



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude de la commande prédictive généralisée à temps continu des systèmes mécatronique

Laid Kefsi

► **To cite this version:**

Laid Kefsi. Contribution à l'étude de la commande prédictive généralisée à temps continu des systèmes mécatronique. Automatique / Robotique. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2007. Français. NNT : 2007VALE0026 . tel-03000739

**HAL Id: tel-03000739**

**<https://uphf.hal.science/tel-03000739>**

Submitted on 12 Nov 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITE DE VALENCIENNES**

**THESE**

**présentée pour obtenir**

**Le GRADE de DOCTEUR EN AUTOMATIQUE  
DE L'UNIVERSITE DE VALENCIENNES  
ET DU HAINAUT CAMBRESIS**

**Par**

**KEFSI Laid**

Sujet : **CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA  
COMMANDE PREDICTIVE GENERALISEE A TEMPS CONTINU  
DES SYSTEMES MECATRONIQUE**

**Soutenue le 10/07/2007 devant la Commission d'examen :**

AUÛBRUN Christophe	Professeur (Université Henri Poincaré Nancy)
BENBOUZID M.E.H.	Professeur (Université de Bretagne Occidentale)
BUSSY Pascal	Professeur (Université de Picardie Jules Verne)
CASTELAIN Jean-Marie	Professeur (Université de Valenciennes)
CHRIFI-ALAOUI Larbi	Maître de conférences (Université de Picardie Jules Verne)
PINCHON Daniel	Professeur (Université de Picardie Jules Verne)
POULLAIN. Serge	Invité (Docteur Ing. R&D, AREVA)

## Remerciements

*Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire des Technologises Innovantes (LTI) de Soissons.*

*J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Jean Marie CASTELAIN, Professeur à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, directeur de la thèse, Monsieur Larbi Chrifi ALAOUI, Maître de Conférence à l'université de Picardie, Monsieur Pascal BUSSY, Professeur à l'université de Picardie, et Monsieur D. PINCHON, Professeur à l'Université de Picardie.*

*Je suis très reconnaissant à :*

*Monsieur C. AUBRUN, Professeur à l'université Henri Poincaré et Monsieur M.E.H. BENBOUZID, Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger ce travail de recherche et d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques ont pleinement contribué à l'amélioration de ce travail.*

*Je tiens également à remercier :*

*Monsieur S. POULLAIN, Docteur Ingénieur Recherche et Développement, AREVA, d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à Monsieur Larbi. CHRIFI-ALAOUI, co-encadreur de ma thèse, pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée. J'ai tout particulièrement apprécié ses encouragements et ses conseils, surtout en fin de thèse. Notre collaboration m'a permis de progresser et de me constituer de solides bases pour le futur. En outre, il m'a permis de comprendre de ne jamais abandonner en recherche malgré les nombreux obstacles...*

*Je n'oublie pas d'adresser mes vifs remerciements à tous ceux du LTI-Cuffies, qui m'ont aidé de près ou de loin dans l'accomplissement de ce travail, en particulier , Sofiane M.MAHMOUD , V. Vincent, A. FAQIR et R. RAMANO.*

*Je remercie tous les membres de ma famille et en particulier mes parents et ma femme, qui m'ont accompagné moralement tout au long de ce parcours. Par leurs encouragements et leur appui moral inconditionnel et permanent, ils ont permis à ce travail d'arriver à son terme.*

# Table des Matières

## Notations

## Références personnelles

## Introduction

<b>1. Commande prédictive et contribution de la thèse.....</b>	<b>9</b>
1.1 Premières méthode d'investigation .....	9
1.2 Méthodes récentes .....	10
1.2.1 Commande par placement de pôles.....	10
1.2.2 Commande prédictive .....	10
1.2.3 Méthodes à base de modèle non paramétrique.....	11
1.2.4 Méthodes à base de modèle paramétrique.....	13
1.2.4.1 Commande prédictive généralisée .....	14
1.2.4.2 Commande prédictive généralisée à modèle de référence multiple .....	16
1.2.4.3 Commande prédictive fonctionnelle .....	18
1.2.4.4 GPC à temps continu et GPC utilisant l'opérateur delta .....	19
1.3 Commande prédictive non linéaire .....	22
1.4 Commande prédictive basée sur les techniques intelligentes.....	23
1.5 Commande non linéaire par modèle interne .....	25
1.6 Contribution de la thèse.....	25
<b>2. Commande Prédictive Généralisée.....</b>	<b>27</b>
2.1 Commande prédictive généralisée à temps continu (CGPC).....	27
2.1.1 Formulation mathématique .....	27
2.1.1.1 Description du modèle .....	27
2.1.1.2 Prédiction de la sortie .....	28
2.1.1.3 Ordre de la commande .....	30
2.1.1.4 Ecriture matricielle de l'équation de prédiction .....	30
2.1.1.5 Trajectoire de référence.....	31
2.1.1.6 Loi de commande .....	32
2.1.2 Système en boucle fermée.....	34
2.1.3 Choix des paramètres de synthèse.....	35
2.1.3.1 Horizon minimal de prédiction $t_1$ .....	35
2.1.3.2 Horizon maximal de prédiction $t_2$ .....	35
2.1.3.3 Ordre de prédiction de la sortie $N_y$ .....	35
2.1.3.4 Ordre de commande $N_u$ .....	35
2.2 Commande par modèle interne (IMC) .....	36
2.2.1 Principe de la commande par modèle interne .....	37
2.2.2 Propriétés de la structure IMC .....	38

2.2.2.1	Stabilité.....	39
2.2.2.2	Poursuite parfaite.....	39
2.2.2.3	Erreur statique nulle .....	40
2.3	Synthèse de la CGPC basée sur la structure IMC .....	40
2.4	Conclusion.....	45
<b>3.</b>	<b>Analyse de la Robustesse des Algorithmes CGPC et IMC/CGPC .....</b>	<b>46</b>
3.1	Rappel sur l'analyse de la commande prédictive.....	46
3.1.1	Cas de la GPC à temps discret .....	46
3.1.1.1	Théorèmes proposés par Clarke (Clarke et al., 1989).....	46
3.1.1.2	Analyse de Bitmead (Bitmead et al., 1990).....	47
3.1.2	Cas de la GPC à temps continu .....	49
3.1.3	Remarques sur les théorèmes précédents .....	50
3.2	Analyse des performances et de la robustesse des systèmes de commande .....	50
3.2.1	Définition d'un système de commande multivariable bouclé.....	50
3.2.2	Stabilité et performances nominales .....	51
3.2.3	Théorème du petit gain.....	54
3.2.4	Stabilité robuste .....	55
3.2.5	Performance robuste.....	59
3.3	Application à la commande CGPC .....	60
3.4	Amélioration de la robustesse de la commande CGPC.....	62
3.4.1	Robustesse de la commande LQ .....	62
3.4.2	La commande LQG.....	63
3.4.3	Le problème LTR .....	64
3.5	Analyse de la stabilité de la structure IMC .....	66
3.5.1	Structure de la boucle IMC .....	66
3.5.2	Condition de stabilité interne de la boucle IMC.....	68
3.5.3	Performance nominale de la boucle IMC .....	69
3.5.4	Conditions de stabilité de la boucle IMC en présence d'incertitudes de modélisation.....	70
3.5.5	Performance robuste .....	71
3.6	Application à la commande IMC/CGPC.....	72
3.7	Amélioration de la robustesse de la commande IMC/CGPC.....	74
3.7.1	Filtre de robustesse .....	75
3.8	Conclusion.....	76
<b>4.</b>	<b>L'approche « Local Model Networks » et la Commande Prédictive ....</b>	<b>77</b>
4.1	Présentation de modèles non linéaires .....	78
4.2	Combinaison optimale de modèles locaux.....	79
4.2.1	Définition .....	79
4.2.2	Classe de modèles locaux.....	81
4.2.3	Choix des fonctions de validation .....	81
4.2.4	Structure de modèles locaux .....	82
4.3	Propriétés d'approximation .....	82
4.4	Régimes de fonctionnement .....	89
4.5	Comparaison avec d'autres approches .....	93
4.6	Régime de fonctionnement basé sur une modélisation dans l'espace d'état.....	97
4.6.1	Représentation d'état basée sur l'approche "Local Model Networks".....	97
4.6.2	Observateurs d'état basés sur l'approche "Local Model Networks".....	100
4.6.3	Régulateurs locaux basés sur l'approche "Local Model Networks".....	102

4.7	Analyse de la stabilité d'un système de commande basée sur l'approche « Local Model Networks ».....	104
4.8	Commande CGPC avec le mode de glissement.....	112
4.8.1	Présentation du système.....	112
4.8.2	Surface de glissement.....	113
4.8.3	Synthèse de la loi de commande par mode de glissement.....	114
4.8.3.1	Dynamique glissante.....	116
4.9	Conclusion.....	118
<b>5.</b>	<b>Application de la commande prédictive à temps continu à un problème de niveau.....</b>	<b>119</b>
5.1	Simulation.....	119
5.1.1	Modélisation de la machine asynchrone en vue de la commande prédictive.....	119
5.1.1.1	Modèle nominal non linéaire.....	120
5.1.1.2	Modèle nominal linéaire tangent.....	121
5.1.1.3	Conditionnement du modèle linéarisé et normalisation.....	122
5.1.1.3.1	Facteur de conditionnement.....	122
5.1.1.3.2	Normalisation.....	123
5.1.1.3.3	Matrice de normalisation.....	124
5.1.2	Choix des paramètres de la CGPC pour la prédiction de la sortie.....	126
5.1.3	Analyse de la robustesse en fonction de $N_u$ et $Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .....	126
5.1.3.1	Cas de la commande CGPC avec observateur.....	126
5.1.3.1.1	Ordre de commande $N_u$ .....	126
5.1.3.1.2	Facteur de pondération $Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .....	130
5.1.4	Amélioration de la robustesse de la commande prédictive.....	133
5.1.4.1	En utilisant l'approche LTR (CGPC avec observateur).....	133
5.1.4.2	En utilisant le filtre de robustesse (structure de commande IMC/CGPC).....	134
5.1.5	Règles de choix des paramètres de la CGPC et commentaire.....	136
5.1.6	Résultat de simulation.....	136
5.2	Validation expérimentale.....	138
5.2.1	Description du banc d'essai expérimental.....	138
	La carte dSpace <sup>TM</sup> .....	139
5.2.2	Modélisation du système trois colonnes.....	140
5.2.3	Résultat expérimental : Cas linéaire.....	141
5.2.4	Résultat expérimental : Cas non linéaire.....	144
5.2.5	Résultat expérimental : CMG avec CGPC.....	145
5.3	Conclusion.....	149
	<b>Conclusion Générale et Perspectives.....</b>	<b>150</b>
	<b>Bibliographie.....</b>	<b>152</b>
	<b>Annexe A. Marges de Stabilité Multivariiales.....</b>	<b>161</b>
	<b>Annexe B. Commande par régime glissant et structure variable.....</b>	<b>164</b>

## Introduction Générale

L'automatique repose sur la notion de système, représentant un ensemble d'éléments pour former un tout structuré. L'automaticien construit un schéma théorique qui vise à rendre compte du comportement dynamique interne de ce système. On obtient alors un modèle, représentation mathématique qui doit tendre à ressembler le mieux possible à la réalité du processus. Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle avec le processus réel et l'adéquation de ce modèle à une forme mathématique exploitable. La qualité des résultats pratiques dépend évidemment de la qualité du modèle, qui ne sera jamais qu'une représentation imparfaite de la réalité, mais aussi de la robustesse de l'algorithme c'est-à-dire de la possibilité de la commande à assurer un certain niveau de performance vis-à-vis des incertitudes de modélisation ou des variations du processus à commander.

C'est dans le cadre d'une commande performante et robuste que s'inscrit notre étude. Les travaux présentés dans ce mémoire proposent une méthodologie de la commande prédictive. Nous nous intéressons particulièrement à la version continue de la commande prédictive (CGPC) développée par Demirciöglu et Gawthrop en (1991, 1998, 2002) et qui fait partie des lois de commande à horizon de prédiction étendue. Cette loi de commande se révèle comme une stratégie bien adaptée, capable de contrôler une large classe de systèmes. En effet, elle s'applique aussi bien aux systèmes instables, qu'aux systèmes à non minimum de phase. Une connaissance exacte du retard n'est pas indispensable.

Cette méthode, fondée sur la minimisation d'un critère quadratique, consiste à déterminer la commande qui permet de prendre en compte explicitement la connaissance d'une trajectoire à suivre dans le futur et de faire coïncider la sortie du procédé avec cette consigne. Elle est basée sur la connaissance d'un modèle du procédé et nécessite l'utilisation d'un calculateur numérique.

Concernant le modèle, celui-ci n'est autre qu'une approximation du système physique qu'il doit représenter. L'écart entre le modèle de commande et le procédé réel résulte d'une méconnaissance totale ou partielle de certains phénomènes physiques, comme par exemple les dynamiques hautes fréquences qui sont mal connues, ou volontairement négligées, les retards purs, les incertitudes sur les valeurs des paramètres physiques, les effets d'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement, ect... Il convient donc d'étudier la robustesse de la loi de commande appliquée, afin d'être capable de garantir la stabilité avec un certain degré de performance en dépit des incertitudes définies précédemment.

Une deuxième méthode de commande par modèle interne (IMC) a été proposée dans ce travail. Le choix de cette structure de commande, basée sur la minimisation du critère de la CGPC, vient de ce qu'elle est présentée dans la littérature comme favorisant la construction de systèmes robustes en présence d'une désadaptation du modèle, ce qui la rend particulièrement attrayante pour des applications en milieu industriel.

Soulignons dès à présent que nous avons privilégié, dans ce mémoire, la conception de méthodes de commande dans l'espace d'état, dont le principal intérêt réside dans leur mise en œuvre relativement simple avec l'éventualité d'une généralisation pour le cas des systèmes multi-variables.

Néanmoins, malgré les résultats et progrès encourageants enregistrés (Clarke, 1994), le réglage des paramètres qui interviennent au sein de la CGPC n'est pas simple et nécessite, parfois, une étude laborieuse. D'autre part, la synthèse de la loi de commande effectuée de façon algorithmique ne permet pas l'analyse de la stabilité, si ce n'est pas une constatation a posteriori.

L'objectif de ce mémoire est donc d'apporter une solution pour la synthèse d'une loi de commande prédictive multi-variable robuste. Pour cela, nous avons utilisé les notions de robustesse, de fonction de sensibilité, de fonction de sensibilité complémentaire, ce qui a permis d'établir quelques règles concernant le choix des paramètres de la CGPC.

De plus, afin d'accroître la stabilité robuste des algorithmes CGPC et IMC/CGPC :

- Pour la commande CGPC avec observateur, nous avons choisi les paramètres de synthèse du filtre de Kalman, de manière à réaliser la propriété de la LTR (Loop Transfer Recovery).
- Pour la commande IMC/CGPC, nous avons introduit un filtre dit de robustesse au niveau de la boucle de retour.

Cependant, lorsque la dynamique du modèle s'éloigne de celle du processus réel (cas des procédés non linéaires et/ou à paramètres variant dans le temps), les performances d'une commande linéaire se dégradent au fur et à mesure que l'écart entre les paramètres réels et ceux utilisés dans le calcul de la commande augmente. C'est la raison pour laquelle nous avons combiné l'algorithme de la CGPC avec l'approche « Local Model Network » de Johansen et Foss (1993, 1997).

L'avantage de cette approche est de décomposer le système en plusieurs régimes de fonctionnement (multimodèles), de manière à concevoir pour chacun un régulateur local approprié. La commande globale à appliquer au système n'est autre qu'une combinaison pondérée de ces régulateurs locaux.

Afin d'étudier les performances de la commande CGPC, et de proposer une solution de régulation des systèmes lents, une combinaison de la CGPC avec le mode glissant est proposé.

Souhaitant la synthèse d'une loi de commande performante qui possède de bonnes qualités de robustesse, nous avons testé les algorithmes de commande proposés dans ce mémoire par simulation sur un modèle de la machine asynchrone et sur un banc d'essai de trois colonnes.

## **Organisation de la thèse**

Cette thèse est divisée en cinq chapitres, organisés de la façon suivante.

1. Dans le chapitre 1, nous passons en revue différents travaux développés ces dernières années sur la commande prédictive et nous présentons notre contribution.
2. Le chapitre 2 est dédié à la présentation de deux algorithmes de la commande prédictive généralisée à temps continu, basée sur une représentation d'état : une

structure de commande avec observateur (CGPC) d'une part, et une structure de commande par modèle interne (IMC/CGPC) d'autre part.

3. Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la robustesse des lois de commandes présentées aux chapitres précédents.
4. Le chapitre 4 est consacré à une méthode de représentation des systèmes non linéaires basée sur l'approche « Local Model Network » de Johansen et Foss. Cette méthode est étendue aux systèmes non linéaires continus dans le cas d'une représentation d'état. Ensuite, une étude sur l'analyse de la stabilité du système de commande a été établie. A ce propos, il sera énoncé une extension du théorème proposé par Tanaka (Tanaka et al., 1996, 2007) pour les systèmes de commande par logique floue. L'extension de ce théorème est appliquée aux systèmes de commandes basées sur l'approche LMN avec observateurs.
5. Le chapitre 5 présente les simulations et l'application des algorithmes de la commande prédictive CGPC, IMC/CGPC, et CGPC/LMN dans le cas de la commande linéaire et non linéaire sur un modèle de machine asynchrone et sur un banc hydraulique à trois colonnes.

## 1. Commande prédictive et contribution de la thèse

Durant ces dernières années, l'étude théorique de la commande prédictive et son application dans le domaine industriel ont connu un développement considérable. L'idée principale de cette approche, est de transformer le problème classique d'une commande de la sortie à l'instant présent, par la commande d'une prédiction de la sortie à un ou à des instants futurs. Cette notion de sortie prédite permet de prendre en compte l'effet de retard, à condition que cette prédiction soit faite à un instant au moins égal à l'instant présent, auquel on ajoute le retard. D'autre part, c'est une méthode bien adaptée aux problèmes de poursuite de trajectoire, puisqu'elle prend en compte explicitement la connaissance d'une trajectoire future et de faire rallier la sortie du système avec cette consigne.

Dans ce chapitre nous allons tout d'abord faire un rappel des différentes stratégies de commandes prédictives employées au cours de ces dernières années, et nous introduirons en particulier la notion de commande prédictive généralisée à temps discret puis à temps continu. La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à la présentation de notre contribution.

### 1.1 Premières méthodes d'investigations

Les premières investigations dans ce domaine ont véritablement débuté dans les années soixante. Smith a d'abord proposé une commande basée sur l'utilisation d'un modèle de prédiction et d'une loi de commande classique (Smith, 1959). Le prédicteur de Smith avait pour but de prendre en compte l'effet d'un retard dans la boucle de commande.

Le plus célèbre de ces algorithmes est certainement la commande à variance minimale (MV), proposée par Åström et Wittenmark (Åström et Wittenmark, 1973, Li 2002). Cette commande est basée sur une prédiction de la sortie à  $d$  pas en avance, où  $d$  représente le nombre de pas d'échantillonnage qui correspond au retard du système. La commande est alors synthétisée par la minimisation d'un critère quadratique, basée sur l'erreur de prédiction de la sortie par rapport à la référence à l'instant  $t+d$  :

$$J = E\left\{[y(t+d) - y_c(t+d)]^2\right\} \quad (1.1)$$

où  $y(t)$  est la sortie du système,  $y_c(t)$  est la consigne et  $E[.]$  représente l'opérateur « espérance mathématique ».

