi}} \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \int_0^{2\sqrt{at}} du e^{\frac{\gamma_n u^2}{4a}} e^{-\frac{z'^2}{u_0^2(x')}} \quad \text{si } t < \frac{u_0^2(x')}{4a} \\ \frac{\Phi_0}{\lambda_f \sqrt{\pi}} \int_0^{u_0(x')} du e^{-\frac{z'^2}{u^2}} - \frac{\Phi_0}{2\lambda_f \sqrt{\pi}} \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \int_0^{2\sqrt{at}} du e^{\frac{\gamma_n u^2}{4a}} e^{-\frac{z'^2}{u^2}} \quad \text{si } t > \frac{u_0^2(x')}{4a} \end{array} \right. \quad (III.92)$$

Et après intégration :

$$T_0(x',t) = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{\lambda_f \sqrt{\pi}} \left(2\sqrt{at} e^{-\frac{z'^2}{4at}} - z' \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \int_0^t d\tau \sqrt{\frac{a}{\tau}} e^{\gamma_n \tau} e^{-\frac{z'^2}{4a\tau}} \right) & \text{si } t < \frac{u_0^2(x')}{4a} \\ \frac{\Phi_0}{\lambda_f \sqrt{\pi}} \left(u_0(x') e^{-\frac{z'^2}{u_0^2(x')}} - z' \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{u_0(x')} \right) - \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \int_0^{\frac{u_0(x')}{4at}} d\tau \sqrt{\frac{a}{\tau}} e^{\gamma_n \tau} e^{-\frac{z'^2}{4a\tau}} \right) & \text{si } t > \frac{u_0^2(x')}{4a} \end{cases}$$

A la paroi ($z'=0$), la température $T_0(\vec{r},t)$ devient :

$$T_0(x',t)|_{z'=0} = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{\lambda_f \sqrt{\pi}} \left(2\sqrt{at} - \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \int_0^t d\tau \sqrt{\frac{a}{\tau}} e^{\gamma_n \tau} \right) & \text{si } t < \frac{u_0^2(x')}{4a} \\ \frac{\Phi_0}{\lambda_f \sqrt{\pi}} \left(u_0(x') - \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \int_0^{\frac{u_0(x')}{4at}} d\tau \sqrt{\frac{a}{\tau}} e^{\gamma_n \tau} \right) & \text{si } t > \frac{u_0^2(x')}{4a} \end{cases} \quad (\text{III.93})$$

$e^{\gamma_n \tau}$ peut s'écrire sous forme d'une série de Taylor :

$$e^{\gamma_n \tau} = 1 + \gamma_n \tau + \frac{\gamma_n^2}{2!} \tau^2 + \dots$$

$$T_0(\vec{r},t)|_{z'=0} = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{\lambda_f \sqrt{\pi}} \left(2\sqrt{at} - \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \int_0^t d\tau \sqrt{\frac{a}{\tau}} \left(1 + \gamma_n \tau + \frac{\gamma_n^2}{2!} \tau^2 + \dots \right) \right) & \text{si } t < \frac{u_0^2(x')}{4a} \\ \frac{\Phi_0}{\lambda_f \sqrt{\pi}} \left(u_0(x') - \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \int_0^{\frac{u_0(x')}{4at}} d\tau \sqrt{\frac{a}{\tau}} \left(1 + \gamma_n \tau + \frac{\gamma_n^2}{2!} \tau^2 + \dots \right) \right) & \text{si } t > \frac{u_0^2(x')}{4a} \end{cases}$$

$\frac{2}{3}\sqrt{at}(3+\gamma_n t + \frac{9}{30}\gamma_n^2 t^2 + \dots)$ $\frac{u_0(x')}{3}(3+\gamma_n \frac{u_0^2(x')}{4a} + \frac{9}{30}\gamma_n^2 \frac{u_0^4(x')}{16a^2} + \dots)$

$$T_0(x',t)|_{z'=0} = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{\lambda_f \sqrt{\pi}} 2\sqrt{at} \left(1 - \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \left(1 + \frac{\gamma_n t}{3} + \dots \right) \right) & \text{si } t < \frac{u_0^2(x')}{4a} \\ \frac{\Phi_0 u_0(x')}{\lambda_f \sqrt{\pi}} \left(u_0(x') - \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \left(1 + \frac{\gamma_n u_0(x')}{3} + \dots \right) \right) & \text{si } t > \frac{u_0^2(x')}{4a} \end{cases}$$

Et finalement :

$$T_0(x',t)|_{z'=0} = T_\infty \left(1 - \sum_n a_n e^{-\gamma_n t} \right) \quad ; \quad T_\infty = \frac{\Phi_0 u_0(x')}{\lambda_f \sqrt{\pi}} \quad (\text{III.94})$$

III.9 Exploitation du modèle et comparaison des résultats théorique et ceux de la littérature

III.9.1 Profil de température

Nous allons comparer nos résultats avec ceux disponible dans la littérature ; à savoir la méthode différentielle, la méthode intégrale et celle des volumes finis [40].

Les résultats numériques obtenus par ces méthode, présentés ci-dessous, sont ceux du modèle physique (fig.III.3), où la vitesse d'écoulement est $U_\infty = 1$ m/s et la couche limite thermique est dépendante de x et, aussi, du temps, la couche limite dynamique étant stationnaire $\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} = 5\sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}$. La forme de la couche limite qu'on a utilisée est

obtenue pour un profil de vitesse d'ordre 2 présentée (en annexe 6) est $\delta(x) = \frac{5,47x}{\sqrt{Re_x}} = 5,47\sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}$ et pour la couche limite moyenne, on a pris tout simplement

celle au milieu de la plaque $x = \frac{c}{2} \left(\delta_{moy} = 5,47\sqrt{\frac{vc}{2U_\infty}} \right)$.

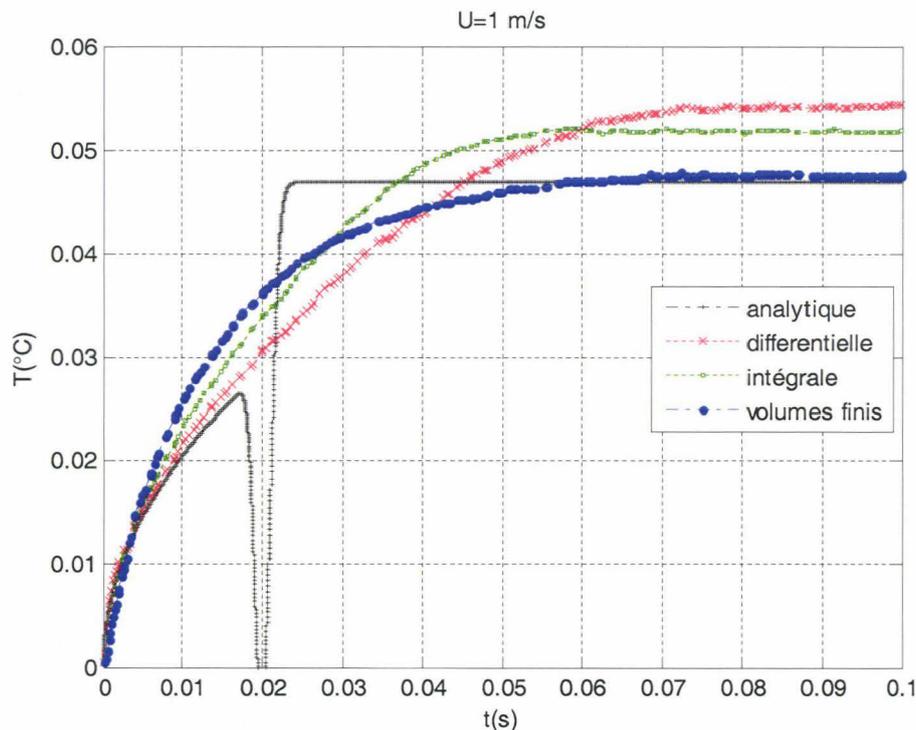


Figure III.23 : Comparaison des évolutions temporelles de la température obtenues par différentes méthodes, $x = 0,02$ m et $U_\infty = 1$ m/s

Sur les figures III.23 et III.24, nous représentons l'évolution des températures en fonction du temps, respectivement au bord d'attaque de la plaque chauffante et au milieu de celle-ci.

Nous constatons que les différentes courbes obtenues par les méthodes intégrale, différentielle et la méthode des volumes finis évoluent de façon analogue dans la période de temps considérée, avec cependant des différences relativement importantes pour le régime permanent, les températures obtenues pour les méthodes différentielles et intégrales étant sensiblement plus élevées que pour la méthode des volumes finis.

On note en particulier sur les courbes obtenues par les méthodes différentielles et intégrales, une zone de croissance presque linéaire de la température débutant pratiquement au temps $t_c \cong 0,02s \cong \frac{x}{U_\infty}$ pour $x=0,02m$, et pratiquement centrée sur

$$t_c \cong 0,1s \cong \frac{x}{U_\infty} \text{ pour } x=0,1m.$$

Cette zone n'apparaît pas, ou apparaît moins nettement, sur les courbes obtenues par la méthode des volumes finis.

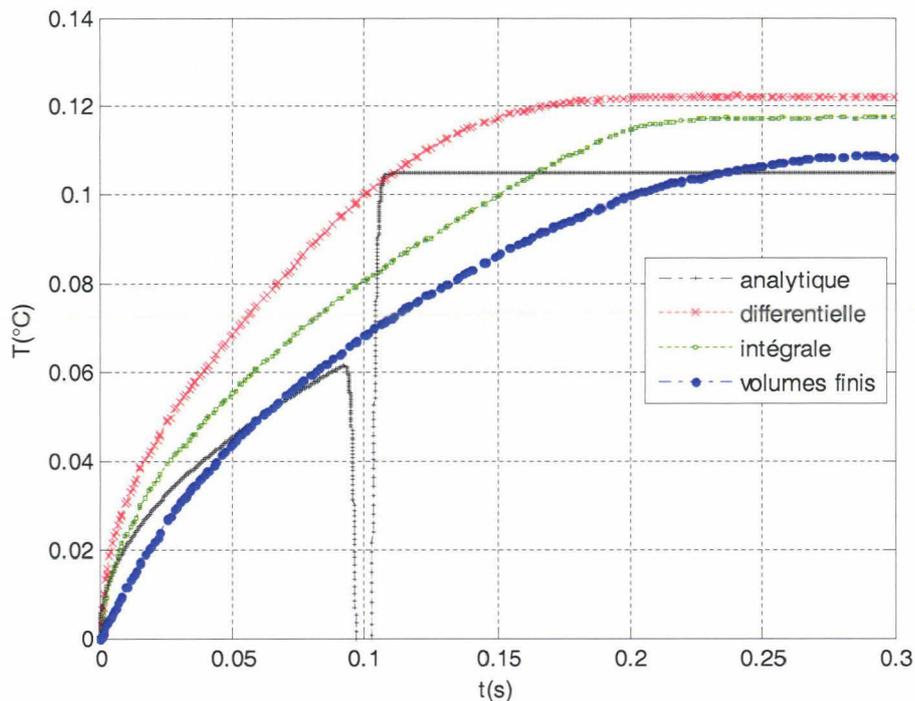


Figure III.24 : Comparaison des évolutions temporelles de la température obtenues par différentes méthodes, $x = 0,1$ m et $U_\infty = 1$ m/s

En ce qui concerne notre méthode, on constate une très forte anomalie, sous forme d'un pic négatif, se produisant aux temps cités précédemment. Cette anomalie, évidemment dénuée de sens physique, provient du procédé itératif utilisé pour résoudre l'équation intégrale : la série itérative diverge, ou converge extrêmement lentement et de façon non uniforme (très probablement en raison de la très faible valeur de la longueur

caractéristique l ($l \approx 8,85 \cdot 10^{-6}$ m) comparée à l'épaisseur de la couche limite δ ($\delta \approx 0,0031$ m), au voisinage des temps critiques $t_c = \frac{x}{U_\infty}$. Nous pensons que

ceci peut s'interpréter intuitivement de la façon suivante : A l'approche des temps t_c se produit une "compétition" entre un phénomène très lent mais nécessaire : la pénétration de la chaleur dans le fluide par conduction, et un phénomène très rapide : le transport de cette chaleur par convection.

En revanche pour les temps faibles, nos résultats sont cohérents avec ceux des autres méthodes. Il en est de même pour les temps élevés, c'est-à-dire en régime permanent, qui est d'ailleurs très rapidement atteint : La série itérative converge rapidement en régime permanent puisque avec deux termes correctifs seulement, nous obtenons un écart relatif maximal de 5 % avec la méthode des volumes finis et de 10 % avec les autres méthodes. Nous analysons plus en détail ces résultats, notamment en ce qui concerne le coefficient d'échange convectif, dans le paragraphe suivant.

III.9.2 Evolution du coefficient d'échange convectif h_c en fonction du temps

Les figures III.25 et III.26, représentent l'évolution du coefficient d'échange convectif. Inversement proportionnel à la température, nulle en $t = 0$, il présente une singularité en

$\frac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de $t = 0$.

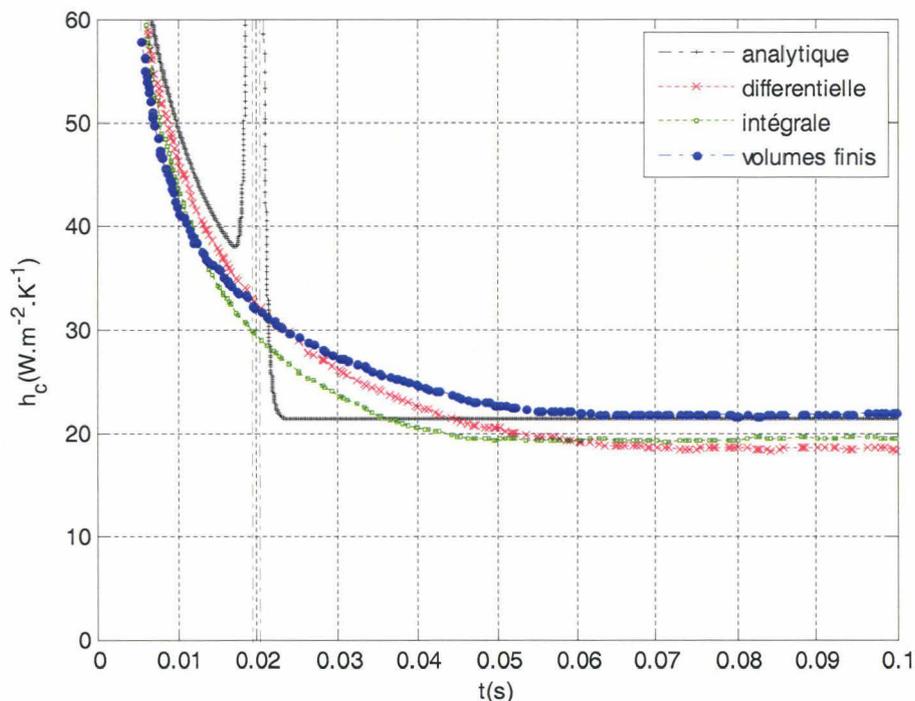


Figure III.25 : Evolution du coefficient h_c pour les différentes méthodes, $x = 0,02$ m et $U_\infty = 1\text{m/s}$

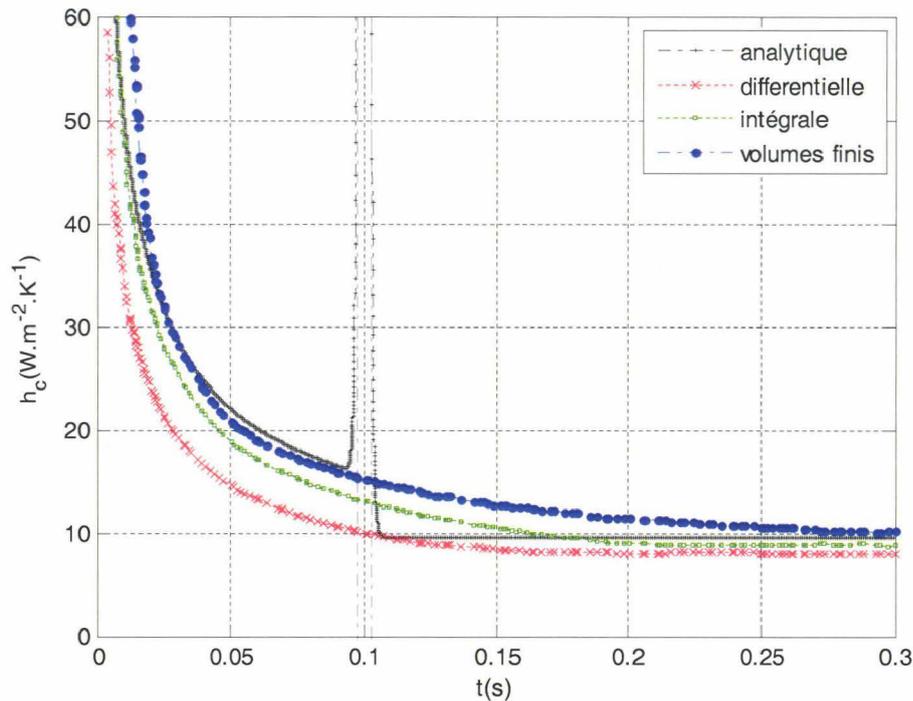


Figure III.26 : Evolution du coefficient h_c pour les différentes méthodes, $x = 0,1$ m et $U_\infty = 1$ m/s

Il décroît ensuite jusqu'à une valeur en régime permanent dépendante du type de méthode.

On note, dans le cas du coefficient calculé analytiquement, la présence de l'anomalie déjà évoquée pour la température.

Le tableau suivant (Tab.III.3) présente, pour les abscisses $x = 0,02$ m et $x = 0,1$ m, les valeurs de h_c en régime permanent obtenues par les différentes méthodes et leurs écarts relatifs par rapport au coefficient h_c obtenu par la méthode intégrale.

$U_\infty = 1$ m/s	$x = 0,02$ m	Ecart relatif	$x = 0,1$ m	Ecart relatif
$h_{c_différentielle}$	18,4	3,51	8	6,10
$h_{c_intégrale}$	19,07		8,52	
$h_{c_volumes\ finis}$	21,85	12,72	10,10	15,64
$h_{c_modèle}$	21,35	10,68	9,54	10,69

Tableau III.3 : Coefficient d'échange convectif h_c en régime permanent obtenu par les différentes méthodes de calcul ($U_\infty = 1$ m/s)

Nous constatons que l'écart relatif entre le coefficient d'échange convectif calculé analytiquement et celui issu de la méthode intégrale prend la même valeur (10,68 %) pour $x = 0,02$ m et $x = 0,1$ m. Alors que l'écart relatif entre la méthode des volumes finis et la méthode intégrale est variable pour les deux positions (12,68 % pour $x = 0,02$ m et 15 % pour $x = 0,1$ m).

	x (m)	c/8	c/4	3c/8	c/2	5c/8	3c/4	7c/8
	$U_\infty = 0,5 \text{ m/s}$	$h_{c_corrélation}$	11,77	8,32	6,79	5,88	5,26	4,80
Après la première itération	Couche limite dynamique constante ($\delta = C^{te}$)							
	h_{c_mod}	14,81	10,60	8,74	7,62	6,86	6,30	5,87
	$\Delta(\%)$	20,50	21,51	22,25	22,84	23,35	23,83	24,23
	Couche limite dynamique variable ($\delta = f(x)$)							
	h_{c_mod}	15,24	10,78	8,81	7,62	6,82	6,23	5,76
	$\Delta(\%)$	22,78	22,84	22,87	22,84	22,88	22,87	22,85
Après la deuxième itération	Couche limite dynamique constante ($\delta = C^{te}$)							
	h_{c_mod}	12,34	8,97	7,47	6,58	5,97	5,51	5,16
	$\Delta(\%)$	4,66	7,28	9,14	10,60	11,83	12,92	13,87
	Couche limite dynamique variable ($\delta = f(x)$)							
	h_{c_mod}	13,15	9,31	7,60	6,58	5,88	5,37	4,97
	$\Delta(\%)$	10,54	10,61	10,63	10,60	10,22	10,62	10,62

Tableau III.4.a : Ecart relatif entre $h_{c_modèle}$ et $h_{c_corrélation}$ pour $U_\infty = 0,5 \text{ m/s}$

	x (m)	c/8	c/4	3c/8	c/2	5c/8	3c/4	7c/8
	$U_\infty = 1 \text{ m/s}$	$h_{c_corrélation}$	16,64	11,77	9,61	8,32	7,44	6,79
Après la première itération	Couche limite dynamique constante ($\delta = C^{te}$)							
	h_{c_mod}	20,96	14,99	12,36	10,78	9,71	8,92	8,30
	$\Delta(\%)$	20,60	21,49	22,25	22,84	23,40	23,82	24,25
	Couche limite dynamique variable ($\delta = f(x)$)							
	h_{c_mod}	21,59	15,26	12,45	10,78	9,65	8,81	8,15
	$\Delta(\%)$	22,93	22,90	22,82	22,84	22,87	22,87	22,86
Après la deuxième itération	Couche limite dynamique constante ($\delta = C^{te}$)							
	h_{c_mod}	17,45	12,69	10,58	9,31	8,44	7,80	7,30
	$\Delta(\%)$	4,61	7,25	9,18	10,61	11,86	12,94	13,86
	Couche limite dynamique variable ($\delta = f(x)$)							
	h_{c_mod}	18,62	13,17	10,75	9,31	8,32	7,60	7,03
	$\Delta(\%)$	10,61	10,66	10,62	10,61	10,59	10,63	10,59

Tableau III.4.b : Ecart relatif entre $h_{c_modèle}$ et $h_{c_corrélation}$ pour $U_\infty = 1 \text{ m/s}$

	x (m)	c/8	c/4	3c/8	c/2	5c/8	3c/4	7c/8
	$U_\infty = 2 \text{ m/s}$	$h_{c_corrélation}$	23,54	16,64	13,59	11,77	10,52	9,61
Après la première itération	Couche limite dynamique constante ($\delta = C^{te}$)							
	h_{c_mod}	29,67	21,23	17,48	15,26	13,73	12,61	11,75
	$\Delta(\%)$	20,66	21,59	22,25	22,90	23,35	23,79	24,28
	Couche limite dynamique variable ($\delta = f(x)$)							
h_{c_mod}	30,48	21,59	17,60	15,26	13,64	12,45	11,53	

Après la deuxième itération	$\Delta(\%)$	22,78	22,93	22,80	22,90	22,83	22,82	22,85
	Couche limite dynamique constante ($\delta = C^{te}$)							
	h_{c_mod}	24,69	17,95	14,97	13,17	11,94	11,03	10,33
	$\Delta(\%)$	4,66	7,28	9,21	10,66	11,88	12,92	13,87
	Couche limite dynamique variable ($\delta = f(x)$)							
	h_{c_mod}	26,31	18,62	15,19	13,17	11,77	10,75	9,96
$\Delta(\%)$	10,54	10,61	10,57	10,66	10,62	10,62	10,66	

Tableau III.4.c : Ecart relatif entre $h_{c_modèle}$ et $h_{c_corrélation}$ pour $U_{\infty} = 2$ m/s

$U_{\infty} = 5$ m/s	x (m)	c/8	c/4	3c/8	c/2	5c/8	3c/4	7c/8	
	$h_{c_corrélation}$	37,22	26,32	21,49	18,61	16,64	15,19	14,06	
	Après la première itération	Couche limite dynamique constante ($\delta = C^{te}$)							
		h_{c_mod}	46,94	33,55	27,62	24,15	21,73	19,96	18,58
		$\Delta(\%)$	20,72	21,56	22,20	22,95	23,43	23,87	24,31
		Couche limite dynamique variable ($\delta = f(x)$)							
		h_{c_mod}	48,30	34,12	27,85	24,15	21,59	19,68	18,24
		$\Delta(\%)$	22,95	22,88	22,85	22,95	22,93	22,80	22,90
	Après la deuxième itération	Couche limite dynamique constante ($\delta = C^{te}$)							
		h_{c_mod}	39,06	28,40	23,64	20,83	18,90	17,45	16,34
		$\Delta(\%)$	4,71	7,35	9,09	10,66	11,94	12,93	13,90
		Couche limite dynamique variable ($\delta = f(x)$)							
		h_{c_mod}	41,66	29,41	24,03	20,83	18,62	17,00	15,74
		$\Delta(\%)$	10,66	10,51	10,60	10,66	10,61	10,65	10,66

Tableau III.4.d : Ecart relatif entre $h_{c_modèle}$ et $h_{c_corrélation}$ pour $U_{\infty} = 5$ m/s

Nous pouvons montrer que l'écart relatif du coefficient d'échange convectif entre notre modèle théorique et celui de la méthode intégrale est le même sur toute la plaque. Et ce pour différentes valeurs de la vitesse d'écoulement U_{∞} (Tab.III.4), comme schématisé sur la figure III.27.

Rappelons que l'écart relatif entre notre modèle théorique et celui de la méthode intégrale est de 45 % lorsque l'on n'utilise que le premier terme. L'influence de la prise en compte des itérations de calcul du coefficient h_c par la méthode analytique adoptée se résume sur les tableaux (Tab.III.4). On constate que cet écart diminue en augmentant le nombre d'itérations. Il passe de 45 % à presque sa moitié (22 %) après la première itération et à 10 % après la deuxième itération. Par extrapolation, l'écart relatif peut atteindre 2 % après la quatrième itération.

III.9.3 Evolution du coefficient d'échange convectif $h_{c_modèle}$ par rapport à la vitesse d'écoulement

Une représentation graphique permet de synthétiser les résultats regroupés sur les tableaux (III.4).

Sur la figure III.27, nous traçons les courbes de la variation du coefficient d'échange convectif h_c en fonction de la vitesse d'écoulement. Pour trois valeurs de l'abscisse x ($x = 0,02 \text{ m}$, $x = 0,1 \text{ m}$, $x = 0,19 \text{ m}$), la vitesse de l'écoulement varie de 0,5 à 20 m/s.

Nous comparons en même temps ces courbes avec celles obtenues par les corrélations de la littérature. Nous remarquons que dans toute cette plage de vitesse et pour tous les points x , l'écart du coefficient d'échange convectif h_c entre notre modèle et celui de la littérature est maintenu à 10 %. Nous confirmons donc ce que nous avons avancé précédemment pour généraliser dans tous le domaine des vitesses d'écoulement (de 0,5 m/s à 20 m/s) et sur toute la plaque ($x = 0,02 \text{ m}$, $x = 0,1 \text{ m}$, $x = 0,19 \text{ m}$).

Faisons la même chose pour un coefficient d'échange convectif moyenné sur toute la plaque sur la figure III.28. Le résultat est toujours le même ce qui est évident et confirme une fois de plus la fiabilité de notre modèle théorique. Il nous semble que cet écart de 10 % peut être diminué à 2 % après le traitement du quatrième terme correctif.

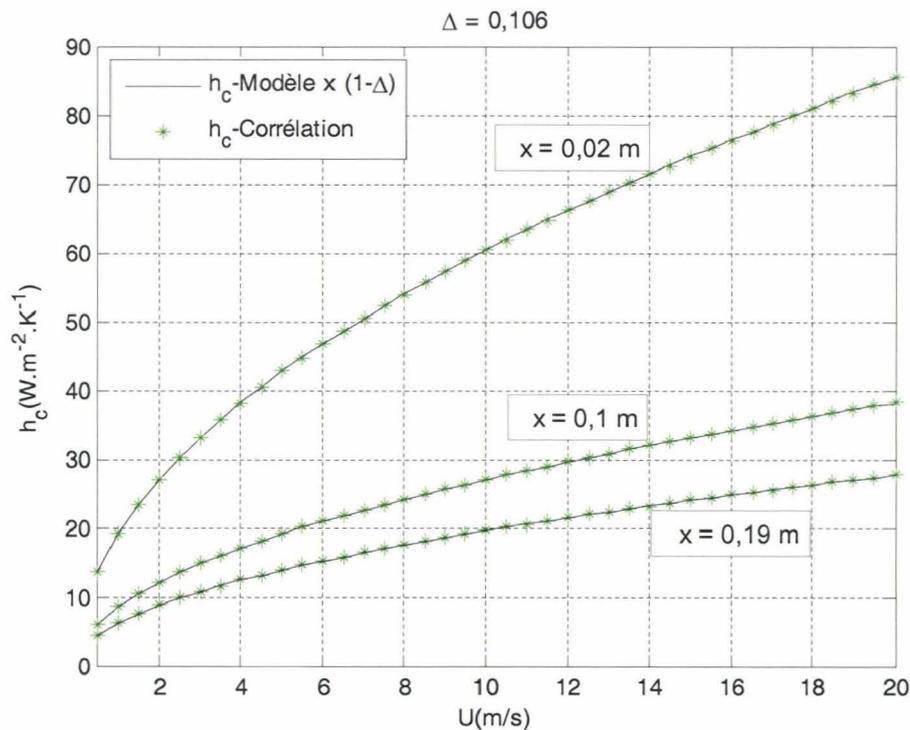


Figure III.27 : Comparaison du h_c local du modèle et de la corrélation ($0,5 < U_\infty < 20$ m/s)

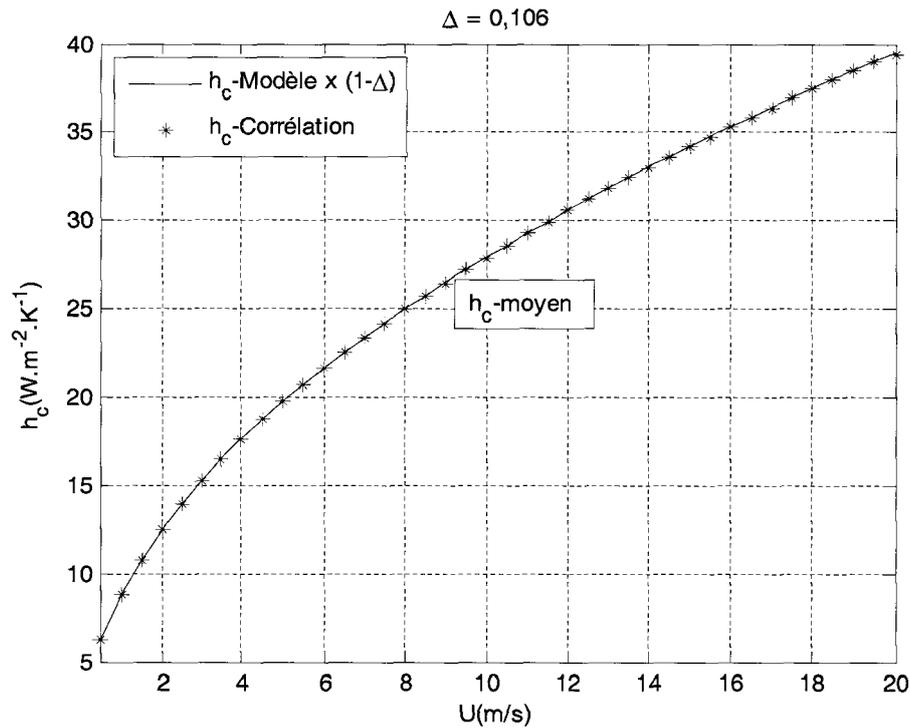


Figure III.28 : Comparaison du h_c moyen du modèle et de la corrélation ($0,5 < U_\infty < 20$ m/s)

III.10 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les premiers principes d'une résolution directe, par la méthode des fonctions de Green, de l'équation linéaire de propagation de la chaleur dans un fluide en mouvement, en interaction avec les parois d'un solide.

La première étape a été d'établir l'existence d'une relation intégrale linéaire exacte, découlant de l'équation différentielle de propagation de la chaleur dans le fluide, entre le champ de température dans celui-ci et le flux de chaleur le pénétrant par les parois solides, et d'en expliciter la forme analytique (relation III.13) en fonction des caractéristiques de l'écoulement. Cette relation permet d'en déduire celle qui relie nécessairement le flux pénétrant par les parois, quel qu'il soit, et la température pariétale (la relation obtenue est très probablement inversible : ce problème, non traité ici, est purement mathématique).

Bien évidemment, ni la température pariétale, ni le flux pénétrant par les parois, ne sont connus à l'avance, ou ne le sont que partiellement. En toute rigueur, la relation intégrale relative au fluide doit être couplée à une relation relative au solide bornant le fluide, analogue mais plus complexe que celles que nous avons établies dans le chapitre précédent, dans laquelle figurent explicitement les données extérieures au système (flux de chauffage infrarouge incident sur la face inférieure de la plaque en vitrocéramique, température de l'air extérieur à la canalisation, etc...).

La résolution de cet ensemble permettrait alors de tout connaître de l'évolution du système fluide-solide et dans toutes les conditions. Ce programme est évidemment trop ambitieux pour le moment et nous nous sommes bornés ici à un cas très simplifié : celui d'un fluide semi infini s'écoulant au dessus d'un plan solide dont seule une portion, ayant la forme d'une bande perpendiculaire à la direction de l'écoulement, de largeur c et de longueur infinie, émet un flux de densité uniforme Φ_0 constant (ou dépendant du temps $\Phi_0(t)$) pénétrant dans le fluide.

La seconde étape est purement mathématique : la relation intégrale III.13 est une relation implicite dont le second membre comporte deux termes. Le premier décrit la propagation de la chaleur dans le fluide dans le cas d'une couche limite dynamique infiniment mince (cas d'un "superfluide" conducteur) ; le second corrige le premier en fonction de la forme de la couche limite, mais dépend, linéairement, du champ de température dans tout le fluide. Symboliquement, en utilisant la notation de Dirac, la relation intégrale peut s'écrire :

$|T\rangle = |T_0\rangle + V|T\rangle \Leftrightarrow (1 - V)|T\rangle = |T_0\rangle \Rightarrow |T\rangle = (1 - V)^{-1}|T_0\rangle$, où $|T\rangle$ représente le champ exact dans le fluide, $|T_0\rangle$ le champ en l'absence de couche limite dynamique, et V un opérateur linéaire intégral agissant sur $|T\rangle$ et dépendant de la forme de cette couche limite dynamique.

Le problème consiste alors à expliciter analytiquement l'opérateur $(1 - V)^{-1}$. Nous avons ici opté pour la méthode la plus simple, la méthode itérative, qui consiste à écrire :

$(1 - V)^{-1} = 1 + V + V^2 + V^3 + V^4 \dots + V^n \dots + \dots$. Formellement, on vérifie que cette série est bien l'inverse de l'opérateur $(1 - V)$, ce qui ne garantit pas la convergence de la série $|T\rangle = |T_0\rangle + V|T_0\rangle + V^2|T_0\rangle + V^3|T_0\rangle + V^4|T_0\rangle \dots + V^n|T_0\rangle \dots + \dots$, en tout point et à tout instant.

Cependant, en appliquant ce procédé au cas simplifié cité plus haut, et en comparant les résultats numériques à ceux que l'on trouve traités dans la littérature, par d'autres méthodes mais pour la même configuration, nous avons pu mettre en évidence les points suivants :

- La série converge très rapidement pour les temps très faibles (régime conducteur) et les temps (relativement) très grands (régime permanent)
- Le premier terme de la série représente déjà, en régime permanent, près de 50 % de la réponse à laquelle conduisent les autres méthodes, et la loi de variation en fonction de la vitesse et du point x est analogue. On note en outre l'établissement d'une couche limite thermique bien qu'il n'y ait pas de couche limite dynamique.
- La prise en compte de deux termes correctifs, toujours en régime permanent, suffit à approcher à près de 10% la réponse obtenue par les autres méthodes, de manière uniforme lorsque nous prenons en compte une couche limite dynamique dont

l'épaisseur varie, en fonction du point, de la même façon. Paradoxalement, la différence est plus faible, mais non uniforme (au maximum 13 % au bord de fuite de la plaque chauffante), lorsque nous effectuons le calcul avec une couche limite dynamique d'épaisseur constante. Ce fait semblerait indiquer que la géométrie précise de cette couche limite est moins importante que son épaisseur moyenne, en ce qui concerne la diffusion de la chaleur en régime permanent.

- La durée du régime transitoire est faible : la condition de Newton avec un coefficient de convection constant (mais dépendant du point) est très rapidement valide et notre méthode présente l'intérêt de permettre de déterminer analytiquement ce coefficient dans des conditions et des géométries variées.
- La série diverge, ou converge extrêmement lentement, au voisinage des points (t,x)

de l'espace-temps bidimensionnel vérifiant $t - \frac{x}{U_\infty} = 0$. C'est le signe naturellement

qu'au voisinage de ces points l'inversion de l'opérateur $(1-V)$ par la méthode itérative, qui est en fait une méthode perturbative, n'est pas pertinente. Pour y remédier, nous pensons qu'il est possible de procéder de la façon suivante : réécrire judicieusement la relation intégrale III.13 pour un observateur se déplaçant avec le fluide (ce qui revient à redéfinir la coordonnée temps $t \rightarrow t' = t'(x,y,z,t)$ par exemple,

dans un premier temps $t' = t - \frac{x}{U_\infty}$), puis développer cette relation en série de

Taylor, ou, éventuellement, rechercher le comportement analytique de la solution au voisinage de $t' = 0$.

Chapitre IV

EXPÉRIMENTATION ET
RÉSULTATS

CHAPITRE IV : EXPERIMENTATION ET RESULTATS

IV.1 Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre deux parties :

La première partie, est consacrée à la description du banc d'essais mis en place, des techniques expérimentales développées ainsi que l'instrumentation qui a été nécessaire à l'acquisition des mesures. On présentera ainsi la thermographie infrarouge, qui a été choisie pour accéder aux profils de températures à la surface de la plaque et l'anémométrie fil chaud pour mesurer les vitesses de l'écoulement dans la veine d'essais.

Dans la deuxième partie, nous présentons les résultats expérimentaux : analyse des différents essais réalisés sur des plaques de vitrocéramique d'épaisseur 3 mm ainsi que sur des plaques d'aluminium d'épaisseur 1 mm.

Ces essais ont été menés afin de déterminer, à partir de la température pariétale évaluée par thermographie infrarouge, d'une part, le flux pariétal échangé entre l'écoulement d'air et la face supérieure de la plaque plane chauffée par rayonnement sur sa face inférieure, et d'autre part le coefficient d'échange convectif en régime transitoire.

On identifie dans un premier temps le coefficient de convection h_i^0 puis le flux absorbé ϕ_i sur la face inférieure. Pour cela on a réalisé une expérimentation en convection naturelle pour les deux plaques planes. Deux autres expérimentations en convection forcée avec des vitesses de 5 et 7 m/s ont également été réalisées.

Les mesures des vitesses du fluide ont été réalisées par anémométrie fil chaud. Ces mesures de vitesse permettront le calcul des nombres de Reynolds et ensuite celui de Nusselt à partir de la littérature et donc de calculer le coefficient d'échange convectif permanent entre la plaque plane et l'écoulement de l'air dans le but de comparer nos résultats à ceux de la littérature (corrélations).

IV.2 Expérimentation

IV.2.1 Description du banc d'essai expérimental

Le but du banc d'essais expérimental mis en place est de permettre l'étude des échanges de chaleur entre une plaque plane chauffée par des émetteurs infrarouge et un écoulement d'air.

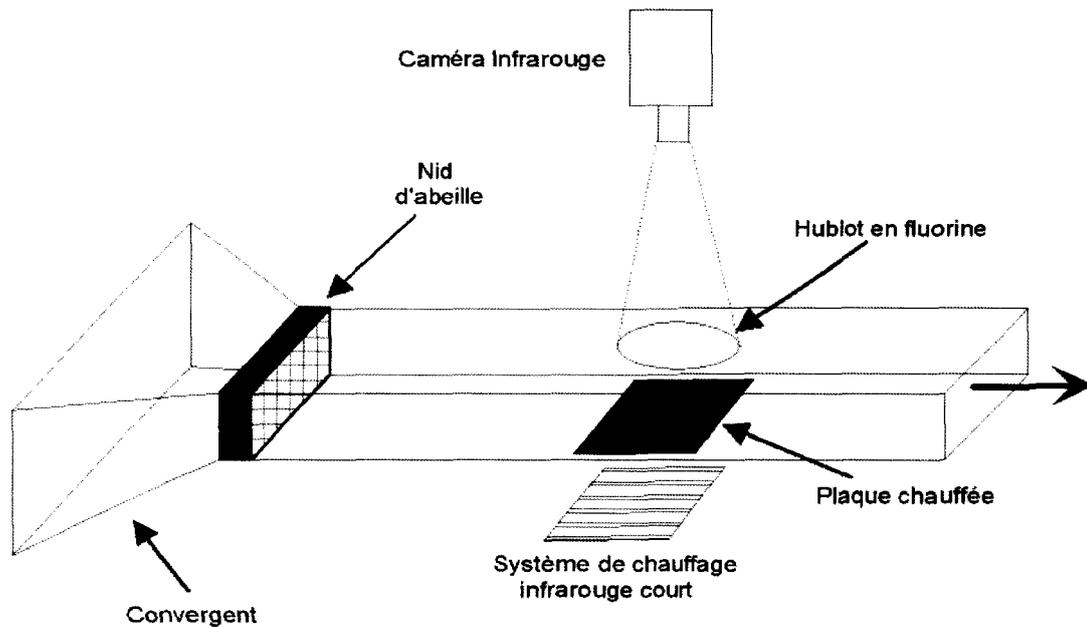


Figure IV.1 : Dispositif expérimental



Figure IV.2 : Banc d'essai expérimental

Le banc d'essai est composé d'une veine en plexiglas de section rectangulaire 150×300 mm et de longueur 2 m (figures IV.1 et IV.2). L'écoulement est réalisé par un ventilateur délivrant des débits variables. L'extrémité est laissée libre pour que l'écoulement d'air se fasse sans perturbations.

A l'autre extrémité, la section a été modifiée et un convergent a été placé afin d'obtenir dès l'entrée de la veine un écoulement stabilisé. Cette stabilisation est renforcée par l'adjonction d'une structure en alvéole entre le convergent et la veine, comme on peut le voir sur l'image ci-dessous.

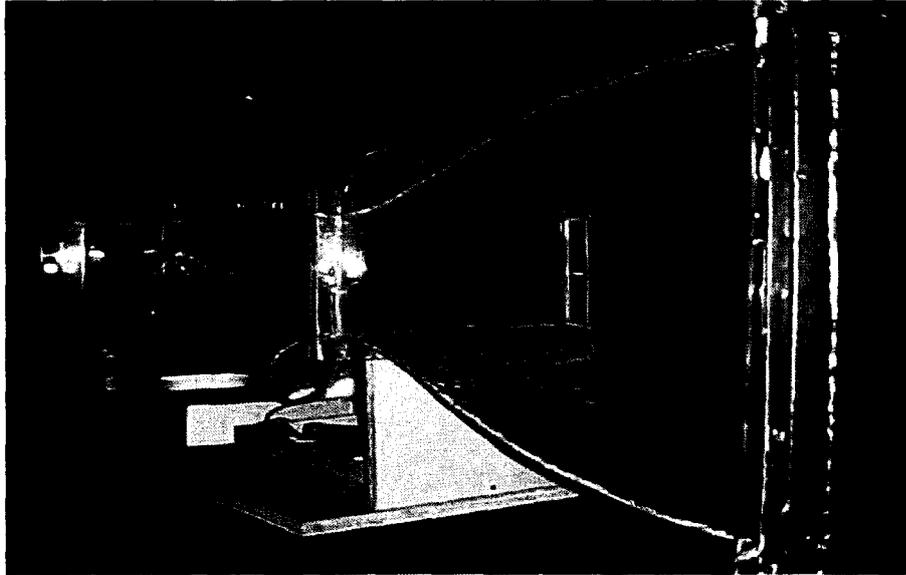


Figure IV.3 : Convergent

La plaque de mesure est de surface 170×210 mm et d'épaisseur e . Elle est déposée au fond de la veine de manière à être parallèle à l'écoulement. On présente ci-dessous une vue de dessus de la veine comprenant l'emplacement de la plaque et le système d'isolation mis en place pour protéger le plexiglas contre les trop hautes températures.

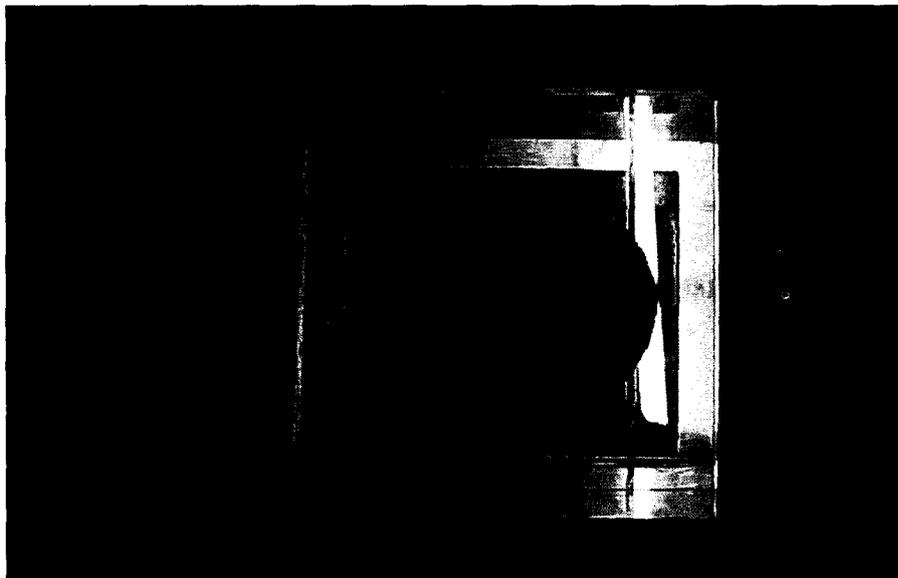


Figure IV.4 : Plaque plane et système d'isolation

Le système de chauffage choisi est un ensemble de lampes infrarouges de puissance variable, permettant d'assurer un flux de type créneau pendant un temps t_1 .

Ce système de chauffage est muni d'un convergent en aluminium permettant de concentrer tout le rayonnement sur la surface inférieure de la plaque de mesure.

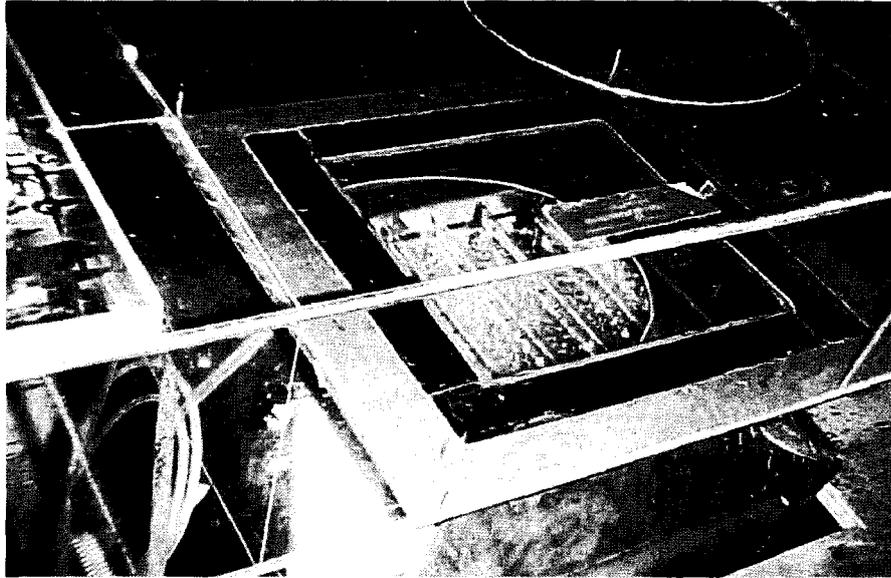


Figure IV.5 : Système de chauffage

Cette plaque est entourée d'un isolant thermique en bakélite dont le rôle est de limiter la conduction de chaleur vers les parois de la veine.

La face de la veine opposée à la plaque de mesure est équipée d'un hublot en fluorine affleurant sa surface interne. La fluorine présente l'avantage de posséder un coefficient de transmission dans le domaine de l'infrarouge permettant ainsi la détermination de la température de la surface de la plaque de mesure par thermographie infrarouge. Le coefficient de transmission de la fluorine est obtenu par étalonnage, et vaut $\tau_f = 0,95 \pm 0,01$ dans la gamme de longueurs d'onde de la caméra utilisée.

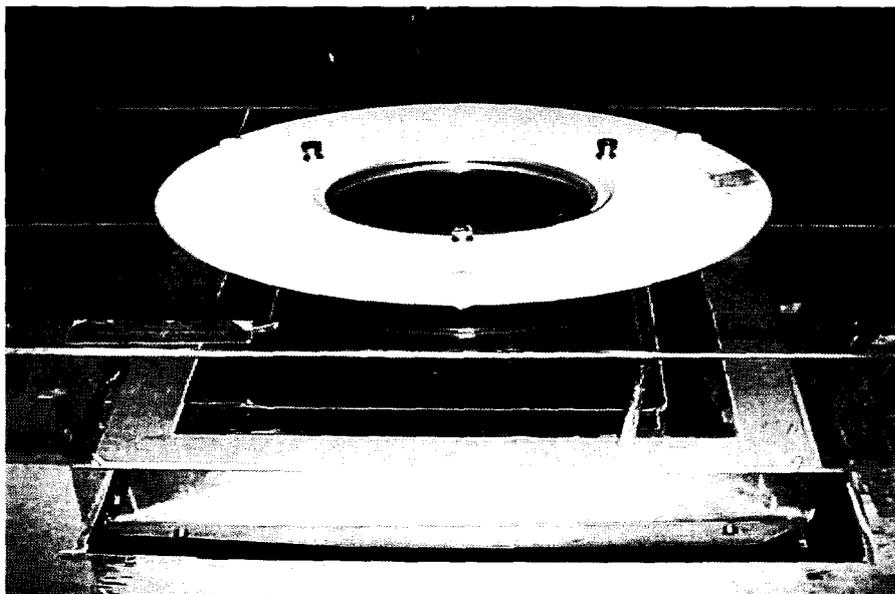


Figure IV.6 : Hublot en fluorine

IV.2.2 Chaîne de mesure

IV.2.2.1 Mesure des températures

La température de la face de la plaque de mesure soumise à l'écoulement est déterminée à l'aide d'une caméra de thermographie infrarouge ondes courtes (2 à 5,4 μm) munie d'un objectif 20°. La fréquence d'acquisition des images peut être de 35 ou 3500 Hz. Lorsque la surface visée à travers un milieu parfaitement transparent, est noire et à la température T , la caméra délivre un signal $I(T)$. En situation de mesure, la caméra donne le niveau thermique numérisé en provenance d'une surface élémentaire de la plaque de mesure après atténuation par la fluorine et l'atmosphère. Ce niveau thermique intègre également celui de l'environnement se réfléchissant sur la surface de la plaque. Pour privilégier l'émission thermique de la plaque par rapport aux flux parasites réfléchis, sa surface supérieure est peinte en noir de manière à augmenter son émissivité. La surface inférieure est également peinte en noire dans le but d'augmenter la proportion du flux des lampes infrarouges absorbée par la plaque. Un étalonnage (Annexe 9) permet d'estimer l'émissivité de la plaque à $\varepsilon = 0,93 \pm 0,02$. Un second étalonnage est réalisé en situation de mesure et permet d'associer le niveau thermique donné par la caméra $I(T)$ à la valeur de la température réelle de la plaque de mesure (Annexe 10). L'estimation de l'incertitude sur la température T donne $\Delta T = \pm 0,3^\circ\text{C}$ pour la gamme de température $30^\circ\text{C} < T < 100^\circ\text{C}$.

La température de l'air est mesurée dans le hall d'essais à l'aide de deux thermocouples de type K. L'erreur absolue commise sur cette température est estimée à $\Delta T = \pm 0,3^\circ\text{C}$.



Figure IV.7 : Caméra Infrarouge

IV.2.2.2 L'anémométrie fil chaud

🚩 Principe

Les sondes à fil chaud utilisées sont faites de fils de platine de $5\ \mu\text{m}$ de diamètre. Le fil platine est placé dans une branche d'un pont de Wheatston.

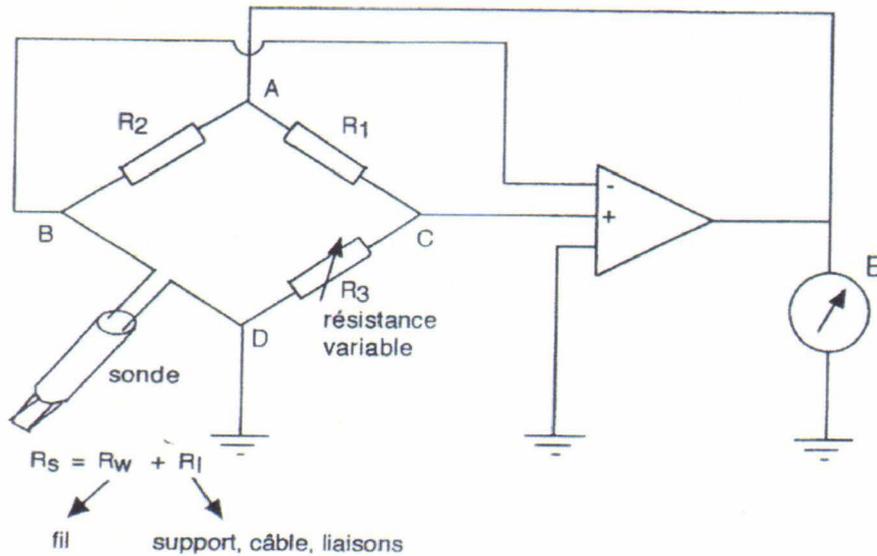


Figure IV.8 : Pont de Wheatston

Le fil chaud est chauffé grâce à la présence d'un courant de chauffage qui le parcourt. Lorsqu'il est soumis à un fluide en déplacement le fil a tendance à se refroidir (car le transfert de chaleur du fil vers le fluide s'accroît), et pour le maintenir à température constante il faut augmenter le courant de chauffage (délivré par le pont de Wheatston). La température du fil variant avec sa résistance et la tension aux bornes est déséquilibrée ; c'est ce déséquilibre qui commande un amplificateur délivrant le courant de chauffage. On relève la tension aux bornes du pont et on la relie à la vitesse par une fonction d'étalonnage.

🚩 Étalonnage

Tout d'abord on équilibre le pont en absence d'écoulement, de façon à obtenir la résistance de la sonde. Puis on déséquilibre le pont de Wheatston d'une valeur de résistance connue de manière à ce que le fil soit parcouru par le courant de surchauffe.

Pour l'étalonnage du fil chaud on utilise une buse d'air comprimé (figure IV.9). A sa sortie, on place le fil chaud à étalonner qui est indirectement relié à un voltmètre. Sur la buse est située une prise de pression statique qui, reliée à un manomètre, permet de connaître la vitesse de sortie de l'air. On relève pour différentes vitesses U , la tension E

que le fil chaud fait varier. La loi de KING nous donne la relation suivante :

$$E^2 = E_0^2 + B.U^n$$

La détermination des constantes E_0 , B et n se fait grâce aux différentes prises de mesures.

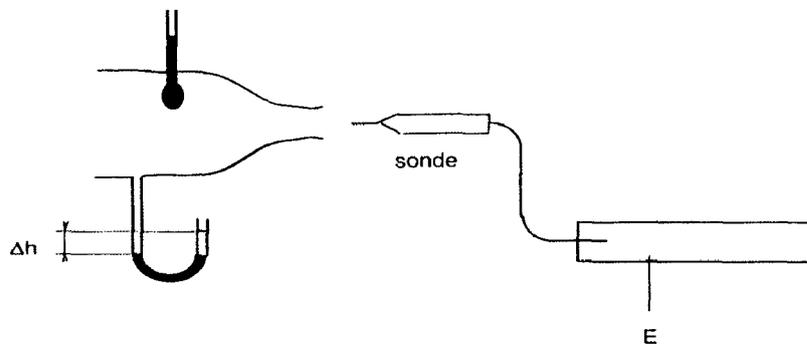


Figure IV.9 : Étalonnage de fil chaud

L'incertitude sur la vitesse est estimée à $\pm 0,2\%$

IV.2.2.3 Propriétés thermophysiques des plaques d'essais

Les essais ont été réalisés avec deux plaques de nature et d'épaisseur différentes. Le tableau suivant résume les propriétés de ces plaques, issues des données des fournisseurs :

Type de plaque	Épaisseur e , en mm	Conductivité thermique λ , en $W.m^{-1}.K^{-1}$	Diffusivité thermique a , en $m^2.s^{-1}$	Capacité thermique massique $J.Kg^{-1}.K^{-1}$	Masse volumique $Kg.m^{-3}$
Vitrocéramique	3	1,09	$5,69 \cdot 10^{-7}$	820	2230
Aluminium	1	210	$8,642 \cdot 10^{-5}$	900	2700

Tableau IV.1 : Propriétés des plaques de mesure

IV.2.3 Identification du flux de chauffage ϕ_i à l'aide d'un bilan thermique

L'identification précise du flux ϕ_i est une étape indispensable. Cette identification est menée sur le banc d'essais représenté sur la figure (IV.1).

Mesurer un flux ou une densité de flux à la surface d'une paroi nécessite généralement l'implantation de « fluxmètres ». Afin d'identifier le flux absorbé, fraction du flux lumineux total envoyé par les lampes chauffantes ϕ_i , nous proposons ici de l'identifier à l'aide d'un bilan thermique en régime permanent.

Pour chaque série d'essais sur une plaque donnée, le flux de chauffage φ_0 (et celui qui correspond à la phase de relaxation φ_1) sont maintenus constants. Pour identifier ces flux, on réalise des essais avec une vitesse d'air soufflé nulle et on se place ainsi en convection naturelle. La plaque est soumise à φ_1 jusqu'à ce que le régime thermique devienne permanent et on relève la température de la face $x = 0$, soit $T(0, t \rightarrow \infty) = f_\infty$. L'application du modèle analytique 1 présenté au chapitre (II) permet d'écrire pour la phase de chauffage (II.69).

$$T_{cf}(x, t \rightarrow \infty) = f_\infty + \left(\frac{\varphi_0}{\lambda_s (1 + H_i^0 e)} - \frac{H_i^0 f_\infty}{1 + H_i^0 e} \right) x \quad (\text{IV.1})$$

Le profil de température est donc bien une fonction linéaire de x et le flux est constant dans toute la plaque durant le régime permanent.

Le flux pariétal sur la face supérieure est donné par :

$$\lambda_s \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} (t \rightarrow \infty) = h_e^0 T(0, t \rightarrow \infty) = h_e^0 f_\infty \quad (\text{IV.2})$$

Ce flux est identique au flux $\Phi_{cf}(t \rightarrow \infty)$ obtenu à partir du profil de température théorique et donné par l'équation (II.74).

Soit :

$$h_e^0 f_\infty = \frac{\varphi_0}{H_i^0 e + 1} - \frac{h_i^0}{H_i^0 e + 1} f_\infty \quad (\text{IV.3})$$

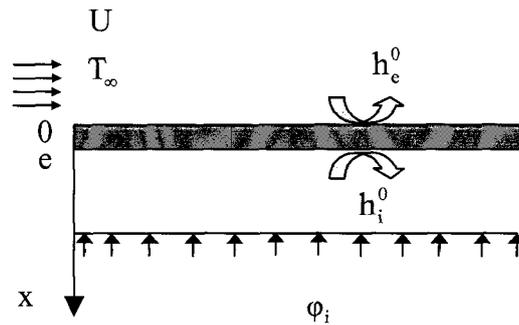


Figure IV.10 : Représentation schématique des conditions aux limites sur la plaque au régime permanent

On déduit alors la valeur de φ_0 qui dépend de la température de la plaque en régime permanent, de sa conductivité thermique, de son épaisseur et des coefficients d'échanges en convection naturelle et rayonnement.

$$\varphi_0 = f_\infty \left(h_i^0 + h_e^0 + \frac{h_e^0 h_i^0 e}{\lambda} \right) \quad (\text{IV.4})$$

On retrouve le même résultat en utilisant l'équation (II.133) du modèle 2 ou encore en utilisant l'analogie électrique en régime permanent.

On note que le flux φ_1 correspond au régime de relaxation, se déduit de la même manière que φ_0 .

Les coefficients d'échanges en convection naturelle du régime permanent, sont obtenus à partir des corrélations de la littérature.

🚩 Calcul du coefficient d'échange inférieur h_i^0

On définit h_i^0 coefficient d'échange global, combinaison des effets de la convection et du rayonnement :

$$h_i^0 = h_i^{c0} + h_i^{r0} \quad (IV.5)$$

En convection naturelle, pour calculer le coefficient d'échange convectif h_i^{c0} sur la face inférieure de la plaque plane exposée à l'air ambiant, nous utilisons les corrélations pour une plaque plane données par le nombre de Nusselt en régime permanent :

$$Nu_\ell = 0,27.Ra_L^{0,25} \quad \text{valable pour } 3.10^5 \leq Ra_L \leq 3.10^{10}$$

Avec $Ra = Gr.Pr$ où le nombre de Grashof est donné par $Gr = \frac{g\beta TL^3}{\nu^2}$

On obtient :

$$h_i^{c0} = \underbrace{0,27 \frac{\lambda_f}{L} \left(\frac{g\beta L^3}{\nu^2} Pr \right)^{0,25}}_{A_0} T_i^{0,25} \quad (IV.6)$$

Le coefficient d'échange par rayonnement est défini à partir du flux radiatif perdu par la plaque :

$$\Phi_i^r(t) = \varepsilon\sigma(\theta_i^4 - \theta_\infty^4) = \varepsilon\sigma(\theta_i^2 + \theta_\infty^2)(\theta_i + \theta_\infty)T_p(t) = h_i^r T_p(t) \quad (IV.7)$$

$$\text{Avec :} \quad h_i^r = \varepsilon\sigma(\theta_i^2 + \theta_\infty^2)(\theta_i + \theta_\infty) \quad (IV.8)$$

Connaissant l'émissivité et la température de surface de la plaque, on peut calculer h_i^r à chaque instant.

D'où :

$$\begin{cases} h_i^0 = A_0 T_i^{0,25} + \varepsilon\sigma(A_1 + A_2 T_i + A_3 T_i^2 + T_i^3) \\ T_i = (1+h_e e) T_e \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} A_0 = 0,27 \frac{\lambda_f}{L} \left(\frac{g\beta L^3}{\nu^2} Pr \right)^{0,25} \\ A_1 = 4 \theta_\infty^3 \\ A_2 = 6 \theta_\infty^2 \\ A_3 = 4 \theta_\infty \end{cases} \quad (IV.9)$$

θ : Température en K.



⬇ Calcul du coefficient d'échange extérieur h_e

Le coefficient h_e^0 a la même forme que h_i^0 :

$$h_e^0 = A_0 T_e^{0.25} + \varepsilon \sigma (A_1 + A_2 T_e + A_3 T_e^2 + T_e^3)$$

Les corrélations utilisées en convection naturelle pour le calcul du coefficient d'échange convectif h_e^{co} dans le cas d'une plaque plane (face supérieure) sont données ci-dessous :

$$Nu_L = 0,54.Ra_L^{0.25} \quad \text{valable pour } 10^5 \leq Ra_L \leq 2,10^7$$

$$Nu_L = 0,14.Ra_L^{1/3} \quad \text{valable pour } 2.10^5 \leq Ra_L \leq 3.10^{10}$$

Dans notre cas, la plaque de mesure constitue la paroi horizontale d'un canal rectangulaire mais nous n'avons pas trouvé de corrélations spécifiques à ce cas. L'importance de la dimension de la veine nous a permis de prendre les corrélations citées précédemment.

La mesure de la température de surface f_∞ par thermographie Infrarouge associée au calcul des coefficients d'échanges globaux en convection naturelle h_e^0 et h_i^0 , nous permet alors de calculer la densité de flux de chaleur φ_i absorbée par la plaque.