L'inconvénient majeur de la commande à variance minimale est son domaine d'application relativement restreint. En effet, il faut, dans ce cas, connaître exactement la valeur du retard (ce qui est pas toujours évident en pratique), et disposer d'un modèle de prédiction à phase minimale, c'est-à-dire à inverse stable. Une solution à ce problème a été apportée par l'incorporation dans le critère (1.1) d'une pondération du terme de commande (Clarke and Gawthrop, 1975, 1979). C'est la commande à Minimum de Variance Généralisée (GMV), dont le critère est le suivant :

$$J = E\left\{(y(t+d) - y_c(t+d))^2 + \lambda u^2(t)\right\} \quad (1.2)$$

où  $\lambda$  représente la pondération sur la commande.

Une autre variante de la loi de commande GMV (Clarke and Gawthrop, 1975), a été obtenue en remplaçant dans le critère précédent (1.2), le terme  $u(t)$ , par  $\Delta u(t)$ , où  $\Delta u(t)$  représente l'incrément de commande défini par :

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t-1) \quad (1.3)$$

Le critère (1.2) devient alors :

$$J = E\{(y(t+d) - y_c(t+d))^2 + \lambda(\Delta u(t))^2\} \quad (1.4)$$

L'intérêt de cette démarche, est qu'à chaque instant  $t$ , le critère  $J$  sera minimisé par rapport à  $\Delta u(t)$ , ce qui va permettre alors d'introduire une action intégrale dans la boucle de commande.

## 1.2 Méthodes récentes

Par la suite, deux méthodes ont été proposées, pour pallier aux problèmes rencontrés : présence du retard ou système à phase minimale. Le placement de pôles (Ray 2002), (Åström et Wittenmark, 1980), (Wellstead et al., 1979), et le concept de prédiction à horizon étendu, comme par exemple, les algorithmes : IDentification/COMmand (IDCOM) proposé par Richalet (Richalet et al., 1978) et Model Algorithmic Control (MAC) proposé par Rouhani et Mehra (1982).

### 1.2.1 Commande par placement de pôles

La commande par placement de pôles est une bonne alternative au régulateur PID qui ne nécessite ni une connaissance précise du retard, ni un modèle à phase minimale. En effet, il suffit d'augmenter l'ordre du modèle pour prendre en compte les incertitudes sur la valeur du retard. L'inconvénient majeur de cette méthode est le manque de robustesse numérique de la résolution de l'équation de Bezout (présence de facteurs communs), (Clarke, 1982) ; cela conduit généralement à une détérioration des performances, et éventuellement à une instabilité du système de commande.

### 1.2.2 Commande prédictive

Finalement, la notion de commande prédictive à horizon étendue est apparue comme une solution possible, car elle fait appel à un ensemble de prédictions effectuées sur un horizon supérieur au retard, d'où une relative insensibilité à la valeur de ce retard. De plus, les commandes qui utilisent ce concept ne font pas appel à des annulations de pôles et de zéros, ce qui améliore l'insensibilité des algorithmes résultants par rapport à la stabilité du modèle inverse. Il faut aussi noter que le fait de prédire plus loin le comportement du système, permet d'obtenir des commandes moins brusques, et donc d'améliorer la continuité du fonctionnement du procédé considéré.

De ce fait, plusieurs équipes de recherche se sont intéressées au sujet et ont proposé différents algorithmes de commande prédictive. Même si chaque algorithme possède sa propre spécificité, on peut dégager quelques points communs qui constituent le fondement de cette stratégie de commande :

A chaque période d'échantillonnage, la commande calculée minimise un critère quadratique sur un horizon futur fini :

Le critère est constitué en général de l'écart entre la consigne (ou la trajectoire issue de celle-ci) et la sortie prédite du système. Mais, il peut également inclure une pondération sur la commande ou sur son incrément.

Pour effectuer la prédiction de la sortie du système, il faut disposer d'un modèle de représentation de celui-ci. Ce modèle est linéaire ; il peut être issu d'un calcul analytique ou être le résultat d'une identification du système.

Le schéma de principe de tels algorithmes est représenté sur la figure suivante (Fig.1.1) :

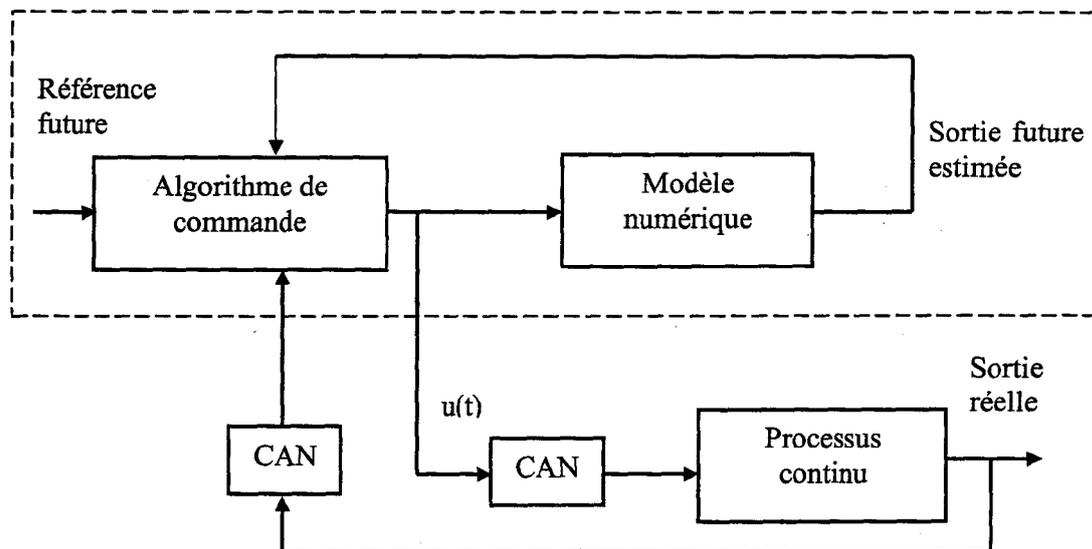


Fig.1.1 Principe de la commande prédictive par ordinateur numérique

Le concept de prédiction étendue (Long-Range Prédictive Control, LRPC), en tant qu'outil de synthèse de la commande, est dû à Richalet (Richalet et al., 2004, 1993, 1978). Celui-ci a proposé une méthode basée sur une modélisation du procédé à partir de la réponse impulsionnelle, couplée à la synthèse d'une trajectoire de référence qui représente le comportement désiré en boucle fermée. Mais cette méthode ne permet pas de stabiliser les systèmes instables en boucle ouverte, ou à phase non minimale.

### 1.2.3 Méthodes à base de modèle non paramétrique

Parmi les premiers algorithmes de commande prédictive, on trouve la commande par matrice dynamique (Dynamic Matrix Control, DMC, Culter et Ramaker, 1980), dans

laquelle la prédiction se fait à l'aide d'un modèle de convolution basé sur la réponse indicielle sur un horizon pris entre 95% et 99% de sa valeur finale (cf.Fig.1.2).

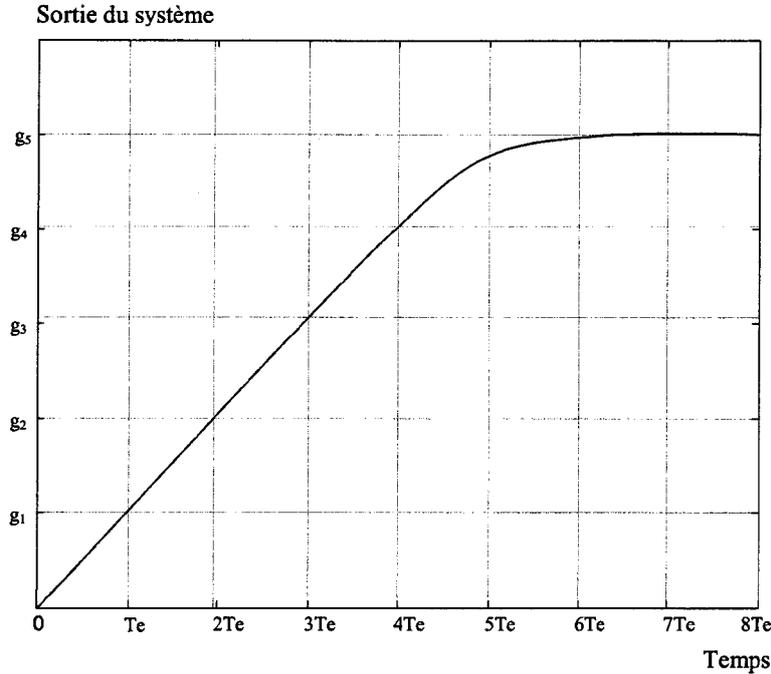


Fig. 1.2 Réponse indicielle du système

La réponse du système, dans le cas mono-variable, basée sur la commande DMC est :

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) + n(t) \quad (1.5)$$

où  $y(t)$  représente la sortie du système obtenue à partir de ses réponses indicielles,  $n(t)$  est l'action de perturbation à chaque instant  $t$  et  $g_i$  le coefficient correspondant à la valeur de la réponse indicielle du système.

Le critère quadratique à minimiser est du type :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j) - y_c(t+j)]^2 \quad (1.6)$$

où  $\hat{y}(t)$  représente la sortie estimée.

Si on cherche une séquence de commande variant de façon moins brusque, i.e. douce, le critère précédent peut alors comporter à la fois les erreurs de prédiction et le terme de commande :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j) - y_c(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (1.7)$$

avec la prédiction de la sortie future qui s'écrit :

$$\hat{y}(t+j) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+j-i) + n(t+j) \quad (1.8)$$

avec

$$n(t+j) = n(t) = y(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) \quad (1.9)$$

Par la suite, Bruijin a proposé un algorithme basé sur l'utilisation d'un modèle de réponse impulsionnelle (Bruijin, 1984) :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i u(t-i) + n(t) \quad (1.10)$$

Le critère à minimiser est semblable au critère précédent (1.7).

#### 1.2.4 Méthodes à base de modèle paramétrique

Bien que ces méthodes semblent séduisantes, elles apparaissent largement limitées par le type de modèle de prédiction utilisé (modèle non paramétrique obtenu par réponse impulsionnelle ou indicielle). En effet, ces modèles ont un intérêt restreint et ne fournissent pas beaucoup d'informations sur le système, notamment en ce qui concerne les systèmes instables en boucle ouverte. C'est pourquoi les études qui ont suivi se sont tournées vers l'utilisation de modèles de type paramétrique (fonction de transfert ; représentation d'état) à temps continu ou discret. Le premier modèle utilisé a été le modèle entrée/sortie de type ARMA (Auto Régressif à Moyenne Ajustée). Ce modèle permet de représenter l'essentiel de la dynamique du système, de plus, il prend en compte le comportement instable du système. Il est défini par :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d) + C(q^{-1})\xi(t) \quad (1.11)$$

où

$q^{-1}$  : est l'opérateur retard, défini par  $q^{-1}y(t) = y(t-1)$

$d$  : est le retard,

$A, B$  et  $C$  : sont des polynômes en  $q^{-1}$ ,

$\xi(t)$  : est une séquence aléatoire de variables indépendantes.

En 1984, Ydstie propose la Commande Adaptative à Horizon Etendu (Extended Horizon Adaptive Control, EHAC), qui satisfait la relation suivante (Ydstie, 1984) :

$$E\{y(t+j) - y_c(t+j)\} = 0 \quad \text{avec } j > d \quad (1.12)$$

Le calcul de la commande  $u(t)$ , à appliquer au procédé, se fait alors par minimisation d'un critère quadratique selon le principe de la commande à horizon fuyant (ou glissant), (Receding Horizon Tracking Control, RHTC ; Gu et al 2006, Kwon et Pearson, 1992, 1977, Foulard et al, 1987). La stabilité de cet algorithme est garantie pour les systèmes à phase non minimale si  $j$  est choisi suffisamment grand.

### 1.2.4.1 Commande prédictive généralisée

La commande prédictive généralisée (Generalized Predictive Control, GPC) proposée par Clarke en 1985, est l'un des derniers membres de la famille des commandes prédictives à base de modèle (Model-Based Predictive Control, MBPC ; Clarck et al, 1994, 1987a, Gregorcic 2003), et se veut comme une généralisation des algorithmes cités ci-dessus.

Le modèle de prédiction utilisé, est le modèle CARIMA (Controlled Auto Regressive Integrator Moving Average). Ce dernier est une extension du modèle ARMA, dans la mesure où il incorpore un effet intégral :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d) + \frac{C(q^{-1})\xi(t)}{\Delta(q^{-1})} \quad (1.13)$$

avec

$$\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

Le but de cette modélisation, qui introduit un intégrateur dans la fonction de transfert, est d'annuler toute erreur statique vis-à-vis des consignes et des perturbations de type échelon.

Le calcul du prédicteur, à  $j$  pas de la sortie (cf. Fig.1.3), fait intervenir la résolution des équations de Bezout :

$$\begin{aligned} \Delta(q^{-1})A(q^{-1})E_j(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) &= C(q^{-1}) \\ E_j(q^{-1})B(q^{-1}) &= G_j(q^{-1})C(q^{-1}) + q^{-j}H_j(q^{-1}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

où :  $E_j(q^{-1}), F_j(q^{-1}), G_j(q^{-1})$  et  $H_j(q^{-1})$  sont des polynômes en  $q^{-1}$ ,  
avec :

$$\begin{aligned} \deg(E_j(q^{-1})) &= j-1, \\ \deg(F_j(q^{-1})) &= \max\{\deg(A(q^{-1})), \deg(C(q^{-1}) - j)\}, \\ \deg(G_j(q^{-1})) &= j-1 \\ \deg(H_j(q^{-1})) &= \max\{\deg(B(q^{-1})), \deg(C(q^{-1}))\} - 1 \end{aligned}$$

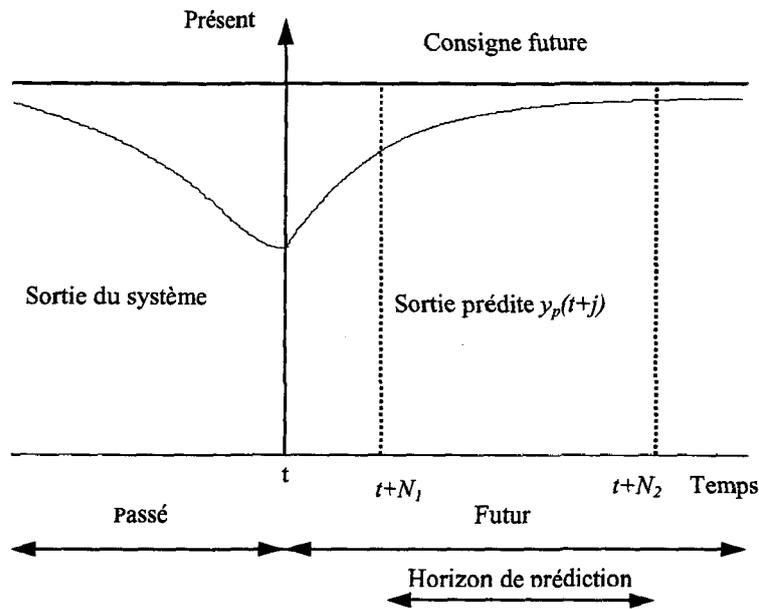


Fig.1.3. Fenêtre de prédiction de la sortie

Une séquence de commande est ensuite calculée, de manière à minimiser l'écart entre les sorties prédites et les références correspondantes, au sens d'un critère quadratique, sous la contrainte que la commande ne varie pas au delà d'un certain horizon (cf. F.1.4).

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j) - y_c(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (1.15)$$

sous la contrainte :  $\Delta u(t+j) = 0$  pour  $j \geq N_u$

où

$N_1$  : est l'horizon minimal de prédiction,

$N_2$  : est l'horizon maximal de prédiction,

$N_u$  : est l'horizon de commande,

$\lambda$  : est la pondération sur la commande.

La philosophie de la commande à horizon fuyant est conservée, c'est-à-dire que seule la première commande est appliquée. Finalement, la combinaison des notions de prédiction à horizon étendu et d'horizon de commande (cf. équation 1.15), rend la GPC peu sensible aux problèmes de retard variable ou inconnu, et de déphasage non minimal (Clarck et al., 1987a, 1987b).

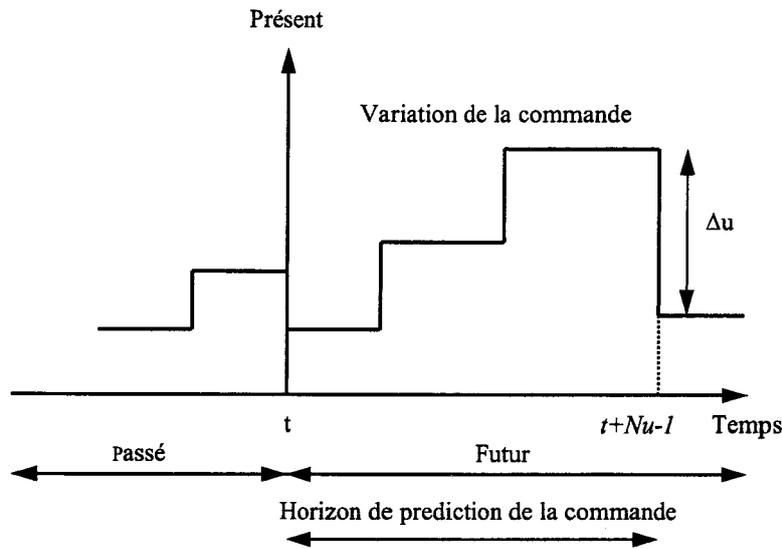


Fig 1.4. Fenêtre de prédiction de la commande

#### 1.2.4.2 Commande prédictive généralisée à modèle de référence multiple

Plusieurs développements de cette méthode ont été proposés, mais le plus significatif est certainement la Commande Prédictive Généralisée à Modèle de Référence Multiple, GPC/MRM (Kamel et al., 2007 ; Ivring et al., 1986 ; Najing et al., 1990). L'idée de base consiste en une interprétation adéquate du principe de placement de pôles sous forme d'un problème de régulation par rapport à deux indices de performance, à savoir les erreurs de poursuite de l'entrée et de la sortie du procédé vis-à-vis de leurs trajectoires de référence. La méthode en question permet, d'une part, d'incorporer une capacité de poursuite explicite dans les méthodes de synthèse avec minimisation d'un critère quadratique, en l'occurrence la commande prédictive généralisée (Clarck et al., 1987a) et, d'autre part, de spécifier une partie de la dynamique de régulation du système de commande. La figure suivante montre le schéma général de l'algorithme GPC/MRM.