IV.3 Incertitude sur h_e^0 , h_i^0 et φ_i

L'incertitude sur le flux est obtenue en dérivant l'équation (IV.4) :

$$d\varphi_0 = \left(h_i^0 + h_e^0 + \frac{h_e^0 h_i^0 e}{\lambda} \right) df_\infty + f_\infty \left(1 + \frac{h_e^0 e}{\lambda} \right) dh_i^0 + f_\infty \left(1 + \frac{h_i^0 e}{\lambda} \right) dh_e^0 \quad (IV.10)$$

En remplaçant par des accroissements finis, on a :

$$\Delta\varphi_0 = \left(h_i^0 + h_e^0 + \frac{h_e^0 h_i^0 e}{\lambda} \right) \Delta f_\infty + f_\infty \left(1 + \frac{h_e^0 e}{\lambda} \right) \Delta h_i^0 + f_\infty \left(1 + \frac{h_i^0 e}{\lambda} \right) \Delta h_e^0 \quad (IV.11)$$

Ou encore :

$$\frac{\Delta\varphi_0}{\varphi_0} = \frac{\Delta f_\infty}{f_\infty} + f_\infty \left(1 + \frac{h_e^0 e}{\lambda} \right) \frac{\Delta h_i^0}{\varphi_0} + f_\infty \left(1 + \frac{h_i^0 e}{\lambda} \right) \frac{\Delta h_e^0}{\varphi_0} \quad (IV.12)$$

Avec :

$$\begin{cases} \frac{\Delta h_e}{h_e} = \left\{ 0,25A_0 f_\infty^{0,25-1} + \varepsilon \sigma (A_2 + 2A_3 f_\infty + 3f_\infty^2) \right\} \frac{\Delta f_\infty}{h_e} \\ \frac{\Delta h_i}{h_i} = \left\{ 0,25A_0 T_i^{0,25-1} + \varepsilon \sigma (A_2 + 2A_3 T_i + 3T_i^2) \right\} \frac{\Delta T_i}{h_i} \\ \frac{\Delta T_i}{T_i} = \frac{\Delta T_e}{T_e} + e \frac{\Delta h_e}{(1+h_e e)} \end{cases} \quad (IV.13)$$

Les incertitudes relatives sur les différents paramètres sont illustrées dans les tableaux (IV.2). La valeur de f_∞ est une valeur expérimentale, mesurée par la caméra infrarouge dont l'incertitude est de 0,3 %.

IV.4 Résultat expérimentaux

IV.4.1 Choix du matériau constituant la plaque

Les matériaux utilisés dans notre expérience sont des plaques de vitrocéramique et d'Aluminium qui ont les caractéristiques données dans le tableau IV.1.

IV.4.2 Détermination du flux incident φ_i et du coefficient d'échange h_i^0 en régime permanent et incertitudes de mesure

Nous allons évaluer le coefficient d'échange sur la face inférieure, et le flux incident en utilisant les corrélations pour une plaque plane.

On a effectué des essais de chauffage et de relaxation en convection naturelle (la plaque était simplement déposée au dessus des lampes infrarouges).

Les figures IV.11 et IV.12 présentent l'évolution de la température en $x = 0$ dans le cas de la plaque de vitrocéramique, ainsi que celle en Aluminium.

Ces évolutions, obtenues à partir des mesures par la Caméra Infrarouge correspondant aux essais en convection naturelle visant à identifier les flux φ_0 et φ_1 .

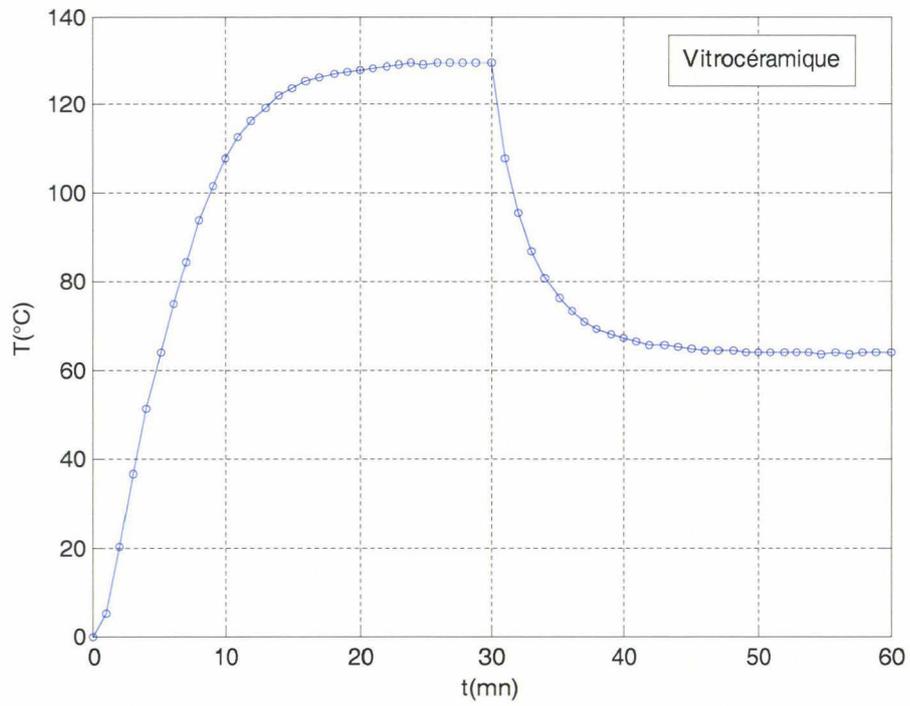


Figure IV.11 : Profil de température en $x = 0$ en convection naturelle

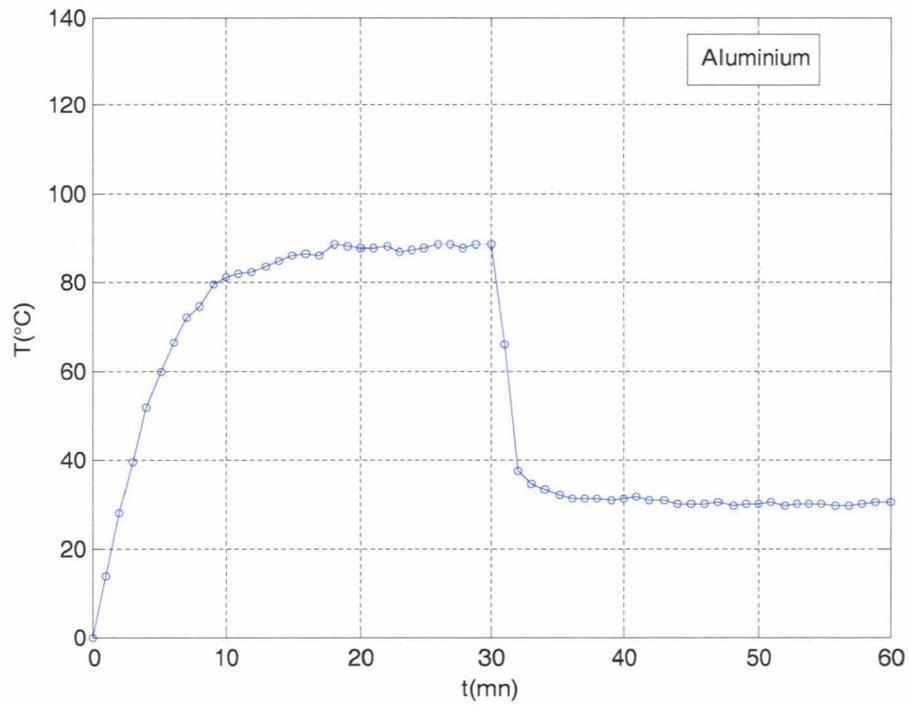


Figure IV.12 : Profil de température en $x = 0$ en convection naturelle

En utilisant l'équation (IV.4), on obtient le flux de chaleur φ_i :

Chauffage	Flux absorbé	Incertitude		
Plaque	φ_0 (W/m ²)	$\Delta h_e^0 / h_e^0$	$\Delta h_i^0 / h_i^0$	$\Delta \varphi_0 / \varphi_0$
Vitrocéramique	4187	0,16 %	0,16 %	0,39 %
Aluminium	2394	0,2 %	0,18 %	0,53 %

Tableau IV.2.a : Flux de chaleur absorbé et incertitudes – phase de chauffage

Relaxation	flux absorbé	Incertitude		
Plaque	φ_1 (W/m ²)	$\Delta h_e^0 / h_e^0$	$\Delta h_i^0 / h_i^0$	$\Delta \varphi_1 / \varphi_1$
Vitrocéramique	1562	0,25 %	0,25 %	0,25 %
Aluminium	616	0,42 %	0,42 %	0,42 %

Tableau IV.2.b : Flux de chaleur absorbé et incertitudes – phase de relaxation

IV.4.3 Analyse des résultats de modélisation mathématique (modèle 1)

Nous allons présenter les différents résultats obtenus par des expérimentations pour les plaques de vitrocéramique et d'aluminium.

IV.4.3.1 Profils de température

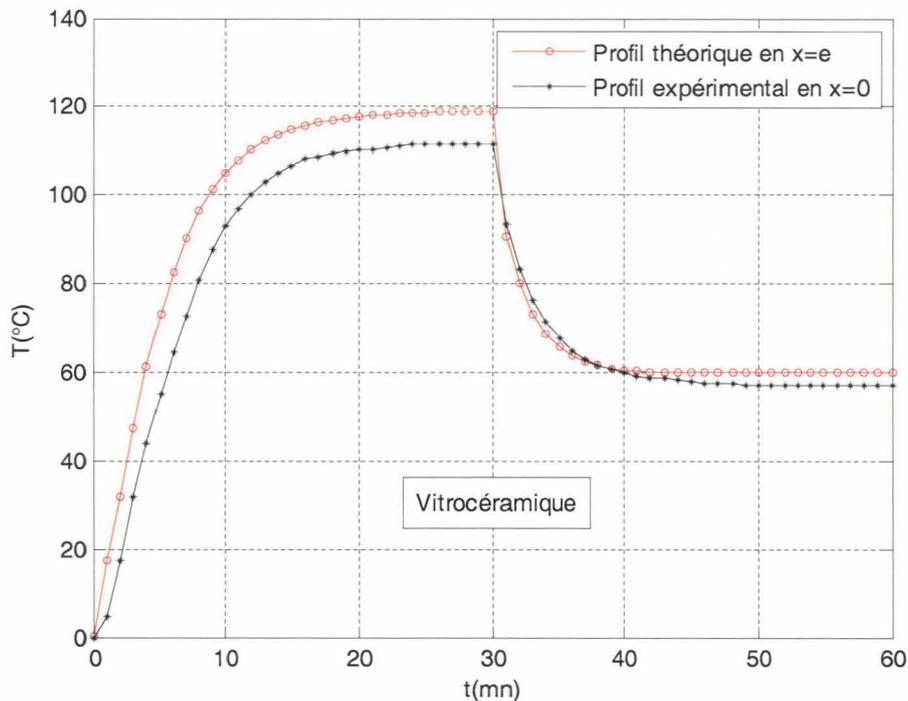


Figure IV.13 : Profil de température pour $U_\infty = 5$ m/s (modèle 1)

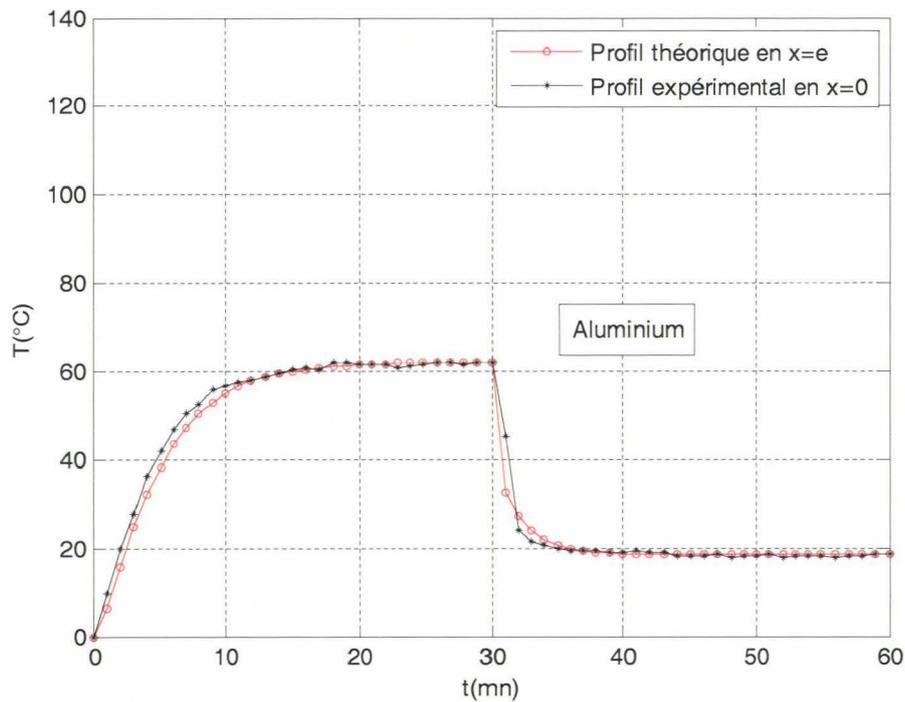


Figure IV.14 : Profil de température pour $U_{\infty} = 5$ m/s (modèle 1)

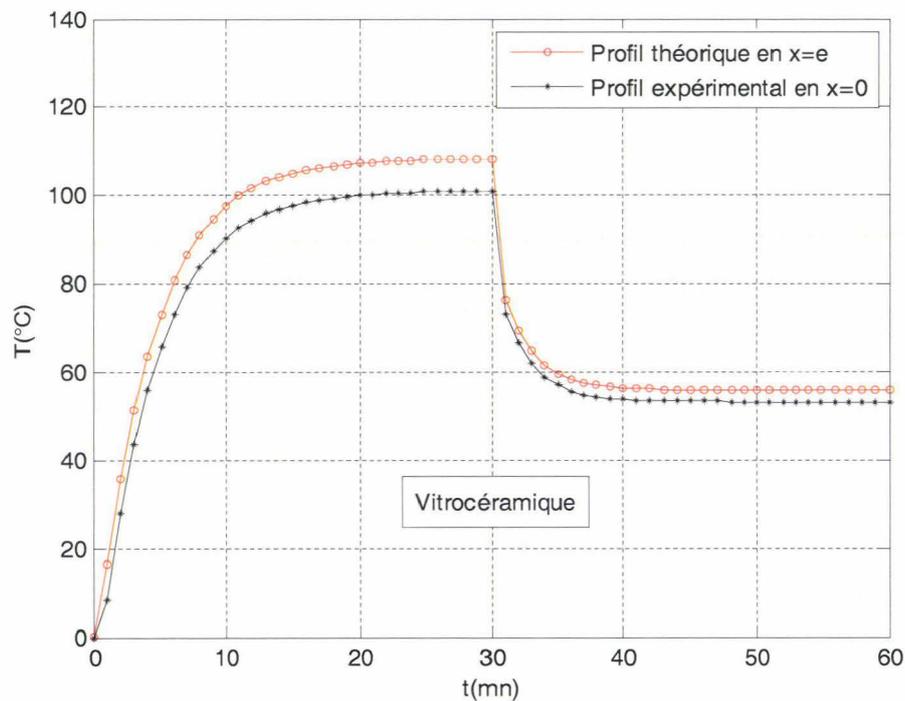


Figure IV.15 : Profil de température pour $U_{\infty} = 7$ m/s (modèle 1)

On présente sur les figures IV.13, 14, 15 et 16 l'évolution de la température expérimentale mesurée en $x = 0$, ainsi que le profil de température sur la face $x = e$ pour des plaques planes de vitrocéramique et d'Aluminium, en convection forcée pour des

vitesse de 5 et 7 m/s. Les profils en $x = e$ ont été déterminés en utilisant les équations (II.65 et II.88) du modèle 1.

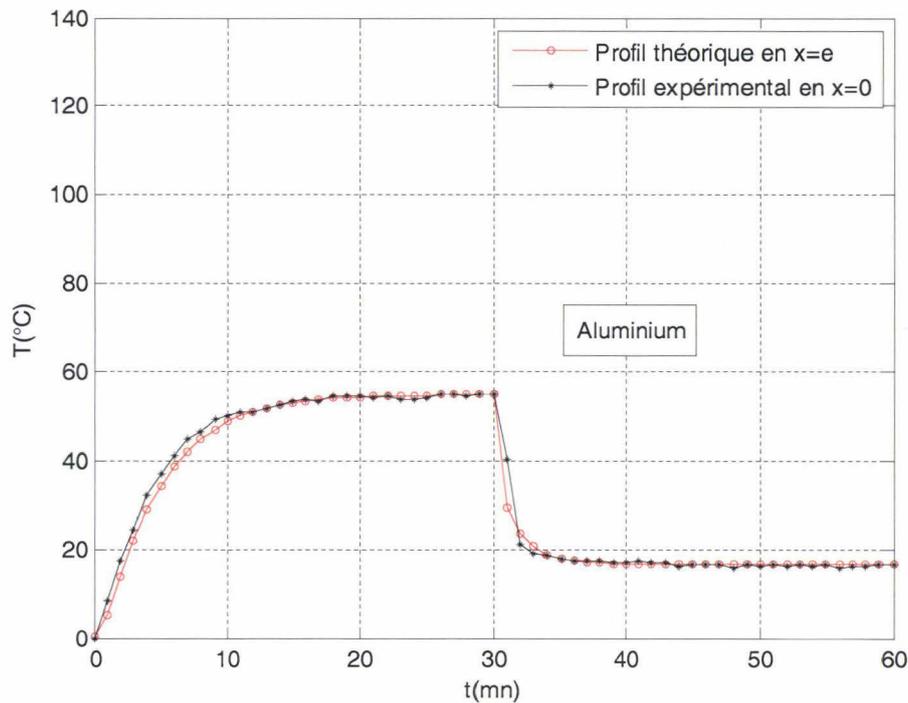


Figure IV.16 : Profil de température pour $U_{\infty} = 7$ m/s (modèle 1)

Les courbes de température présentées ci-dessus nous montrent que le temps pour lequel on atteint le régime permanent est de l'ordre de 20 mn en convection naturelle. S'en suit la phase de relaxation où l'on coupe le chauffage et la température baisse considérablement et se stabilise au bout de 15 mn. Ce temps diminue avec l'augmentation de la vitesse et cela quelque soit le type de matériau.

Pour la plaque de Vitrocéramique, on observe qu'en phase de montée en température, l'écart de température entre les faces inférieure et supérieure est de l'ordre de 4°C environ et en phase de relaxation cet écart reste de l'ordre de 2°C.

L'allure des courbes pour l'Aluminium reste sensiblement identique à celle de la plaque en vitrocéramique avec des valeurs différentes, du fait des propriétés thermiques et des épaisseurs différentes.

IV.4.3.2 Flux de chaleur

Sur les figures suivantes, on montre l'évolution des flux pariétaux (équations II.71 et II.93) sur les deux faces en convection naturelle ainsi qu'en convection forcée, pour deux vitesses différentes, pour des plaques de Vitrocéramique et d'Aluminium d'épaisseur finie.

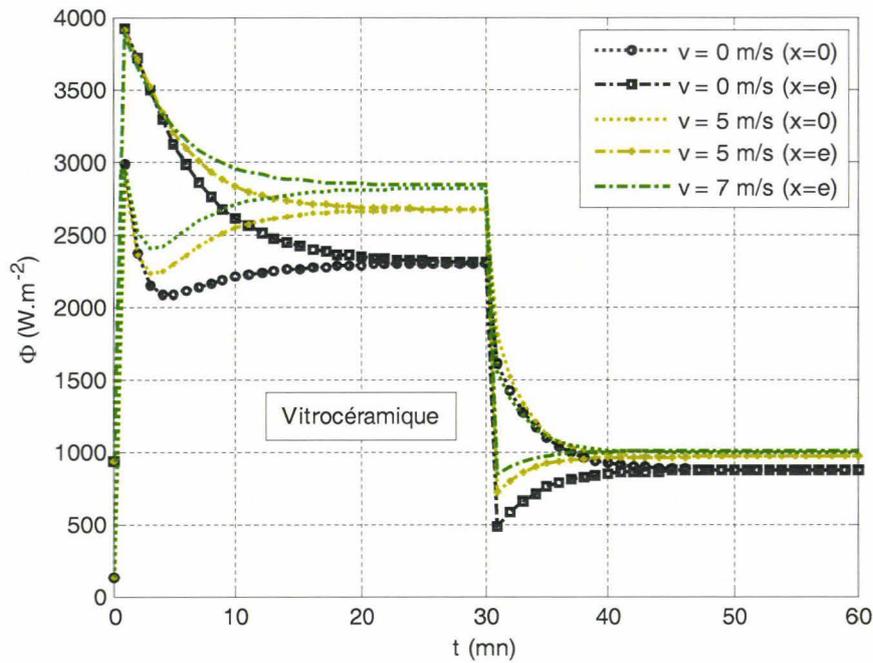


Figure IV.17 : Flux de chaleur pariétaux pour différentes vitesses d'écoulement

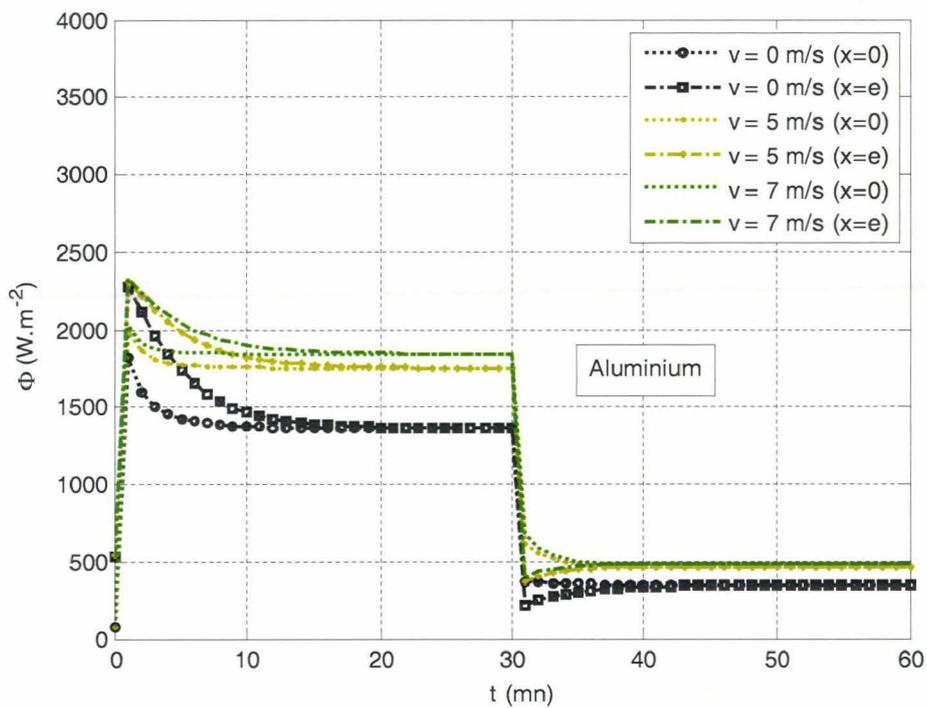


Figure IV.18 : Flux de chaleur pariétaux pour différentes vitesses d'écoulement

Nous observons sur les figures IV.17, IV.18, un saut du flux pariétal inférieur égal à φ_0 à l'instant $t=0$, dû évidemment au fait qu'à l'instant initial la température de la face inférieure est nulle. Ce flux diminue ensuite jusqu'à atteindre sa valeur en régime permanent, inférieure à φ_0 .

Le même phénomène se reproduit dans la phase de relaxation, le saut de flux étant égal à $\varphi_0 - \varphi_1$.

Sur la face supérieure, dans la phase de montée en température, on remarque que le flux atteint une valeur supérieure à celle du régime permanent, décroît ensuite pendant une durée de l'ordre de la minute, passe par un minimum inférieur au régime permanent, puis croît d'une façon monotone vers cette valeur en régime permanent.

Les courbes suivantes montrent l'évolution de ce flux $\Phi(t)$ pour les temps très faibles (vitrocéramique $U_\infty = 5\text{m/s}$). Ce flux, d'après l'équation (II.71), se décompose en deux parties : $\Phi(t) = \Phi_{\varphi_0}(t) + \Phi_f(t)$, où :

- $\Phi_{\varphi_0}(t)$ est le flux dû uniquement au flux absorbé φ_0 par la face inférieure ($f_1(t) = 0$).

Ce flux, positif, croît d'une manière monotone jusqu'à la valeur constante $\frac{\varphi_0}{1 + H_i^0 e}$

pratiquement atteinte au bout de 25 seconde.

- $\Phi_f(t)$ est le flux dû uniquement à $f_1(t)$ ($\varphi_0 = 0$).

Ce flux, toujours négatif, croît (en valeur absolue) jusqu'à un maximum atteint au bout d'un temps de l'ordre de 3 minutes, puis décroît jusqu'à sa valeur en régime permanent

$$\frac{h_i^0 f_\infty}{H_i^0 e + 1}$$

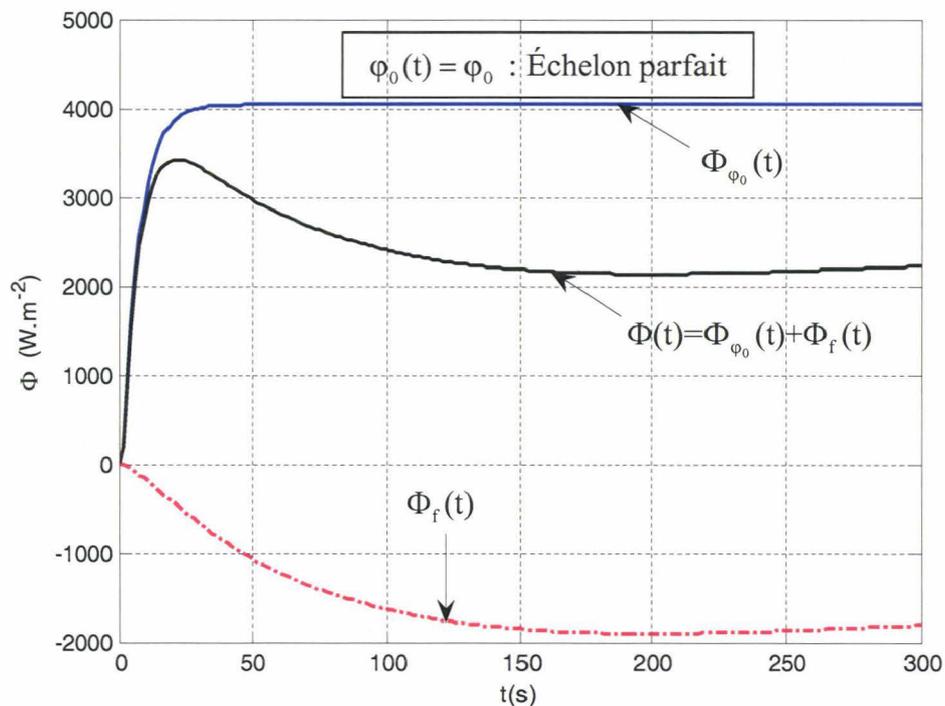


Figure IV.19 : Evolution temporelle du flux de chaleur pariétal pour les temps faibles, (φ_0 : échelon parfait) $U_\infty = 5\text{m/s}$ vitrocéramique

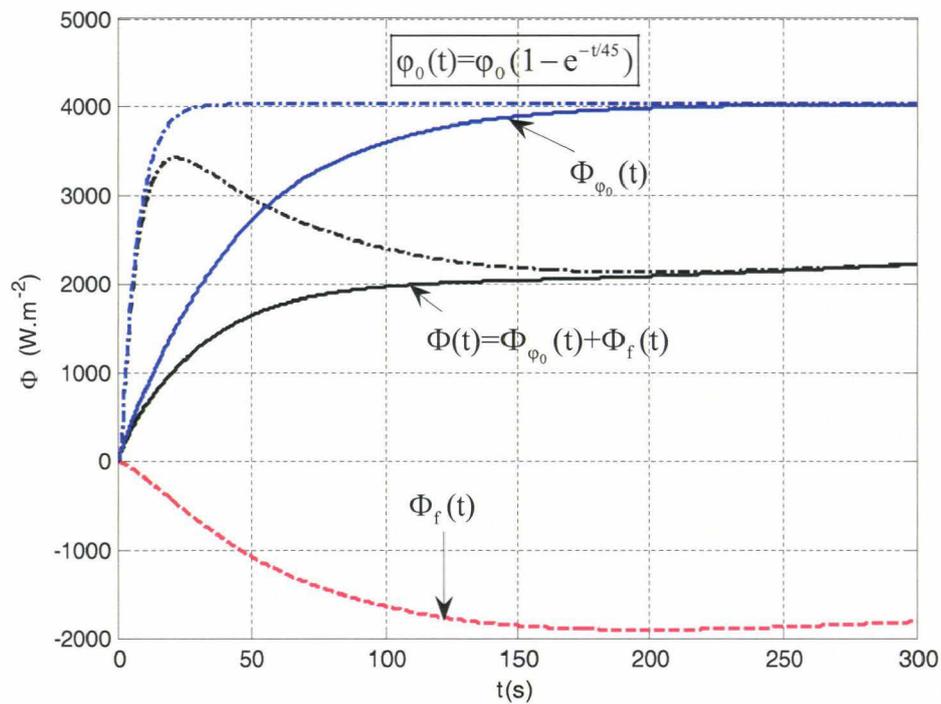


Figure IV.19_bis : Evolution temporelle du flux de chaleur pariétal pour les temps faibles, $U_\infty = 5\text{m/s}$ (vitrocéramique)

Intuitivement, on s'attendrait à ce que le flux $\Phi(t)$ croisse, dans cette phase, de façon monotone jusqu'à sa valeur en régime permanent. Ce comportement est confirmé dans le paragraphe IV.4.6. L'évolution anormale du flux $\Phi(t)$ pour les temps faibles, évoquée dans ce qui précède, provient très probablement des imperfections expérimentales : on remarque que le flux $\Phi_{\varphi_0}(t)$ a un retard de 25 secondes lorsqu'on suppose que φ_0 est un échelon parfait. Le système de chauffage présente une inertie qui entraîne un retard que nous estimons à environ une minute dans l'établissement du flux constant φ_0 . Ce retard entraîne très probablement un retard plus élevé $\Phi_{\varphi_0}(t)$ (courbe bleue continue) ce qui modifie considérablement le graphe du flux $\Phi(t)$.

IV.4.3.3 Coefficients d'échanges radiatif et convectif

Les figures (IV.20, IV.21) et (IV.22, IV.23) représentent respectivement les coefficients d'échange radiatif et convectif au cours du temps suivant le modèle mathématique adopté. On remarque que le coefficient d'échange radiatif augmente progressivement pour se stabiliser à une valeur constante et puis diminue brusquement pour atteindre une autre valeur constante supérieure à sa valeur à $t=0$ tandis que le coefficient de convection diminue très rapidement pour tendre vers une valeur constante correspondante au régime permanent. Ce coefficient n'est pas défini en $t=0$: son

inverse, la résistance thermique convective croît rapidement de 0 à sa valeur en régime permanent.

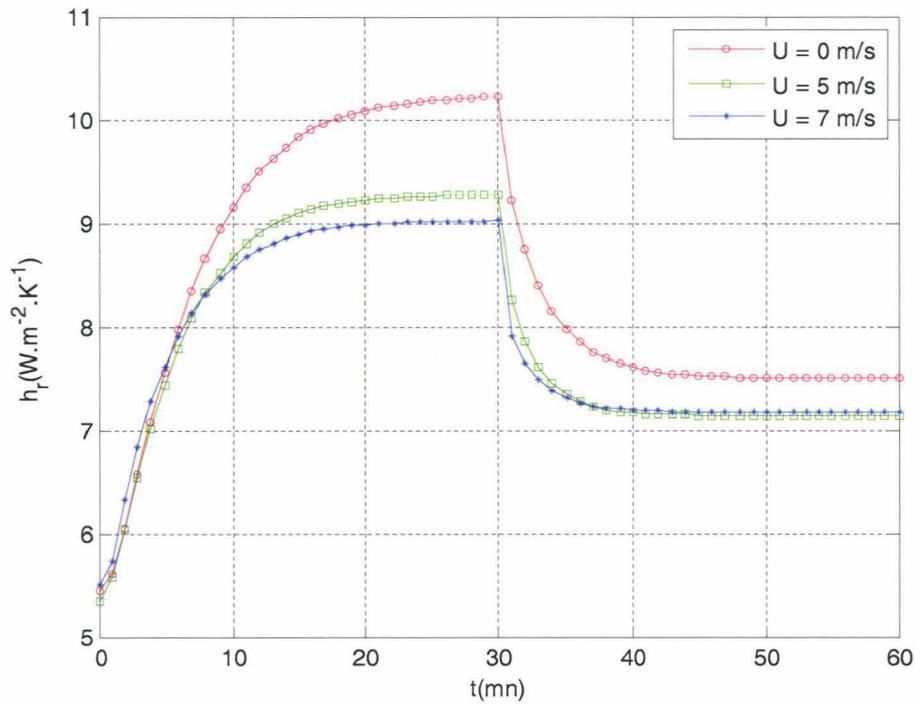


Figure IV.20 : Coefficients d'échanges radiatifs pour différentes vitesses d'écoulement (vitrocéramique)

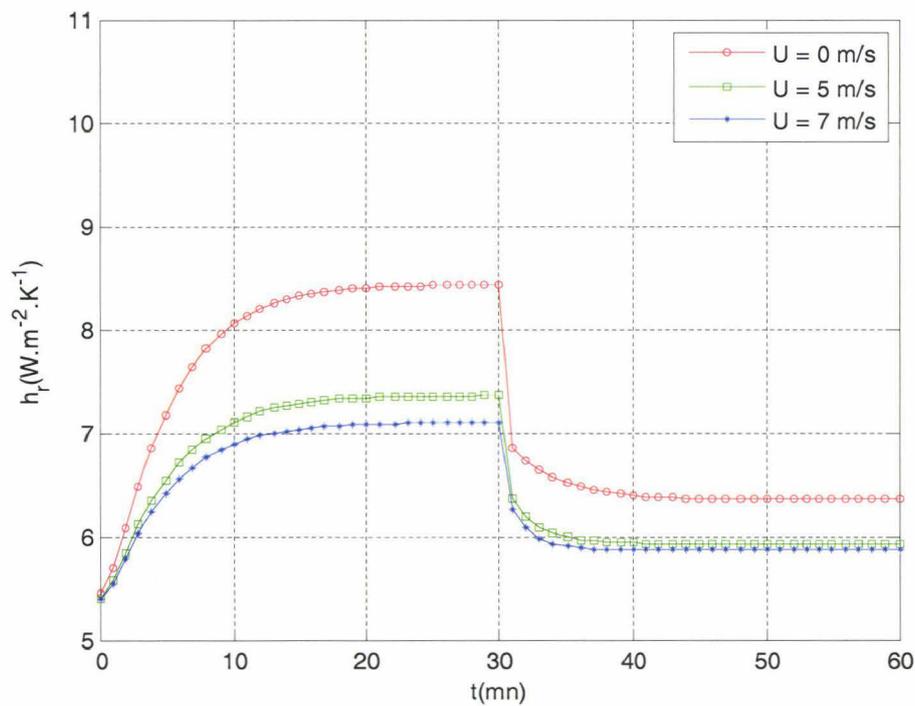


Figure IV.21 : Coefficients d'échanges radiatifs pour différentes vitesses d'écoulement (Aluminium)

La valeur de h_c^0 du régime permanent est assez proche de celle donnée par les corrélations [39] (tableau IV.3).

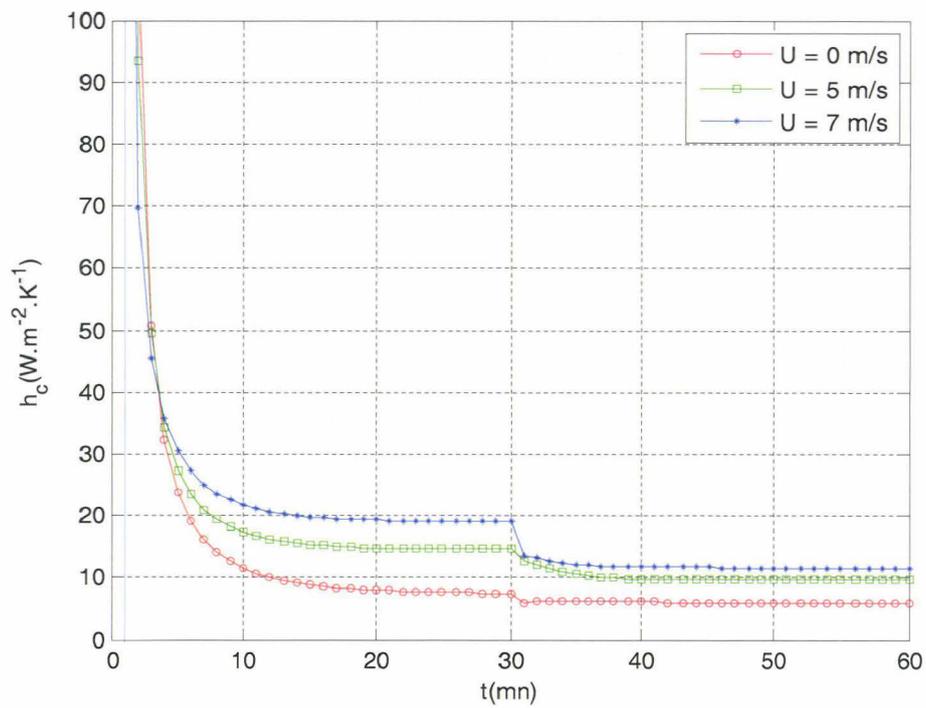


Figure IV.22 : Coefficients d'échanges convectifs pour différentes vitesses d'écoulement (Vitrocéramique)

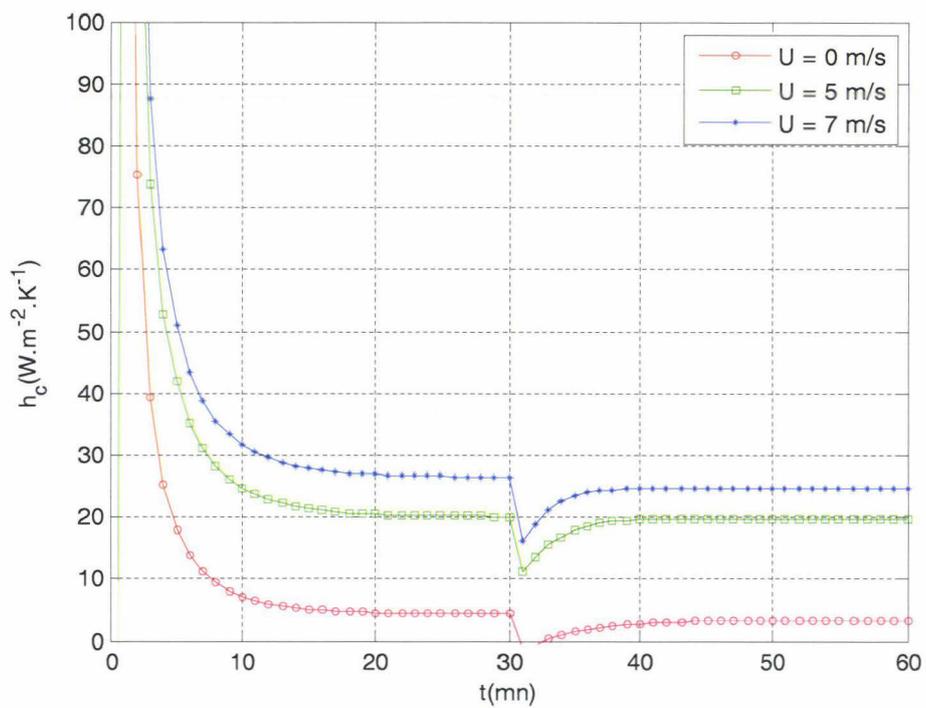


Figure IV.23 : Coefficients d'échanges convectifs pour différentes vitesses d'écoulement (Aluminium)

Quels que soient la vitesse d'écoulement et le type de matériau, le coefficient d'échange varie en fonction du temps de la même façon : il présente une singularité à l'instant $t = 0$ correspondant au moment où la phase de chauffage commence.

Plaque plane	U_{∞} (m/s)	T_0 (°C)	T_p (°C)	ΔT (°C)	h_i^0 (W/m ² K) [39]	h_e^{e0} (W/m ² K) modèle 1	h_e^{e0} (W/m ² K) [39]	h_e^{r0} (W/m ² K)	Ecart Relatif Δ' (%)
Vitrocéramique 3 mm $\lambda=1.09 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	Phase de chauffage								
	0	20,5	150,2	129,7	13,88	7,48	7,48	10,23	-
	5	18,7	130,4	111,7	12,93	14,64	19,31	9,27	24,18
	7	21,3	122,3	101	12,59	19,09	22,85	9,02	16,45
	Phase de relaxation								
	0	20,5	84,4	63,9	10,45	6,10	6,10	7,49	-
	5	18,7	75,9	57,2	10,10	9,74	19,31	7,13	49,55
Aluminium 1 mm $\lambda=210 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	Phase de chauffage								
	0	22,6	111,4	88,8	11,67	6,71	6,71	8,61	-
	5	21,6	83,8	62,2	10,34	20,20	19,31	7,51	4,40
	7	21,6	76,6	55	10,02	26,58	22,85	7,26	14,03
	Phase de relaxation								
	0	22,6	53,1	30,5	8,88	4,84	4,84	6,48	-
	5	21,6	40,2	18,6	8,18	19,85	19,31	6,05	2,72
7	21,6	38,2	16,6	8,06	24,70	22,85	5,99	7,48	

Tableau IV.3 : Valeurs des coefficients d'échange en régime permanent

L'écart relatif (Δ') entre les coefficients d'échange convectifs obtenus par le modèle théorique dans le solide et ceux de la littérature est assez élevé pour la plaque de vitrocéramique. Cela est dû à l'hypothèse adoptée, où on a considéré que le phénomène se développe en une seule dimension.

Dans l'expérience les quatre extrémités ne sont pas isolées ce qui induit une fuite de chaleur par les cotés.

Une manipulation réalisant les conditions théoriques simplifiées, utilisées dans ce travail n'est pas possible, nous envisageons d'adapter le modèle mathématique à cette manipulation, en étendant à 2 ou 3 dimensions.

IV.4.4 Comparaisons du modèle mathématique avec la simulation numérique

Dans ce paragraphe nous présentons une étude comparative entre la modélisation mathématique et la simulation numérique en utilisant la méthode des différences finies développée dans l'annexe 11.

IV.4.4.1 Plaque de vitrocéramique

La modélisation mathématique et la simulation numérique de ces essais permettent d'obtenir la température de la face inférieure de la plaque, ainsi que la température aux différents points internes de la plaque plane.

Les figures ci-dessous représentent les profils de température sur la face inférieure, les flux de chaleur sur la face supérieure, ainsi que le coefficient d'échange, par la modélisation mathématique et la simulation numérique, pour des essais en convection naturelle et forcée.

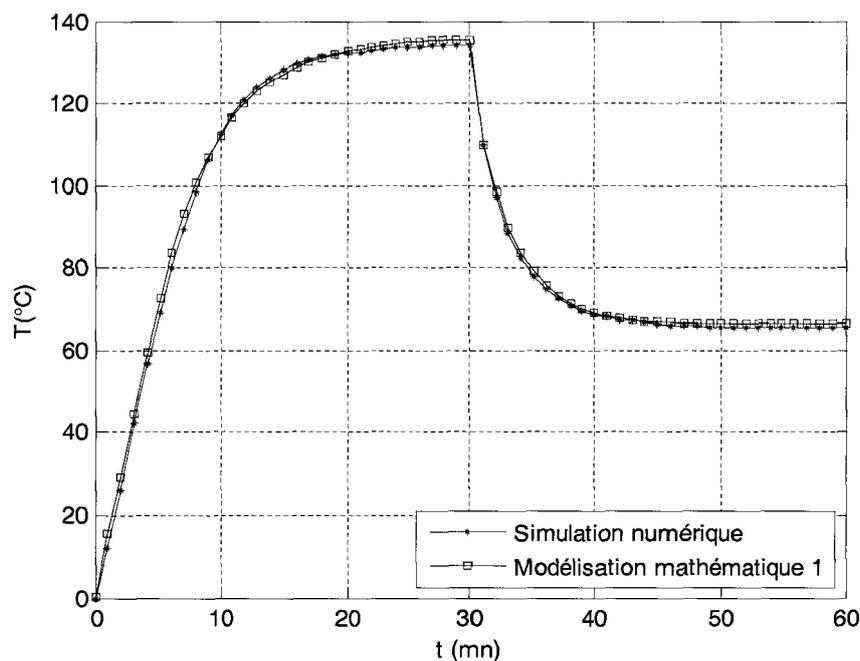


Figure IV.24 : Comparaison des températures en convection naturelle (vitrocéramique)

Les modèles mathématiques et numériques donnent des résultats quasi-identiques dans les deux phases de chauffage et de relaxation confirmant ainsi les résultats obtenus par la modélisation mathématique. Ce qui est également constaté pour des expérimentations en convection forcée ($U_{\infty} = 5$ et 7 m/s).

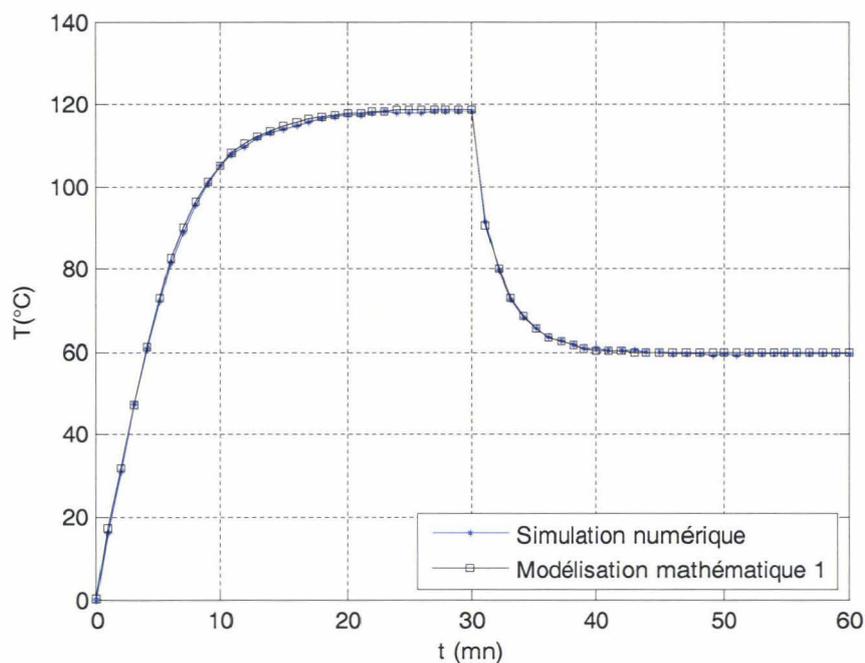


Figure IV.25 : Comparaison des températures pour une vitesse 5 m/s (vitrocéramique)

Les figures ci-dessous représentent l'évolution du flux pariétal et du coefficient d'échange convectif obtenus par modélisation théorique et simulation numérique.

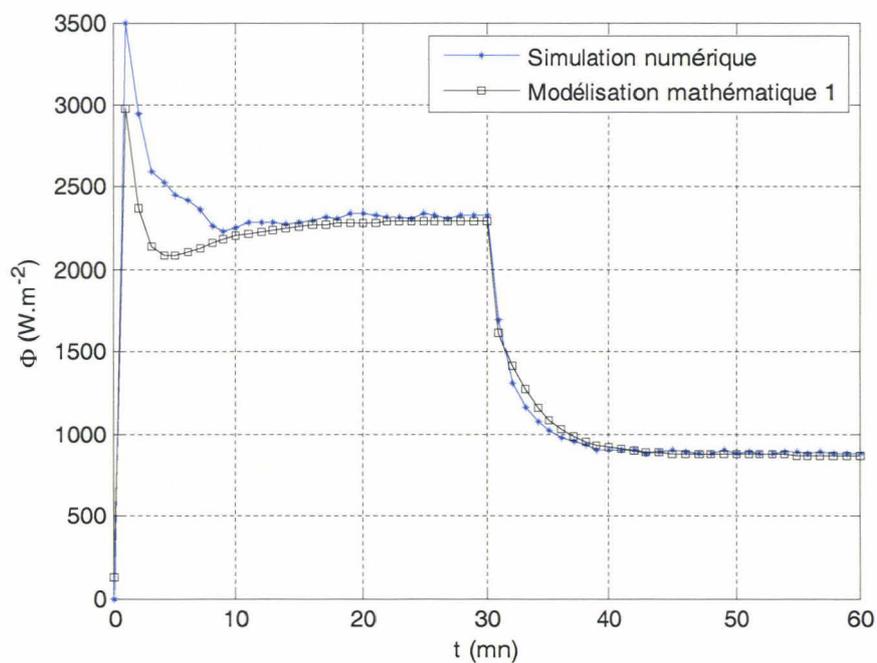


Figure IV.26 : Comparaison des flux de chaleur pariétaux en convection naturelle (vitrocéramique)

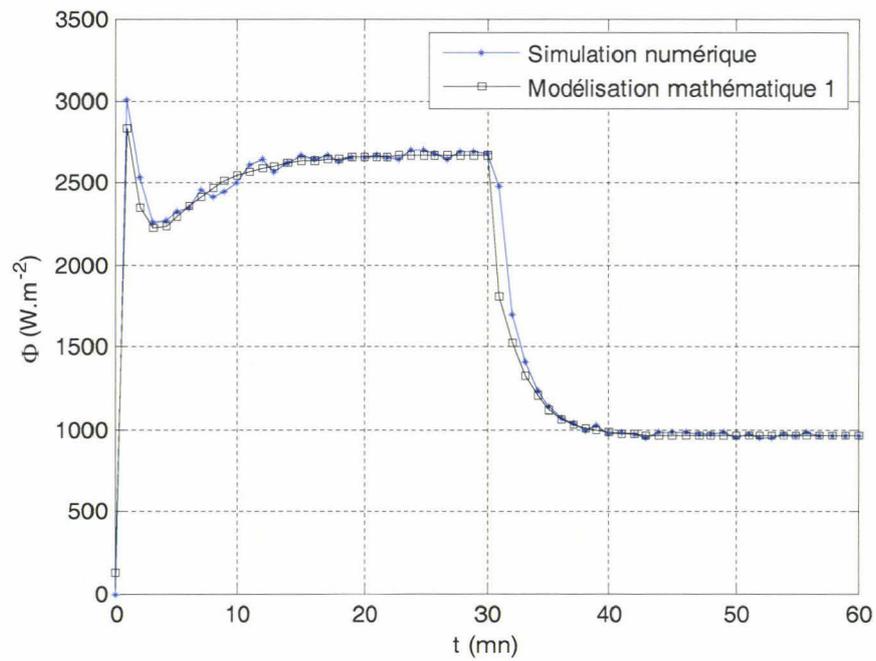


Figure IV.27 : Comparaison des flux de chaleur pariétaux pour $U_{\infty}=5$ m/s (vitrocéramique)

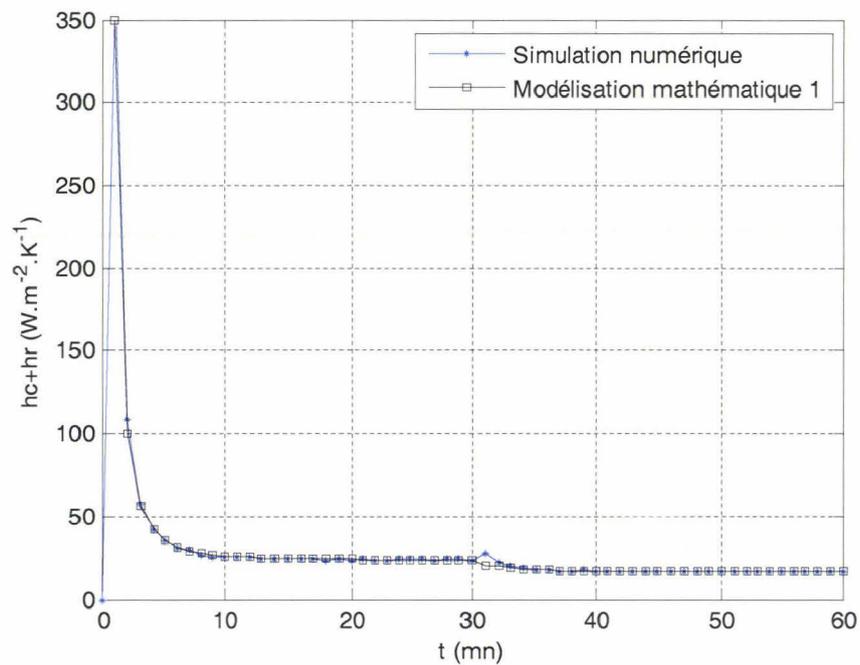


Figure IV.28 : Comparaison des coefficients d'échanges globaux $U_{\infty}=5$ m/s (vitrocéramique)

IV.4.4.2 Plaque d'Aluminium

Pour la plaque d'aluminium les résultats obtenus par simulation et par modélisation restent sensiblement identiques.

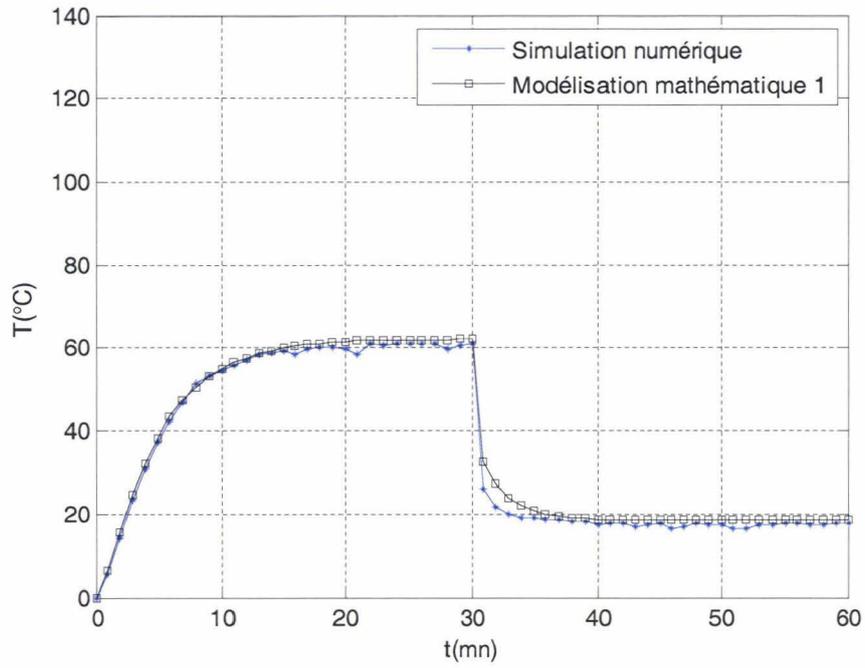


Figure IV.29 : Comparaison des températures pour une vitesse 5 m/s (Aluminium)

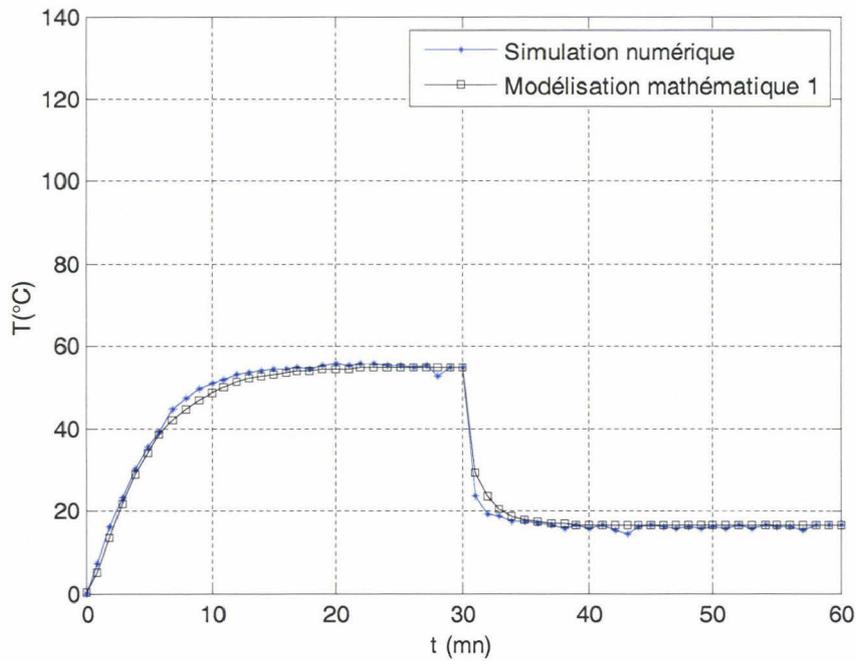


Figure IV.30 : Comparaison des températures pour une vitesse 7 m/s (Aluminium)

Les différentes courbes qui montrent la comparaison de la température pariétal de la modélisation mathématique et la simulation numérique sont données ci-dessus (figures IV.29 et IV.30).

Les figures IV.31 et IV.32 représentent respectivement l'évolution du flux pariétal et le coefficient d'échange global obtenu par modélisation mathématique et numérique.

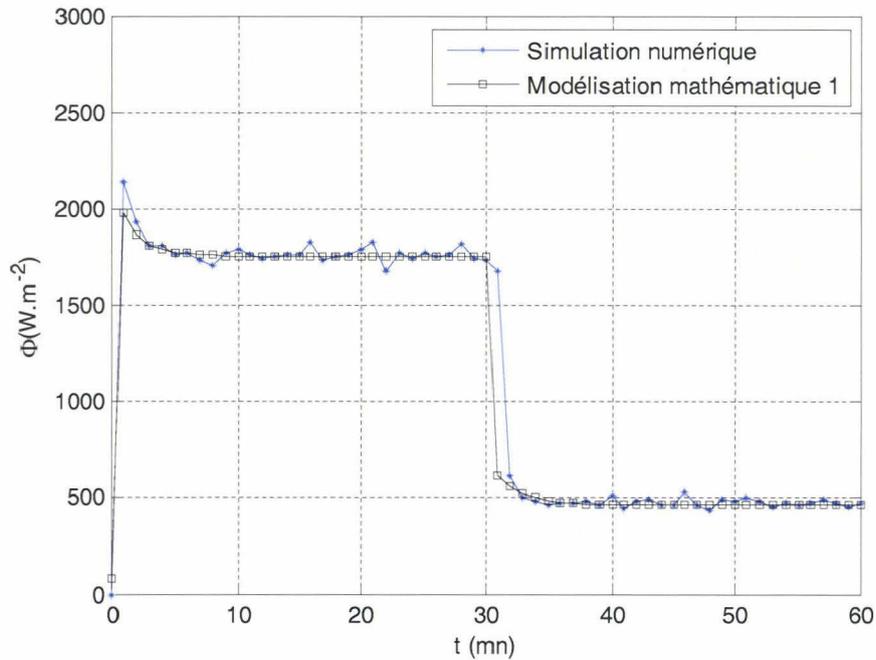


Figure IV.31 : Comparaison des flux de chaleur pariétaux pour $U_{\infty}=5$ m/s (Aluminium)

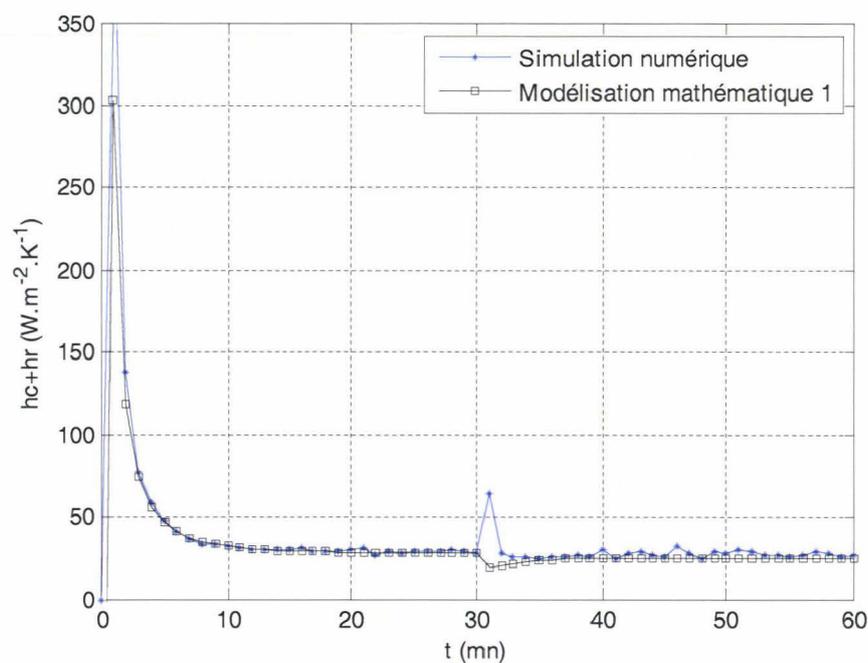


Figure IV.32 : Comparaison des coefficients d'échanges globaux pour $U_{\infty} =5$ m/s (Aluminium)

Pour la plaque d'aluminium les ordres de grandeur pour la modélisation théorique et la simulation numérique restent sensiblement identiques, confirmant que la modélisation mathématique donne des résultats corrects.

En phase de montée en température et de relaxation le comportement du flux pariétal reste analogue à celui de la plaque en vitrocéramique avec des ordres de grandeur différents. Ceci est dû au fait que ces plaques ont des propriétés thermiques et une épaisseur différentes.

IV.4.5 Comparaisons des profils de température du modèle fluide et modèle solide à h constant à la température expérimentale

Le but de ce paragraphe est de comparer les résultats des modèles développés précédemment avec ceux issus de l'expérimentation. Cette comparaison concerne l'évolution temporelle de la température pariétale.

Pour le modèle fluide, nous injectons le flux de chaleur $\Phi(t)$ donné par le modèle solide à h constant (II.132), dans l'expression du produit de convolution du modèle fluide (III.38).

Ce flux a été approché par une série d'exponentielle. Ensuite, on remonte à la température pariétale $T(\vec{r},t)$ en effectuant le produit de convolution :

$$T(\vec{r},t) = \int_0^t \Phi(\tau) d\tau \iint_{S_0} dS_{\vec{r}} T_{\delta\vec{r}}^0(\vec{r},t-\tau)$$
 (détaillé dans le paragraphe (III.8)), où $T_{\delta\vec{r}}^0$ définit par l'équation (III.40), est multiplié par l'erreur $(1-\Delta)$ commise en régime permanent, par rapport aux corrélations de la littérature et divisé par $(1-\Delta')$ pour tenir compte des écarts évoqués dans le tableau IV.3.

On rappelle ici que nous utilisons, dans le modèle solide à h constant, les valeurs stabilisées des coefficients d'échanges obtenus à partir du modèle solide 1 et données dans le tableau IV.3.

Nous présentons les mêmes courbes pour différents matériaux (Vitrocéramique et Aluminium) et vitesses 5 et 7 m/s.

Nous constatons sur les figures suivantes que les courbes du modèle solide (h constant) et du modèle fluide, sont confondues.