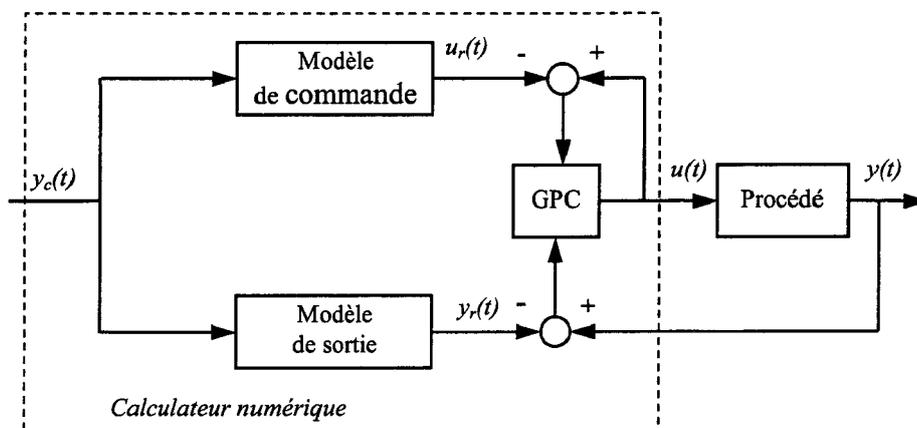


Fig1.5. Schéma général de commande par un algorithme GPC/MRM

La synthèse de la loi de commande est établie à partir d'un modèle de type CARIMA. Pour introduire d'une manière naturelle l'objectif de commande, on considère la loi de commande par placement de pôles :

$$S(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})y(t) = T(q^{-1})y_r(t+1) \quad (1.16)$$

où  $y(t)$  est la séquence de référence qui peut être engendrée à partir d'un modèle de référence de la forme.

$$A_r^*(q^{-1})y_r(t) = B_r^*(q^{-1})y_c(t-1) \quad (1.17)$$

Les équations en boucle fermée deviennent alors :

$$y(t) = \frac{q^{-1}B_r^*(q^{-1})T(q^{-1})B(q^{-1})}{A_r^*(q^{-1})P(q^{-1})} y_c(t) + \frac{S(q^{-1})}{P(q^{-1})} e(t) \quad (1.18)$$

$$u(t) = \frac{B_r^*(q^{-1})T(q^{-1})A(q^{-1})}{A_r^*(q^{-1})P(q^{-1})} y_c(t) - \frac{R(q^{-1})}{P(q^{-1})} e(t) \quad (1.19)$$

avec :

$$T(q^{-1}) = \beta P(q^{-1}) = \beta(A(q^{-1})S(q^{-1})\Delta(q^{-1}) + q^{-1}B(q^{-1})R(q^{-1})) \quad (1.20)$$

Par ailleurs, si l'on pose :

$$e_y(t) = P(q^{-1})(y(t) - \beta B(q^{-1})y_r(t)) \quad (1.21)$$

$$e_u(t) = P(q^{-1})(u(t) - \beta A(q^{-1})y_r(t+1))$$

L'objectif de commande avec placement de pôles peut être interprété comme un problème de régulation par rapport aux séquences  $e_y(t)$  et  $\Delta(q^{-1})e_u(t)$ . Ces indices de performances ont été introduits par Irving (Irving et al., 1986) et utilisés par M'Saad (1987) pour la synthèse de lois de commande avec modèle de référence sur l'état partiel, d'où le critère quadratique suivant :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [e_y(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda [\Delta e_u(t+j-1)]^2 \quad (1.22)$$

sous la contrainte :

$$\Delta e_u(t+j) = 0 \quad \text{pour } j \geq N_u$$

Le calcul du prédicteur à  $j$  pas se fait, dans ce cas, sur l'erreur de poursuite de la sortie  $e_y(t)$ .

### 1.2.4.3 Commande prédictive fonctionnelle

Un autre algorithme de commande prédictive, basé sur l'utilisation d'un modèle de connaissance (modèle interne du procédé), est la Commande Prédictive Fonctionnelle (Predictive Functional Control, PFC) introduite par Richalet, (Richalet et al., 1987). L'algorithme PFC effectue une prédiction de l'évolution de l'erreur entre le comportement du processus et de son modèle à partir des observations du passé, afin de corriger en conséquence l'objectif visé pour la sortie du modèle (Vivas et al., 2004, Igor et al., 2000).

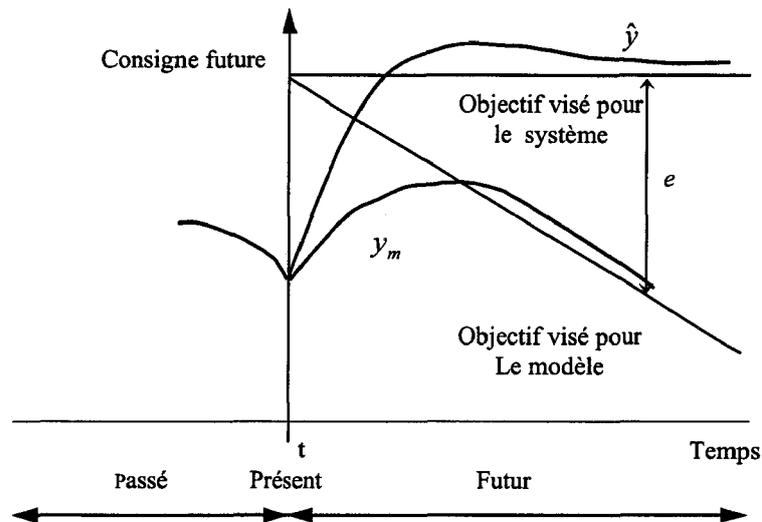


Fig 1.6. Effet de la compensation de l'erreur de modélisation

Si l'objectif visé pour le système correspond au ralliement d'une consigne constante, la commande à calculer doit être telle que son effet prévu compense la dérive constatée, c'est-à-dire qu'elle impose comme sortie du modèle la sortie souhaitée diminuée de l'erreur  $e$  prédite (cf. Fig.1.6).

Alors, l'objectif de la commande est de calculer une séquence de commande future :  $U_k, U_{k+1}, \dots$ , de façon à ce que la sortie prédite  $\hat{y}$  du processus suive la trajectoire de référence  $y_c$ . La commande future est définie à partir d'une combinaison linéaire d'un ensemble de  $N$  fonctions  $u_{B_i}$ , appelées fonction de base, choisie au préalable :

$$U(k+1) = \sum_{i=1}^N \mu_i(k) u_{B_i}(j) \quad (1.23)$$

La détermination des coefficients  $\mu_i(k)$  s'effectue en minimisant le critère quadratique suivant :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j) - y_c(t+j)]^2 \quad (1.24)$$

Le schéma de base de l'algorithme PFC est représenté sur la figure ci-dessous :

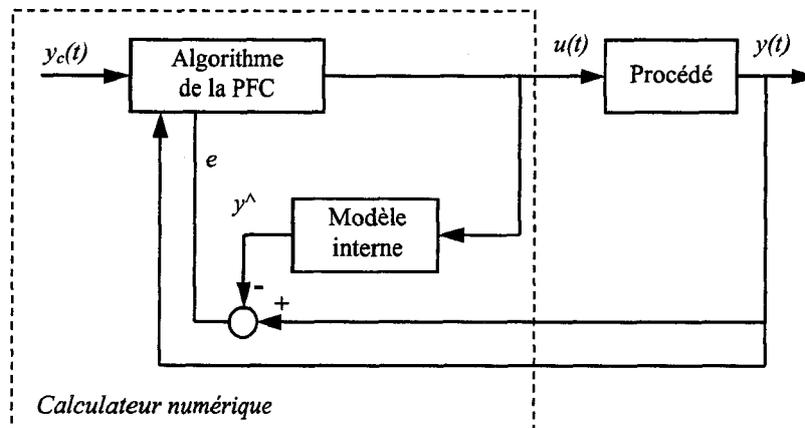


Fig 1.7. Le principe de la commande PFC

#### 1.2.4.4 GPC à temps continu et GPC utilisant l'opérateur delta

Les algorithmes de commande prédictive, développés dans le domaine discret, sont capables de fournir bon nombre de performances en termes de précision et de rapidité. Cependant, lorsque des performances sévères sont requises, ces méthodes montrent leurs limites. En particulier si, pour prédire la sortie future du processus, on dispose d'un modèle continu, alors le passage du continu au discret est facile pour les systèmes linéaires, mais beaucoup moins évidents pour les systèmes non linéaires.

Une nouvelle version de la commande prédictive, utilisant le temps continu, a été développée par Gawthrop en 1989, c'est la commande prédictive généralisée à temps continu, ( Continuous-time Generalized Predictive Control, CGPC), (Demircioglu et al., 2002), (Demircioglu and Gawthrop 1998, 1991).

La synthèse de la loi de commande CGPC, en mono-variable, est établie à partir du modèle linéaire à temps continu suivant :

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) + \frac{C(s)}{A(s)}V(s) \quad (1.25)$$

où  $Y(s)$ ,  $U(s)$  et  $V(s)$  représentent respectivement la sortie du système, l'entrée du système et l'entrée de perturbations.  $A(s)$ ,  $B(s)$  et  $C(s)$  sont des polynômes en  $s$ , où  $s$  est l'opérateur de Laplace.

La prédiction de la sortie est obtenue à partir du développement en série de Taylor de la sortie  $y(t)$ , tronqué, à l'instant  $t$  :

$$\hat{y}(t+T) = \sum_{k=0}^{N_y} y_k(t) \frac{T^k}{k!} \quad (1.26)$$

avec

$$y_k(t) = \frac{d^k y(t)}{dt^k} \quad (1.27)$$

où  $N_y$  est l'ordre de prédiction et  $T$  la variable correspondant au temps futur de prédiction.

Cette prédiction fait appel à la notion d'émulation (Emulated Based Control, EBC) introduite par Gawthrop (1996). En utilisant l'équation du modèle (1.25), on peut écrire :

$$Y_k(s) = s^k Y(s) = H_k(s)U(s) + Y_k^o(s) \quad (1.28)$$

avec

$$Y_k^o(s) = \frac{G_k(s)}{C(s)}U(s) + \frac{F_k(s)}{C(s)}Y(s) \quad (1.29)$$

où les polynômes  $E_k(s)$ ,  $F_k(s)$ ,  $G_k(s)$  et  $H_k(s)$  sont obtenus par résolution des identités suivantes :

$$\begin{aligned} s^k C(s) &= E_k(s)A(s) + F_k(s) \\ E_k(s)B(s) &= H_k(s)C(s) + G_k(s) \end{aligned} \quad (1.30)$$

avec

$$\begin{aligned} \deg(E_k(s)) &= k - 1, \\ \deg(F_k(s)) &= \deg(A(s)) - 1, \\ \deg(G_k(s)) &= \deg(A(s)) - 2, \\ \deg(H_k(s)) &= k - 1 \end{aligned}$$

Dans le domaine temporel, l'équation de la prédiction (1.28) s'écrit comme suit :

$$y_k(t) = h_k^T u + y_k^o(t) \quad (1.31)$$

où  $u$  est un vecteur contenant les dérivées successives de la commande,  $h_k$  est un vecteur dont les éléments sont les coefficients du polynômes  $H_k(s)$ .

Comme dans la GPC à temps discret, il existe également un paramètre de réglage  $N_u$ , appelé ordre de commande, représentant l'ordre au dessus duquel les dérivées de la commande sont maintenues égales à zéro, d'où la contraintes suivante :

$$u_k(t) = 0 \quad \text{pour} \quad k > N_u \quad (1.32)$$

de plus,  $N_u$  réduit la dimension du vecteur  $u$  à  $(N_u + 1) \times 1$ .

$$u = [u(t) \ u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_{N_u}(t)]^T \quad (1.33)$$

où

$$u_k(t) = \frac{d^k u(t)}{dt^k} \quad (1.34)$$

On obtient ainsi l'expression de la sortie prédite :

$$\hat{y}(t+T) = T_{N_y} H u + T_{N_y} Y^o \quad (1.35)$$

avec

$$T_{N_y} = [1 \ T \ \frac{T^2}{2!} \ \dots \ \frac{T^{N_y}}{N_y!}], \quad Y^o = [y_0^o(t) \ y_1^o(t) \ y_2^o(t) \ \dots \ y_{N_y}^o(t)]^T$$

$$H_{N_y, N_u} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N_y} & h_{N_y-1} & h_{N_y-2} & \dots & h_{N_y-N_y} \end{bmatrix}$$

Les termes  $h_k$  sont les paramètres de Markov obtenus à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte  $B(s)/A(s)$ .

De la même manière que la GPC à temps discret, la loi de commande CGPC minimise un critère quadratique à horizon fuyant :

$$J = \int_{t_1}^{t_2} [\hat{y}(t+T) - y_c(t+T)]^2 dT + \lambda \int_0^{t_u} [u(t+T)]^2 dT \quad (1.36)$$

où

- $t_1$  : est l'horizon minimal de prédiction,
- $t_2$  : est l'horizon maximal de prédiction,
- $t_u$  : est l'horizon de commande,
- $\lambda$  : est la pondération sur la commande.

Les expressions de la consigne future et de la commande future sont données par :

$$y_c(t+T) = T_{N_y} w \quad (1.37)$$

avec

$$w = [w(t) \ 0 \ 0 \ \dots \ 0], \quad w(t) \text{ est la consigne et,}$$

$$u(t+T) = T_{N_u} u \quad (1.38)$$

où

$$T_{N_u} = [1 \ T \ \frac{T^2}{2!} \ \dots \ \frac{T^{N_u}}{N_u!}] \quad (1.39)$$

Une autre version de la GPC utilisant l'opérateur  $\delta$  (Delta-operator GPC), (Neumann et al., 1992), (Boucher et al., 1993), (Rostgaard et al., 1996), a été développée pour des applications nécessitant un échantillonnage rapide, comme par exemple, dans le domaine de la machine outil et de la robotique (Dumur, 1993), (Boucher et Dumur, 1997).

L'un des principaux inconvénients de l'opérateur retard  $q^{-1}$  utilisé pour décrire les systèmes discrets est de ne pas être analogue à l'opérateur différentiel  $d/dt$  utilisé pour décrire les systèmes continus. La raison est que la réalisation numérique de la dérivation s'effectue généralement sous la forme :

$$\left[ \frac{dx}{dt} \right]_k \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta} \quad (1.40)$$

Pour représenter les systèmes discrets, Middleton et Goodwin (Middleton and Goodwin, 1990) ont introduit l'opérateur de différence anticipée  $\delta$ , défini par :

$$\delta = \frac{q-1}{\Delta} \quad (1.41)$$

où  $q$  est l'opérateur d'avance unitaire et  $\Delta$  la période d'échantillonnage. Ce qui permet d'unifier les notations discret/continu quand la période d'échantillonnage tend vers zéro.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta = \frac{d}{dt} \quad (1.42)$$

De plus, il a été montré que l'opérateur  $\delta$  possède un meilleur comportement numérique par rapport à l'opérateur  $q$  si la cadence d'échantillonnage est plus élevée (Middleton and Goodwin, 1990).

### 1.3 Commande prédictive non linéaire

Bien que ces algorithmes aient connu un intérêt croissant dans le domaine industriel (Clarck, 1988), leurs applications restent restreintes à des lois de commande basées essentiellement sur une description linéaire du processus. En général, les systèmes industriels possèdent des caractéristiques non linéaires complexes. Cependant, le modèle linéaire qui les représente n'est valable qu'autour d'un point de fonctionnement.

Certains travaux concernant la commande prédictive non linéaire ont été alors développés (Kouvari al., 2006), (Chen et al., 1995), (Alamir, 1995). La formulation générale du critère à minimiser, dans le cas des systèmes continus, est donnée par :

$$J = \min_{u(\tau), \tau \in (t, \dots, t+T)} \int_t^{t+T} [\hat{y}(\tau) - y_c(\tau)]^2 d\tau \quad (1.43)$$

sous la contrainte :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, t), & y(t) &= h(x, t), & t &\in [t, t+T] \\ g(x, u, t) &\leq 0, & p(x, u, t) &= 0, & t &\in [t, t+T] \end{aligned} \quad (1.44)$$

où  $t$  représente l'instant présent et  $T$  représente l'horizon de prédiction. Toutefois, l'inconvénient majeur de ces algorithmes basés sur une synthèse à temps continue est que l'implantation finale est généralement faite par un calculateur numérique. La discrétisation d'une loi de commande continue est loin d'être évidente et beaucoup de problèmes peuvent être rencontrés, (Yang and Polak, 1993).

Pour la synthèse d'une loi de commande prédictive non linéaire à temps discret, le critère à minimiser est le suivant :

$$J = \min_{u(k), \dots, u(k+N-1)} \sum_{j=1}^N [\hat{y}(k+j) - y_c(k+j)]^2 \quad (1.45)$$

sous la contrainte :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, t), & y(t) &= h(x, t), & t &\in [t, t + NT_e] \\ g(x, u, kT_e) &\leq 0, & p(x, u, kT_e) &= 0, & k &\in [1, N] \end{aligned} \quad (1.46)$$

si le modèle est à temps continu,  $T_e$  représente le pas d'intégration. Le problème d'optimisation consiste alors en deux étapes : le calcul des sorties prédites,  $\hat{y}(k+j)$ , basé sur une méthode d'intégration numérique donnée, et le calcul d'une séquence optimale des commandes  $u(k), u(k+1), \dots, u(k+N-1)$ , (Morshedi, 1986), (Peterson et al., 1989).

Dans le cas où les sorties prédites sont obtenues à partir d'un modèle discret, le critère est le même, à savoir :

$$J = \min_{u(k), \dots, u(k+N-1)} \sum_{j=1}^N [\hat{y}(k+j) - y_c(k+j)]^2 \quad (1.47)$$

mais avec la contrainte :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x, u, k), & y(k) &= h(x, k), & k &\in [1, N] \\ g(x, u, k) &\leq 0, & p(x, u, k) &= 0, & k &\in [1, N] \end{aligned} \quad (1.48)$$

D'autre part, le modèle discret peut être obtenu par identification. Plusieurs structures de modèles non linéaires ont été proposées, telles que :

- le modèle Hammerstein, (Wang et Henriksen, 1993),
- le modèle bilinéaire, (Sommer, 1994),
- le modèle paramétrique de Volterra (Bars et Haber, 1993),
- le modèle non linéaire ARX (Saint-Donat et al., 1991), (Tan et De Keyser, 1994).

#### 1.4 Commande prédictive basée sur les techniques intelligentes

D'autres algorithmes de commande prédictive ont été proposés par la suite, utilisant des techniques intelligentes telles que la logique floue et les réseaux de neurones.

Parmi ces méthodes, on peut citer l'algorithme Neural Generalized Predictive Control (NGPC), dont le critère à minimiser est donné par (Soloway et al., 1996) :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [y_n(n+j) - y_c(n+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(n+j)]^2 \quad (1.49)$$

où  $y_n$  est la sortie prédite du réseau de neurones (cf. Fig. 1.8).

L'objectif de commande est de minimiser  $J$  en fonction de la séquence  $u(n), u(n+1), \dots, u(n+N_u)$ , notée  $U(k)$ ,

$$U(k) = \begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n+2) \\ \vdots \\ u(n+N_u) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, \# \text{ itérations} \quad (1.50)$$

$U(k+1)$  est obtenue par une loi d'adaptation basée sur l'algorithme Newton-Raphson :

$$U(k+1) = U(k) - \left( \frac{\partial^2 J}{\partial U^2}(k) \right)^{-1} \frac{\partial J}{\partial U}(k) \quad (1.51)$$

où le Jacobien est défini par :

$$\frac{\partial J}{\partial U}(k) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial u(n+1)} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial u(n+N_u)} \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

et le Hessein par :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial U^2}(k) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial u(n+1)} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial u(n+1)\partial u(n+N_u)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial u(n+N_u)\partial u(n+1)} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial u(n+N_u)^2} \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

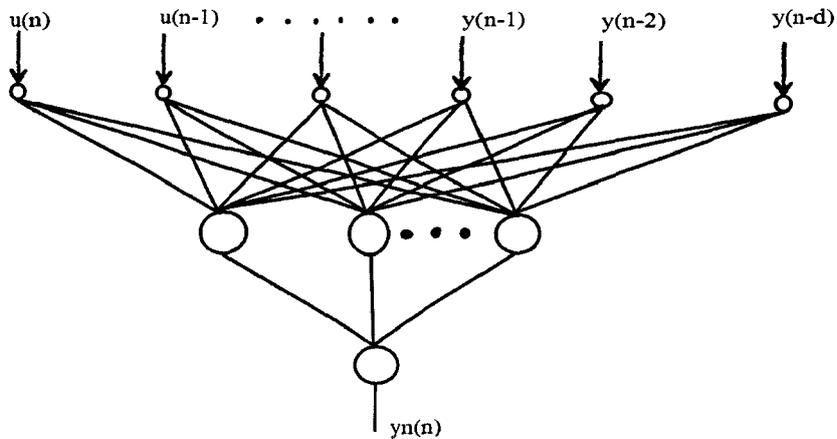


Fig 1.8. Le principe de la commande PFC

## 1.5 Commande non linéaire par modèle interne

Comme nous l'avons auparavant mentionné, les techniques MBPC font, en général, intervenir un modèle du système lors de synthèse de la commande (pour prédire les sorties futures du système). Cette caractéristique forme la base de la structure de commande par modèle interne, introduite par Garcia et Morari (Garcia et Morari, 1982), (cf. Fig. 1.9).

Largement étudiée pour les systèmes linéaires (Keiji et al., 2003) (Garcia et Morari, 1982, 1985a, 1985b), (Foulard et al., 1987), (Morari et Zafiriou, 1989), la commande par modèle interne se prête bien aux applications industrielles dans une structure prédictive (Marqués et Morari, 1986), (Levien et Morari, 1987).

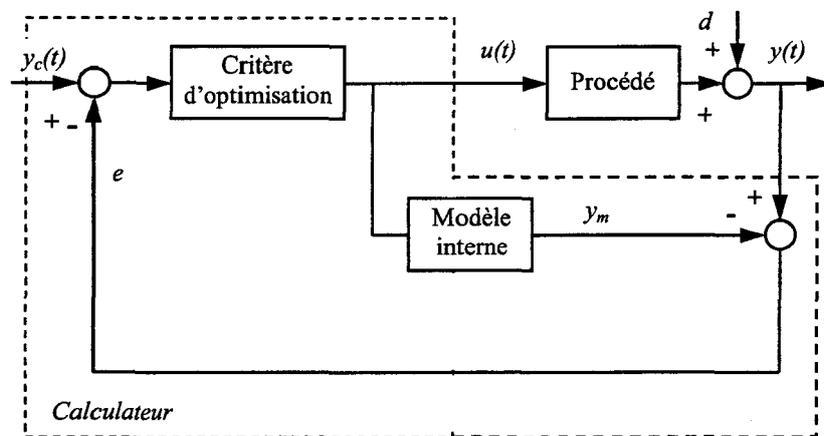


Fig 1.9. Le principe de la commande par modèle interne

Les bonnes performances obtenues lors des applications industrielles décrites par des modèles linéaires, ont motivé le développement de la commande prédictive basée sur une structure IMC pour les synthèses non linéaires (Rivals et al., 1996), (Economou et al., 1986), (Brenzel et Seinder, 1989), (De oliveira et Morari, 1994).

## 1.6 Contribution de la thèse

Dans ce mémoire, nous nous intéressons particulièrement à une loi de commande basée sur la minimisation d'un critère quadratique à horizon fini et fuyant, à savoir la commande prédictive généralisée à temps continu.

Notre contribution peut se résumer en quatre points essentiels :

1. Le développement d'une version de la CGPC basée sur une représentation d'état, dont le principal intérêt permet une facilité de mise en œuvre et une généralisation au cas des systèmes multi-variables. La proposition d'un autre schéma de commande prédictive, consiste à utiliser la structure IMC basée sur la minimisation du critère quadratique de la CGPC. Cette méthode permet, d'une part, d'incorporer une

capacité de poursuite explicite dans la commande CGPC et, d'autre part de tirer profit de la robustesse qu'offre la structure IMC (Kefsi et al., 2004a).

2. La synthèse de la commande prédictive basée sur une représentation d'état nous a facilité l'étude de la stabilité. L'analyse de la robustesse des algorithmes CGPC et IMC/CGPC a permis d'établir quelques règles concernant le choix des paramètres de réglages. De plus, nous avons examiné le moyen d'accroître la stabilité robuste des deux algorithmes, en utilisant le concept de la LTR pour la CGPC avec observateur, et en introduisant un filtre de robustesse dans la structure IMC/CGPC (Kefsi et al., 2004b).
3. La proposition d'une extension de l'approche « Local Model Network » de Johansen et Foss au cas des systèmes non linéaires continus basés sur une représentation d'état. Une structure de commande non linéaire basée sur la combinaison d'un ensemble de régulateurs CGPC a été établie. De plus, une analyse de la stabilité du système de commande a été réalisée. Cela, nous a permis d'énoncer une extension du théorème proposé par Tanaka (Tanaka et al., 1996) pour les systèmes de commande par logique floue. L'extension de ce théorème a été appliquée aux systèmes de commande basés sur l'approche LMN avec observateurs (Kefsi et al., 2004c)..
4. Les approches citées précédemment ont été testées avec succès sur un banc d'essai d'un système hydraulique « trois colonnes ».

## 2. Commande Prédictive Généralisée

La notion de commande prédictive a été introduite par Richalet en 1978 (Richalet et al., 1978) ; mais son véritable essor a débuté avec les publications de Clarke (Clarke et al., 1985, 1987a, 1987b, 1989) sur la commande prédictive généralisée en 1985. Dans ce chapitre, nous nous intéressons plus particulièrement à la version multivariable de la GPC à temps continu.

Dans le premier paragraphe, nous étudions de façon détaillée l'algorithme CGPC, développé par Gawthrop et Demirioglu (Gawthrop et Demirioglu, 1989), (Demirioglu et Gawthrop, 1998), basé sur une représentation d'état et qui fait partie des lois de commande prédictive à base de modèle.

Le deuxième paragraphe présente la structure de commande par modèle interne que les propriétés de robustesse rendent très intéressantes d'un point de vue pratique. Après une introduction qui expose les avantages et les propriétés de la structure IMC, nous développons dans le troisième paragraphe, une méthodologie de synthèse basée sur la minimisation d'un critère quadratique à horizon fuyant, à savoir la CGPC, pour élaborer la loi de commande IMC.

Notre étude repose sur ces deux algorithmes. Leurs caractéristiques en boucle fermée seront utilisées par la suite afin de traiter la robustesse de cette loi de commande.

Nous avons opté pour une structure homogène de deux algorithmes CGPC et IMC/CGPC.

### 2.1 Commande prédictive généralisée à temps continu (CGPC)

#### 2.1.1 Formulation mathématique

##### 2.1.1.1 Description du modèle

La présence d'un modèle numérique représentant le système à réguler est une condition nécessaire pour le fonctionnement de la commande CGPC, puisqu'il permet de prédire la sortie future du système sur un certain horizon.

Nous nous intéressons aux systèmes linéaires invariants décrits par les équations d'état et de sortie :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ , et  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  représentent respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système.  $w(t)$  et  $v(t)$  sont des séquences de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variable finie.

$$\begin{aligned} E[w(t)] &= 0, & E[v(t)] &= 0 \\ \text{var}[w(t)] &= Q_0, & \text{var}[v(t)] &= R_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , et  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sont respectivement les matrices d'état, de commande et de sortie. On suppose que  $(A, B)$  est stabilisable et  $(C, A)$  est détectable.

### 2.1.1.2 Prédiction de la sortie

Pour effectuer la prédiction de la sortie du système, plusieurs techniques d'intégration numériques peuvent être utilisées. Dans notre cas, nous avons utilisé la méthode proposée par Demircioglu et Gawthrop, (1998). La prédiction de la sortie est alors obtenue en utilisant, le développement en série de Taylor tronqué, pour la sortie, à l'instant  $t$  :

$$y(t+T) = \sum_{k=0}^{N_y} y^{(k)}(t) \frac{T^k}{k!} \quad (2.3)$$

avec

$$y^{(k)}(t) = \frac{d^k y(t)}{dt^k} \quad (2.4)$$

$N_y$  est l'ordre de prédiction et  $T$  est la variable correspondant au temps futur de prédiction. L'équation (2.3) montre par ailleurs que la prédiction de la sortie fait appel à des termes  $y^{(k)}(t)$  qui ne sont pas physiquement réalisables puisqu'ils dépendent des perturbations futures. Une procédure de synthèse particulière, appelée émulation ou estimation, a été mise au point pour résoudre ce type de problème, en remplaçant les sorties dérivées  $y^{(k)}(t)$  par leurs valeurs obtenues par émulation. La notion d'émulation a été introduite par Gawthrop en 1986 (Demircioglu et al., 2002) pour décrire des systèmes dynamiques où des opérations irréalisables sont estimées.

L'émulation consiste à répéter l'opération de dérivation jusqu'à l'ordre  $N_y$  de la sortie  $y(t)$  en fonction du temps, tous en tenant compte du système d'équations (2.1), et en supposant que  $w(t)=0$  et  $v(t)=0$  :

$$y_{N_y}(t) = O_{N_y} x(t) + H_{N_y, N_y} u_{N_y}(t) \quad (2.5)$$

$y_{N_y}(t)$  est un vecteur, de dimension  $(m(N_y+1) \times 1)$ , des dérivées de l'entrée :

$$y_{N_y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ y^{(2)}(t) \\ \vdots \\ y^{(N_y)}(t) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$u_{N_y}(t)$  est un vecteur, de dimension  $(m(N_y+1) \times 1)$ , des dérivées de l'entrée :

$$u_{N_y}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u^{(1)}(t) \\ u^{(2)}(t) \\ \vdots \\ u^{(N_y)}(t) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

avec

$$u^k(t) = \frac{d^k u(t)}{dt^k} \quad (2.8)$$

$O_{N_y}$  est la matrice d'observabilité de dimension  $(m(N_y+1) \times n)$  :

$$O_{N_y}(t) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N_y} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$H_{N_y, N_y}$  est une matrice, de dimension  $(N_y+1) \times (N_y+1)$ , constituée des paramètres de Markov  $h_k (m \times m)$  :

$$H_{N_y, N_y} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N_y} & h_{N_y-1} & h_{N_y-2} & \dots & h_0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

où  $h_k$  est le  $k$ -ième paramètre de Markov issu du système d'équations (2.1) ;  $h_0 = 0$  et  $h_k = CA^{k-1}B$  pour  $k > 0$ .  $0$  est la matrice zéros de dimension  $(m \times m)$ .

### 2.1.1.3 Ordre de la commande

Dans la GPC à temps discret, le paramètre de réglage  $N_u$  est appelé horizon de commande. Après l'instant futur  $N_u$ , les incréments de commande prédits sont maintenus égaux à zéro.

Dans le cas de la GPC à temps continu, il existe également un paramètre noté  $N_u$ , appelé ordre de commande. Il représente l'ordre au dessus duquel les dérivées de l'entrée sont maintenues à zéro :

$$u^{(k)}(t) = 0 \quad \text{pour } k > N_u \quad (2.11)$$

L'appellation ordre de commande peut se justifier par le fait que le signal de commande futur devient un polynôme d'ordre  $N_u$ . Par exemple, la commande prédite sera une constante si  $N_u = 0$ , une rampe si  $N_u = 1$  et ainsi de suite (Demircioglu et Gawthrop, 1991).

D'autre part, pour  $N_u < N_y$ , la dimension du vecteur  $u_{N_u}(t)$  est réduite à  $(m(N_u + 1) \times 1)$  et la dimension de la matrice  $H_{N_y, N_u}$  est réduite à  $(N_y + 1) \times (N_u + 1)$  avec  $h_k(m \times m)$ , on obtient ainsi :

$$H_{N_y, N_u} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & \dots & h_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{N_y} & h_{N_y-1} & \dots & h_{N_y-N_u} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

### 2.1.1.4 Ecriture matricielle de l'équation de prédiction

Essayons maintenant de reformuler l'équation (2.3) à l'aide d'une représentation matricielle, en utilisant les dérivées de la sortie  $y_{N_y}(t)$  obtenues par l'émulation (2.6) ; l'équation (2.3) peut alors se mettre sous forme matricielle :

$$y(t+T) = T_{N_y} y_{N_y}(t) \quad (2.13)$$

où  $T_{N_y}$  est une matrice de dimension  $(m \times m(N_u + 1))$

$$T_{N_y}(t) = \begin{bmatrix} I & TI & \frac{T^2}{2!} I \dots & \frac{T^{N_y}}{N_y!} I \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

et  $I$  est la matrice identité de dimension  $(m \times m)$ .

On obtient finalement, avec les équations (2.5) et (2.13), l'expression de la prédiction de la sortie :

$$y(t+T) = T_{N_y} O_{N_y} x(t) + T_{N_y} H_{N_y, N_u} u_{N_u}(t) \quad (2.15)$$

Dans le cas où l'état du système n'est pas accessible, l'équation (2.15) contenant  $x(t)$  ne peut pas être utilisée. Dans ce cas, un filtre de Kalman stationnaire sera utilisé pour estimer  $x(t)$  :

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.16)$$

où  $L$  est la matrice gain du filtre de Kalman de dimension  $(n \times m)$ , donnée par :

$$L = PC^T R_0 \quad (2.17)$$

sous l'hypothèse que  $(C, A)$  soit détectable,  $P$  est la solution unique de l'équation de Riccati stationnaire :

$$AP + PA^T - PC^T R_0^{-1} CP + Q_0 = 0 \quad (2.18)$$

Le système (2.16) est donc asymptotiquement stable, les valeurs propres de la matrice  $(A - LC)$  sont à partie réelle strictement négative.

L'expression correspondante de la sortie prédite  $y(t+T)$ , i.e.  $\hat{y}(t+T)$ , s'écrit donc :

$$\hat{y}(t+T) = T_{N_y} O_{N_y} \hat{x}(t) + T_{N_y} H_{N_y, N_u} u_{N_u}(t) \quad (2.19)$$

### 2.1.1.5 Trajectoire de référence

L'objectif de la CGPC, ainsi que dans la GPC à temps discret, est de déterminer la séquence future de commande à appliquer à l'entrée du système, de façon à ce que la sortie prédite suive la consigne future (ou la trajectoire de référence issue de celle-ci). Ceci suppose que la consigne future est connue. C'est le cas de certaines applications de servomécanisme, de robotique ou de machine-outil (Dumur, 1993).

Dans notre cas, nous supposons que la consigne future est constante et égale à sa valeur actuelle  $y_c(t)$ . La consigne future est écrite de la même manière que celle utilisé pour définir la sortie prédite, à savoir :

$$\begin{aligned} y_c(t+T) &= \sum_{k=0}^{N_y} y_c^{(k)}(t) \frac{T^k}{k!} \\ &= T_{N_y} y_{c, N_y}(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

où  $y_{c, N_y}(t)$  est un vecteur colonne de dimension  $(m(N_y + 1) \times 1)$  tel que :

$$y_{c,N_y}(t) = \begin{pmatrix} y_c(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

### 2.1.1.6 Loi de commande

La loi de commande est obtenue par minimisation à l'instant  $t$  d'un critère quadratique, incluant l'erreur future et la valeur de commande, sur un horizon fini de prédiction. Par analogie avec la GPC, une forme possible de la fonction de coût est la suivante :

$$J = \int_{t_1}^{t_2} [\hat{y}(t+T) - y_c(t+T)]^T [\hat{y}(t+T) - y_c(t+T)] dT + \int_0^{t_u} u(t+T)^T Q u(t+T) dT \quad (2.22)$$

avec

- $t_1$  horizon minimal de prédiction,
- $t_2$  horizon minimal de prédiction,
- $t_u$  horizon de commande,
- $Q$  matrice de pondération sur la commande.

De la même manière, la commande prédite  $u(t+T)$  est obtenue en utilisant le développement en série de Taylor tronqué à l'ordre  $N_u$  :

$$u(t+T) = \sum_{k=0}^{N_u} u^{(k)}(t) \frac{T^k}{k!} \quad (2.23)$$

L'équation (2.23) s'écrit alors sous forme matricielle :

$$u(t+T) = T_{N_u} u_{N_u}(t) \quad (2.24)$$

où  $T_{N_u}$  est une matrice de dimension  $(m \times m(N_u + 1))$

$$T_{N_u}(t) = \begin{bmatrix} I & TI & \frac{T^2}{2!} I & \dots & \frac{T^{N_u}}{N_u!} I \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Par ce formalisme, les équations (2.19), (2.20) et (2.24) donnent :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+T) &= T_{N_y} O_{N_y} \hat{x}(t) + T_{N_y} H_{N_y, N_u} u_{N_u}(t) \\ y_c(t+T) &= T_{N_y} y_{c, N_y}(t) \\ u(t+T) &= T_{N_u} u_{N_u}(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Le critère (2.22) devient alors :

$$\begin{aligned}
 J = \int_{t_1}^{t_2} & \left\{ [T_{N_y} O_{N_y} \hat{x}(t) + T_{N_y} H_{N_y, N_u} u_{N_u}(t) - T_{N_y} y_{c, N_y}(t)]^T \right. \\
 & \left. [T_{N_y} O_{N_y} \hat{x}(t) + T_{N_y} H_{N_y, N_u} u_{N_u}(t) - T_{N_y} y_{c, N_y}(t)]^T \right\} dT \\
 & + \int_0^{t_u} \left\{ [T_{N_u} u_{N_u}(t)]^T Q [T_{N_u} u_{N_u}(t)] \right\} dT
 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Enfin l'optimum de  $J$ , par rapport à  $u_{N_u}(t)$ , nous donne, après tout calcul fait,

$$u_{N_u}(t) = (H_{N_y, N_u}^T T_y H_{N_y, N_u} - T_u)^{-1} H_{N_y, N_u}^T T_y (y_{c, N_y}(t) - O_{N_y} \hat{x}(t)) \quad (2.28)$$

où

$$T_y = \int_{t_1}^{t_2} T_{N_y}^T T_{N_y} dT \quad (2.29)$$

et

$$T_u = \int_0^{t_u} T_{N_u}^T Q T_{N_u} dT \quad (2.30)$$

sont deux matrices de dimension  $m(N_y + 1) \times m(N_y + 1)$  et  $m(N_u + 1) \times m(N_u + 1)$ .