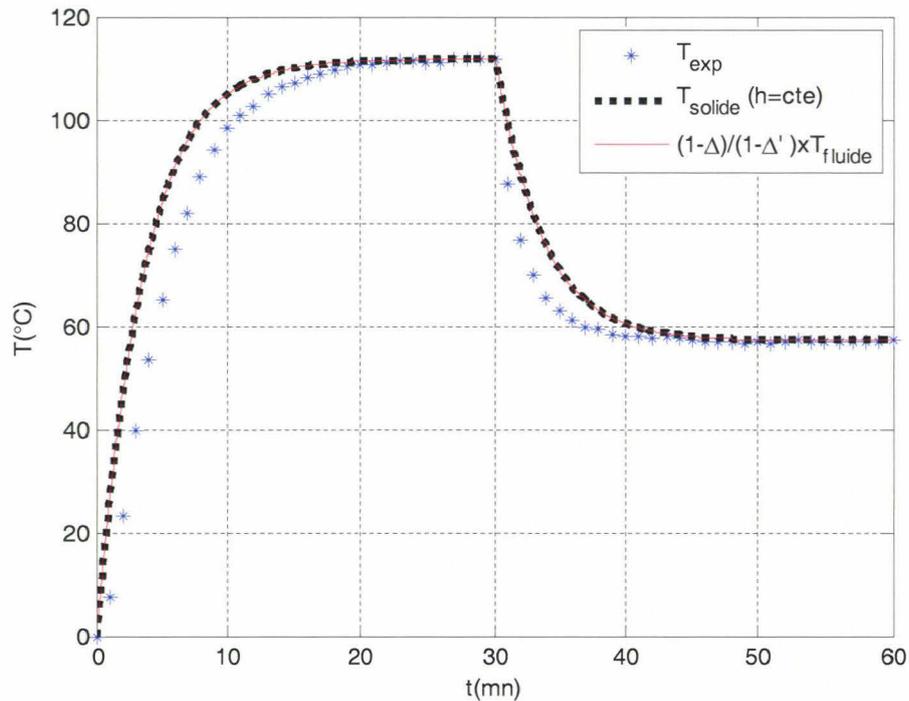


Figure IV.33 : Comparaison des profils de température pour une vitesse d'écoulement 5 m/s (vitrocéramique)

Cependant l'écart enregistré entre différents modèles et la température expérimentale est relativement important. Aussi que nous l'évoquions dans le paragraphe (IV.4.3.2), nous pensons que ceci provient du fait qu'on a supposé un flux absorbé ayant rigoureusement la forme d'un créneau, alors qu'il présente un retard que nous estimons de l'ordre de la minute à la montée et la descente en température. On retrouve ce retard amplifié sur la forme des courbes.

Cet écart est paradoxalement plus important à la montée en température dans les matériaux ayant une grande conductivité thermique (aluminium).

On constate également que l'écart entre les courbes est sensiblement constant si on varie la vitesse. Par contre, il augmente avec l'augmentation de la conductivité thermique (Aluminium).

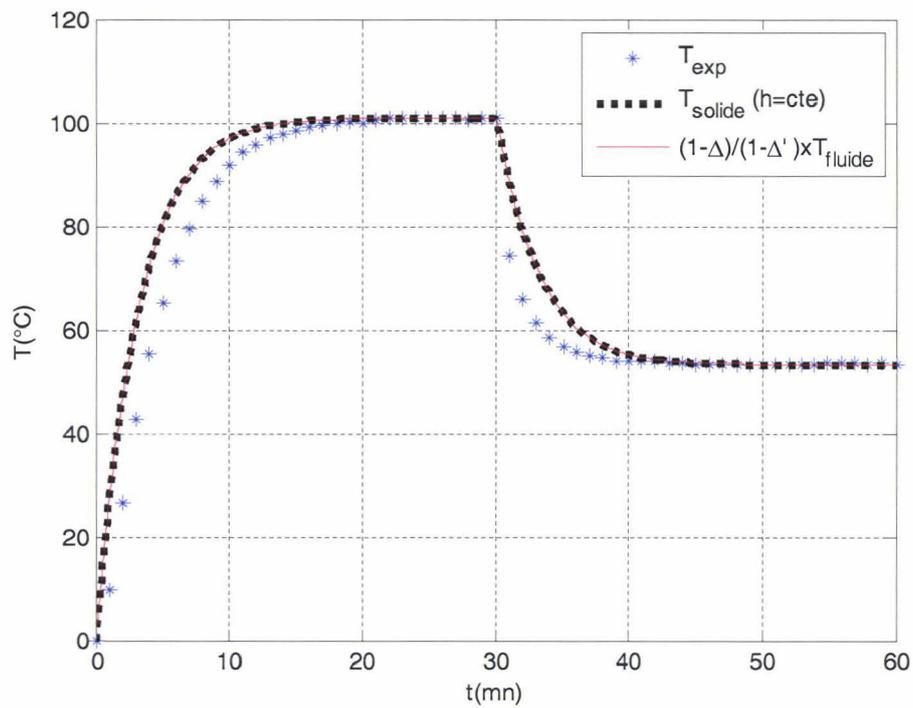


Figure IV.34 : Comparaison des profil de température pour une vitesse d'écoulement 7 m/s (vitrocéramique)

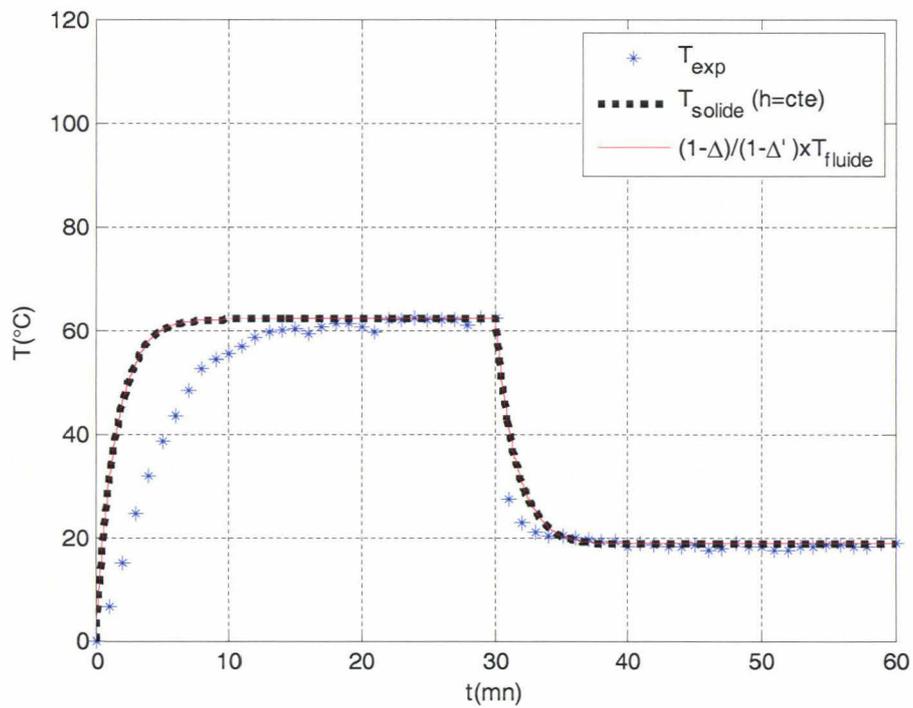


Figure IV.35 : Comparaison des profils de température pour une vitesse d'écoulement 5 m/s (Aluminium)

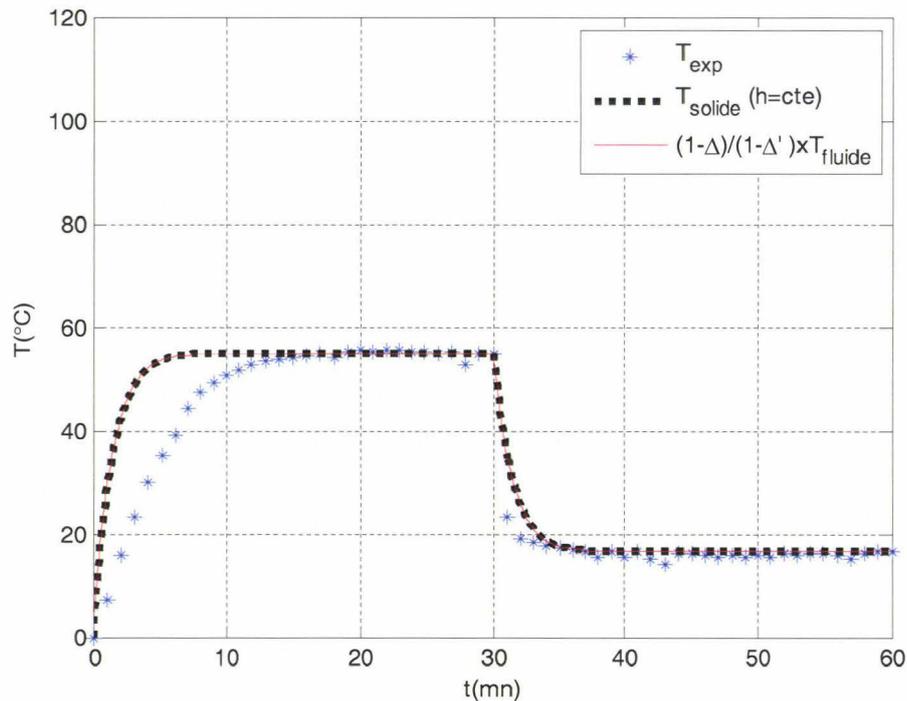


Figure IV.36 : Comparaison des profil de température pour une vitesse d'écoulement 7 m/s (Aluminium)

IV.4.6 Comparaisons des flux pariétaux des modèles théorique 1 et 2

On compare dans cette partie le flux de chaleur, issu du modèle solide 1, température imposée (II.71, II.93), à celui du modèle solide 2, h constant (II.132, II.93, II.137).

L'allure des courbes de flux pariétal du modèle 1 pour les temps faibles a déjà été discutée dans le paragraphe (IV.4.3.2).

On constate que dans le modèle thermique à h constant, le flux pariétal croît de façon monotone dans la phase de montée en température, et décroît également de façon monotone dans la phase de descente. Ce comportement n'est pas vérifié pour le flux tiré de l'expérience dans la phase de montée en température. On retrouve également le retard entre les courbes aussi bien dans la phase de montée et descente en température, fait que nous attribuons essentiellement à l'inertie thermique du système de chauffe.

On constate également que la durée du régime transitoire dépend de la nature du matériau. Dans la phase de chauffage et de relaxation, la durée du régime transitoire pour le vitrocéramique est de 18 minutes environ tandis que pour l'aluminium ne dépasse pas les 7 minutes. Ces différences sont très probablement dues à la conductivité thermique des matériaux. Plus la conductivité thermique est importante plus le matériau est capable d'absorber rapidement la chaleur.

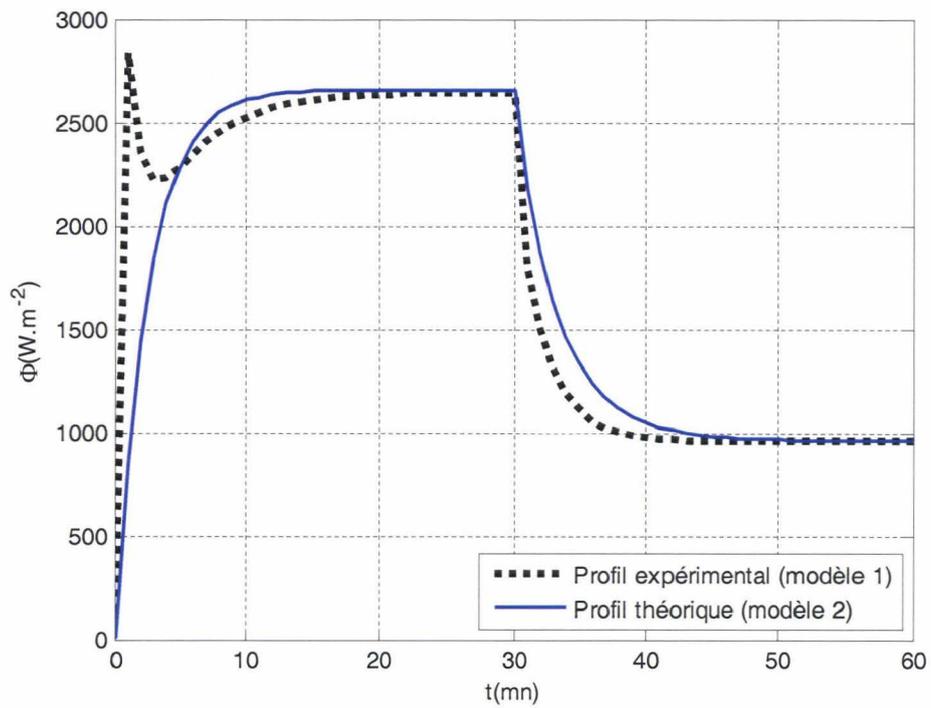


Figure IV.37 : Comparaison du flux pariétal pour $U_\infty=5$ m/s (vitrocéramique)

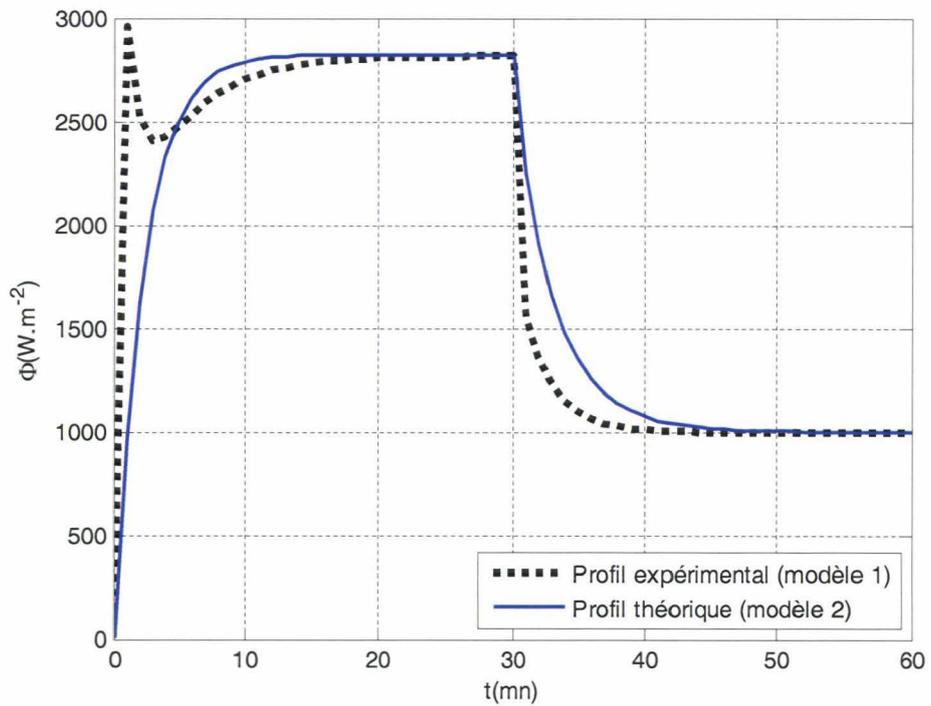


Figure IV.38 : Comparaison du flux pariétal pour $U_\infty=7$ m/s (vitrocéramique)

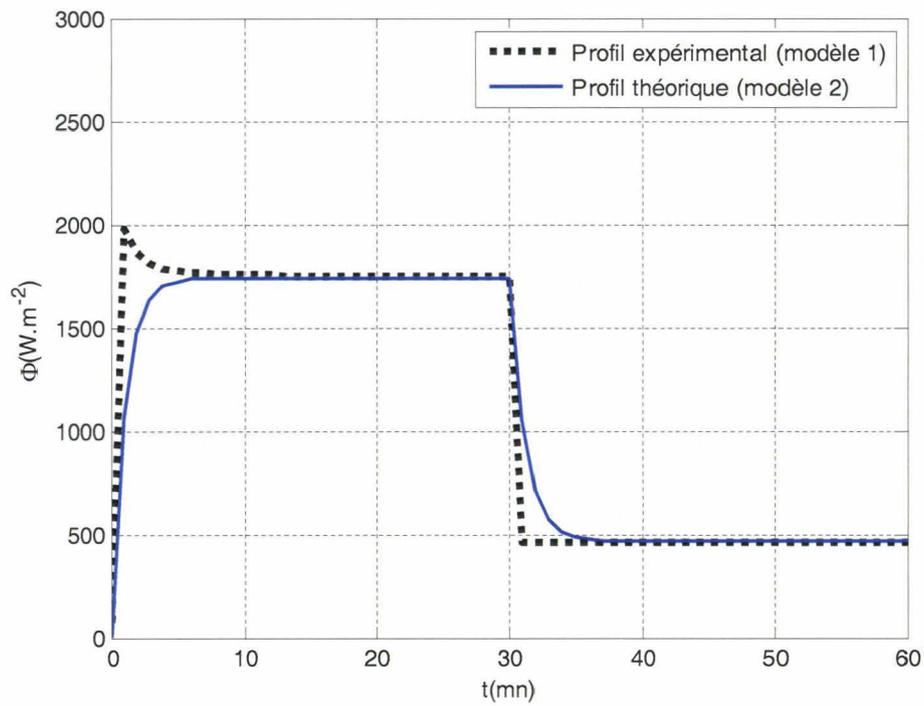


Figure IV.39 : Comparaison du flux pariétal pour $U_\infty=5$ m/s (Aluminium)

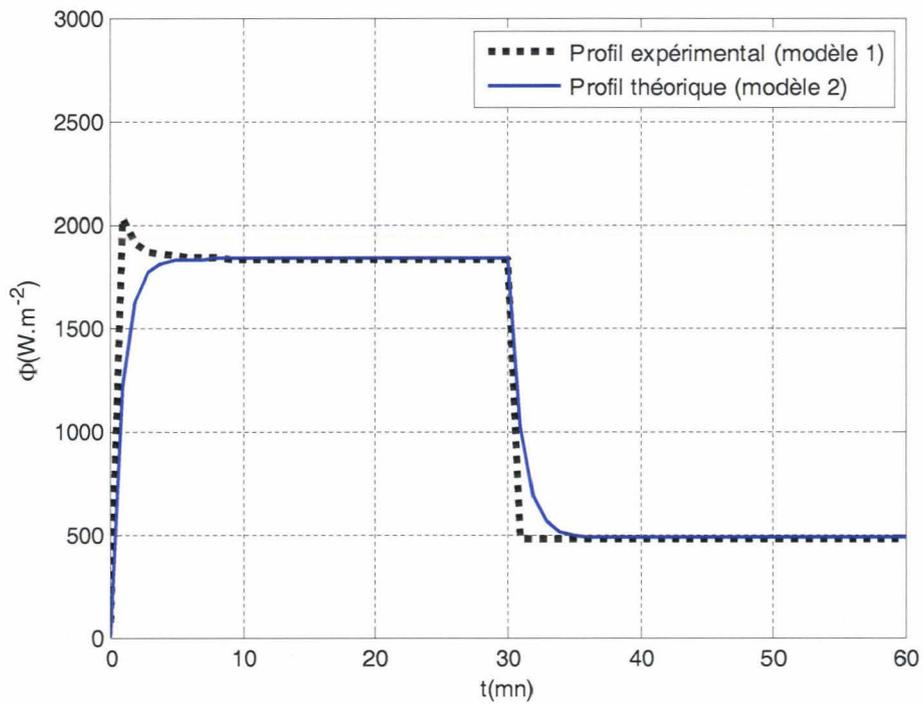


Figure IV.40 : Comparaison du flux pariétal pour $U_\infty=7$ m/s (Aluminium)

IV.5 Conclusion

Les résultats obtenus par la modélisation théorique dans le fluide prouvent que le coefficient d'échange convectif tend très rapidement ($\approx 0,3$ seconde) vers une valeur constante, correspondant au régime permanent, lors de sauts discontinus du flux pariétal de la face en contact avec le fluide.

Pour mettre en évidence et étudier expérimentalement l'influence de cette phase conductive de très courte durée dans le fluide, lors de variations rapides mais non discontinues au sens mathématique du terme, nous pensons que deux conditions expérimentales devront être réunies :

- Enregistrement beaucoup plus "serré" de la température pariétale. Le pas de temps que nous avons utilisé était de 60 secondes, alors qu'il devrait être très inférieur au 1/10 secondes. Ceci permettrait d'explorer de façon beaucoup plus précise les périodes où se produisent les changements de régime, ce qui est tout à fait du domaine du possible.

- Améliorer considérablement notre connaissance du flux absorbé $\varphi_i(t)$ et réussir à rendre sa croissance, ou sa décroissance, beaucoup plus courtes.

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GENERALE

Notre but dans ce travail était de mettre au point une méthode d'étude expérimentale non destructive du comportement thermique d'un fluide au voisinage d'une paroi solide dont une portion émet de la chaleur.

Plus précisément, la question que nous nous posions était de savoir s'il était possible de déduire l'intensité et l'évolution du flux de chaleur pénétrant dans le fluide, quelles que soient les propriétés de celui-ci et notamment lors de changements rapides des conditions extérieures, à partir de la seule mesure de la température superficielle de la portion chauffante et par une méthode ne modifiant pas la pénétration de ce flux.

Très concrètement, si Φ_{solide} est le flux s'échappant de la paroi solide en contact avec le fluide, il se compose de deux parties :

- Le flux infrarouge Φ_{radiatif} mesurable directement par caméra infrarouge et relié par des lois physiques bien connues à la température superficielle de la paroi dont l'évolution peut donc être enregistrée avec une très bonne précision.
- Le flux pénétrant dans le fluide par conduction, Φ_{fluide} , qui, comme Φ_{solide} , ne peut être mesuré sans modification complète de la configuration du système, et qui est précisément la grandeur physique à laquelle nous voudrions accéder.

Il y a dès lors deux possibilités :

La première possibilité est de déterminer indirectement Φ_{solide} grâce à un modèle mathématique décrivant la propagation de la chaleur dans le solide assimilé à une plaque plane d'épaisseur donnée : c'est l'objet du chapitre II. Les lois de propagation dans les solides sont parfaitement établies et la méthode des fonctions de Green que nous avons utilisée permet de déterminer analytiquement l'évolution du champ de température dans la plaque et d'en analyser très finement le comportement, si l'on connaît les conditions appliquées sur ses deux faces, puis d'en déduire le flux qui s'échappe de ces deux faces et en particulier Φ_{solide} . L'une des conditions étant connue : la température sur la face en contact avec le fluide, nous avons admis que la condition sur l'autre face était une condition de Newton en convection naturelle, avec absorption d'un rayonnement envoyé par des résistances chauffantes. La difficulté est alors de déterminer ce flux absorbé, que nous appelons $\varphi_0(t)$, en fonction du temps : Ainsi que nous l'avons montré, il est relativement facile de le déterminer en régime permanent, mais l'hypothèse qui consiste par la suite à admettre qu'il prend cette valeur dès que le système de chauffe est mis en route, ou coupé, n'est pas valide car elle néglige l'inertie thermique de ce système. En estimant à une durée de l'ordre de la minute le retard avec lequel le flux absorbé atteint sa valeur permanente, nous avons vu que les résultats

pouvaient changer de manière significative lors de la montée ou de la descente en température, sans que cela affecte les résultats en régime permanent.

Avec cette configuration expérimentale, on ne peut donc analyser avec fiabilité le comportement du fluide lors de ces changements rapides. Il serait nécessaire pour cela d'être techniquement capable d'imposer un flux $\varphi_0(t)$ ayant réellement la forme d'un échelon, ce qui pourrait être réalisé, par exemple, en découvrant ou en occultant rapidement le système de chauffe. Il s'agit en fait de problèmes techniques que nous pensons pouvoir résoudre. Notons qu'en revanche la méthode expérimentale présentée dans ce travail peut permettre d'obtenir des résultats fiables et précis en régime permanent.

La deuxième possibilité est de déterminer indirectement Φ_{fluide} grâce à un modèle mathématique décrivant la propagation de la chaleur dans le fluide. Il n'existe cependant pas actuellement, à notre connaissance, de modèle permettant de déduire systématiquement, analytiquement et de manière univoque le champ de température dans un fluide en fonction des conditions qui règnent sur les parois qui le limitent.

La théorie que nous avons développée dans le chapitre III, également basée sur l'emploi des fonctions de Green, montre, dans le cadre d'une description linéaire de la propagation de la chaleur dans le fluide, qu'il existe une relation intégrale implicite entre Φ_{fluide} et le champ de température dans le fluide. Cette relation permet d'obtenir une équation intégrale reliant la température pariétale de la surface solide en contact avec le fluide, au flux recherché Φ_{fluide} . Cette relation dépend des propriétés du fluide et de son écoulement mais est indépendante de la nature du solide. Pour résoudre cette équation intégrale et obtenir une relation analytique directe entre la température et Φ_{fluide} , nous avons développé une méthode perturbative par itération qui donne, en régime permanent et au début d'une variation brutale, des résultats tout à fait crédibles, comparés à ceux obtenus par des méthodes plus classiques. En revanche, la méthode itérative conduit à l'apparition d'une anomalie au cours de la période transitoire, dont l'origine est purement mathématique et pourra être corrigée par la suite. Ce défaut n'a aucune influence sur le régime permanent, qui est très rapidement atteint, la durée de la période transitoire étant de l'ordre de la seconde. En accord avec les méthodes classiques, ceci démontre que la loi de Newton est très rapidement vérifiée. Pour mettre en évidence l'influence de la période transitoire sur le comportement du fluide, il faudra donc avoir recours à des expériences dans lesquelles les variations sont importantes sur des durées inférieures à la seconde. Malgré le défaut évoqué précédemment, la théorie que nous avons développée permettra dans l'avenir d'obtenir des renseignements très précis sur les coefficients de convection en régime permanent dans des situations physiques très diverses ainsi que d'analyser le comportement des fluide dans les régimes instationnaires.

Ce travail a été valorisé par les publications et les communications suivantes :

- **Articles publiés dans des revues internationales**

1 - Ali Grine, Jean Yves Desmons, Souad Harmand

"Models for transient conduction in a flat plate subjected to a variable heat flux" *Applied Thermal Engineering, volume 27, Issues 2-3, February 2007, pages 492-500.*

2 - A. Grine, D. Saury, J.-Y. Desmons, S. Harmand,

"Identification Models for Transient Heat Transfer on a Flat Plate"
Experimental thermal and Fluid Science, volume 31, Issue 7, July 2007, pages 701-710.

- **Article publié dans des congrès**

1 - Ali Grine, Slimane Aisani, Jean Yves Desmons et Souad Harmand

"Les échanges convectifs en régime transitoire sur plaque plane" publié le 30 novembre - 1 décembre 2004 dans *Conférence Internationale de Mécanique Avancée, CIMA' 2004, Boumerdes.*

2 - Ali Grine, Jean Yves Desmons et Souad Harmand

"Modélisation des échanges convectifs en régime transitoire sur plaque plane" publié le 30 mai - 2 juin 2005 dans *Congrès Français de Thermique, SFT 2005, Reims,*

3 - Ali Grine, Mohamed cherif MEZIANE, Jean Yves Desmons et Souad Harmand

"Méthode de détermination de la diffusivité thermique d'une plaque mince" publié le 26-27 mai 2007 dans *Conférence on Mechanics and Engineering system, Boumerdes.*

4 - Ali Grine, Jean Yves Desmons et Souad Harmand

"Modélisation analytique de la convection transitoire sur plaque plane" publié le
29 mai - 1 juin 2007 dans *Congrès Français de Thermique, SFT 2007, Ile des Embiez.*

ANNEXES

Annexe 1

Solution exacte des fonctions $w^*(x,t)$ et $T^*(x,t)$

En reprenant l'équation (II.19) du modèle analytique :

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 T^*(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ T^*(x,t) \Big|_{x=0} = 1 \\ \frac{\partial T^*(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=e} = -H_i^0 T^*(e,t) \\ T^*(x,0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

La solution du problème auxiliaire $T^*(x,t)$ peut s'écrire sous la forme de la somme de deux solutions $u^*(x)$ et $w^*(x,t)$ respectivement du régime permanent et transitoire qui se présentent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} = 0 \\ u^*(0) = 1 \\ \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} \Big|_{x=e} = -H_i^0 u^*(e) \end{cases} \quad (2)$$

La solution du régime permanent $u^*(x)$ du système (2) s'écrit alors :

$$u^*(x) = 1 - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x \quad (3)$$

et

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\partial w^*(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w^*(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ w^*(x,t) \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial w^*(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=e} = -H_i^0 w^*(e,t) \\ w^*(x,0) = -u^*(x) \end{cases} \quad (4)$$

En utilisant l'équation (II.16) du modèle analytique, on trouve :

$$w^*(x,t) = - \int_0^e \frac{G(x,x',t)}{a} u^*(x') dx' \quad (5)$$

$$w^*(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a\alpha_n^2 t} \phi_n(x)$$

$$A_n(0) = \int_0^e \phi_n(x') w^*(x',0) dx'$$

$$A_n(0) = - \int_0^e \varphi_n(x') u^*(x') dx'$$

Avec :

$$\varphi_n(x') = B_n \sin(\alpha_n x')$$

$$A_n = - \int_0^e B_n \sin(\alpha_n x') \left(-\frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x' + 1 \right) dx'$$

$$A_n = \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} B_n \int_0^e dx' - \int_0^e B_n \sin(\alpha_n x') dx'$$

$$A_n = B_n \left\langle \frac{H_i^0}{(H_i^0 e + 1) \alpha_n^2} \{ -\alpha_n x' \cos(\alpha_n x') + \sin(\alpha_n x') \} + \frac{\cos(\alpha_n x')}{\alpha_n} \right\rangle_0^e$$

$$A_n = \frac{H_i^0 B_n}{(H_i^0 e + 1) \alpha_n^2} \{ -\alpha_n e \cos(\alpha_n e) + \sin \alpha_n e \} + \frac{B_n}{\alpha_n} \{ \cos(\alpha_n e) - 1 \}$$

$$A_n = \frac{H_i^0 B_n \sin(\alpha_n e)}{(H_i^0 e + 1) \alpha_n^2} (H_i^0 e + 1) + \frac{B_n}{\alpha_n} \{ \cos(\alpha_n e) - 1 \}$$

$$A_n = \frac{H_i^0 B_n \sin(\alpha_n e)}{\alpha_n^2} + \frac{B_n}{\alpha_n} \{ \cos(\alpha_n e) - 1 \}$$

$$A_n = - \frac{B_n}{\alpha_n} \tag{6}$$

D'où :

$$w^*(x,t) = - \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} e^{-\alpha_n^2 t} \tag{7}$$

$$T^*(x,t) = u^*(x) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} e^{-\alpha_n^2 t} \tag{8}$$

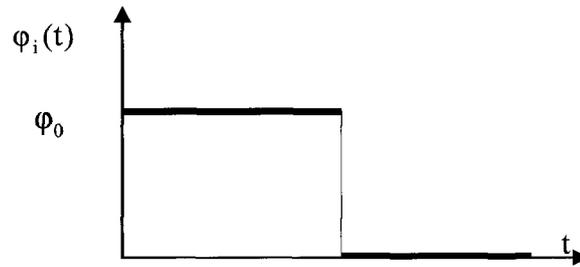
En appliquant la condition initiale du système (1) à cette dernière, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} = \left(1 - \frac{H_i^0}{H_i^0 e + 1} x \right) \tag{9}$$

Annexe 2

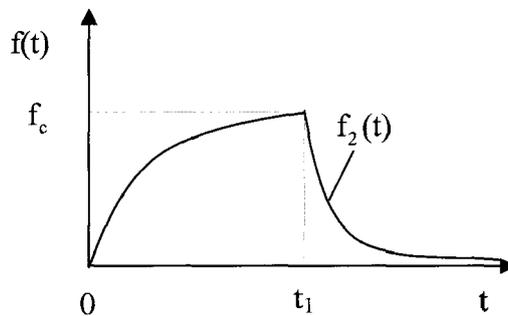
Profil de température et flux de chaleur lors de la phase de relaxation

Étudions maintenant le cas où le flux $\varphi_i(t)$ absorbé par la paroi inférieure change brusquement à l'instant t_1 et tend vers 0. On se place dans le cas 1 $\varphi_i(t) = 0$ pour $t > t_1$ cité dans le texte. Dans ce cas, la plaque se refroidit pour prendre une température uniforme égale à T_∞ .