Les composantes  $(i, j)$  de  $T_y$  et  $T_u$  sont les matrices :

$$T_{y[i, j]}(t_1, t_2) = \frac{t_2^{i+j-1} - t_1^{i+j-1}}{(i-1)!(j-1)!(i+j-1)} I_m \quad (2.31)$$

$$T_{u[i, j]}(t_u) = \frac{t_u^{i+j-1}}{(i-1)!(j-1)!(i+j-1)} Q \quad (2.32)$$

Comme la CGPC est basée sur une stratégie de commande à horizon fuyant, seule la valeur prédite de la commande à  $T = 0$ , ce qui correspond à  $u(t+0) = u(t)$ , est appliquée au système. En définissant la matrice  $\alpha_{N_u} = [I_m \ 0 \cdots 0]$  de dimension  $m \times m(N_u + 1)$ , on peut alors obtenir :

$$u(t) = \alpha_{N_u} (H_{N_y, N_u}^T T_y H_{N_y, N_u} + T_u)^{-1} H_{N_y, N_u}^T T_y (y_{n, N_y}(t) - O_{N_y} \hat{x}(t)) \quad (2.33)$$

De même, en définissant la matrice  $\alpha_{N_y} = [I_m \ 0 \cdots 0]$  de dimension  $m \times m(N_y + 1)$ , la loi de commande peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$u(t) = K_y y_c(t) - K_x \hat{x}(t) \quad (2.34)$$

avec

$$K_y = \alpha_{N_u} (H_{N_y, N_u}^T T_y H_{N_y, N_u} + T_u)^{-1} H_{N_y, N_u}^T T_y \alpha_{N_y}^T \quad (2.35)$$

et

$$K_x = \alpha_{N_u} (H_{N_y, N_u}^T T_y H_{N_y, N_u} + T_u)^{-1} H_{N_y, N_u}^T T_y O_{N_y} \quad (2.36)$$

### 2.1.2 Système en boucle fermée

En regroupant les équations (2.1) pour le système, (2.16) pour l'observateur et (2.34) pour le régulateur, et en supposant que  $w(t)=0$  et  $v(t)=0$ , on obtient le système en boucle fermée représenté par la figure (2.1) :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK_x \\ LC & A-LC-BK_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_y \\ BK_y \end{bmatrix} y_c(t) \quad (2.37)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

on obtient :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK_x & BK_x \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_y \\ 0 \end{bmatrix} y_c(t) \quad (2.39)$$

Sous cette forme, il apparaît une matrice d'état triangulaire par bloc. Les blocs diagonaux  $(A-BK_x)$  et  $(A-LC)$  définissent respectivement les matrices de stabilité pour la commande et pour l'observateur. D'après le principe de séparation et sous l'hypothèse que la paire  $(C, A)$  soit détectable et la paire  $(A, B)$  soit stabilisable, le système bouclé (2.39) est asymptotiquement stable pour un choix judicieux des gains  $K_x$  (obtenu par la CGPC) et  $L$  (déterminé par le filtre de Kalman).

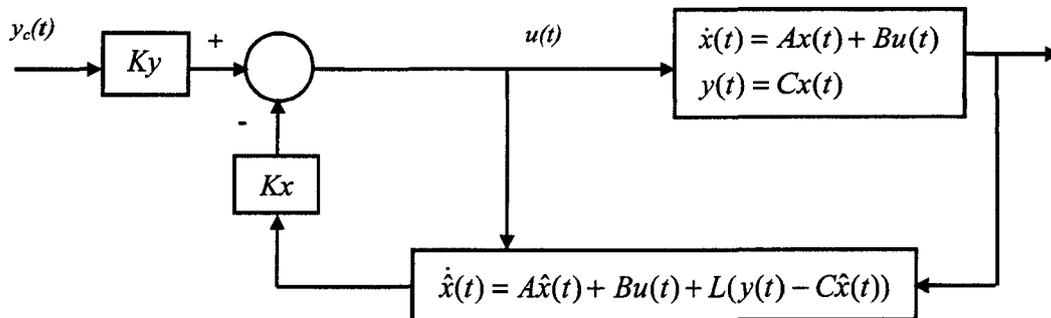


Fig.2.1 La commande CGPC avec observateur

### 2.1.3 Choix des paramètres de synthèse

Ce paragraphe donne quelques règles pratiques concernant le choix des paramètres de synthèse  $(t_1, t_2, t_u, N_y, N_u)$  de l'algorithme CGPC.

#### 2.1.3.1 Horizon minimal de prédiction $t_1$

Généralement, l'horizon minimal de prédiction  $t_1$  est choisi égal à zéro. Cependant si le système présente un retard  $\tau$ , il est utile de choisir  $t_1 = \tau$ . Pour des systèmes à déphasage non minimal,  $t_1$  sera pris égal au temps durant lequel ce phénomène se répercute.

#### 2.1.3.2 Horizon maximal de prédiction $t_2$

En général, une valeur très petite de  $t_2$  conduit à une commande brusque et une réponse rapide en sortie. Un comportement inverse se produit lorsque  $t_2$  est élevée. Un choix judicieux de  $t_2$  correspond à un temps situé dans la région du temps de réponse du système en boucle fermée. A noter que  $t_2$  est équivalent à  $N_2$  pour la GPC à temps discret (Clarke et al., 1987a) et a le même effet dans le cas continu.

#### 2.1.3.3 Ordre de prédiction de la sortie $N_y$

Lors de la prédiction, l'approximation de la sortie future est réalisée en utilisant le développement en série de Taylor à l'ordre  $N_y$ . L'erreur commise par cette approximation dépend de ce paramètre. Le choix de  $N_y$  doit être effectué de manière à avoir une bonne approximation dans l'intervalle où  $T$  varie. Par exemple,  $N_y$  peut être choisi pour qu'on ait une approximation de la réponse indicielle (ou impulsionnelle) du système en boucle ouverte dans l'intervalle  $t_1 < T < t_2$ . Ici, la prédiction est basée sur le système en boucle ouverte.

#### 2.1.3.4 Ordre de commande $N_u$

L'ordre de commande  $N_u$  conditionne le comportement de la commande lors de la prédiction. De plus, il détermine la dimension de la matrice à inverser (2.28). Dans de nombreux cas, le choix de  $N_u = 0$  est suffisant.

#### Remarque :

La matrice de pondération  $Q$  (2.22) permet de pénaliser les variations de la commande. Le choix de ce paramètre est délicat à régler, comme pour l'algorithme de GPC à temps discret.

Notons aussi que la matrice  $Q$  joue un rôle important dans le conditionnement numérique puisqu'elle intervient dans la matrice  $(H_{N_y, N_u}^T T_y H_{N_y, N_u} + T_u)$  que l'on doit inverser.

## 2.2 Commande par modèle interne (IMC)

Dans le domaine du contrôle, la qualité d'un système de régulation est caractérisée par :

- Son comportement régulier : l'erreur doit être la plus petite possible quelles que soient les perturbations non mesurées qui peuvent affecter le processus ;
- Son aptitude à suivre rapidement tout changement de consigne ;
- Sa robustesse : la stabilité ainsi que les performances souhaitées doivent être maintenues malgré la variation des paramètres du modèle.

Un correcteur synthétisé par les méthodes classiques ne permet pas d'obtenir les performances désirées au regard des critères cités ci-dessus. Ceci est dû à (Rault et Jaume, 1984) :

- Une modélisation approximative des systèmes étudiés ;
- Une plage de fonctionnement linéaire limitée ;
- L'apparition de perturbations difficilement modélisables.

La structure de commande par modèle interne (IMC) est une approche intéressante, car les algorithmes de commande prédictive sont généralement basés sur la connaissance d'un modèle du processus (modèle interne) qui permet de prédire l'évolution future de la sortie de celui-ci.

Cependant, le modèle adopté est nécessairement imparfait à cause des erreurs d'indentifications, des perturbations non prises en compte, ainsi que des simplifications effectuées pour permettre une utilisation temps réel. La sortie effective du processus sera généralement différente de la sortie prédite. Cette différence  $y_e(t)$  entre le processus et son modèle interne doit être prise en compte lors de la synthèse des algorithmes de commande qui assureront la conduite du processus.

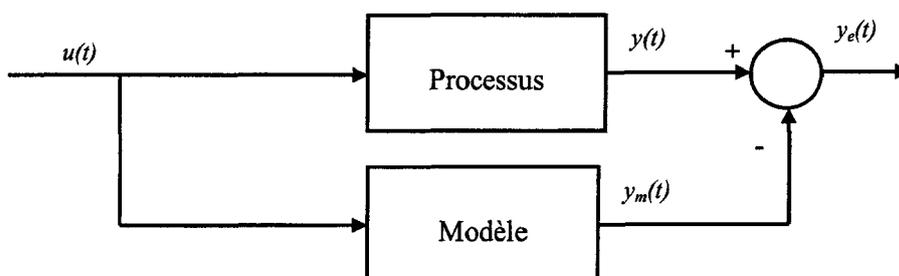


Fig.2.2 Ecart entre le processus et son modèle

La commande IMC s'interprète de façon naturelle comme une généralisation de la commande en boucle ouverte, ce qui nous amène à considérer le procédé (et donc son modèle) stable ou préalablement stabilisé. La structure de la IMC est essentiellement caractérisée par :

- la construction d'une commande de modèle,
- une modification de la consigne en fonction de l'écart entre la sortie du procédé et celle du modèle. En procédant ainsi, la commande initialement prévue pour piloter le modèle, permet de mieux piloter le procédé.

Nous représentons ici la version continue de l'approche IMC. L'approche discrète est déduite par analogie.

### 2.2.1 Principe de la commande par modèle interne

Le schéma de base d'une structure de commande par modèle interne est représenté à la figure (2.3). Ce schéma comporte :

- un modèle  $G_m(s)$  de comportement,
- une représentation du procédé  $G(s)$  avec l'entrée de perturbation  $d(t)$  localisée à la sortie,
- un régulateur dont la synthèse s'effectue en vue d'une commande du processus en boucle ouverte (d'où la nécessité de la stabilité du processus étudié).

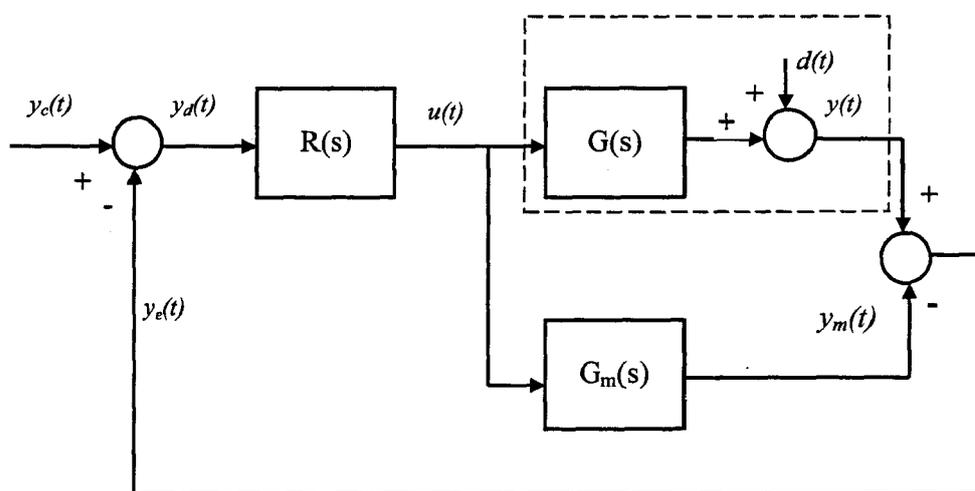


Fig.2.3 Structure de base de la commande IMC

D'après ce schéma, nous constatons que la commande  $u(t)$  est appliquée, à la fois, au procédé et à son modèle. Par comparaison à la structure classique, le signal de retour  $y_e(t)$  est constitué de l'écart entre la sortie du procédé et celle du modèle, ce qui permet de modifier la consigne de façon adéquate.

De plus, la structure de commande par modèle interne se caractérise par la robustesse du correcteur, contrairement à un asservissement classique, où le correcteur est sensible aux erreurs de modélisations ainsi qu'à la présence des perturbations.

### 2.2.2 Propriétés de la structure IMC

Nous allons maintenant présenter brièvement les propriétés fondamentales de la structure IMC ; rappelons que celles ci sont largement commentées dans (Rivals et al., 1996), (Garcia and Morari, 1982), (Foulard et al., 1987), (Morari and Zafiriou, 1989).

L'introduction du modèle dans la structure de commande a déjà fait l'objet de plusieurs études (Garcia and Morari, 1982, 1985), (Morari and Zafiriou, 1989), (Ricker, 1990). Certains ont introduit le modèle sous forme de représentation par fonction de transfert en  $z$  (Garcia and Morari, 1982), ou par fonction de transfert en  $s$  (Rault et Jaune, 1984), d'autres sous forme de représentation d'état (Foulard et al., 1987), (Ricker, 1990) ; c'est cette dernière représentation que nous allons utiliser dans notre étude.

Cependant, afin de mettre en évidence les propriétés de la structure IMC, nous allons utiliser la représentation par fonction de transfert en  $s$ , en mono-variable. Le schéma de base est présenté au § 2.2.1.

D'après ce même schéma, nous pouvons écrire, pour un système mon-o-variable, les équations suivantes :

$$y(s) = G(s)u(s) + d(s) \quad (2.40)$$

$$y_e(s) = y(s) - G_m(s)u(s) \quad (2.41)$$

$$y_e(s) = [G(s) - G_m(s)]u(s) + d(s) \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} u(s) &= R(s)y_d(s) \\ &= R(s)[y_c(s) - y_e(s)] \\ &= R(s)[y_c(s) - [G(s) - G_m(s)]u(s) - d(s)] \end{aligned} \quad (2.43)$$

soit :

$$u(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)[G(s) - G_m(s)]} (y_c(s) - d(s)) \quad (2.44)$$

$$y(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)[G(s) - G_m(s)]} (y_c(s) - d(s)) + d(s) \quad (2.45)$$

Cela permet de déduire les trois propriétés suivantes dans le cas d'une modélisation parfaite.

### 2.2.2.1 Stabilité

En cas de modélisation parfaite ( $G_m(s) = G(s)$ ), le signal de retour  $y_e(s)$ , d'après la figure (2.3), est égal à  $d(s)$ , ce qui conduit aux relations suivantes :

$$u(s) = R(s)(y_e(s) - d(s)) \quad (2.46)$$

$$y(s) = R(s)G(s)(y_e(s) - d(s)) + d(s) \quad (2.47)$$

Le système peut être vu comme étant en boucle ouverte. Par conséquent, la stabilité de l'ensemble procédé plus régulateur peut être déduite des fonctions de transfert de  $R(s)$  et de  $G(s)$ . On peut donc énoncer le résultat suivant :

**Lemme 2.1 :** Si  $G(s)$  est stable, et si le modèle est parfait ( $G_m(s) = G(s)$ ), alors le système contrôlé par la structure à modèle interne est stable si et seulement si le régulateur  $R(s)$  est stable.

Si le procédé est naturellement instable ou possède un intégrateur pur, on devra au préalable le stabiliser par une boucle locale.

### 2.2.2.2 Poursuite parfaite

Sous cette propriété, il s'agit en fait d'aborder la question du choix du correcteur  $R(s)$ . Afin d'obtenir une poursuite parfaite ( $y = y_c$ ) quelles que soient les perturbations non mesurées  $d(s)$  et les écarts entre le procédé et son modèle, l'équation (2.47) conduit au choix suivant :

$$R(s) = G_m^{-1}(s) \quad (2.48)$$

Un tel correcteur est souvent irréalisable, en particulier :

- S'il existe des retards purs dans le procédé (et donc dans son modèle) : l'inverse réclame une avance, donc une prédiction parfaite.
- Si le procédé (et donc son modèle) n'est pas à déphasage minimal, l'inverse  $G_m^{-1}(s)$  est alors instable.
- Si pour être physiquement réalisable, le système doit être strictement propre, voir propre (en monovariante : degré du numérateur  $\leq$  degré du dénominateur). En général, si  $G_m(s)$  est propre, ce n'est pas le cas de  $G_m^{-1}(s)$ .

Cette propriété de poursuite parfaite apparaît donc comme un idéal difficile à atteindre.

### 2.2.2.3 Erreur statique nulle

Dans le cas continu, sous réserve que le système soit stable, l'application du théorème de la valeur finale à la sortie du procédé (2.45) donne, dans le cas d'une variation en échelon de la consigne et de la perturbation d'amplitudes respectives  $y_{c,0}$  et  $d_0$  :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)(G(s)-G_m(s))} y_{c,0} + \frac{1-R(s)G_m(s)}{1+R(s)(G(s)-G_m(s))} d_0 \right] \frac{1}{s} \\ &= \frac{R(0)G(0)}{1+R(0)(G(0)-G_m(0))} y_{c,0} + \frac{1-R(0)G_m(0)}{1+R(0)(G(0)-G_m(0))} d_0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

si  $R(0) = G_m^{-1}(0)$  alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = y_{c,0}$

Autrement dit, pour un système stable (ou stabilisé), si le gain statique du correcteur est l'inverse de celui du système, ce qui est une condition simple à obtenir, l'erreur entre la consigne et la sortie du procédé est asymptotiquement nulle. Ceci se vérifie indépendamment de l'écart entre  $G(s)$  et  $G_m(s)$ , et de l'échelon d'amplitude  $d_0$  appliqué à la perturbation  $d(s)$ . Ce résultat se transpose directement dans le cas discret.

Ces propriétés générales montrent l'intérêt de la structure IMC. Dans ce cas, il faut concevoir un correcteur stable qui assure les meilleures performances au sens d'un critère à définir.

## 2.3 Synthèse de la CGPC basée sur la structure IMC

Compte tenu des propriétés de la structure IMC, plusieurs méthodes l'utilisent pour élaborer la commande  $u(t)$  à appliquer au système (Foulard et al., 1987), (Garcia et al., 1989), (Heise et Maciejowki, 1994).

Ce paragraphe présente la synthèse d'une commande par modèle interne s'appuyant sur la minimisation d'un critère quadratique, à savoir la commande prédictive généralisée à temps continu.

En considérant le schéma de la figure (2.3), examinons le cas d'un procédé stable (ou stabilisé) représenté par un modèle linéaire, ayant les mêmes hypothèses que le système d'équations (2.1) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned} \quad (2.50)$$

où  $x_m(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , et  $y_m(t) \in \mathbb{R}^m$  représentent respectivement l'état, l'entrée et la sortie du modèle interne.  $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_m \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , et  $C_m \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sont respectivement les matrices d'état, de commande et de sortie.

L'objectif est de calculer la commande à appliquer simultanément au système et à son modèle et qui minimise le critère quadratique suivant :

$$J = \int_0^t [e(t+T)]^T [e(t+T)] dT + \int_0^m u(t+T)^T Q u(t+T) dT \quad (2.51)$$

D'après la figure (2.3), on définit :

$$\begin{aligned} e(t) &= y_d(t) - y_m(t) \\ y_d(t) &= y_c(t) - y_e(t) \\ y_e(t) &= y(t) - y_m(t) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Le fait de minimiser l'écart entre la sortie du modèle  $y_m(t)$  et l'entrée du correcteur  $y_d(t)$  montre bien que l'on cherche à commander le modèle, ce qui est une des idées de base de la commande IMC. Rappelons que dans une structure IMC, l'écart entre la sortie du modèle interne  $y_m(t)$  et la consigne modifiée  $y_d(t)$  est égal à celui que l'on a entre la consigne  $y_c(t)$  et la sortie du procédé  $y(t)$ .