La température imposée représentée dans le texte par $f_2(t)$ est déterminée expérimentalement à l'aide de la caméra infrarouge et est représentée mathématiquement cette fois-ci par la forme suivante :

$$f_2(t) = f_c \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k(t-t_1)} \quad \text{si} \quad t \geq t_1 \quad (1)$$



Et b_k et δ_k : les constantes utilisées dans les lissages des profils de température expérimentaux.

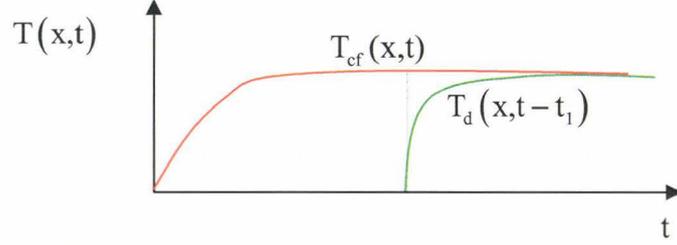
Cette série d'exponentielles doit vérifier la contrainte suivante :

➤ Condition de continuité : $f_2(t_1) = f_c \Rightarrow \sum_{k=1}^K b_k = 1$ (2)

L'étude est la même que celle dans le cas d'échauffement. La seule différence est le flux absorbé par la paroi nul dans ce cas.

$T_d(x, t - t_1)$ est une température analogue à $T_{cf}(x, t)$ mais décalée d'un temps t_1 ; elle s'écrit :

$$T_d(x,t) = \left\langle \begin{aligned} & \frac{\Phi_0}{\lambda_s} \int_0^t G(e,x,\tau) d\tau + u^*(x) \{f_1(t+t_1) - f_2(t+t_1)\} \\ & - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{f_1(\tau+t_1) - f_2(\tau+t_1)\} \int_0^e \frac{G(x,x',t-\tau)}{a} u^*(x) dx' d\tau \end{aligned} \right\rangle \quad (3)$$



La fonction $f_1(t)$ est simplement remplacée par la fonction $f'(t) = f_1(t+t_1) - f_2(t+t_1)$ dont la forme est analogue à $f_1(t)$: elle s'annule en $t = 0$ et tend exponentiellement vers f_∞ quand $t \rightarrow \infty$.

$$f'(t) = f_\infty \left\{ 1 - \sum_{m=1}^M c_m e^{-\gamma_m t} - \frac{f_c}{f_\infty} \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k t} \right\} \quad (4)$$

Avec

$$c_m = a_m e^{-\gamma_m t_1}$$

a_m, γ_m : constantes de lissage du profil de température.

Le comportement de la fonction T_d sera analogue à celui de T_{cf} .

Après avoir introduit les expressions de $G(x,x',t-\tau)$, $f'(t)$ et $u^*(x)$, la fonction $T_d(x,t)$ s'écrit :

$$T_d(x,t) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Phi_0/\lambda_s}{H_1^0 e + 1} x - \frac{\Phi_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e) \sin(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} e^{-a\alpha_n^2 t} - \left(1 - \frac{H_1^0}{H_1^0 e + 1} x \right) \left(f_c \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k t} - f_\infty \left(1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m(t+t_1)} \right) \right) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^K B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \frac{f_c b_k \delta_k}{a\alpha_n^2 - \delta_k} \left(e^{-\delta_k t} - e^{-a\alpha_n^2 t} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^M B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \frac{f_\infty a_m \gamma_m}{a\alpha_n^2 - \gamma_m} e^{-\gamma_m t_1} \left(e^{-\gamma_m t} - e^{-a\alpha_n^2 t} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

La densité de flux de chaleur $\Phi_{re}(t)$ à la paroi soumise à un écoulement d'air pourra s'écrire :

$$\Phi_{re}(t) = \Phi_{cf}(t) - E(t-t_1) \Phi_d(t-t_1) \quad (6)$$

Où $\Phi_d(t)$ s'écrit :

$$\Phi_d(t) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Phi_0}{H_1^0 e + 1} - \frac{\Phi_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{\sin(\alpha_n e)}{\alpha_n} e^{-a\alpha_n^2 t} - \frac{h_i^0}{H_1^0 e + 1} \left(f_c \sum_{k=1}^K b_k e^{-\delta_k t} - f_\infty \left(1 - \sum_{m=1}^M a_m e^{-\gamma_m(t+t_1)} \right) \right) \\ & + \lambda_s \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{f_c b_k \delta_k}{a\alpha_n^2 - \delta_k} \left(e^{-\delta_k t} - e^{-a\alpha_n^2 t} \right) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 \frac{f_\infty \gamma_m a_m}{a\alpha_n^2 - \gamma_m} e^{-\gamma_m t_1} \sum_{m=1}^M \left(e^{-\gamma_m t} - e^{-a\alpha_n^2 t} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Annexe 3

Résolution par la méthode des fonctions de Green

On rappelle l'équation de l'énergie (III.5) :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T_1(\vec{r}, t)}{\partial t} - \Delta T_1(\vec{r}, t) + \frac{1}{a} \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U_\infty x}{2a}} \vec{\nabla} e^{\frac{U_\infty x}{2a}} T_1(\vec{r}, t) = 0 \quad (1)$$

$$\lambda_f \vec{\nabla} T_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \Big|_{\vec{r}=\vec{p}} = e^{-\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty t}{2} \right)} \Phi(\vec{p}, t) \rightarrow \text{choix 1} \quad (2)$$

Avec :

$$T_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \Big|_{\vec{r}=\vec{p}} = e^{-\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty t}{2} \right)} T_p(\vec{p}, t) \rightarrow \text{choix 2}$$

L'expression (1) est une équation de conduction pure avec un terme de source

$\frac{1}{a} \vec{v} \cdot e^{-\frac{U_\infty x}{2a}} \vec{\nabla} e^{\frac{U_\infty x}{2a}} T_1$ dépendant linéairement du champ inconnu T_1 .

Soit alors $G(\vec{r}, \vec{r}', t)$ la solution, (fonction de Green définie dans le domaine fluide (D)) des équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} G(\vec{r}, \vec{r}', t) - \Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}', t) = \delta(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ G(\vec{r}, \vec{r}', t < 0) = 0 \\ G(\vec{r}, \vec{r}', t) \Big|_{\vec{r} \in S_e} = 0 \quad \forall \vec{r}' \\ G(\vec{r}, \vec{r}', t) \Big|_{\vec{r} \in S_o} = 0 \quad \forall \vec{r}' \end{cases} \quad (3)$$

Et sur les parois latérales :

$$\begin{cases} \lambda_f \Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}', t) \cdot \vec{n} \Big|_{\vec{r} \in S_e} = 0 \quad \forall \vec{r}' \rightarrow \text{choix 1} \\ G(\vec{r}, \vec{r}', t) \cdot \vec{n} \Big|_{\vec{r} \in S_e} = 0 \quad \forall \vec{r}' \rightarrow \text{choix 2} \end{cases} \quad (4)$$

Prenons les transformées de Laplace des équations 1 et 3 :

$$\begin{cases} q^2 \bar{T}_1(\vec{r}, p) - \Delta \bar{T}_1(\vec{r}, p) + \frac{1}{a} \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U_\infty x}{2a}} \vec{\nabla} e^{\frac{U_\infty x}{2a}} T_1(\vec{r}, t) = 0 \\ q^2 \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) - \Delta \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{cases} \quad \text{avec } q = \sqrt{\frac{p}{a}} \quad (5)$$

En multipliant la première équation par $\bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p)$ et la seconde par $\bar{T}_1(\vec{r}, p)$, le système (5) devient :

$$\begin{cases} q^2 \bar{T}_1 \bar{G} - \Delta \bar{T}_1 \bar{G} + \frac{1}{a} \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U_\infty x}{2a}} \vec{\nabla} e^{\frac{U_\infty x}{2a}} T_1(\vec{r}, t) \bar{G} = 0 \\ q^2 \bar{G} \bar{T}_1 - \Delta \bar{G} \bar{T}_1 = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \bar{T}_1 \end{cases} \quad (6)$$

Nous obtenons après soustraction des deux équations :

$$\bar{T}_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \bar{G} \Delta \bar{T}_1 - \bar{T}_1 \Delta \bar{G} - \bar{G} \frac{1}{a} \overline{\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} \vec{\nabla} e^{\frac{U_\infty}{2a} x} T_1(\vec{r}, t)} \quad (7)$$

En intégrant sur \vec{r} les deux membres de l'égalité dans le domaine (D) :

$$\iiint_{(D)} \bar{T}_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}') dr^3 = \iiint_{(D)} (\bar{G} \Delta \bar{T}_1 - \bar{T}_1 \Delta \bar{G}) dr^3 - \frac{1}{a} \iiint_{(D)} \overline{\bar{G} \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} \vec{\nabla} e^{\frac{U_\infty}{2a} x} T_1(\vec{r}, t)} dr^3 \quad (8)$$

Sachant que : $\iiint_{(D)} \bar{T}_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}') dr^3 = \bar{T}_1(\vec{r}', p)$

Et en appliquant le théorème de Stokes sur la première intégrale du second membre de l'équation (8), nous obtenons :

$$\bar{T}_1(\vec{r}', p) = \iint_{S_e} (\bar{G} \vec{\nabla} \bar{T}_1 - \bar{T}_1 \vec{\nabla} \bar{G}) d\vec{S} - \frac{1}{a} \iiint_{(D)} \overline{\bar{G} \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} \vec{\nabla} e^{\frac{U_\infty}{2a} x} T_1(\vec{r}, t)} dr^3 \quad (9)$$

La surface (S) du domaine (D) est en effet, dans notre cas, la réunion de la surface d'entrée (S_e), surfaces latérales (S_ℓ) (4 parois latérales) et d'une surface à l'infini (S_∞)

L'équation (9) peut donc s'écrire :

$$\bar{T}_1(\vec{r}', p) = \left\{ \begin{array}{l} \iint_{S_e} (\bar{G} \vec{\nabla} \bar{T}_1 - \bar{T}_1 \vec{\nabla} \bar{G}) d\vec{S}_e + \iint_{S_\ell} (\bar{G} \vec{\nabla} \bar{T}_1 - \bar{T}_1 \vec{\nabla} \bar{G}) d\vec{S}_\ell + \underbrace{\iint_{S_\infty} (\bar{G} \vec{\nabla} \bar{T}_1 - \bar{T}_1 \vec{\nabla} \bar{G}) d\vec{S}_\infty}_0 \\ - \frac{1}{a} \iiint_{(D)} \overline{dr^3 \bar{G} \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} \vec{\nabla} e^{\frac{U_\infty}{2a} x} T_1(\vec{r}, t)} \end{array} \right\} \quad (10)$$

Les deux premiers termes sont calculables éventuellement si l'on connaît les conditions qui limitent le volume d'air (D).

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(\vec{r}', p) = & - \iint_{S_e} e^{-\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty}{2} t\right)} T_e(\vec{r}, t) \vec{\nabla}_{\vec{r}} \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) d\vec{S}_e + \iint_{S_\ell} (\bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) \vec{\nabla}_{\vec{r}} \bar{T}_1(\vec{r}, p) - \bar{T}_1(\vec{r}, p) \vec{\nabla}_{\vec{r}} \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p)) d\vec{S}_\ell \\ & - \frac{1}{a} \iiint_{(D)} \overline{d^3 r \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} \vec{\nabla}_{\vec{r}} e^{\frac{U_\infty}{2a} x} T_1(\vec{r}, t)} \quad \boxed{\text{choix 1}} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(\vec{r}', p) = & - \iint_{S_e} e^{-\frac{U}{2a} \left(x - \frac{U}{2} t\right)} T_e(\vec{r}, t) \vec{\nabla}_{\vec{r}} \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) d\vec{S}_e - \iint_{S_\ell} (\bar{T}_1(\vec{r}, p) \vec{\nabla}_{\vec{r}} \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p)) d\vec{S}_\ell \\ & - \frac{1}{a} \iiint_{(D)} \overline{d^3 r \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}', p) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot e^{-\frac{U}{2a} x} \vec{\nabla}_{\vec{r}} e^{\frac{U}{2a} x} T_1(\vec{r}, t)} \quad \boxed{\text{choix 2}} \end{aligned} \quad (12)$$

Annexe 4

En rappelant ici l'équation (III.11)

$$T_1(\vec{r}, t) = - \int_0^t d\tau \iint_{S_e} e^{-\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty}{2} \tau \right)} T_e(\vec{r}, \tau) \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) dS_e + \int_0^t d\tau \iint_{S_l} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) \vec{\nabla}_{\vec{r}} T_1(\vec{r}, \tau) d\vec{S}_l - \frac{1}{a} \int_0^t d\tau \iiint_{(D)} d^3r G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) \cdot \vec{v}(\vec{r}, \tau) \cdot e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} \vec{\nabla}_{\vec{r}} e^{\frac{U_\infty}{2a} x} T_1(\vec{r}, \tau) \quad (1)$$

Et puisque sur les parois latérales $d\vec{S}_l$ est orthogonale à la direction x , on peut écrire :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} T_1(\vec{r}, \tau) d\vec{S}_l = \vec{\nabla}_{\vec{r}} e^{-\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty}{2} \tau \right)} T(\vec{r}, \tau) d\vec{S}_l = e^{-\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty}{2} \tau \right)} \vec{\nabla}_{\vec{r}} T(\vec{r}, \tau) d\vec{S}_l \quad (2)$$

Cette dernière expression nous permet de réécrire l'équation (1) sous la forme suivante :

$$T_1(\vec{r}, t) = - \int_0^t d\tau e^{\frac{U_\infty^2}{4a} \tau} \iint_{S_e} e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} T_e(\vec{r}, \tau) \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) dS_e + \int_0^t d\tau e^{\frac{U_\infty^2}{4a} \tau} \iint_{S_l} e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) \vec{\nabla}_{\vec{r}} T(\vec{r}, \tau) d\vec{S}_l - \frac{1}{a} \int_0^t d\tau e^{\frac{U_\infty^2}{4a} \tau} \iiint_{(D)} d^3r e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) \vec{v}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} T(\vec{r}, \tau) \quad (3)$$

Soit en utilisant les conditions aux limites : $\lambda_f \vec{\nabla} T(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \Big|_{\vec{r}=\vec{\rho}} = \Phi(\vec{\rho}, t)$

$$T_1(\vec{r}, t) = - \int_0^t d\tau e^{\frac{U_\infty^2}{4a} \tau} \iint_{S_e} e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} T_e(\vec{r}, \tau) \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) dS_e + \frac{1}{\lambda_f} \int_0^t d\tau e^{\frac{U_\infty^2}{4a} \tau} \iint_{S_l} e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) \Phi(\vec{\rho}, t) d\vec{S}_l - \frac{1}{a\lambda_f} \int_0^t d\tau e^{\frac{U_\infty^2}{4a} \tau} \iiint_{(D)} d^3r e^{-\frac{U_\infty}{2a} x} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}, t - \tau) \vec{v}(\vec{r}, \tau) \cdot \Phi(\vec{\rho}, t) \quad (4)$$

On remonte maintenant à $T(\vec{r}, \tau)$ en utilisant le changement de variable.

$$T_1(\vec{r}, t) = e^{-\frac{U_\infty}{2a} \left(x - \frac{U_\infty}{2} \tau \right)} T(\vec{r}, t)$$

$$\begin{aligned}
 T(\vec{r}, t) = & - \int_0^t d\tau e^{-\frac{U_\infty^2}{4a}(t-\tau)} \iint_{S_e} e^{\frac{U_\infty}{2a}(x'-x)} T_e(\vec{r}, \tau) \vec{\nabla}_r \bar{G}_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t-\tau) dS_e \\
 & + \frac{1}{\lambda_f} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U_\infty^2}{4a}(t-\tau)} \iint_{S_f} e^{\frac{U_\infty}{2a}(x'-x)} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t-\tau) \Phi(\vec{r}, \tau) dS_f \quad (5) \\
 & - \frac{1}{a} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U_\infty^2}{4a}(t-\tau)} \iiint_{(D)} d^3r e^{\frac{U_\infty}{2a}(x'-x)} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t-\tau) \vec{v}(\vec{r}, \tau) \vec{\nabla}_r T(\vec{r}, \tau) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{terme} \\ \text{correctif} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Annexe 5

Fonctions de Green et propriétés

La solution de (III.31) s'écrit :

$$G_{\varphi}^1(x, x', t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4at}} = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-x')} e^{-ak^2 t} \quad (1)$$

Et sa transformée de Laplace peut se mettre sous la forme :

$$\bar{G}_{\varphi}^1(x, x', p) = \frac{e^{-q|x-x'|}}{2q} = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-ik(x-x')}}{p + ak^2} e^{-ak^2 t} \quad (2)$$

Cette fonction possède les propriétés :

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 G_{\varphi}^1(x, x_1, t - \tau) G_{\varphi}^1(x_1, x', \tau) = a G_{\varphi}^1(x, x', t) \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 G_{\varphi}^1(x, x_1, t - \tau) \frac{\partial}{\partial x_1} G_{\varphi}^1(x_1, x', \tau) = a \frac{\partial}{\partial x} G_{\varphi}^1(x, x', t) \end{cases} \quad (3)$$

Que l'on établit en utilisant l'expression sous forme d'intégrale de Fourier.

On établit de la même façon que, puisque $G_{\varphi}^1(x, x_1, t - \tau) = G_{\varphi}^1(|x - x_1|, t - \tau)$:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \left(G_{\varphi}^1(x, x_1, t - \tau) G_{\varphi}^1(x_1, x', \tau) + G_{\varphi}^1(x, -x_1, t - \tau) G_{\varphi}^1(-x_1, x', \tau) \right) = a G_{\varphi}^1(x, x', t) \\ \text{et} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \left(G_{\varphi}^1(x, x_1, t - \tau) G_{\varphi}^1(-x_1, x', \tau) + G_{\varphi}^1(x, -x_1, t - \tau) G_{\varphi}^1(x_1, x', \tau) \right) = a G_{\varphi}^1(x, -x', t) \end{cases} \quad (4)$$

Et la fonction $G_{\varphi}^{1\pm}(x, x', t) = G_{\varphi}^1(x, x', t) \pm G_{\varphi}^1(x, -x', t)$ vérifie :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 G_{\varphi}^{1\pm}(x, x_1, t - \tau) G_{\varphi}^{1\pm}(x_1, x', \tau) = a G_{\varphi}^{1\pm}(x, x', t) \quad (5)$$

Si l'on souhaite tenir compte d'une température fixée sur la section d'entrée : $T_e(y, z, t)$ en $x=0$, il suffit de remplacer la fonction $G_{\varphi}^1(x, x', t)$ par :

$$G_{\varphi}^{1-}(x, x', t) = G_{\varphi}^1(x, x', t) - G_{\varphi}^1(x, -x', t).$$

La solution de (III.32) s'écrit :

$$G_{\varphi}^2(y, y', t) = \begin{cases} a \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y) \varphi_n(y') e^{-aa_n^2 t} & ; \text{ si } L_2 \text{ est finie} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{(y-y')^2}{4at}} = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(y-y')} e^{-ak^2 t} & ; \text{ si } L_2 \text{ est infinie} \end{cases} \quad (6)$$

Elle possède les propriétés :

$$\left. \begin{cases} \int_{\frac{-L_2}{2}}^{\frac{L_2}{2}} dy_1 G_\varphi^2(y, y_1, t - \tau) G_\varphi^2(y_1, y', \tau) = a G_\varphi^2(y, y', t) & ; \text{ si } L_2 \text{ est finie} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 G_\varphi^2(y, y_1, t - \tau) G_\varphi^2(y_1, y', \tau) = a G_\varphi^2(y, y', t) \\ \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 G_\varphi^2(y, y_1, t - \tau) \frac{\partial}{\partial y_1} G_\varphi^2(y_1, y', \tau) = a \frac{\partial}{\partial y} G_\varphi^2(y, y', t) \end{cases} \right\} ; \text{ si } L_2 \text{ est infinie} \quad (7)$$

Sa transformée de Laplace s'écrit :

$$\bar{G}_\varphi^2(y, y', p) = \begin{cases} \frac{e^{-q|y-y'|}}{2q} + \frac{\text{ch}q(y+y') + e^{-qL_2} \text{ch}q(y-y')}{2q\text{sh}qL_2} & ; \text{ si } L_2 \text{ est finie} \\ \frac{e^{-q|y-y'|}}{2q} & ; \text{ si } L_2 \text{ est infinie} \end{cases} \quad (8)$$

Enfin la solution $G_\varphi^3(z, z', t)$ de l'équation (III.33) s'écrit :

$$G_\varphi^3(z, z', t) = \begin{cases} a \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(z) \psi_m(z') e^{-a\beta_m^2 t} & ; \text{ si } L_1 \text{ est finie} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \left(e^{-\frac{(z-z')^2}{4at}} + e^{-\frac{(z+z')^2}{4at}} \right) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikz} \text{cos}kz' e^{-ak^2 t} & ; \text{ si } L_1 \text{ est infinie} \end{cases} \quad (9)$$

Et sa transformée de Laplace :

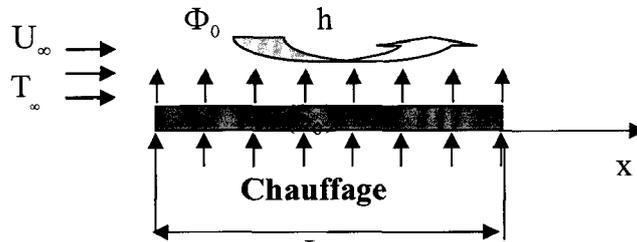
$$\bar{G}_\varphi^3(z, z', p) = \begin{cases} \frac{e^{-q|z-z'|}}{2q} + \frac{\text{ch}q(z+z'+L_1) + e^{-qL_1} \text{ch}q(z-z')}{2q\text{sh}qL_1} & ; \text{ si } L_1 \text{ est finie} \\ \frac{(e^{-q|z-z'|} + e^{-q|z+z'|})}{2q} & ; \text{ si } L_1 \text{ est infinie} \end{cases} \quad (10)$$

Elle vérifie également les relations :

$$\begin{cases} \int_0^{L_1} dz_1 G_\varphi^3(z, z_1, t - \tau) G_\varphi^3(z_1, z', \tau) = a G_\varphi^3(z, z', t) & ; \text{ si } L_1 \text{ est finie} \\ \int_0^{\infty} dz_1 G_\varphi^3(z, z_1, t - \tau) G_\varphi^3(z_1, z', \tau) = a G_\varphi^3(z, z', t) & ; \text{ si } L_1 \text{ est infinie} \end{cases} \quad (11)$$

Annexe 6

1. Corrélations de comparaison



Représentation schématique d'une plaque plane placée dans un écoulement laminaire chauffée à partir du bord d'attaque

Nous présentons ici les principales corrélations utilisées pour les comparaisons avec nos résultats analytiques.

Pour une plaque plane chauffée et placée dans un écoulement laminaire, le nombre de Nusselt local Nu_x est une fonction du nombre de Reynolds local Re_x et de Prandtl Pr et est donné par [39] pour le cas des conditions aux limites isothermes.

$$Nu_x = 0,332Pr^{1/3}Re_x^{1/2} \quad (1)$$

Pour les conditions aux limites d'isoflux, la fonction de Nusselt locale a une forme semblable.

Dans le cas général, Nu_x peut être exprimé comme suit :

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda_f} = CPr^m Re_x^{n/(n+1)} \quad (2)$$

Avec : $Re_x = U_\infty x / \nu$, $Pr = \nu / a$, $a = \lambda / \rho c_p$

Où h est le coefficient local de transfert thermique, λ_f est la conductivité thermique du fluide, C , m , et n sont des valeurs constantes indiquées dans le tableau ci-dessous pour diverses conditions.

Cas	Condition d'écoulement	Conditions aux limites	C	n	m
1	Laminaire	Isotherme	0,332	1	1/3
2	Laminaire	Isoflux	0,453	1	1/3

Tableau 1 : Valeurs des constantes de l'équation (2) pour différentes conditions

1.1. Coefficient de l'échange convectif moyen sur une plaque plane pour une condition limite "isotherme"

Pour le cas d'une condition à la limite isotherme, on peut déterminer le flux de chaleur évacué par la plaque plane \hat{q}_s en utilisant la loi du refroidissement de Newton $\hat{q}_s = h_L(T_s - T_\infty)$.

Le coefficient d'échange convectif moyen le long de la plaque s'écrit :

$$h_L = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx \quad (3)$$

La substitution de l'équation (2) dans (3) donne :

$$h_L = 2 \frac{\lambda_f}{L} Nu_L \quad (4)$$

1.2. Température moyenne et coefficient d'échange convectif moyen sur une plaque plane pour une condition limite "isoflux"

Le plus important pour le cas d'isoflux est la température moyenne de la surface qui peut être évaluée à partir de l'expression :

$$\overline{(T_s - T_\infty)} = \frac{1}{L} \int_0^L (T_s - T_\infty) dx = \frac{\hat{q}_s}{L} \int_0^L \frac{x}{kNu_x} dx \quad (5)$$

La substitution de l'équation (2) dans l'équation (5) donne pour un écoulement laminaire :

L'évaluation de l'intégrale définie dans l'équation (5) donne :

$$\overline{T - T_\infty} = \frac{2}{3} \frac{\hat{q}_s L}{kNu_L} \quad (6)$$

D'où :

$$h_L = \frac{\hat{q}_s}{\overline{T - T_\infty}} = \frac{3}{2} \frac{\lambda_f}{L} Nu_L \quad (7)$$

2. Épaisseur de la couche limite dynamique

Soit u la composante de la vitesse suivant la direction de l'écoulement (x) :

$$u(x,z) = U \left\{ 2 \left(\frac{z}{\delta} \right) - \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 \right\} \quad (8)$$

En appliquant l'équation de continuité $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \right)$ pour déterminer la composante de vitesse de vitesse suivant z :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,z) = U \left\{ -\frac{2z}{\delta^2} + \frac{2z^2}{\delta^3} \right\} \frac{d\delta}{dx} = -\frac{\partial v}{\partial z}(x,z) \quad (9)$$

Soit

$$v(x,z) = U \left\{ \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{z}{\delta} \right)^3 \right\} \frac{d\delta}{dx} \quad (10)$$

Maintenant, on a les deux composantes de vitesse suivant x et z, en appliquant l'équation de quantité de mouvement sur la couche limite dynamique :

$$\int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz \quad (11)$$

En calculant $\frac{\partial u}{\partial z}(x,z)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x,z) = U \left\{ \frac{2}{\delta} - \frac{2z}{\delta^2} \right\} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,z) = -\frac{2U}{\delta^2} \quad (13)$$

En vérifiant maintenant l'égalité de l'équation de quantité de mouvement donnée par (11) :

$$\int_0^\delta dz U^2 \left\{ \left[2 \left(\frac{z}{\delta} \right) - \left(\frac{z}{\delta} \right)^2 \right] \left[-\frac{2z}{\delta^2} + \frac{2z^2}{\delta^3} \right] + \left[\left(\frac{z}{\delta} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{z}{\delta} \right)^3 \right] \left[\frac{2}{\delta} - \frac{2z}{\delta^2} \right] \right\} \frac{d\delta}{dx} \quad (14)$$

D'où :

$$\int_0^\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = -0,1333 \quad U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (15)$$

Et :

$$\nu \int_0^\delta dz \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{2U}{\delta} \nu \quad (16)$$

L'égalité entre l'expression (15) et (16) permet d'écrire :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,4779}{Re_x} \quad (17)$$

Annexe 7

Calcul de la fonction $K_{\delta}^1(z,t)$

$$\begin{aligned} \overline{K}_{\delta}^1(z,p) &= \frac{a}{2p} \int_0^{\delta} dz' f(z') e^{-qz'} \left(e^{-q|z-z'|} + e^{-q|z+z'|} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{a}{2p} \left(e^{-qz} \int_0^z dz' f(z') (1 + e^{-2qz'}) + (e^{qz} + e^{-qz}) \int_z^{\delta} f(z') e^{-2qz'} dz' \right) & ; \text{ si } z < \delta \\ \frac{a}{2p} e^{-qz} \int_0^{\delta} f(z') (1 + e^{2qz'}) dz' & ; \text{ si } z > \delta \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Soit, si $f(z')$ est un polynôme de seconde degré :

$$f(z') = \left(\frac{z'}{\delta} \left(2 - \frac{z'}{\delta} \right) - 1 \right) = -\frac{(z' - \delta)^2}{\delta^2} \quad (2)$$

$$\overline{K}_{\delta}(z,p) = \begin{cases} \frac{a}{2p} \left(e^{-qz} \int_0^z dz' f(z') + e^{-qz} \int_0^{\delta} f(z') e^{-2qz'} dz' + e^{qz} \int_z^{\delta} f(z') e^{-2qz'} dz' \right) & ; \text{ si } z < \delta \\ \frac{a}{2p} e^{-qz} \left(\int_0^{\delta} f(z') dz' + \int_0^{\delta} f(z') e^{2qz'} dz' \right) & ; \text{ si } z > \delta \end{cases} \quad (3)$$

Les intégrales ci-dessus peuvent se calculer rapidement en utilisant :

$$\int f(z) e^{-2qz} dz = \begin{cases} -f(z) \frac{e^{-2qz}}{2q} + \int f'(z) \frac{e^{-2qz}}{2q} dz. \\ -f(z) \frac{e^{-2qz}}{2q} - f'(z) \frac{e^{-2qz}}{4q^2} + \int f''(z) \frac{e^{-2qz}}{4q^2} dz \\ -f(z) \frac{e^{-2qz}}{2q} - f'(z) \frac{e^{-2qz}}{4q^2} - f''(z) \frac{e^{-2qz}}{8q^3} + \int f'''(z) \frac{e^{-2qz}}{8q^3} dz \dots \end{cases}$$

D'où :

$$\int f(z) e^{-2qz} dz = \begin{cases} -\frac{e^{-2qz}}{2q} \left(f(z) + f'(z) \frac{1}{2q} + f''(z) \frac{1}{4q^2} \right) \\ \frac{e^{-2qz}}{2q} \left(\frac{(z-\delta)^2}{\delta^2} + \frac{(z-\delta)}{\delta^2} \frac{1}{q} + \frac{1}{2\delta^2 q^2} \right) \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_0^{\delta} f(z') e^{-2qz'} dz' = \frac{e^{-2q\delta}}{4\delta^2 q^3} \left(\frac{1}{4\delta^2 q^3} - \frac{1}{2\delta q^2} + \frac{1}{2q} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \int_z^\delta f(z')e^{-2qz'} dz' &= \frac{e^{-2q\delta}}{4\delta^2 q^3} \left(\frac{(z-\delta)^2}{2\delta^2 q} + \frac{(z-\delta)}{2\delta^2 q^2} + \frac{1}{4\delta^2 q^3} \right) e^{-2qz} \\
 e^{-qz} \int_0^\delta f(z')e^{-2qz'} dz' + e^{qz} \int_z^\delta f(z')e^{-2qz'} dz' &= \frac{e^{-q(z+2\delta)} + e^{-q(2\delta-z)}}{4\delta^2 q^3} \\
 &\quad - e^{-qz} \left(\frac{1}{2\delta^2 q^3} + \frac{z-2\delta}{2\delta^2 q^2} + \frac{\delta^2 + (z-\delta)^2}{2\delta^2 q} \right) \\
 \overline{K}_\delta^1(z,p) &= \begin{cases} \frac{a}{2p} \left(\frac{e^{-q(2\delta+z)} + e^{-q(2\delta-z)}}{4\delta^2 q^3} - e^{-qz} \left(\frac{(z-\delta)^3}{3\delta^2} + \frac{\delta}{3} + \frac{1}{2\delta^2 q^3} + \frac{z-2\delta}{2\delta^2 q^2} + \frac{\delta^2 + (z-\delta)^2}{2\delta^2 q} \right) \right) & \text{si } z < \delta \\ \frac{a}{2p} e^{-qz} \left(-\frac{\delta}{3} + \frac{e^{-2q\delta}}{4\delta^2 q^3} - \left(\frac{1}{4\delta^2 q^3} - \frac{1}{2\delta q^2} + \frac{1}{2q} \right) \right) & \text{si } z > \delta \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Si $z = 0$, $\overline{K}_\delta^1(z,p)$ devient :

$$\overline{K}_\delta^1(0,p) = \frac{a}{2p} \left(\frac{e^{-q2\delta}}{2\delta^2 q^3} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\delta q^2} - \frac{1}{2\delta^2 q^3} \right) = \left(a \frac{e^{-q2\delta} - 1}{4\delta^2 p q^3} - \frac{a}{2pq} + \frac{a}{2\delta p q^2} \right) \tag{6}$$