Là encore la démarche à suivre est identique à ce qui a été présenté au paragraphe 2.1.

La prédiction de la sortie du modèle  $y_m(t+T)$  est obtenue en utilisant le développement en série de Taylor tronqué à l'instant  $t$  :

$$y_m(t+T) = \sum_{k=0}^{N_y} y_m^{(k)}(t) \frac{T^k}{k!} \quad (2.53)$$

avec

$$y_m^{(k)}(t) = \frac{d^k y_m(t)}{dt^k} \quad (2.54)$$

$N_y$  est l'ordre de prédiction et  $T$  est la variable correspondant au temps futur de prédiction.

En répétant l'opération de dérivation, jusqu'à l'ordre  $N_y$ , de la sortie  $y_m(t)$  en fonction du temps, en tenant compte du système d'équations (2.50), on obtient :

$$y_{m,N_y}(t) = O_{N_y}^m x_m(t) + H_{N_y,N_y}^m u_{N_y}(t) \quad (2.55)$$

où

$$y_{m,N_y}(t) = \begin{pmatrix} y_m(t) \\ y_m^{(1)}(t) \\ y_m^{(2)}(t) \\ \vdots \\ y_m^{(N_y)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_{N_y}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u^{(1)}(t) \\ u^{(2)}(t) \\ \vdots \\ u^{(N_y)}(t) \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

De plus,

$$O_{N_y}(t) = \begin{pmatrix} C_m \\ C_m A_m \\ C_m A_m^2 \\ \vdots \\ C_m A_m^{N_y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_{N_y, N_y}^m = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N_y} & h_{N_y-1} & h_{N_y-2} & \dots & h_0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

où  $h_k$  est le  $k$ -ième paramètre de Markov issu du système d'équation (2.50) ;  $h_0 = 0$  et  $h_k = C_m A_m^{k-1} B_m$  pour  $k > 0$ .

De même, on définit le paramètre de réglage noté  $N_u$ , appelé ordre de commande, représentant l'ordre au dessus duquel les dérivées de la commande sont maintenues à zéro.

$$u^{(k)}(t) = 0 \quad \text{pour} \quad k > N_u \quad (2.58)$$

D'autre part, pour  $N_u < N_y$ , la dimension du vecteur  $u_{N_u}(t)$  est réduite à  $(m(N_u + 1) \times 1)$  et la dimension de la matrice  $H_{N_y, N_u}^m$  est réduite à  $(N_y + 1) \times (N_u + 1)$ , on obtient alors :

$$H_{N_y, N_u}^m = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N_y} & h_{N_y-1} & h_{N_y-2} & \dots & h_{N_y-N_u} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

En utilisant une présentation matricielle, l'équation de prédiction (2.53) devient :

$$y_m(t+T) = T_{N_y} y_{m, N_y}(t) \quad (2.60)$$

où  $T_{N_y}$  est la matrice définie en (2.14).

Avec les équations (2.55) et (2.60), on obtient finalement l'expression de la sortie prédite du modèle interne :

$$y_m(t+T) = T_{N_y} O_{N_y}^m x(t) + T_{N_y} H_{N_y, N_u}^m u_{N_u}(t) \quad (2.61)$$

L'objectif de la commande, basée sur une structure IMC, est de calculer la commande future  $u(t+T)$ , de la façon à ce que la sortie prédite du modèle  $y_m(t+T)$ , suive la consigne modifiée  $y_d(t+T)$ . Ceci implique que la consigne future doit être prédite à l'avance. Dans le cas contraire, comme dans l'approche utilisant la commande DMC (Dynamic Matrix Control) basée sur la structure IMC, (Ricker, 1990), on suppose que l'écart prédit entre la sortie du système et la sortie de son modèle est constant, en supposant que  $d(t) = 0$  :

$$y_e(t+T) = y_e(t) \quad (2.62)$$

Cette hypothèse nous entraîne à considérer une consigne future  $y_d(t+T)$  constante et égale à sa valeur actuelle  $y_d(t)$ . En utilisant le développement en série de Taylor tronqué, de la consigne  $y_d(t)$ , à l'instant  $t$ , on obtient :

$$\begin{aligned} y_d(t+T) &= \sum_{k=0}^{N_y} y_d^{(k)}(t) \frac{T^k}{k!} \\ &= T_{N_y} y_{d,N_y}(t) \end{aligned} \quad (2.63)$$

où  $y_{d,N_y}(t)$  est un vecteur colonne de dimension  $(m(N_y + 1) \times 1)$  tel que :

$$y_{d,N_y}(t) = \begin{pmatrix} y_d(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

De la même manière, on obtient la commande prédite :

$$u(t+T) = \sum_{k=0}^{N_u} u^{(k)}(t) \frac{T^k}{k!} \quad (2.65)$$

L'équation (2.65) s'écrit alors sous forme matricielle :

$$u(t+T) = T_{N_u} u_{N_u}(t) \quad (2.66)$$

où  $T_{N_u}$  est une matrice de dimension  $(m \times m(N_u + 1))$

$$T_{N_u}(t) = \begin{bmatrix} I & TI & \frac{T^2}{2!}I & \dots & \frac{T^{N_u}}{N_u!}I \end{bmatrix}$$

Par ce formalisme, les équations (2.61), (2.63) et (2.66) donnent une représentation matricielle sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 y_m(t+T) &= T_{N_y} O_{N_y}^m x(t) + T_{N_y} H_{N_y, N_u}^m m u_{N_u}(t) \\
 y_d(t+T) &= T_{N_y} y_{d, N_y}(t) \\
 u(t+T) &= T_{N_u} u_{N_u}(t)
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Le critère (2.51) devient alors :

$$\begin{aligned}
 J = \int_{t_1}^{t_2} & \left\{ \left[ T_{N_y} O_{N_y}^m x_m(t) + T_{N_y} H_{N_y, N_u}^m u_{N_u}(t) - T_{N_y} y_{d, N_y}(t) \right]^T \right. \\
 & \left. \left[ T_{N_y} O_{N_y}^m x_m(t) + T_{N_y} H_{N_y, N_u}^m u_{N_u}(t) - T_{N_y} y_{d, N_y}(t) \right]^T \right\} dT \\
 & + \int_0^{t_u} \left\{ \left[ T_{N_u} u_{N_u}(t) \right]^T Q \left[ T_{N_u} u_{N_u}(t) \right] \right\} dT
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Enfin l'optimum de  $J$ , par rapport à  $u_{N_u}(t)$ , nous donne,

$$u_{N_u}(t) = \left[ (H_{N_y, N_u}^m)^T T_y H_{N_y, N_u}^m + T_u \right]^{-1} (H_{N_y, N_u}^m)^T T_y \left[ y_{d, N_y}(t) - O_{N_y}^m x_m(t) \right] \tag{2.69}$$

Comme la CGPC est basée sur une stratégie de commande à horizon fuyant, seule la valeur prédite de la commande à  $T=0$ , ce qui correspond à  $u(t+0)=u(t)$ , est appliquée au système.

En définissant la matrice  $\alpha_{N_u} = [I_m \ 0 \dots 0]$  de dimension  $(m \times m(N_u + 1))$ , on peut alors obtenir :

$$u_{N_u}(t) = \alpha_{N_u} \left[ (H_{N_y, N_u}^m)^T T_y H_{N_y, N_u}^m + T_u \right]^{-1} (H_{N_y, N_u}^m)^T T_y \left( y_{d, N_y}(t) - O_{N_y}^m x_m(t) \right) \tag{2.70}$$

De même, en définissant la matrice  $\alpha_{N_y} = [I_m \ 0 \dots 0]$  de dimension  $(m \times m(N_y + 1))$ , la loi de commande peut s'écrire :

$$u(t) = K_y^m y_d(t) - K_x^m x_m(t) \tag{2.71}$$

Avec

$$K_y^m = \alpha_{N_u} \left[ (H_{N_y, N_u}^m)^T T_y H_{N_y, N_u}^m + T_u \right]^{-1} (H_{N_y, N_u}^m)^T T_y \alpha_{N_y}^T \tag{2.72}$$

et

$$K_x^m = \alpha_{N_u} \left[ (H_{N_y, N_u}^m)^T T_y H_{N_y, N_u}^m + T_u \right]^{-1} (H_{N_y, N_u}^m)^T T_y O_{N_y} \tag{2.73}$$

ou encore

$$u(t) = K_y^m y_c(t) - K_y^m y_e(t) - K_x^m x_m(t) \tag{2.74}$$

Remarquons enfin que la partie retour d'état de la loi de commande (2.74) utilise l'état  $x_m(t)$  du modèle interne. Comme le montre la figure suivante (Fig 2.4), l'état  $x_m(t)$  est toujours accessible :

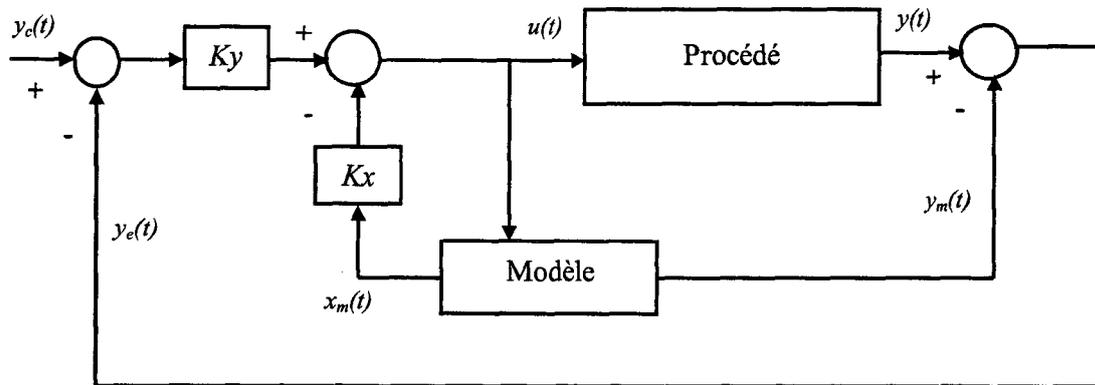


Fig.2.4 Commande CGPC basée sur une structure IMC avec retour d'état.

## 2.4 Conclusion

Une formulation dans l'espace d'état de la commande prédictive généralisée multi-variable à temps continu a été présentée.

L'approche dans l'espace d'état :

- Fournit une alternative à la version « fonction de transfert » de la CGPC.
- Donne un ensemble simple d'algorithmes appropriés pour une éventuelle implantation, que ce soit en mono-variable ou en multi-variable.

D'autre part, l'utilisation de la structure IMC pour la synthèse d'une loi de commande basée sur la CGPC rend cette approche très intéressante du point de vue de la robustesse, que ce soit vis-à-vis des erreurs de modélisation, puisqu'elle prend en compte l'écart entre la sortie du procédé et celle de son modèle dans le signal de retour, comme nous allons le montrer dans le chapitre suivant.

### 3. Analyse de la Robustesse des Algorithmes CGPC et IMC/CGPC

Le chapitre précédent nous a permis d'établir l'algorithme de la commande prédictive généralisée à temps continu dans le cas d'une structure de régulation avec observateur (CGPC) d'une part, et en utilisant la structure de commande par modèle interne (IMC/CGPC) d'autre part. Les avantages de la commande prédictive ont été déjà décrits dans de nombreuses publications (Clarke et al., 1987a, 1987b, 1989, 1994), (Bitmead et al., 1990), (Demircioglu and Gawthrop, 1991), (Richalet, 1993). Cependant, une grande difficulté réside dans le fait qu'il n'existe pas une relation directe entre les performances du système en boucle fermée et les paramètres de réglage  $(t_1, t_2, t_u, N_y, N_u, Q)$ . Parmi les importantes études sur la commande prédictive, on retient les travaux de Clarke (Clarke et al., 1987b), Kwon (Kwon and Byun, 1989), (Kwon et al., 1992), et Bitmead (Bitmead et al., 1990) qui démontrent l'équivalence entre la GPC et la commande à horizon fuyant dans le cas d'une poursuite (Receding Horizon Tracking Control, RHTC) afin de résoudre le problème de la stabilité du système en boucle fermée obtenu par la GPC. Le même problème a été traité dans le cas de la CGPC par Demircioglu et Gawthrop, (Demircioglu and Gawthrop, 1991). Etant donné que ces travaux montrent une équivalence entre la commande prédictive et la commande LQ (Linear Quadratic), nous avons pris l'initiative d'utiliser les propriétés de robustesse de la commande LQ pour améliorer celles de la commande prédictive.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord rappeler les théorèmes concernant l'étude de la stabilité de la commande prédictive donnés dans plusieurs publications. Puis nous allons introduire quelques notions de base liées à la commande des systèmes telles que la stabilité nominale, la description des erreurs de modélisation, et les problèmes de performances nominales, de stabilité robuste et de performances robustes. Ces développements vont nous permettre par la suite, d'établir quelques règles pour le choix des paramètres de réglage pour la commande de la machine asynchrone, et d'améliorer ainsi la robustesse en stabilité du système. Les performances du système de commande seront néanmoins vérifiées a posteriori par le tracé des réponses temporelles du système.

#### 3.1 Rappel sur l'analyse de la commande prédictive

##### 3.1.1 Cas de la GPC à temps discret

###### 3.1.1.1 Théorèmes proposés par Clarke (Clarke et al., 1989)

Afin de présenter les théorèmes concernant la stabilité de l'algorithme GPC, un modèle en variables d'état est construit à partir du modèle CARIMA,

$$A(q^{-1})\Delta y(k) = B(q^{-1})\Delta u(k) \quad (3.1)$$

conduit à :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + b\Delta u(k) \\ y(k) &= c^T x(k) \end{aligned} \quad (3.2)$$

**Théorème 3.1 :** Le régulateur obtenu par GPC est à réponse « pile » et stable si ;

- le système (3.2) est complètement commandable et observable et
- $N_1 = n, N_2 \geq 2n - 1, N_u = n$  et  $\lambda = 0$

où  $n$  est la dimension du système (3.2).

**Théorème 3.2 :** Le système en boucle fermée obtenu par GPC est stable si

- le système à  $n$  variables d'état (3.2) est stabilisable et détectable et si
- $N_u = N_1 \geq n, N_2 - N_1 \geq n - 1, N_u = n$  et  $\lambda = \varepsilon \rightarrow 0$ .

**Théorème 3.3 :** Le système en boucle fermée obtenu par GPC est stable si le système (3.2) est stabilisable et détectable et si

- $N_u, N_2 \rightarrow \infty$  avec  $N_u = N_2$  et  $\lambda > 0$ , ou
- $N_u, N_2 \rightarrow \infty$  avec  $N_u = N_2 - n + 1$  et  $\lambda = 0$ , , il n'y a pas de zéro sur la bande stabilité.

### 3.1.1.2 Analyse de Bitmead (Bitmead et al., 1990)

Bitmead et al., (1990) ont interprété la commande GPC comme un cas particulier de la commande des systèmes linéaires par minimisation d'un critère quadratique (LQ) avec horizon fuyant. Ils ont analysé la stabilité du système par la monotonie de la solution de l'équation différentielle (3.6).

Soit la représentation d'état du système obtenue à partir du modèle entrée/sortie :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Fx(k) + G\Delta u(k) + \zeta(k) \\ y(k) &= Hx(k) + v(k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $\zeta(k)$  et  $v(k)$  sont des bruits blancs centrés.

La commande  $\Delta u(k)$ , calculée par minimisation du critère de la GPC à temps discret avec la séquence de référence  $y_c(k) = 0$  (cas d'une régulation) et le facteur  $\lambda$  constant, est la même que celle obtenue par minimisation du critère de la commande LQ dans le cas d'une régulation. Pour la commande LQ, le critère est :

$$J = E \left[ x^T(k+N)P_0x(k+N) + \sum_{j=0}^{N-1} \left[ x^T(x+j)Q_{c,N-j}x(k+j) + \Delta u^T(k+j)R_{c,N-j}\Delta u(k+j) \right] \right] \quad (3.4)$$

avec les correspondances suivantes:

$$N_2 = N$$

$$Q_{c,k} \begin{cases} H^T H & \text{si } k = 0, \dots, N_2 - N_1 \\ 0 & \text{si } k = N_2 - N_1 + 1, \dots, N_2 - 1 \end{cases}$$

$$R_{c,k} \begin{cases} \infty I & \text{si } k = 0, \dots, N_2 - N_u - 1 \\ 0 & \text{si } k = N_2 - N_u + 1, \dots, N_2 - 1 \end{cases}$$

$$P_0 = H^T H$$

La commande incrémentale peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta u(k + N - j) = K_{j-1} x(k + N - j) \quad \text{pour } k = 1, \dots, N$$

où  $K_{j-1}$  est le gain de bouclage qui dépend de la solution de l'équation de Riccati.

La commande obtenue par GPC correspond au cas de la solution avec un horizon fuyant, donc :

$$\Delta u(k) = -(G^T P_{N-1} G + \lambda I)^{-1} G^T P_{N-1} F x(k) \quad (3.5)$$

où  $P_{N-1}$  est calculée par l'équation de Riccati suivante :

$$P_{j+1} = F^T P_j F - F^T P_j G (G^T P_j G + R_{c,j})^{-1} G^T P_j F + Q_{c,j} \quad (3.6)$$

Après l'analyse de la stabilité de la commande à horizon fuyant, Bitmead (Bitmead et al., 1990) a donné le théorème suivant :

**Théorème 3.4 :** Considérons la solution  $P_k$  de l'équation de Riccati (3.6) associée à la loi de commande GPC en prenant  $N_u = N_2$ ,  $N_1 = 1$ , i.e.  $Q_k = H^T H$ ,  $R_k = \lambda I$  et  $P_0 = H^T H$ , alors pour tout  $k \geq 0$ ,

$$P_{k+1} \geq P_k$$

i.e.  $P_k$  est toujours non décroissante.

Ce théorème important montre qu'une commande GPC avec  $N_u = N_2$  ne peut pas produire une matrice  $P_k$ , solution de l'équation de Riccati, décroissante et qu'on ne peut alors garantir la stabilité.

### 3.1.2 Cas de la GPC à temps continu

Demircioglu et Gawthrop (Demircioglu and Gawthrop, 1991) ont donné une interprétation heuristique très brève de la loi de commande CGPC. Ils ont discuté la relation qui existe entre la sortie future prédite  $y^*(t+\tau)$  et la sortie future actuelle  $y(t+\tau)$  et ils ont noté que le degré de cette approximation dépend de  $N_y, N_u$  et  $T$ . A partir de cet argument, il est clair que lorsque  $N_y \rightarrow \infty$  et  $N_u = N_y - \rho$ , la sortie prédite  $y^*(t+\tau)$  peut alors remplacer  $y(t+\tau)$  (en supposant que les perturbations futures sont nulles). En considérant  $t$  comme le temps initial et en choisissant  $T_1 = 0$ , la fonction de coût de la CGPC s'écrit :

$$J = \int_t^{t+T_2} [y^2(T) + \lambda u^2(T)] dT \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) est aussi le critère quadratique LQ à horizon fuyant pour les systèmes monovariables. Lorsque  $T_2 \rightarrow \infty$ , la loi de commande devient stationnaire. Par conséquent, quand  $T_2 \rightarrow \infty$  avec le choix suivant de  $N_u = N_y - \rho$  et  $N_y \rightarrow \infty$  est un entier supérieur ou égal à 1, la loi de commande CGPC et la commande LQ deviennent alors équivalentes. Cet argument a été vérifié par un exemple en simulation.

**Exemple 1 :** (Demircioglu and Gawthrop, 1991)

Soit le système donné par l'équation suivante:

$$y(s) = \frac{1}{s^2} u(s) + \frac{1}{s+1} v(s) \quad (3.8)$$

Avec la loi de commande LQ, les pôles du système sont :

$$S_{1,2} = -0.7071 \pm 0.7071j$$

Avec la loi de commande CGPC, en choisissant les paramètres suivants:

$$T_1 = 0, N_y = 12, N_u = 10, \text{ et } \lambda = 0$$

les pôles du système sont donnés en fonction de  $T_2$  :

$$\begin{aligned} T_2 = 1, & \quad S_{1,2} = -0.1546 \pm 0.6654j \\ & \quad S_{1,2} = -0.6021 \pm 0.7920j \\ & \quad S_{1,2} = -0.6941 \pm 0.6987j \\ & \quad S_{1,2} = -0.6936 \pm 0.7002j \\ & \quad S_{1,2} = -0.7030 \pm 0.7071j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{1,2} &= -0.7065 \pm 0.7075j \\
 S_{1,2} &= -0.7071 \pm 0.7071j \\
 S_{1,2} &= -0.7071 \pm 0.7071j \\
 S_{1,2} &= -0.7071 \pm 0.7071j \\
 T_2 = 10 \quad S_{1,2} &= -0.7070 \pm 0.7072j
 \end{aligned}$$

Pour  $T_2 > 6$ , les pôles de la boucle fermée obtenus par la CGPC et par la commande LQ deviennent identiques.

### 3.1.3 Remarques sur les théorèmes précédents

Les théorèmes cités plus haut nécessitent quelques remarques. Dans le cas de la GPC, et afin de garantir la stabilité du système en boucle fermée, il vaut mieux choisir :

- $N_2$  grand très ( $N_2 \rightarrow \infty$ ), comme l'indique le théorème (3.3).
- ou bien placer les pôles du système en boucle fermée à l'origine (cas discret) et obtenir un système à réponse « pile », théorème 3.1 avec  $\lambda = 0$ . Ce choix permet d'aboutir à un système stable avec des performances spécifiées.

Il existe aussi d'autres propositions pour définir les performances du système en boucle fermée, par exemple la version de la GPC avec double modèle de référence (GPC/MRM), (Irving et al., 1986), (Najim et al., 1990). Dans ce cas, les pôles désirés sont imposés par la commande filtrée et la sortie filtrée.

A part le cas de la réponse « pile », il n'existe pas de règles directes concernant le choix des paramètres de réglage, c'est pourquoi, lorsqu'il y a des erreurs d'estimation de modèle et des contraintes sur la variable de commande, ce qui est le cas, en général, dans un milieu réel, les performances des systèmes de commande ne sont plus satisfaisantes (manque de robustesse).

## 3.2 Analyse des performances et de la robustesse des systèmes de commande

### 3.2.1 Définition d'un système de commande multi-variables bouclé

Considérons la structure générale d'un système continu bouclé illustrée sur la figure (3.1).

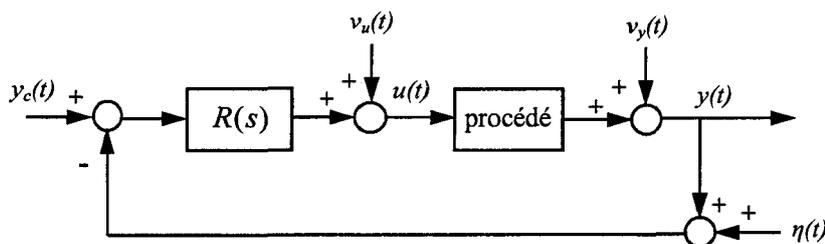


Fig. 3.1 Système bouclé.

$y_c(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $u(t)$  et  $v_u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $v_y(t) \in \mathbb{R}^p$  et  $\eta(t) \in \mathbb{R}^p$  désignent respectivement la consigne, l'entrée et la sortie du procédé, les perturbations en entrée et en sortie et le bruit de mesure.  $R(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}$  est un correcteur stabilisant et  $s$  désigne l'opérateur de Laplace. On suppose que le procédé peut être représenté par une famille de modèles linéaires  $G_p(G(s), \Delta(s)) \in \mathbb{R}^{p \times m}$  définie autour d'un modèle nominal  $G(s)$  perturbé par un ensemble d'incertitudes  $\Delta(s)$  de natures diverses, (Doyle et al., 1992), (Moari and Zafiriou, 1989).

Le problème de la commande consiste à trouver un correcteur  $R(s)$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- le système est stable de manière robuste : stabilité pour toute la classe des systèmes  $G_p(G(s), \Delta(s)) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .
- le système en boucle fermée est performant :  $y$  tend vers  $y_c$  pour tout  $y_c(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $v_u(t) \in D_u \subset \mathbb{R}^m$ ,  $v_y(t) \in D_y \subset \mathbb{R}^p$ ,  $\eta(t) \in D_\eta \subset \mathbb{R}^p$  et  $G_p(G(s), \Delta(s)) \in \mathbb{R}^{p \times m}$
- la variable  $u(t)$  ne sature pas le système :  $u(t)$  n'est pas trop grand.

Avant de réaliser l'étude d'un tel correcteur, nous allons tout d'abord définir les notions suivantes :

- stabilité nominale,
- stabilité interne,
- performance nominale,
- robustesse en stabilité,
- robustesse en performance.

### 3.2.2 Stabilité et performances nominales

Les premières propriétés d'un système de commande sont naturellement la stabilité nominale, la stabilité interne et les performances nominales : le système de commande obtenu en remplaçant le procédé par son modèle nominal est asymptotiquement stable et possède les performances pour lesquelles il a été conçu.

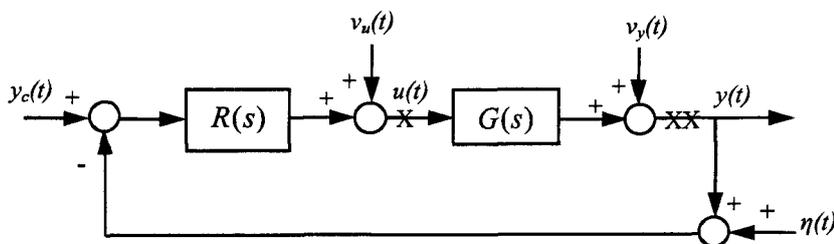


Fig. 3.2 Schéma bloc pour l'étude de la stabilité interne

Considérons le système bouclé de la figure (3.2) et supposons que le procédé est parfaitement représenté par son modèle nominal  $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , le système de commande est alors décrit par :

$$y(s) = G(s)u(s) + v_y(s) \quad (3.9)$$

$$u(s) = R(s)[y_c(s) - y(s) - \eta(s)] + v_u(s) \quad (3.10)$$

En tenant compte de ces deux équations, on trouve :

$$y(s) = [I_p + G(s)R(s)]^{-1} [G(s)R(s)y_c(s) + G(s)v_u(s) + v_y(s) - G(s)R(s)\eta(s)] \quad (3.11)$$

$$u(s) = [I_m + R(s)G(s)]^{-1} [R(s)y_c(s) + v_u(s) - R(s)v_y(s) - R(s)\eta(s)] \quad (3.12)$$

Par ailleurs, si on ouvre respectivement la boucle à l'entrée du procédé (nœud marqué par x) (Fig. 3.2) et à la sortie du procédé (nœud marqué par xx) (Fig. 3.2), les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire correspondantes sont respectivement données par :

$$S_i(s) = [I_m + R(s)G(s)]^{-1} \text{ et } T_i(s) = R(s)G(s)[I_m + R(s)G(s)]^{-1} \quad (3.13)$$

à l'entrée du procédé et par

$$S_o(s) = [I_p + G(s)R(s)]^{-1} \text{ et } T_o(s) = G(s)R(s)[I_p + G(s)R(s)]^{-1} \quad (3.14)$$

à la sortie du procédé.

En utilisant la propriété algébrique suivante :

$$B[I_n + AB]^{-1} = [I_n + BA]^{-1}B \text{ pour tout } (A, B) \in \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n}$$

Les équations du système bouclé peuvent être alors réécrites à partir des fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire comme suit :

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \\ \varepsilon(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_o(s) & S_o(s)G(s) & S_o(s) & -T_o(s) \\ S_i(s)R(s) & S_i(s) & -R(s)S_o(s) & -R(s)S_o(s) \\ S_o(s) & -S_o(s)G(s) & -S_o(s) & S_o(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c(s) \\ v_u(s) \\ v_y(s) \\ \eta(s) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

où  $(\varepsilon(s) = y_c(s) - y(s))$  représente l'erreur d'asservissement. La condition de stabilité nominale du système est donnée par :

$$\det[I_p + G(s)R(s)] = 0 \Rightarrow s \text{ est dans le demi plan gauche défini par } R_e(s) < 0.$$

où

$\det[I_m + R(s)G(s)] = 0 \Rightarrow s$  : est dans le demi plan gauche défini par  $R_e(s) < 0$ .

alors que la stabilité interne du système bouclé de la figure (3.2) est plus contraignante dans la mesure où elle impose que les sept fonctions de transfert dans  $M(G, R)$  soient asymptotiquement stables.

Les conditions de performances nominales apparaissent clairement à partir de l'équation (3.15) du système bouclé, en l'occurrence :

- Le rejet des perturbations en entrée et en sortie sur la sortie du procédé nécessite que les matrices de transfert  $S_o(s)G(s)$  et  $S_o(s)$  soient suffisamment faibles aux fréquences où ces perturbations sont importantes, ce qui permet ainsi d'assurer une bonne poursuite en consigne, c.à.d.  $T_o(s)$  tend alors vers  $I_p$ .
- Le rejet des perturbations en entrée et en sortie sur l'entrée du procédé nécessite que les matrices de transfert  $S_i(s)$  et  $R(s)S_o(s)$  soient suffisamment faibles aux fréquences où ces perturbations sont importantes, c.-à-d  $T_i(s)$  tend alors vers  $I_m$ .
- L'atténuation des effets du bruit de mesure sur l'entrée et la sortie du procédé nécessite que les matrices de transfert  $R(s)S_o(s)$  et  $T_o(s)$  soient suffisamment faibles aux fréquences prépondérantes du bruit de mesure, donc  $S_o$  tend vers  $I_p$ .

Comme le modèle de commande est donné a priori et que la fonction de sensibilité complémentaire peut s'écrire  $T_o(s) = G(s)R(s)S_o(s)$ , on peut considérer que les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire représentent des quantificateurs de performances nominales (Cruz et al., 1981), (Freudenberg and Looze, 1988). Les objectifs de performances nominales consistent généralement à supposer que l'on peut définir des matrices de transfert propres et asymptotiquement stables  $W_s^R(s)$ ,  $W_s^L(s)$ ,  $W_T^R(s)$  et  $W_T^L(s)$ , telle que :

$$\|W_s^R S_o W_s^L\|_{\infty} < 1 \quad (3.16)$$

$$\|W_T^R T_o W_T^L\|_{\infty} < 1 \quad (3.17)$$

où  $\|\cdot\|_{\infty}$  représente la norme  $H_{\infty}$ .

Les matrices de pondération  $W_s^R(s)$ ,  $W_s^L(s)$ ,  $W_T^R(s)$  et  $W_T^L(s)$ , sont définies de sorte à réaliser un modelage en boucle ouverte « loop-shaping » du système. Cependant, il n'est pas très facile de spécifier ces matrices a priori.

Notons que l'on ne peut pas réaliser simultanément les objectifs de performances nominales (3.16) et (3.17) pour toutes les fréquences dans la mesure où les fonctions de sensibilité et sensibilité complémentaire vérifient :

$$S_o(s) + T_o(s) = I_p \quad (3.18)$$

et

$$S_i(s) + T_i(s) = I_m \quad (3.19)$$

Il s'agit alors de trouver un compromis entre le rejet de perturbations, la suppression des bruits, et les performances par l'intermédiaire de  $S_o(s)$  et de  $T_o(s)$ , et  $S_i(s)$  et de  $T_i(s)$ .

### 3.2.3 Théorème du petit gain

Un des résultats importants dans la théorie de la robustesse des systèmes linéaires, permettant de caractériser la stabilité robuste, est le théorème du petit gain qui donne une condition suffisante de stabilité robuste (Doyle et al., 1992).

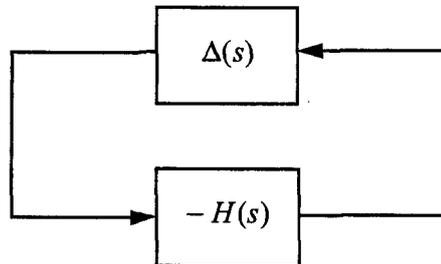


Fig. 3.3 Système perturbé.

**Théorème 3.5 :** Soit  $H(s)$  une matrice de transfert stable et  $\Delta(s)$  une perturbation stable, connectée de la sortie à l'entrée de  $H(s)$  comme décrit la figure (3.3) ; alors le système en boucle fermée est stable (de manière interne) si :

$$\|\Delta(j\omega)H(j\omega)\|_{\infty} < 1 \quad \text{pour tout } \omega \quad (3.20)$$

Une autre manière de reformuler la condition (3.20) consiste à la remplacer par la condition suffisante :

$$\|\Delta(j\omega)\|_{\infty} \|H(j\omega)\|_{\infty} < 1 \quad \text{pour tout } \omega \quad (3.21)$$

Ce résultat, basé uniquement sur la norme  $H_{\infty}$ , du bloc d'incertitude  $\Delta(s)$ , conduit à envisager une classe d'incertitudes de modélisation pouvant être beaucoup plus large que celle qui caractérise réellement le procédé.

### 3.2.4 Stabilité robuste

La robustesse en stabilité consiste en la capacité d'un système de commande à préserver sa stabilité en présence d'erreurs de modélisation inéluctables. Pour étudier cette propriété, il faut définir au préalable la classe des erreurs de modélisation vis-à-vis de laquelle la propriété de stabilité doit être satisfaite. La représentation des erreurs de modélisation dépend de la connaissance dont on dispose sur le système à commander (actionneur, procédé et capteur) d'une part et sur la méthode de synthèse adoptée, d'autre part.

Dans ce qui suit, nous allons présenter la description des erreurs de modélisation adoptée puis les conditions de robustesse en stabilité qui en découlent. On considère plus particulièrement la classe des erreurs de modélisation dites non structurées, le comportement d'entrée/sortie du procédé est décrit par un modèle nominal  $G(s)$  et ces incertitudes par  $\Delta(s)$ . Un tel choix est motivé par des considérations de généralité.

Ces incertitudes peuvent être multiplicatives ou additives sur la sortie ou sur l'entrée du système (cf. figures 3.4 à 3.9). On distingue :

- les formes additives directes et inverses données respectivement par :

$$G_p(s) = G(s) + \Delta_d^a(s)$$

$$G_p(s) = [G^{-1}(s) + \Delta_i^a(s)]^{-1}$$

où  $\Delta_d^a(s)$  et  $\Delta_i^a(s)$  sont des matrices de transfert de dimension  $IR^{p \times m}(s)$ , (Fig.3.4 et Fig.3.5)

- les formes multiplicatives directes et inverses en entrée, données respectivement par :

$$G_p(s) = G(s)[I + \Delta_d^e(s)]$$

$$G_p(s) = G(s)[I + \Delta_i^e(s)]^{-1}$$

où  $\Delta_d^e(s)$  et  $\Delta_i^e(s)$  sont des matrices de transfert de dimension  $IR^{p \times m}(s)$ , (Fig. 3.6 et Fig. 3.7)

- les formes multiplicatives directes et inverses en sortie, données respectivement par :

$$G_p(s) = [I + \Delta_d^s(s)]G(s)$$

$$G_p(s) = [I + \Delta_i^s(s)]^{-1}G(s)$$

où  $\Delta_d^s(s)$  et  $\Delta_i^s(s)$  sont des matrices de transfert de dimension  $IR^{p \times m}(s)$ , (Fig. 3.8 et Fig. 3.9).

Le choix d'une forme ou d'une autre dépend de la connaissance dont on dispose sur le système à commander et sur les propriétés du système de commande que l'on souhaite mettre en évidence. Les formes additives permettent de représenter les erreurs de modélisation sur toute la bande de fréquences. Les formes multiplicatives directes sont généralement utilisées pour représenter les erreurs de modélisation sur les actionneurs et les capteurs. Quant aux formes multiplicatives inverses, elles sont généralement utilisées pour représenter les variations des paramètres du modèle de commande.

Nous allons maintenant appliquer le théorème du petit gain aux diverses représentations données par les figures (3.4) à (3.9). Pour ce faire, mettons d'abord les systèmes de commande sous la forme de la figure (3.3) où  $H(s)$  représente la matrice de transfert qui relie la sortie du bloc d'incertitude  $s_L(t)$  à son entrée  $e_L(t)$ . Les différentes matrices  $H(s)$  peuvent être facilement déterminées après quelques manipulations algébriques :

- Pour les formes additives directes (Fig. 3.4), on a :

$$\begin{aligned} e_L(s) &= -R(s)[G(s)e_L(s) + s_L(s)] \\ &= -[I + R(s)G(s)]^{-1} R(s)s_L(s) \\ &= -R(s)S_i(s)s_L(s) \\ &= -H_d^a(s)s_L(s) \end{aligned}$$

- Pour les formes additives inverses (Fig. 3.5), on a

$$\begin{aligned} e_L(s) &= -G(s)[R(s)e_L(s) + s_L(s)] \\ &= -[I + G(s)R(s)]^{-1} G(s)s_L(s) \\ &= -S_o(s)G(s)s_L(s) \\ &= -H_i^a(s)s_L(s) \end{aligned}$$

- Pour les formes multiplicatives directes en entrée (Fig. 3.6), on a

$$\begin{aligned} e_L(s) &= -R(s)G(s)[e_L(s) + s_L(s)] \\ &= -[I + R(s)G(s)]^{-1} R(s)G(s)s_L(s) \\ &= -T_i(s)s_L(s) \\ &= -H_d^e(s)s_L(s) \end{aligned}$$

- Pour les formes multiplicatives inverses en entrée (Fig. 3.7), on a :

$$\begin{aligned} e_L(s) &= -R(s)G(s)e_L(s) - s_L(s) \\ &= -[I + R(s)G(s)]^{-1} s_L(s) \\ &= -S_i(s)s_L(s) \\ &= -H_i^e(s)s_L(s) \end{aligned}$$

- Pour les formes multiplicatives directes en sortie (Fig. 3.8), on a :

$$\begin{aligned}
 e_L(s) &= -G(s)R(s)[e_L(s) + s_L(s)] \\
 &= -[I + G(s)R(s)]^{-1} G(s)R(s)s_L(s) \\
 &= -T_o(s)s_L(s) \\
 &= -H_d^s(s)s_L(s)
 \end{aligned}$$

- Pour les formes multiplicatives inverses en sortie (Fig. 3.9), on a :

$$\begin{aligned}
 e_L(s) &= -G(s)R(s)e_L(s) - s_L(s) \\
 &= -[I + G(s)R(s)]^{-1} s_L(s) \\
 &= -S_o(s)s_L(s) \\
 &= -H_i^s(s)s_L(s)
 \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse où  $H_y^x(s)$  et  $\Delta_y^x(s)$  sont stables, et par application du théorème du petit gain aux différentes représentations données par les figures (3.4) à (3.9), le système de commande  $\Delta_y^x(s)H_y^x(s)$  résultant est stable si :

$$\|\Delta_y^x(j\omega)H_y^x(j\omega)\|_\infty < 1 \quad \text{pour tout } \omega \quad (3.22)$$

où encore :

$$\|\Delta_y^w(j\omega)\|_\infty \|H_y^x(j\omega)\|_\infty < 1 \quad \text{pour tout } \omega \quad (3.23)$$

Ce théorème montre que les conditions de performances nominales peuvent être interprétées comme des conditions de stabilité robuste. Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire ne représentent donc pas uniquement des quantificateurs de performances nominales, mais aussi des mesures de robustesse en stabilité. En effet, avec un choix judicieux des matrices de pondération, on peut facilement retrouver les performances nominales et la stabilité robuste.