En utilisant les propriétés d'inversion, l'originale de (5) s'écrit :

$$\overline{K}_\delta^1(z,t) = a \begin{cases} \left(\frac{(at)^{3/2}}{\delta^2} \left(i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z}{2\sqrt{at}} \right) + i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z}{2\sqrt{at}} \right) - 2i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \right) \right. \\ \left. - (z-2\delta) \frac{(at)}{\delta^2} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) - (\delta^2 + (z-\delta)^2) \frac{(at)^{1/2}}{2\delta^2} i \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \right) & \text{si } z < \delta \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{(z-\delta)^3}{3\delta^2} + \frac{\delta}{3} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \right) & \end{cases} \tag{7}$$

$$\overline{K}_\delta^1(z,t) = a \begin{cases} \left(-\frac{(z-\delta)^3}{6\delta^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{\delta}{6} \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(4at)^{3/2}}{8\delta^2} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z}{2\sqrt{at}} \right) \right. \\ \left. - \frac{(4at)^{3/2}}{8\delta^2} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(4at)}{4\delta} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(4at)^{1/2}}{4} i \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) \right) & \text{si } z > \delta \end{cases} \tag{8}$$

Annexe 8

Calcul de la fonction $\bar{K}_\delta^2(z',p)$

$$\bar{K}_\delta^2(z',p) = \frac{a}{2pq} \int_0^{\delta} dz'' v(z'') \int_0^{\delta} dz v(z) e^{-qz} \left(e^{-q|z-z''|} + e^{-q|z+z''|} \right) \left(e^{-q|z''-z|} + e^{-q|z''+z|} \right) \quad (1)$$

$$\bar{K}_\delta^2(z',p) = \frac{a}{2pq} \int_0^{\delta} dz'' v(z'') \left(e^{-q|z''-z'|} + e^{-q|z''+z'|} \right) \left\{ \int_0^{z''} dz v(z) e^{-qz} \left(e^{-q(z''-z)} + e^{-q(z''+z)} \right) \right. \\ \left. + \int_{z''}^{\delta} dz v(z) e^{-qz} \left(e^{-q(z-z'')} + e^{-q(z+z'')} \right) \right\}$$

$$\bar{K}_\delta^2(z',p) = \frac{a}{2pq} \left\{ \int_0^{z'} dz'' v(z'') \left(e^{-q(z'-z'')} + e^{-q(z'+z'')} \right) \int_0^{z''} dz v(z) e^{-qz} \left(e^{-q(z''-z)} + e^{-q(z''+z)} \right) \right. \\ \left. + \int_{z'}^{\delta} dz'' v(z'') \left(e^{-q(z''-z')} + e^{-q(z''+z')} \right) \int_0^{z''} dz v(z) e^{-qz} \left(e^{-q(z''-z)} + e^{-q(z''+z)} \right) \right. \\ \left. + \int_0^{z'} dz'' v(z'') \left(e^{-q(z'-z'')} + e^{-q(z'+z'')} \right) \int_{z''}^{\delta} dz v(z) e^{-qz} \left(e^{-q(z-z'')} + e^{-q(z+z'')} \right) \right. \\ \left. + \int_{z'}^{\delta} dz'' v(z'') \left(e^{-q(z''-z')} + e^{-q(z''+z')} \right) \int_{z''}^{\delta} dz v(z) e^{-qz} \left(e^{-q(z-z'')} + e^{-q(z+z'')} \right) \right\}$$

$$\bar{K}_\delta^2(z',p) = \frac{a}{2pq} \left\{ e^{-qz'} \int_0^{z'} dz'' v(z'') \left(1 + e^{-2qz''} \right) \int_0^{z''} dz v(z) \left(1 + e^{-2qz} \right) \right. \\ \left. + \left(e^{qz'} + e^{-qz'} \right) \int_{z'}^{\delta} dz'' v(z'') e^{-2qz''} \int_0^{z''} dz v(z) \left(1 + e^{-2qz} \right) \right. \\ \left. + e^{-qz'} \int_0^{z'} dz'' v(z'') \underbrace{\left(2 + e^{2qz''} + e^{-2qz''} \right)}_{(e^{qz''} + e^{-qz''})^2} \int_{z''}^{\delta} dz v(z) e^{-2qz} \right. \\ \left. + \left(e^{qz'} + e^{-qz'} \right) \int_{z'}^{\delta} dz'' v(z'') \left(1 + e^{-2qz''} \right) \int_{z''}^{\delta} dz v(z) e^{-2qz} \right\}$$

$$\bar{K}_\delta^2(z',p) = \frac{a}{2} \left\{ \frac{\left(e^{qz'} + e^{-qz'} \right)}{pq} \left\{ \int_{z'}^{\delta} dz'' v(z'') e^{-2qz''} \int_0^{z''} dz v(z) \left(1 + e^{-2qz} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \int_0^{\delta} dz'' v(z'') \left(1 + e^{-2qz''} \right) \int_{z''}^{\delta} dz v(z) e^{-2qz} \right\} \dots (*) \right. \\ \left. \underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{K}_\delta^2(0,p) \text{ pour } z'=0} \right. \\ \left. + \frac{e^{-qz'}}{pq} \left\{ \int_0^{z'} dz'' v(z'') \left(1 + e^{-2qz''} \right) \int_0^{z''} dz v(z) \left(1 + e^{-2qz} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{z'} dz'' v(z'') \underbrace{\left(2 + e^{2qz''} + e^{-2qz''} \right)}_{(e^{qz''} + e^{-qz''})^2} \int_{z''}^{\delta} dz v(z) e^{-2qz} \right\} \dots (**) \right\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 (*) &\rightarrow \frac{(e^{qz'} + e^{-qz'})}{pq} \left\{ \int_{z'}^{\delta} dz'' v(z'') e^{-2qz''} \int_0^{z''} dzv(z) (1 + e^{-2qz}) \right\} \\
 &= \frac{(e^{qz'} + e^{-qz'})}{pq} \left\{ \int_{z'}^{\delta} dz'' v(z'') e^{-2qz''} \int_0^{z''} dzv(z) + \int_{z'}^{\delta} dz'' v(z'') e^{-2qz''} \int_0^{z''} dzv(z) e^{-2qz} \right\} \\
 &= \frac{(e^{qz'} + e^{-qz'})}{pq} \left\{ \int_{z'}^{\delta} dz'' v(z'') e^{-2qz''} \int_0^{z''} dzv(z) + \int_{z'}^{\delta} dz'' v(z'') \int_{z''}^{\delta} dzv(z) e^{-2qz} \right\} \\
 &\quad + \int_{z'}^{\delta} dz'' v(z'') e^{-2qz''} \int_0^{\delta} dzv(z) e^{-2qz} \\
 (*) &\rightarrow \frac{(e^{qz'} + e^{-qz'})}{pq} \left\{ \int_{z'}^{\delta} dz'' \left(\frac{(z'' - \delta)^5}{3\delta^4} + \frac{\delta (z'' - \delta)^2}{3\delta^2} \right) e^{-2qz''} \right. \\
 &\quad \left. + \int_{z'}^{\delta} dz'' \frac{(z'' - \delta)^2}{\delta^2} \int_{z''}^{\delta} dz \frac{(z - \delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz} \right. \\
 &\quad \left. + \int_{z'}^{\delta} dz \frac{(z - \delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz} \int_0^{\delta} dz \frac{(z - \delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz} \right\} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Calcul des 3 intégrales de (*) :

$$\bar{I}_1 = \frac{e^{qz'}}{qp} \int_{z'}^{\delta} dz'' \left(\frac{(z'' - \delta)^5}{3\delta^4} + \frac{\delta (z'' - \delta)^2}{3\delta^2} \right) e^{-2qz''} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{5(e^{-qz'} - e^{-q(2\delta - z')})}{8\delta^4 q^7 p} + \frac{5(z' - \delta)}{4\delta^4 q^6 p} e^{-qz'} + \frac{(z' - \delta)^5}{6\delta^4 q^2 p} e^{-qz'} + \frac{5(z' - \delta)^2}{4\delta^4 q^5 p} e^{-qz'} \\ &+ \frac{5(z' - \delta)^4}{12\delta^4 q^3 p} e^{-qz'} - \frac{e^{-q(2\delta - z')}}{12\delta q^4 p} + \frac{5(z' - \delta)^3}{6\delta^4 q^4 p} e^{-qz'} + \frac{1}{12\delta q^4 p} e^{-qz'} \\ &+ \frac{(z' - \delta)^2}{6\delta q^2 p} e^{-qz'} + \frac{(z' - \delta)}{6\delta q^3 p} e^{-qz'} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{e^{-qz'}}{qp} \int_{z'}^{\delta} dz'' \left(\frac{(z'' - \delta)^5}{3\delta^4} + \frac{\delta (z'' - \delta)^2}{3\delta^2} \right) e^{-2qz''} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{5(e^{-3qz'} - e^{-q(2\delta + z')})}{8\delta^4 q^7 p} + \frac{5(z' - \delta)}{4\delta^4 q^6 p} e^{-3qz'} + \frac{(z' - \delta)^5}{6\delta^4 q^2 p} e^{-3qz'} + \frac{5(z' - \delta)^2}{4\delta^4 q^5 p} e^{-3qz'} \\ &+ \frac{5(z' - \delta)^4}{12\delta^4 q^3 p} e^{-3qz'} - \frac{e^{-q(2\delta + z')}}{12\delta q^4 p} + \frac{5(z' - \delta)^3}{6\delta^4 q^4 p} e^{-3qz'} + \frac{1}{12\delta q^4 p} e^{-3qz'} \\ &+ \frac{(z' - \delta)^2}{6\delta q^2 p} e^{-3qz'} + \frac{(z' - \delta)}{6\delta q^3 p} e^{-3qz'} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\bar{I}_3 = \frac{e^{qz'}}{qp} \int_{z'}^{\delta} dz'' \frac{(z'' - \delta)^2}{\delta^2} \int_{z''}^{\delta} dz \frac{(z - \delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{5(e^{-qz'} - e^{-q(2\delta - z')})}{8\delta^4 q^7 p} + \frac{5(z' - \delta)}{4\delta^4 q^6 p} e^{-qz'} + \frac{5(z' - \delta)^2}{4\delta^4 q^5 p} e^{-qz'} + \frac{(z' - \delta)^3}{12\delta^4 q^4 p} e^{-q(2\delta - z')} \\ &+ \frac{3(z' - \delta)^3}{4\delta^4 q^4 p} e^{-qz'} - \frac{e^{-q(2\delta - z')}}{12\delta q^4 p} + \frac{(z' - \delta)^4}{4\delta^4 q^3 p} e^{-qz'} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\bar{I}_{-4} = \frac{e^{-qz'}}{qp} \int_{z'}^{\delta} dz'' \frac{(z''-\delta)^2}{\delta^2} \int_{z'}^{\delta} dz \frac{(z-\delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz} = + \left\{ \begin{aligned} & \frac{5(e^{-3qz'} - e^{-q(2\delta+z')})}{8\delta^4 q^7 p} + \frac{5(z'-\delta)}{4\delta^4 q^6 p} e^{-3qz'} + \frac{5(z'-\delta)^2}{4\delta^4 q^5 p} e^{-3qz'} + \frac{(z'-\delta)^3}{12\delta^4 q^4 p} e^{-q(2\delta+z')} \\ & + \frac{3(z'-\delta)^3}{4\delta^4 q^4 p} e^{-3qz'} - \frac{e^{-q(2\delta+z')}}{12\delta q^4 p} + \frac{(z'-\delta)^4}{4\delta^4 q^3 p} e^{-3qz'} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\bar{I}_{-5} = \frac{e^{qz'}}{qp} \int_{z'}^{\delta} dz'' \frac{(z''-\delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz''} \int_0^{\delta} dz \frac{(z-\delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz} = + \left(\begin{aligned} & \frac{1}{16\delta^4 q^7 p} (e^{-q(4\delta-z')} - e^{-q(2\delta-z')} + e^{-qz'} - e^{-q(z'+2\delta)}) - \frac{1}{8\delta^2 q^5 p} e^{-q(2\delta-z')} \\ & + \frac{1}{8\delta^3 q^6 p} (e^{-q(2\delta-z')} - e^{-qz'}) + \frac{(z'-\delta)}{8\delta^4 q^6 p} (e^{-qz'} - e^{-q(z'+2\delta)}) \\ & + \frac{1}{8\delta^2 q^5 p} e^{-qz'} - \frac{(z'-\delta)}{4\delta^3 q^5 p} e^{-qz'} + \frac{(z'-\delta)^2}{8\delta^4 q^5 p} (e^{-qz'} - e^{-q(z'+2\delta)}) \\ & + \frac{(z'-\delta)^2}{4\delta^2 q^3 p} e^{-qz'} - \frac{(z'-\delta)^2}{4\delta^3 q^4 p} e^{-qz'} + \frac{(z'-\delta)}{4\delta^2 q^4 p} e^{-qz'} \end{aligned} \right) \quad (8)$$

$$\bar{I}_{-6} = \frac{e^{-qz'}}{qp} \int_{z'}^{\delta} dz'' \frac{(z''-\delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz''} \int_0^{\delta} dz \frac{(z-\delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz} = + \left(\begin{aligned} & \frac{1}{16\delta^4 q^7 p} (e^{-q(4\delta+z')} - e^{-q(2\delta+z')} + e^{-3qz'} - e^{-q(3z'+2\delta)}) - \frac{e^{-q(2\delta+z')}}{8\delta^2 q^5 p} \\ & + \frac{(e^{-q(2\delta+z')} - e^{-3qz'})}{8\delta^3 q^6 p} + \frac{(z'-\delta)}{8\delta^4 q^6 p} (e^{-3qz'} - e^{-q(3z'+2\delta)}) + \frac{e^{-3qz'}}{8\delta^2 q^5 p} \\ & - \frac{(z'-\delta)}{4\delta^3 q^5 p} e^{-3qz'} + \frac{(z'-\delta)^2}{8\delta^4 q^5 p} (e^{-3qz'} - e^{-q(3z'+2\delta)}) + \frac{(z'-\delta)^2}{4\delta^2 q^3 p} e^{-3qz'} \\ & - \frac{(z'-\delta)^2}{4\delta^3 q^4 p} e^{-3qz'} + \frac{(z'-\delta)}{4\delta^2 q^4 p} e^{-3qz'} \end{aligned} \right) \quad (9)$$

Calcul des 2 intégrales de (**):

$$(**) \rightarrow e^{-qz'} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{z'} dz'' v(z'') (1+e^{-2qz''}) \int_0^{z'} dz v(z) (1+e^{-2qz}) \\ & + \int_0^{z'} dz'' v(z'') \underbrace{(2+e^{2qz''}+e^{-2qz''})}_{(e^{qz''}+e^{-qz''})^2} \int_{z''}^{\delta} dz v(z) e^{-2qz} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(**) peut se développer comme suit :

$$(**) \rightarrow e^{-qz'} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{z'} dz'' v(z'') \int_0^{z'} dz v(z) + \int_0^{z'} dz'' v(z'') \int_0^{z'} dz v(z) e^{-2qz} + \int_0^{z'} dz'' v(z'') e^{-2qz''} \int_0^{z'} dz v(z) \\ & + \int_0^{z'} dz'' v(z'') e^{-2qz''} \int_0^{\delta} dz v(z) e^{-2qz} + 2 \int_0^{z'} dz'' v(z'') \int_{z''}^{\delta} dz v(z) e^{-2qz} + \int_0^{z'} dz'' v(z'') e^{2qz''} \int_{z''}^{\delta} dz v(z) e^{-2qz} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Avec : $v(z'') = \frac{(z''-\delta)^2}{\delta^2}$;

$$\bar{I}_{-7} = \frac{e^{-qz'}}{qp} \int_0^{z'} dz'' \frac{(z''-\delta)^2}{\delta^2} \int_0^{z'} dz \frac{(z-\delta)^2}{\delta^2} = \left(\frac{(z'-\delta)^6}{18\delta^4 qp} e^{-qz'} + \frac{1}{9\delta qp} (z'-\delta)^3 e^{-qz'} \right) + \frac{\delta^2}{18qp} e^{-qz'} \quad (12)$$

$$\bar{I}_{-8} = \frac{e^{-qz'}}{qp} \int_0^{z'} dz'' \frac{(z''-\delta)^2}{\delta^2} \int_0^{z'} dz \frac{(z-\delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{9}{16\delta^4 q^7 p} (e^{-3qz'} - e^{-qz'}) + \frac{5}{4\delta^3 q^6 p} e^{-qz'} + \frac{(z'-\delta)}{8\delta^4 q^6 p} e^{-qz'} + \frac{9(z'-\delta)}{8\delta^4 q^6 p} e^{-3qz'} \\ & - \frac{5}{4\delta^2 q^5 p} e^{-qz'} + \frac{(z'-\delta)^2}{8\delta^4 q^5 p} e^{-qz'} + \frac{9(z'-\delta)^2}{8\delta^4 q^5 p} e^{-3qz'} + \frac{5}{6\delta q^4 p} e^{-qz'} + \frac{(z'-\delta)^3}{12\delta^4 q^4 p} e^{-qz'} \\ & + \frac{3(z'-\delta)^3}{4\delta^4 q^4 p} e^{-3qz'} + \frac{(z'-\delta)^4}{4\delta^4 q^3 p} e^{-3qz'} - \frac{5}{12q^3 p} e^{-qz'} + \frac{\delta}{6q^2 p} e^{-qz'} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\bar{I}_{-9} = \frac{e^{-qz'}}{qp} \int_0^{z'} dz'' \frac{(z''-\delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz''} \int_0^{z''} dz \frac{(z-\delta)^2}{\delta^2} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{5}{8\delta^4 q^7 p} (e^{-qz'} - e^{-3qz'}) - \frac{5}{4\delta^3 q^6 p} e^{-qz'} + \frac{5}{4\delta^2 q^5 p} e^{-qz'} - \frac{5(z'-\delta)}{4\delta^4 q^6 p} e^{-3qz'} \\ & - \frac{5(z'-\delta)^2}{4\delta^4 q^5 p} e^{-3qz'} - \frac{3}{4\delta q^4 p} e^{-qz'} - \frac{1}{12\delta q^4 p} e^{-3qz'} - \frac{5(z'-\delta)^3}{6\delta^4 q^4 p} e^{-3qz'} \\ & \frac{1}{4q^3 p} e^{-qz'} - \frac{(z'-\delta)}{6\delta q^3 p} e^{-3qz'} - \frac{5(z'-\delta)^4}{12\delta^4 q^3 p} e^{-3qz'} - \frac{(z'-\delta)^2}{6\delta q^2 p} e^{-3qz'} - \frac{(z'-\delta)^5}{6\delta^4 q^2 p} e^{-3qz'} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\bar{I}_{-10} = \frac{e^{-qz'}}{qp} \int_0^{z'} dz'' \frac{(z''-\delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz''} \int_0^{\delta} dz \frac{(z-\delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz} = \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{e^{-qz'} - e^{-q(2\delta+z')}}{16\delta^4 q^7 p} + \frac{1}{16\delta^4 q^7 p} (e^{-q(3z'+2\delta)} - e^{-3qz'}) - \frac{1}{4\delta^3 q^6 p} e^{-qz'} \right. \\ & \left. + \frac{e^{-q(2\delta+z')} + e^{-3qz'}}{8\delta^3 q^6 p} + \frac{(z'-\delta)}{8\delta^4 q^6 p} (e^{-q(3z'+2\delta)} - e^{-3qz'}) - \frac{e^{-q(2\delta+z')} + e^{-3qz'}}{8\delta^2 q^5 p} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\delta^2 q^5 p} e^{-qz'} + \frac{(z'-\delta)}{4\delta^3 q^5 p} e^{-3qz'} + \frac{(z'-\delta)^2}{8\delta^4 q^5 p} (e^{-q(3z'+2\delta)} - e^{-3qz'}) - \frac{1}{2\delta q^4 p} e^{-qz'} \right. \\ & \left. + \frac{(z'-\delta)^2}{4\delta^3 q^4 p} e^{-3qz'} - \frac{(z'-\delta)}{4\delta^2 q^4 p} e^{-3qz'} - \frac{(z'-\delta)^2}{4\delta^2 q^3 p} e^{-3qz'} - \frac{1}{4q^3 p} e^{-qz'} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\bar{I}_{-11} = \frac{e^{-qz'}}{qp} \int_0^{z'} dz'' \frac{(z''-\delta)^2}{\delta^2} \int_{z''}^{\delta} dz \frac{(z-\delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz} = \left\{ \begin{aligned} & \left(+ \frac{5}{8\delta^4 q^7 p} (e^{-qz'} - e^{-3qz'}) - \frac{5}{4\delta^3 q^6 p} (e^{-qz'} + e^{-3qz'}) + \frac{5}{4\delta^2 q^5 p} (e^{-qz'} - e^{-3qz'}) \right. \\ & - \frac{3}{4\delta q^4 p} e^{-qz'} - \frac{e^{-q(2\delta+z')}}{12\delta q^4 p} - \frac{(z'-\delta)^3}{12\delta^4 q^4 p} e^{-q(2\delta+z')} - \frac{3(z'-\delta)^3}{4\delta^4 q^4 p} e^{-3qz'} \\ & \left. + \frac{1}{4q^3 p} e^{-qz'} - \frac{(z'-\delta)^4}{4\delta^4 q^3 p} e^{-3qz'} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\bar{I}_{12} = \frac{e^{-qz}}{qp} \int_0^{z'} dz'' \frac{(z''-\delta)^2}{\delta^2} e^{2qz''} \int_{z''}^{\delta} dz \frac{(z-\delta)^2}{\delta^2} e^{-2qz} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{16\delta^4 q^7 p} (e^{-q(2\delta+z')} - e^{-q(2\delta-z')}) + \frac{1}{8\delta^3 q^6 p} e^{-q(2\delta+z')} + \frac{(z'-\delta)}{8\delta^4 q^6 p} e^{-q(2\delta-z')} \\ & + \frac{1}{8\delta^2 q^5 p} e^{-q(2\delta+z')} - \frac{(z'-\delta)^2}{8\delta^4 q^5 p} e^{-q(2\delta-z')} + \frac{1}{12\delta q^4 p} e^{-qz'} + \frac{(z'-\delta)^3}{12\delta^4 q^4 p} e^{-qz'} \\ & - \frac{1}{8q^3 p} e^{-qz'} + \frac{(z'-\delta)^4}{8\delta^4 q^3 p} e^{-qz'} + \frac{\delta}{10q^2 p} e^{-qz'} + \frac{(z'-\delta)^5}{10\delta^4 q^2 p} e^{-qz'} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Regroupant maintenant toutes ces intégrales suivant l'expression (2) :

Et finalement on :

$$\bar{K}_\delta^2(z',p) = \frac{a}{2} \{ \bar{I}_1(z',p) + \bar{I}_2(z',p) + \bar{I}_3(z',p) + \dots + \bar{I}_{12}(z',p) \} \quad (18)$$

Et la transformée inverse $K_\delta^2(z',t)$ de $\bar{K}_\delta^2(z',p)$ s'écrit :

$$K_\delta^2(z',t) = \frac{a}{2} \{ I_1(z',t) + I_2(z',t) + I_3(z',t) + \dots + I_{12}(z',t) \} \quad (19)$$

Avec :

$$I_1 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{5(4at)^{7/2}}{8\delta^4} \left(i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) + \frac{5(z'-\delta)(4at)^3}{4\delta^4} i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^5(4at)}{6\delta^4} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{5(z'-\delta)^2(4at)^{5/2}}{4\delta^4} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{5(z'-\delta)^4(4at)^{3/2}}{12\delta^4} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(4at)^2}{12\delta} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{5(z'-\delta)^3(4at)^2}{6\delta^4} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(4at)^2}{12\delta} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^2(4at)}{6\delta} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)(4at)^{3/2}}{6\delta} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$I_2 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{5(4at)^{7/2}}{8\delta^4} \left(i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) + \frac{5(z'-\delta)(4at)^3}{4\delta^4} i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^5(4at)}{6\delta^4} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{5(z'-\delta)^2(4at)^{5/2}}{4\delta^4} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{5(z'-\delta)^4(4at)^{3/2}}{12\delta^4} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(4at)^2}{12\delta} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{5(z'-\delta)^3(4at)^2}{6\delta^4} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(4at)^2}{12\delta} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^2(4at)}{6\delta} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)(4at)^{3/2}}{6\delta} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$I_3 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{5(4at)^{7/2}}{8\delta^4} \left(i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) + \frac{5(z'-\delta)(4at)^3}{4\delta^4} i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{5(z'-\delta)^2(4at)^{5/2} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right)}{4\delta^4} \\ & + \frac{(z'-\delta)^3(4at)^2 i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z'}{2\sqrt{at}} \right)}{12\delta^4} + \frac{3(z'-\delta)^3(4at)^2 i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right)}{4\delta^4} - \frac{(4at)^2 i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z'}{2\sqrt{at}} \right)}{12\delta} + \frac{(z'-\delta)^4(4at)^{3/2} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right)}{4\delta^4} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$I_{4=} \left\{ \begin{aligned} & \frac{5(4at)^{7/2}}{8\delta^4} \left(i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) + \frac{5(z'-\delta)(4at)^3}{4\delta^4} i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{5(z'-\delta)^2}{4\delta^4} (4at)^{5/2} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{(z'-\delta)^3}{12\delta^4} (4at)^2 i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{3(z'-\delta)^3 (4at)^2}{4\delta^4} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(4at)^2}{12\delta} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^4 (4at)^{3/2}}{4\delta^4} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$I_{5=} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{16\delta^4} (4at)^{7/2} \left(i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{4\delta-z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z'}{2\sqrt{at}} \right) + i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) - \frac{(4at)^{5/2}}{8\delta^2} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{(4at)^3}{8\delta^3} \left(i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) + \frac{(z'-\delta)}{8\delta^4} (4at)^3 \left(i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) \\ & + \frac{(4at)^{5/2}}{8\delta^2} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(z'-\delta)(4at)^{5/2}}{4\delta^3} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^2 (4at)^{5/2}}{8\delta^4} \left(i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) \\ & + \frac{(z'-\delta)^2 (4at)^{3/2}}{4\delta^2} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(z'-\delta)^2 (4at)^2}{4\delta^3} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)(4at)^2}{4\delta^2} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$I_{6=} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{16\delta^4} (4at)^{7/2} \left(i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{4\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) + i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) - \frac{(4at)^{5/2}}{8\delta^2} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{(4at)^3}{8\delta^3} \left(i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) + \frac{(z'-\delta)}{8\delta^4} (4at)^3 \left(i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) \\ & + \frac{(4at)^{5/2}}{8\delta^2} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(z'-\delta)(4at)^{5/2}}{4\delta^3} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^2 (4at)^{5/2}}{8\delta^4} \left(i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) \\ & + \frac{(z'-\delta)^2 (4at)^{3/2}}{4\delta^2} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(z'-\delta)^2 (4at)^2}{4\delta^3} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)(4at)^2}{4\delta^2} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$I_{7=} \left\{ \frac{(z'-\delta)^6 (4at)^{1/2}}{18\delta^4} \operatorname{ierfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^3 (4at)^{1/2}}{9\delta} \operatorname{ierfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{\delta^2 (4at)^{1/2}}{18} \operatorname{ierfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \right\} \quad (26)$$

$$I_8 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{9}{16\delta^4} (4at)^{7/2} \left(i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) + \frac{5(4at)^3}{4\delta^3} i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)}{8\delta^4} (4at)^3 i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{9(z'-\delta)(4at)^3}{8\delta^4} i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{5(4at)^{5/2}}{4\delta^2} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^2 (4at)^{5/2}}{8\delta^4} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{9(z'-\delta)^2 (4at)^{5/2}}{8\delta^4} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{5(4at)^2}{6\delta} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^3 (4at)^2}{12\delta^4} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{3(z'-\delta)^3 (4at)^2}{4\delta^4} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^4 (4at)^{3/2}}{4\delta^4} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{5(4at)^{3/2}}{12} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{\delta(4at)}{6} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$I_9 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{5}{8\delta^4} (4at)^{7/2} \left(i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) - \frac{5(4at)^3}{4\delta^3} i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{5}{4\delta^4} (4at)^{5/2} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & - \frac{5(z'-\delta)(4at)^3}{4\delta^4} i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{5(z'-\delta)^2 (4at)^{5/2}}{4\delta^4} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{3(4at)^2}{4\delta} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(4at)^2}{12\delta} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & - \frac{5(z'-\delta)^3 (4at)^2}{6\delta^4} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(4at)^{3/2}}{4} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(z'-\delta)(4at)^{3/2}}{6\delta} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & - \frac{5(z'-\delta)^4 (4at)^{3/2}}{12\delta^4} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(z'-\delta)^2 (4at)}{6\delta} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(z'-\delta)^5 (4at)}{6\delta^4} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$I_{10} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(4at)^{7/2}}{16\delta^4} \left(i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) + \frac{(4at)^{7/2}}{16\delta^4} \left(i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'+2\delta}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) - \frac{(4at)^3}{4\delta^3} i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{(4at)^3}{8\delta^3} \left(i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) + i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) + \frac{(z'-\delta)(4at)^3}{8\delta^4} \left(i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'+2\delta}{2\sqrt{at}} \right) - i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) \\ & - \frac{(4at)^{5/2}}{8\delta^2} \left(i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) + i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) + \frac{(4at)^{5/2}}{2\delta^2} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)(4at)^{5/2}}{4\delta^3} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{(z'-\delta)^2 (4at)^{5/2}}{8\delta^4} \left(i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'+2\delta}{2\sqrt{at}} \right) - i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) - \frac{(4at)^2}{2\delta} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^2 (4at)^2}{4\delta^3} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & - \frac{(z'-\delta)(4at)^2}{4\delta^2} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(z'-\delta)^2 (4at)^{3/2}}{4\delta^2} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(4at)^{3/2}}{4} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$I_{11} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{5(4at)^{7/2}}{8\delta^4} \left(i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) - \frac{5(4at)^3}{4\delta^3} \left(i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) \\ & + \frac{5(4at)^{5/2}}{4\delta^2} \left(i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) - \frac{3(4at)^2}{4\delta} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(4at)^2}{12\delta} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'+2\delta}{2\sqrt{at}} \right) \\ & - \frac{(z'-\delta)^3 (4at)^2}{12\delta^4} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'+2\delta}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{3(z'-\delta)^3 (4at)^2}{4\delta^2} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(4at)^{3/2}}{4} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(z'-\delta)^4 (4at)^{3/2}}{4\delta^4} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{3z'}{2\sqrt{at}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$I_{12} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(4at)^{7/2}}{16\delta^4} \left(i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) - i^7 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z'}{2\sqrt{at}} \right) \right) + \frac{(4at)^3}{8\delta^3} i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)(4at)^3}{8\delta^4} i^6 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & + \frac{(4at)^{5/2}}{8\delta^2} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta+z'}{2\sqrt{at}} \right) - \frac{(z'-\delta)^2 (4at)^{5/2}}{8\delta^4} i^5 \operatorname{erfc} \left(\frac{2\delta-z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(4at)^2}{12\delta} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^3 (4at)^2}{12\delta^4} i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \\ & - \frac{(4at)^{3/2}}{8} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^4 (4at)^{3/2}}{8\delta^4} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{\delta(4at)}{10} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{(z'-\delta)^5 (4at)}{10\delta^4} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Annexe 9

Etalonnage de l'émissivité d'une peinture noire

On recherche l'émissivité ε_n de la peinture noire en fonction de sa température. On utilise une plaque carrée d'épaisseur 3mm recouverte sur une face de la peinture noire, l'autre face comportant une résistance chauffante branchée à un générateur. Au centre de la plaque a été noyé un thermocouple, relié à une centrale d'acquisition de données. La caméra visualise la plaque sous une incidence normale. La distance objectif de la caméra est fixée à 900 mm. On mesure la température de la plaque, le générateur de courant permettant de faire varier cette température entre 20 et 140°C. Pour chaque température, la caméra permet d'accéder directement au niveau thermique du rayonnement mesuré I_m , qui se compose du rayonnement en provenance de la plaque, atténué par l'atmosphère, et des rayonnements de l'environnement, qui ont été réfléchis sur la plaque et également atténués par l'atmosphère, ainsi que les rayonnements émis par l'atmosphère elle-même :

$$I_m = \tau \varepsilon_n I(T) + (1 - \varepsilon_n) \tau I(T_{amb}) + (1 - \tau) I(T_{atm}) \quad (1)$$

$I(T_{amb})$ et $I(T_{atm})$ représentent respectivement le rayonnement émis par l'environnement à la température T_{amb} et le rayonnement propre de l'atmosphère à la température T_{atm} .

A chaque relevé de la température et du niveau thermique I_m , on doit noter également T_{atm} et effectuer une évaluation de $I(T_{amb})$. Cette dernière est réalisée en présentant à la caméra une feuille d'aluminium, de surface diffusante. On relève alors le signal de sortie correspondant de la caméra, noté I_a . Celui-ci s'exprime par :

$$I_a = \tau I(T_{amb}) + (1 - \tau) I(T_{atm}) \quad (2)$$

En remplaçant $I(T_{amb})$ en fonction de I_a dans la relation (1), on obtient l'expression de l'émissivité ε_n sous la forme suivante :

$$\varepsilon_n(T) = (I_m - I_a) / (\tau I(T) - I_a + (1 - \tau) I(T_{atm})) \quad (3)$$

La courbe d'étalonnage permettant d'accéder aux valeurs $I(T)$ et $I(T_{atm})$ pour une température donnée, on peut déterminer la valeur correspondante de l'émissivité ε_n (figure 1).

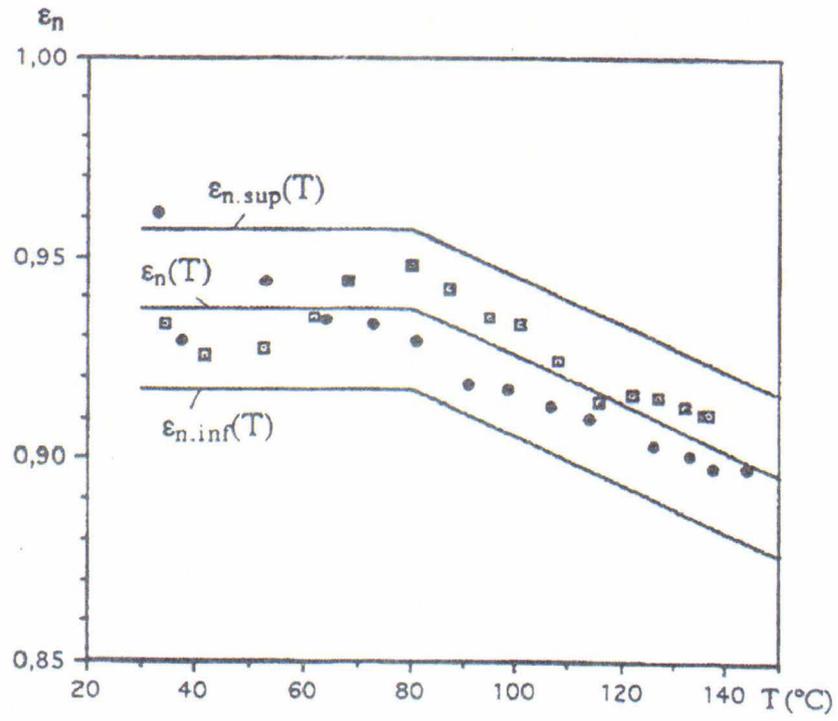


Figure.1 : Variation de l'émissivité ϵ_n de la peinture noire avec la température

Annexe 10

Étalonnage de la caméra infrarouge

Appelons $I(T)$ la valeur thermique numérisée du signal de sortie de la caméra lorsque celle-ci reçoit uniquement le rayonnement émis par un corps noir à la température T . La courbe d'étalonnage est la courbe de correspondance effective entre le signal $I(T)$ fourni par la caméra et la température T du corps noir observé, lors de la situation d'étalonnage de la caméra infrarouge.

1. Rappels sur le corps noir - Utilisation pour l'étalonnage

Le corps noir est, par définition, un objet idéal qui absorbe tous les rayonnements incidents dans n'importe quelle longueur d'onde.

La construction d'un corps noir est très simple en principe. Les caractéristiques d'une cavité ayant une température constante, équipée d'une petite ouverture, présentent presque parfaitement les propriétés d'un corps noir. En effet, le rayonnement qui pénètre par l'orifice entre et se réfléchit à l'intérieur de la boîte d'une manière répétitive en absorbant la totalité de l'énergie à l'exception d'une infime partie pouvant ressortir par l'ouverture. Ce modèle de corps noir observé au niveau de l'ouverture a le comportement d'un corps noir idéal pour la totalité des longueurs d'onde.

En équipant ce type de cavité isotherme d'un système de chauffage régulé, on obtient l'appareil appelé "radiateur à cavité". Il est utilisé généralement comme source de rayonnements et référence de température dans les laboratoires pour l'étalonnage des caméras infrarouges.

2. Etalonnage

L'opération d'étalonnage qui réside en la détermination de la courbe signal caméra $I(T)$ en fonction de la température T doit se faire pour une situation donnée (distance caméra-maquette, présence d'un hublot...). Chaque objectif, filtre ou gamme de mesure possède ses propres paramètres d'étalonnage.

La thermovision® 900 propose une fonction d'étalonnage, partiellement dérivée de la loi de Planck, et partiellement empirique :

$$I=R/(\exp(B/T)-F) \quad (1)$$

Où I représente la valeur numérisée du signal thermique et T la température de l'objet. Les constantes d'étalonnage ont été calculées pour plusieurs situations données et ont été stockées dans la mémoire de la caméra. Le système choisit automatiquement les constantes correctes en fonction de la combinaison choisie.

Pour que la formule (1) puisse être utilisée, il est sous-entendu qu'entre le signal de sortie de la caméra et les rayonnements reçus, il existe un lien proportionnel.

Néanmoins, pour une situation donnée, on peut réaliser soi-même l'étalonnage de la caméra. Celui-ci est effectué en présentant à la caméra un "corps noir" étalon (d'émissivité ϵ_{noir} indépendante de la température) sous incidence normale positionné à 900 mm de celle-ci, et chauffé par une résistance. La température $T(^{\circ}\text{C})$ du corps noir est donnée avec une précision de $\pm(0,3+0,004 T)^{\circ}\text{C}$. Le signal de sortie de la caméra est le niveau thermique I_N correspondant au rayonnement incident sur le détecteur (radiosité J_{inc}) en provenance du corps noir étalon N à la température T. La radiosité J_{inc} est constituée par la radiosité J_N émise par N, atténuée par l'atmosphère, ainsi que par les rayonnements σT_{atm}^4 émis au même instant par l'atmosphère elle-même :

$$J_{\text{inc}} = \tau J_N + (1 - \tau) \sigma T_{\text{atm}}^4 \quad (2)$$

τ représente le coefficient de transmission atmosphérique. T_{atm} est la température moyenne de l'air entre le corps noir étalon et l'objectif de la caméra. La radiosité J_N se compose de l'émission thermique $\epsilon_{\text{noir}}\sigma T^4$ en N, mais également l'ensemble des radiosités, $J_{\text{env}} = \sigma T_{\text{env}}^4$, émises par les autres surfaces de l'environnement et qui sont réfléchies sur N :

$$J_N = \epsilon_{\text{noir}}\sigma T^4 + (1 - \epsilon_{\text{noir}})\sigma T_{\text{env}}^4 \quad (3)$$

Rmq. : on rappelle que pour un matériau opaque, $\rho=1-\epsilon$ (ρ : facteur de réflexion)

La radiosité incidente sur le détecteur de la caméra s'écrit alors :

$$J_{\text{inc}} = \tau \epsilon_{\text{noir}}\sigma T^4 + \tau(1 - \epsilon_{\text{noir}})\sigma T_{\text{env}}^4 + (1 - \tau) \sigma T_{\text{atm}}^4 \quad (4)$$

Notons $I(T)$ le niveau thermique du signal de sortie de la caméra lorsque celle-ci reçoit uniquement le rayonnement σT^4 émis par un corps noir parfait à la température T. Le niveau thermique I_N donné par la caméra s'écrit :

$$I_N = \tau \epsilon_{\text{noir}} I(T) + \tau(1 - \epsilon_{\text{noir}}) I(T_{\text{env}}) + (1 - \tau) I(T_{\text{atm}}) \quad (5)$$

A chaque relevé de la température T du corps noir et du niveau thermique I_N , on doit noter également T_{atm} et effectuer une évaluation de $I(T_{\text{amb}})$. Cette dernière est réalisée en présentant à la caméra une feuille d'aluminium, de surface diffusante. On relève alors le signal de sortie correspondant de la caméra, noté I_a . Celui-ci s'exprime par :

$$I_a = \tau I(T_{\text{amb}}) + (1 - \tau) I(T_{\text{atm}}) \quad (6)$$

En remplaçant $I(T_{\text{amb}})$ en fonction de I_a dans la relation (5), le signal $I(T)$ est obtenu en fonction des autres données par :

$$I(T) = \left[I_N - (1 - \epsilon_{\text{noir}}) I_a - (1 - \tau) \epsilon_{\text{noir}} I(T_{\text{atm}}) \right] / \tau \epsilon_{\text{noir}} \quad (7)$$

Le coefficient de transmission atmosphérique τ peut être calculé, dans les conditions expérimentales, à partir de la caméra IR. La formule de mesure (7) permet alors d'accéder à la valeur de $I(T)$, et donc à la courbe d'étalonnage $T \rightarrow I(T)$, dans la gamme

de températures comprises entre 25 et 140°C. Celle-ci s'exprime correctement sous la forme d'un polynôme de degré 3.

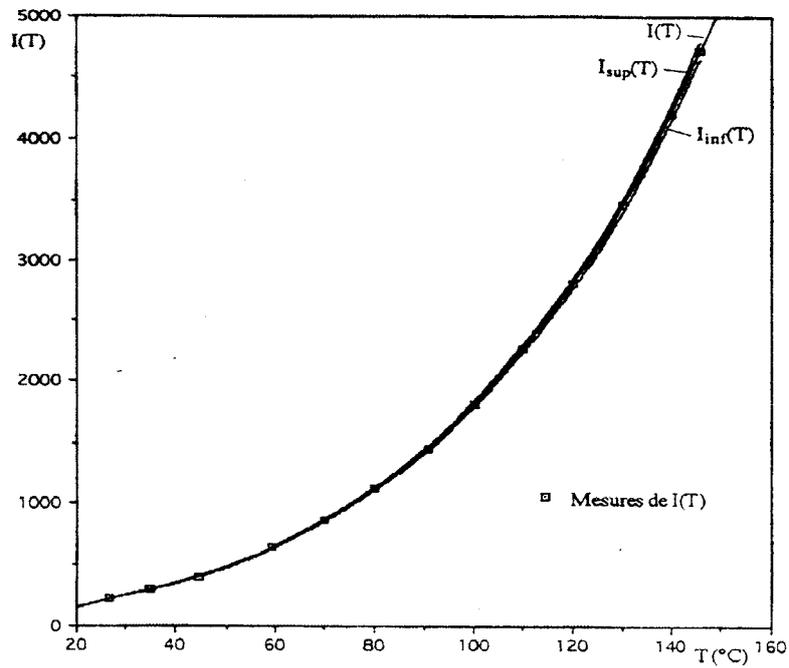


Figure.2 : Variation des mesures du signal de sortie de la caméra en fonction de la température du corps noir

Annexe 11

Etude par simulation numérique du coefficient d'échange h_e

On veut par cette simulation numérique déterminer l'évolution au cours du temps du coefficient d'échange global h_e en convection forcée en supposant connues h_i^0 (coefficient d'échange global sur la face inférieure de la plaque plane), φ_i (le flux de chauffage par rayonnement) et la température sur la face supérieure de la plaque $f(t)$ obtenue par la thermographie infrarouge.

On définit un coefficient d'échange global h_i^0 comme étant la somme du coefficient de convection et du rayonnement :

$$h_i^0 = h_i^{c0} + h_i^{r0} \quad (1)$$

1. Mise en évidence du problème

On rappelle que dans ce problème, il s'agit d'une plaque plane d'épaisseur finie e placée à l'intérieur d'une veine d'essai et soumise à un flux de chauffage sur sa face inférieure en présence d'un écoulement d'air sur l'autre face.

L'équation de propagation de la chaleur est supposée unidirectionnelle et s'écrit :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

Avec : $a = \lambda_s / \rho c_p$

On écrit les conditions aux limites spécifiques à ce problème :

- **Sur la face supérieure de la plaque :**

Cette face est soumise à l'écoulement d'air de la veine d'essai et est caractérisée par le coefficient d'échange convectif h_e ou bien $\left(H_e = \frac{h_e}{\lambda} \right)$, d'où la condition limite suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \Big|_{x=0} = H_e(t) f(t) \quad (3)$$

- **Sur la face inférieure de la plaque :**

Cette face est chauffée par infrarouge et le flux incident sur la plaque délivré par ce système de chauffage est nommé φ_i . La condition limite s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \Big|_{x=e} = -H_i^0 T(e,t) + \frac{\varphi_i(t)}{\lambda_s} \quad (4)$$

2. Discrétisation par différences finies

on utilise ici une approche de type différences finies : la plaque doit être découpée en I-1 tranches d'égale épaisseur Δx correspondant ainsi à I nœuds de discrétisation si l'on place un nœud sur chaque surface (figure 1).

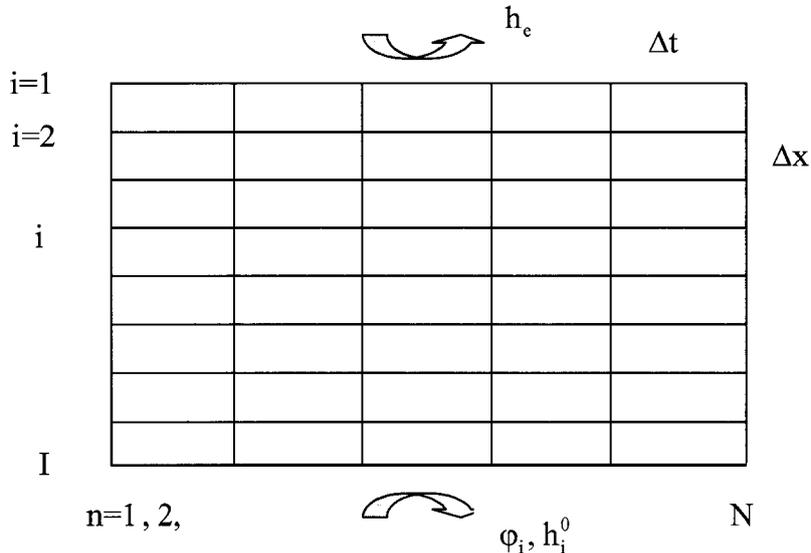


Figure 1 : Discrétisation de la plaque par différences finies

La méthode des différences finies est basée sur l'équation de l'énergie locale discrétisée et résolue de proche en proche. Pour effectuer la discrétisation de la plaque on exprime l'opérateur différentiel en un point en fonction de l'inconnu aux points voisins, en réalisant un développement de Taylor à l'ordre 1 du champ de température en un point.

2.1. Discrétisation de l'équation de la chaleur

Pour discrétiser l'équation de la chaleur on utilise une méthode implicite, cette méthode possède l'avantage d'être stable.

La notion de stabilité n'a de sens véritable que dans le cas d'un problème d'évolution comme dans cette étude $h_e(t)$. La stabilité d'un schéma aux différences finies traduit le fait que des erreurs locales à un instant donné s'affaiblissent quand t augmente.

Ainsi pour l'équation de la chaleur on obtient une équation implicite en écrivant le Laplacien de la température à l'instant $t+\Delta t$ où la solution n'est pas connue :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = a \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (5)$$

En posant $r = a\Delta t/\Delta x^2$, on peut exprimer la température à l'instant $t+\Delta t = (n+1)\Delta t$ en fonction des températures à l'instant $t = n\Delta t$, soit :

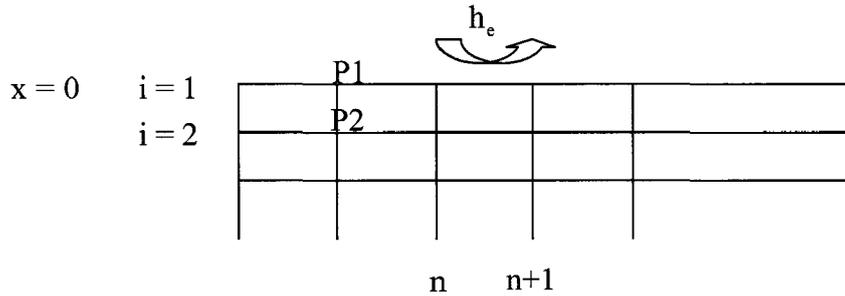
$$T_i^{n+1} = \frac{T_i^n + r(T_{i+1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})}{1+2r} \quad (6)$$

2.2. Discrétisation des conditions limites : schéma du 1er ordre en Δt et Δx

- **Face supérieure de la plaque :**

On suppose ici une condition limite de flux imposé. La condition limite de flux s'écrit :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \right|_{x=0} = \phi_i(x=0,t) \quad (7)$$



On discrétise l'équation de la chaleur autour du point $P1$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{P1} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{P1} = 0 \quad (8)$$

$$T_1^n = T_1^{n+1} - \Delta t \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{P1} + O(\Delta t^2) \quad (9)$$

On a alors :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{P1} = \frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (10)$$

De même :

$$T_{P2} = T_{P1} + \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{P1} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{P1} + O(\Delta x^3) \quad (11)$$

Or le flux s'écrit :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{P1} = \frac{\phi^{n+1}}{\lambda} \quad (12)$$

Soit :

$$T_2^{n+1} - T_1^{n+1} = \frac{\Delta x}{\lambda} \phi^{n+1} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{P1} + O(\Delta x^3) \quad (13)$$

On en déduit alors :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{P1} = 2 \frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{2}{\lambda \Delta x} \phi^{n+1} + O(\Delta x) \quad (14)$$

Dans l'équation de la chaleur (en négligeant le terme en $O(\Delta x, \Delta t)$) :

$$\frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta t} = \frac{2a}{\Delta x^2} (T_2^{n+1} - T_1^{n+1}) - \frac{2a}{\lambda \Delta x} \phi^{n+1} \quad (15)$$

Avec :

$$\phi^{n+1} = h_e^n T_1^{n+1} \quad (16)$$

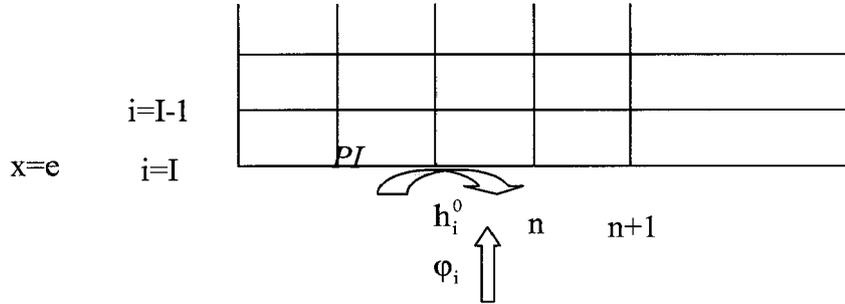
On en déduit h_e à l'instant $n+1$:

$$h_e^{n+1} = \frac{1}{\alpha T_1^{n+1}} \{ -(1+2r) T_1^{n+1} + T_1^n + 2r T_2^{n+1} \} \quad \text{avec : } \alpha = \frac{2a \Delta t}{\lambda \Delta x} \quad (17)$$

• **Face inférieure de la plaque :**

On a ici une condition limite de flux :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=e} = - \frac{\phi(x=e, t)}{\lambda} \quad (18)$$



On discrétise l'équation de la chaleur autour du point PI :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{PI} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{PI} = 0 \quad (19)$$

$$T_I^n = T_I^{n+1} - \Delta t \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{PI} + O(\Delta t^2) \quad (20)$$

On a alors :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{PI} = \frac{T_I^{n+1} - T_I^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (21)$$

De même :

$$T_{PI-1} = T_{PI} - \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{PI} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{PI} + O(\Delta x^3) \quad (22)$$

Or le flux s'écrit sur cette face de la plaque :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{PI} = - \frac{\phi^{n+1}}{\lambda} \quad (23)$$

Où :
$$\varphi^{n+1} = -\varphi_i + h_i^0 T_I^{n+1} \quad (24)$$

Soit :
$$T_{I-1}^{n+1} = T_I^{n+1} + \frac{\Delta x}{\lambda} \varphi^{n+1} + \frac{\Delta x^2}{\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{PI} + O(\Delta x^3) \quad (25)$$

On déduit alors :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{PI} = 2 \frac{T_{I-1}^{n+1} - T_I^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{2}{\lambda \Delta x} \varphi^{n+1} + O(\Delta x) \quad (26)$$

En négligeant le terme en $O(\Delta x, \Delta t)$, l'équation de propagation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{T_I^{n+1} - T_I^n}{\Delta t} - \frac{2a}{\Delta x^2} (T_{I-1}^{n+1} - T_I^{n+1}) + \frac{2a}{\lambda \Delta x} \varphi^{n+1} = 0 \quad (27)$$

On déduit alors T_I à l'instant $n+1$:

$$T_I^{n+1} = \frac{1}{1+2r+\alpha h_i^0} \{ T_I^n + 2r T_{I-1}^{n+1} + \alpha \varphi_i \} \quad (28)$$

3. Résolution du système d'équations

On écrit le système d'équations du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_e^{n+1} = \frac{1}{\alpha T_1^{n+1}} \{ -(1+2r) T_1^{n+1} + T_1^n \} + \frac{2r}{\alpha T_1^{n+1}} \theta_2^{n+1} \\ T_2^{n+1} = \frac{1}{1+2r} T_2^n + \frac{r}{1+2r} T_3^{n+1} + \frac{r}{1+2r} T_1^{n+1} \\ \vdots \\ T_{i>2}^{n+1} = \frac{1}{1+2r} T_i^n + \frac{r}{1+2r} T_{i+1}^{n+1} + \frac{r}{1+2r} T_{i-1}^{n+1} \\ \vdots \\ T_I^{n+1} = \frac{1}{1+2r+\alpha h_i^0} T_I^n + \frac{2r}{1+2r+\alpha h_i^0} T_{I-1}^{n+1} + \frac{\alpha \varphi_i}{1+2r+\alpha h_i^0} \end{array} \right. \quad (29)$$

En posant le vecteur :

$$X = \begin{pmatrix} h_e \\ T_2 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_I \end{pmatrix} \quad (30)$$

On écrit le système d'équation sous la forme :

$$X^{n+1} = AX^{n+1} + BX^n + C \quad (31)$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2r}{\alpha T_1^{n+1}} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{1+2r} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{r}{1+2r} & 0 & \frac{r}{1+2r} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2r} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha T_1^{n+1}} \{(1+2r) T_1^{n+1} - T_1^n\} \\ \frac{r}{1+2r} T_1^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\alpha \varphi_i}{1+2r + \alpha h_i^0} \end{bmatrix}$$

(33)

On obtient le vecteur X à l'instant n+1 à partir de l'expression à l'instant n, d'où l'écriture suivante :

$$X^{n+1} = (Id - A)^{-1} [BX^n + C] \quad (34)$$

On réalise un programme de calcul du coefficient de convection et son évolution en fonction du temps.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **W.J. Parker, R.J. Jenkins, C.P. Bulter and G.L. Abbot** : flash method in determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity. J. of Applied physics, vol. 32, p : 1679-1684 (1961).
- [2] **G. Sinicki** : Contribution à la mesure de résistance thermique de contact en régime transitoire. Thèse à l'université de Lyon, juin 1975.
- [3] **K. B. Larson, K. Koyama** : Correction for finite-pulse-time in very thin samples using the flash method of measuring thermal diffusivity. J. of App. Phys., Vol. 38, n°2, p : 465-474 (1967).
- [4] **A. Degiovanni, D. Balageas** : Mesure de la diffusivité thermique par la méthode Flash. Technique de l'ingénieur, 10-1986, R 2 955.
- [5] **A. Degiovanni** : Diffusivité et méthode Flash. R.G.T., n° 185. p : 420-442 (1977).
- [6] **A. Degiovanni** : Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode Flash. Revue. Phys. App. 21, p : 229-237 (1986).
- [7] **D. Balageas et D. Ory** : Quelques améliorations dans la détermination des transferts convectifs à partir de la thermographie infrarouge, Recherche Aérospatiale, n° 3, p : 213-219 (1980).
- [8] **D. Balageas, D. Boscher** : L'évaluation des pertes dans les expériences photothermiques impulsionnelles. Application à la détermination des coefficients de transfert convectif sur des maquettes en soufflerie, C.R.A.S. Paris, t. 305, Série II, p : 13-16 (1987).
- [9] **D. Balageas, D. Boscher, A. Deom, J. Fournier, R. Henry** : La thermographie infrarouge : un outil quantitatif à la disposition du thermicien. R.G.T. n° 322, p : 501-510 (1988).
- [10] **B. Remy, A. Degiovanni et D. maillet** : Mesure de coefficient d'échange pour des écoulements à faible vitesse, Rev. Gén. De Thermique, n° 397, p : 28-42. Janvier 1995

- [11] **D. J. Crowther** : Etude et développement d'une méthode optique pour la mesure du coefficient de convection, Thèse de Doctorat de l'université de Reims, Mars 1990.
- [12] **M. Lachi, M. Rebay, J. Padet** : Identification du coefficient d'échange convectif par la méthode photothermique impulsionnelle. SFT 27. Paris. mars 2002.
- [13] **M. Rebay, M. Lachi, J. Padet** : Mesure de coefficients de convection par méthode impulsionnelle – influence de la perturbation de la couche limite. Int. Journal of Heat Thermal Sciences. n° 41. p : 1161-1175. (2002).
- [14] **D. Petit, J. Dard et A. Degiovanni**, Détermination du coefficient d'échange entre un fluide et une paroi. Rev. Gén. Therm. n° 238 p : 719-732. octobre 1981.
- [15] **A. Massad, J. Dard, P. Gervais, et M. Laurent** : Coefficients d'échange dans une conduite cylindrique, Evaluation expérimentale, R.G.T., n° 286, p : 731-737. octobre 1985.
- [16] **A. Hadi et A. Degiovanni** : Mesure par une méthode transitoire du coefficient d'échange le long d'une ailette en milieu confiné, R.G.T, n° 304, Avril 1987. p : 251-262.
- [17] **S. Abboudi, A. Ropke, F. Papini** : Etude expérimentale du transfert thermique en régime instationnaire dans un conduit. Mesure des coefficients de transfert métal-fluide. R.G.T., n° 322, p : 731-737. 1988.
- [18] **E. M. S, J. L. Gregg** : Non-steady surface temperature effects of forced - convection heat transfer. Journal of Aeronautical Sciences, vol.24, p : 776-282 (1957).
- [19] **R. D. Cess** : Heat transfer to laminar flow across a flat plate with a non steady surface temperature. Journal of Heat Transfer, p : 274-280. (1961).
- [20] **D. E. Adams, B. Gebhart** : Transient forced convection from a flat plate subjected to a step energy input, J. Heat Transfer, p : 253-258. May 1964.
- [21] **G. Polidori, M. Lachi, J. Padet** : Unsteady convective heat transfer on semi infinite flat surface impulsively heated. Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol.25, n° 1. p : 33-42. (1998).

[22] **M. Rebay** : Contribution à l'étude de la convection forcée en régime variable Application à la mesure de coefficient d'échange par méthode impulsionnelle. Thèse à l'université de Reims. (1998).

[23] **J. Sucec** : Unsteady heat transfer between a fluid, with time varying temperature, and a plate : An exact solution', International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 18, p : 25-36 (1975).

[24] **P. L. Chambré** : Theoretical analysis of the transient heat transfer into a fluid flowing over a flat plate containing internal heat source. L. M. K. Boelter Anniversary Volume, McGraw-Hill, New York, 1964

[25] **M. Soliman, H. A. Johnson**. Transient heat transfer for turbulent flow over a flat plate of appreciable thermal capacity and containing time-dependent heat source. Journal of Heat Transfer, Series C, vol. 89, p : 362-370. (1967).

[26] **B.T.F. Chung, L.C. Thomas** : A transient surface renewal and penetration model for turbulent forced convection from a flat plate. 5th International Heat Transfer Conference, vol. 2, Tokyo, p : 124-136. (1974)

[27] **M. Lachi, M. Rebay, E. Mladin, et J. Padet** : Etude de la convection forcée transitoire sur une plaque plane avec la méthode intégrale. Journée d'Etudes de la Société Française des Thermiciens. 4 Décembre 2003.

[28] **M. Lachi, M. Rebay, E. Mladin, et J. Padet** : Alternative models for transient convection heat transfer in external flows over a plate exposed to a variable heat flux. Int. Journal of Heat Thermal Sciences. n° 43. p : 809-816. (2004).

[29] **R.C.C. Wang, B.T.F. Chung, L.C. Thomas** : Transient Convective Heat Transfer for Laminar Boundary Layer Flow With Effects of Wall Capacitance and Resistance. Journal of Heat transfer, Vol 99, p : 513-519. Novembre 1977.

[30] **D. Khaine** : Etude théorique du comportement thermique d'un bâtiment par la théorie des fonctions de Green. Thèse à l'université de Valenciennes. n° 55-489. (2000).

- [31] **D. Khaine, J.Y. Desmons, A. Khaine, R. Ben Younes, M. Le ray** : Simulation du comportement thermique d'un local par la méthode des fonctions de Green. Int. J. Therm. Sci. n° 38 p : 340-347. (1999).
- [32] **R. Ben Younes** : Prévion numérique et expérimentale de la réponse intrinsèque d'un échangeur en régime continu. Thèse à l'université de Valenciennes. n°39-135. (1993).
- [33] **Carslaw H.S., Jaeger J.C** : Conduction of heat in solids. Oxford University Press. (1959).
- [34] **I. S. Gradshteyn, M. Ayzhik**, Table Of Intergrals, Series, and Products - -
- [35] **G. F. Roach** : Green's Functions. Combridge University Press, London. New York. New Rochelle. Second Edition.
- [36] **D. Duffy** : Green's Functions With Applications. Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall / CRC. ISBN 1-58488-110-0. QA 371. D74. (2001).
- [37] **S. Doniach, E.H. Sondheimer** : Green's Functions For Solids State Physicists. ISBN. 1-86094-078-1. First Published 1998.
- [38] **A. Bairi, N.Laraqi** : Diagrams for fast transient conduction in sphere and long cylinder subject to sudden and violent thermal effects on its surface. Applied thermal Engineering n° 23, p : 1373-1390, December 2002.
- [39] **JF.Sacadura** : Initiation aux transferts thermiques. Cast. INSA de Lyon.Tec. et doc. de Paris. (1980).
- [40] **M. Stoian** : Couplage thermique convection – conduction en régime non stationnaire. Thèse à l'université de Reims. (2006).
- [41] **J. Padet** : Principes des transferts convectifs. ISBN 2-84054-014-2. Paris (1993).

Bibliothèque Universitaire de Valenciennes



00900444