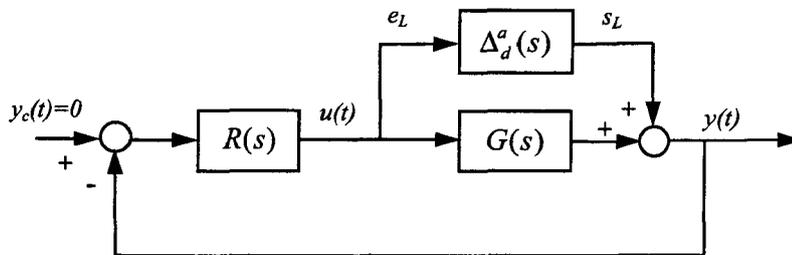


Fig.3.4 Système bouclé avec incertitude additive directe.

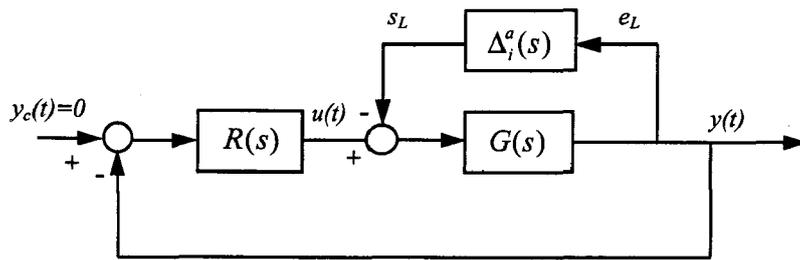


Fig.3.5 Système bouclé avec incertitude additive inverse.

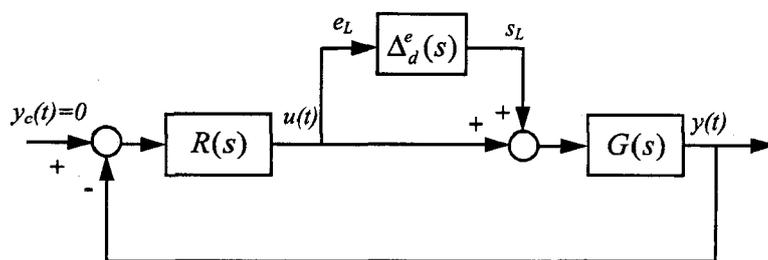


Fig.3.6 Système bouclé avec incertitude multiplicative directe en entrée.

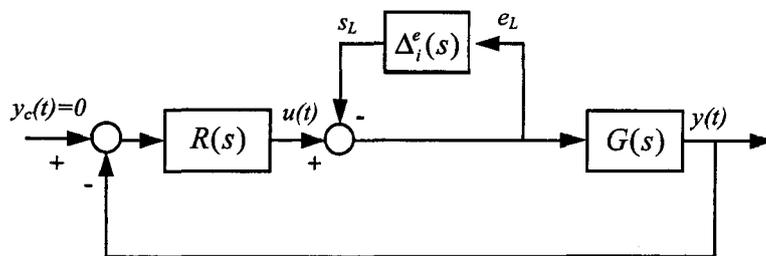


Fig.3.7 Système bouclé avec incertitude multiplicative inverse en entrée.

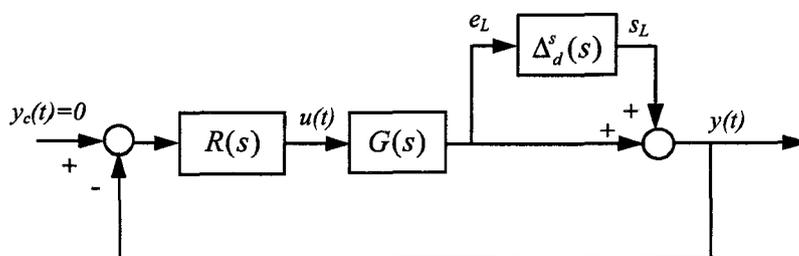


Fig.3.8 Système bouclé avec incertitude multiplicative directe en sortie.

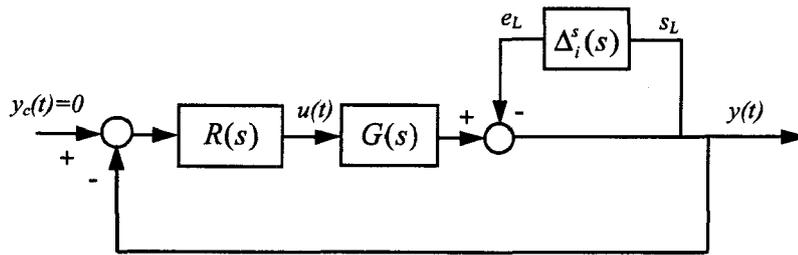


Fig.3.9 Système bouclé avec incertitude multiplicative inverse en sortie.

### 3.2.5 Performance robuste

Pour qu'un système de commande soit utilisable dans un environnement industriel, il doit non seulement satisfaire la condition de stabilité robuste, mais garantir les meilleures performances en présence d'incertitudes de modèle. En effet, il serait peu intéressant d'obtenir un régulateur qui soit très performant pour le système nominal et très médiocre pour l'ensemble des systèmes  $G_p(G(s), \Delta(s))$ , car le modèle mathématique, aussi précis soit-il, est toujours une approximation du système réel qu'il doit représenter.

En conséquence, un système de commande satisfait le critère de robustesse en performance si les deux conditions (3.16) et (3.17) sont vérifiées pour toute une classe de modèles de procédé  $G_p(G(s), \Delta_y^x(s))$ , caractérisée par les incertitudes définies précédemment.

Pour résoudre ce problème de performance robuste, on lui associe le problème de stabilité robuste augmentée, en introduisant une erreur de modèle supplémentaire fictive  $\Delta_p(s)$ , (cf. Fig. 3.10).

Soit le schéma bloc de la figure (3.10.a), la condition de robustesse en performance s'exprime par  $\|F_u(H(s), \Delta_i(s))\|_\infty < 1$ .

En appliquant le théorème du petit gain, cette condition devient identique à la condition de stabilité robuste du même système bouclé par la matrice  $\Delta_p(s)$ , traduisant ainsi une incertitude non structurée fictive. Le problème de performance robuste du système de la figure (3.10.a) est alors équivalent au problème fictif de stabilité robuste du système représenté sur la figure (3.10.b).

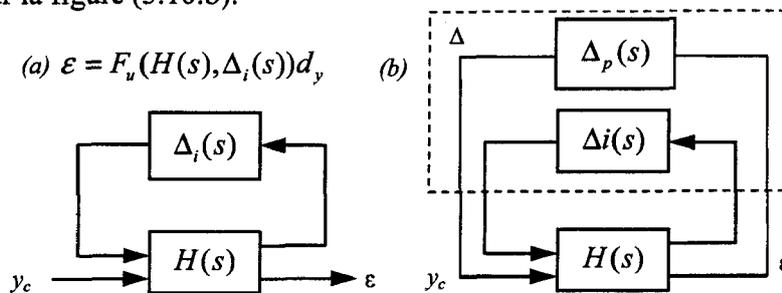


Fig. 3.10 Equivalence : Test de performance robuste de (a) - Test « fictif » de stabilité robuste de (b).

La résolution du problème de performance robuste fait appel à la notion de valeur singulière structurée (Doyle, 1982), qui dépasse le cadre de cette étude. Toutefois, si le système de commande vérifie à la fois la condition de performance nominale et de stabilité robuste dans une certaine marge alors, la condition de performance robuste est satisfaite pour cette même marge (Morari et Zafiriou, 1989).

### 3.3 Application à la commande CGPC

Les notions citées plus haut vont être appliquées directement à la structure de commande CGPC.

Soit le système linéaire invariant du § 2.2.1.1, donné par les équations d'état et de sortie (2.1), avec la loi de commande résultant de l'association :

- d'un filtre de Kalman stationnaire (2.16)
- d'un retour d'état estimé (2.34), avec  $y_c(t) = 0$ , obtenu à partir du critère quadratique de la CGPC (2.22).

On peut exprimer le régulateur sous forme de transfert :  $u(s) = -R(s)y(s)$ . On a alors :

$$R(s) = K_x [sI - A + BK_x + LC]^{-1} L \quad (3.24)$$

La matrice de transfert représente le système (2.1) est donnée par :

$$G(s) = C\Phi(s)B \in \mathbb{R}^{p \times m}(s) \text{ avec } \Phi(s) = [sI - A]^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.25)$$

La figure suivante montre le schéma de la commande CGPC utilisant un filtre de Kalman stationnaire.

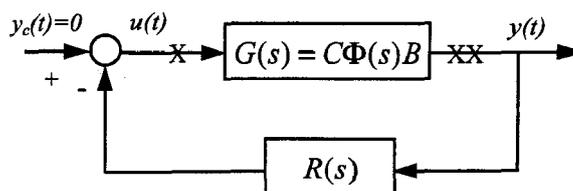


Fig. 3.11 Régulateur CGPC utilisant un filtre de Kalman

Les matrices de transfert obtenues en ouvrant respectivement la boucle d'un système de commande CGPC avec un filtre de Kalman à l'entrée et à la sortie sont données par :

$$\begin{aligned} G_e(s) &= K_x [sI - A + BK_x + LC]^{-1} LC\Phi(s)B \\ &= R(s)G(s) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$G_s(s) = C\Phi(s)BK_x[sI - A + BK_x + LC]^{-1}L = G(s)R(s) \quad (3.27)$$

Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire correspondantes sont respectivement données par :

$$S_i(s) = [I + G_e(s)]^{-1} \text{ et } T_i(s) = G_e(s)[I + G_e(s)]^{-1} \quad (3.28)$$

à l'entrée du procédé et par

$$S_o(s) = [I + G_s(s)]^{-1} \text{ et } T_o(s) = G_s(s)[I + G_s(s)]^{-1} \quad (3.29)$$

à la sortie du procédé.

Ainsi, toutes les propriétés de performances et de robustesse, présentées ci-dessus, sont valables et peuvent être appliquées au système de commande de la figure (3.11).

**Exemple 2 :**

Soit le système suivant donné par son équation :

$$y(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 0.2s + 0.5} u(s)$$

Nous allons présenter l'effet du paramètre  $N$  sur la stabilité robuste, donnée par la condition (3.23), pour des incertitudes de type multiplicatives. Les courbes (Fig. 3.12) sont obtenues avec les paramètres  $t_1 = 0, t_2 = t_u = 0.04, N_2 = 6, \text{ et } \lambda = 0$ . Lorsque  $N_u$  augmente, la robustesse du système de commande diminue.

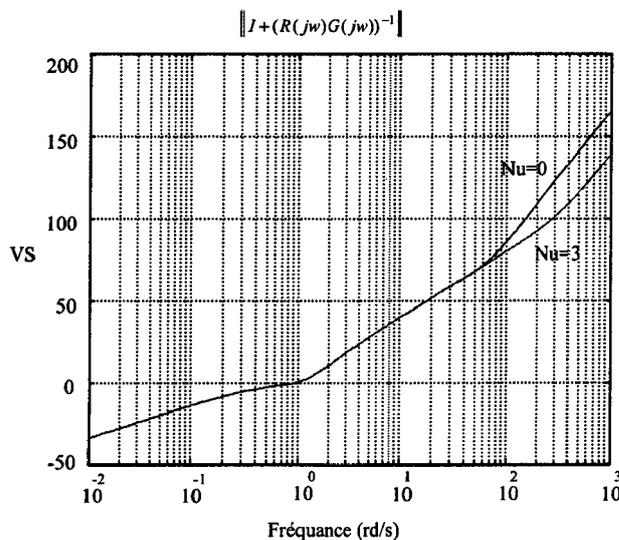


Fig. 3.12 Effet de  $N_u$  sur la stabilité robuste

### 3.4 Amélioration de la robustesse de la commande CGPC

Nous avons vu au chapitre précédent une loi de commande à critère quadratique à horizon fini et fuyant, à savoir la commande CGPC. Cette loi de commande a montré sa capacité à stabiliser des systèmes assez complexes. Cependant, la formulation d'entrée/sortie de la CGPC, comme dans le cas de la GPC à temps discret, ne se prête pas facilement à une analyse de la stabilité de la boucle fermée et des propriétés de performance telles que le placement des pôles, l'écart toléré concernant les erreurs de modélisation pour que la stabilité reste préservée.

C'est pourquoi, plusieurs auteurs (Clarke et al., 1987b), (Kwon and Byun, 1989), (Bitmead et al., 1990), (Kwon et al., 1992) dans le cas de la GPC à temps discret, (Demircioglu and Gawthrop, 1991) dans le cas de la GPC à temps continu, ont proposé d'interpréter les lois de commande prédictive comme un cas particulier de la commande par minimisation d'un critère quadratique à horizon fuyant (Receding horizon Linear Quadratic Control). Cela permet ainsi d'utiliser la théorie concernant l'étude de la stabilité et des propriétés de performance développées pour la commande LQ dans l'analyse de la CGPC.

Dans cette partie, nous allons d'abord rappeler les propriétés de robustesse de la commande LQ. Dans le cas où l'état n'est pas entièrement disponible, la commande LQ fait appel à un observateur d'état ou estimateur, comme par exemple le filtre de Kalman : c'est la commande LQG (Linear Quadratic Gaussian). Dans ce cas, les propriétés de robustesse de la commande LQG vont être relativement réduites (Doyle and Stein, 1979), (Bitmead et al., 1990).

#### 3.4.1 Robustesse de la commande LQ

La figure (3.13) montre le schéma d'une commande LQ. La matrice de transfert obtenue en ouvrant la boucle à l'entrée du système, comme il est indiqué par (x), est donnée par :

$$G_e^{LQ}(s) = K_x \Phi(s) B \quad (3.30)$$

Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire correspondantes sont respectivement données par

$$S_e^{LQ}(s) = [I + G_e^{LQ}(s)]^{-1} \quad \text{et} \quad T_i^{LQ}(s) = G_e^{LQ}(s) [I + G_e^{LQ}(s)]^{-1} \quad (3.31)$$

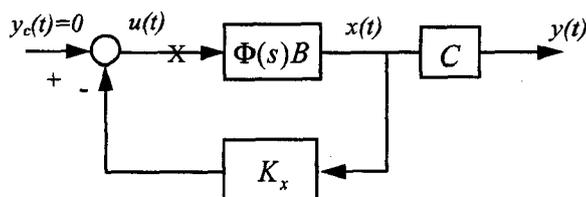


Fig.3.13 La commande LQ

**Théorème 3.6** Considérons le système de commande LQ, représenté sur la figure (3.13), pour lequel on suppose que l'état  $x(t)$  est entièrement observable ; alors, on a :

$$\|S_i^{LQ}(s)\|_{\infty} < 1 \quad (332.)$$

et

$$\|T_i^{LQ}(s)\|_{\infty} < 2 \quad (3.33)$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans (Anderson and Moore, 1990). Ce résultat montre que la commande LQ possède des propriétés de robustesse et de performances remarquables à l'entrée du système. Dans le cas mono-variable, les marges de gain et de phase sont données par  $]1/2, +\infty[$  et  $\pm 60$ .

Ce résultat, très intéressant à première vue, doit être pris avec prudence :

- il ne concerne que les incertitudes affectant l'entrée du système
- il concerne une commande par retour d'état. Lors de la commande par retour reconstruit, il ne sera préservé que pour des systèmes à minimum de phase et de reconstructrices limitées à des modes infiniment rapides (Duc, 1993).

### 3.4.2 La commande LQG

La synthèse d'un régulateur LQG comporte deux étapes duales et indépendantes :

- la synthèse d'un retour d'état par optimisation d'un critère quadratique.
- la synthèse d'un filtre de Kalman permettant d'implanter la commande à partir des seules mesures disponibles.

La commande LQ est déterminée en supposant que l'état est entièrement disponible, elle est donnée par :

$$u(t) = -K_x x(t) \quad (3.34)$$

L'estimation de l'état se fait par l'intermédiaire d'un filtre de Kalman :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (3.35)$$

Le principe de séparation de l'estimation et de la commande précise que dans le cas linéaire et gaussien, cette approche est valide. La commande LQG est entièrement déterminée par les matrices de gain  $K_x$  et  $L$ .



**Théorème 3.7** Soit le système (2.1) en boucle fermée avec un régulateur LQG utilisant un filtre de Kalman, alors :

- La matrice de gain  $L$  réalisant la LTR peut être asymptotiquement obtenue en choisissant les covariances du bruit d'état et du bruit de sortie comme suit :

$$\text{var}[w(t)] = Q_o + \beta BB^T \quad \text{et} \quad \text{var}[v(t)] = R_o \quad \text{avec} \quad \beta \rightarrow \infty \quad (3.37)$$

où  $Q_o$  et  $R_o$  sont les matrices de covariances nominales des bruits.

Notons dans ce cas, que l'amélioration des performances et de la robustesse n'est réalisée qu'à l'entrée du système.

**Exemple 3 :**

On reprend les données de l'exemple 2. La figure (3.15) met en évidence l'effet du paramètre  $\beta$  du filtre de Kalman sur la robustesse en stabilité (condition 3.23). Les courbes sont obtenues avec les paramètres :  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = t_u = 0.04$ ,  $N_2 = 6$ ,  $N_u = 0$  et  $\lambda = 0$ .

- courbe 1 est obtenue avec la commande CGPC sans observateur,
- courbe 2 est obtenue avec la commande CGPC avec observateur,  $\beta = 1$ .
- courbe 3 est obtenue avec la commande CGPC avec observateur,  $\beta = 100$ .

Lorsque  $\beta$  augmente, la robustesse du système bouclé (courbes 2 et 3) tend à approcher celle du système de commande sans observateur (courbe 1).

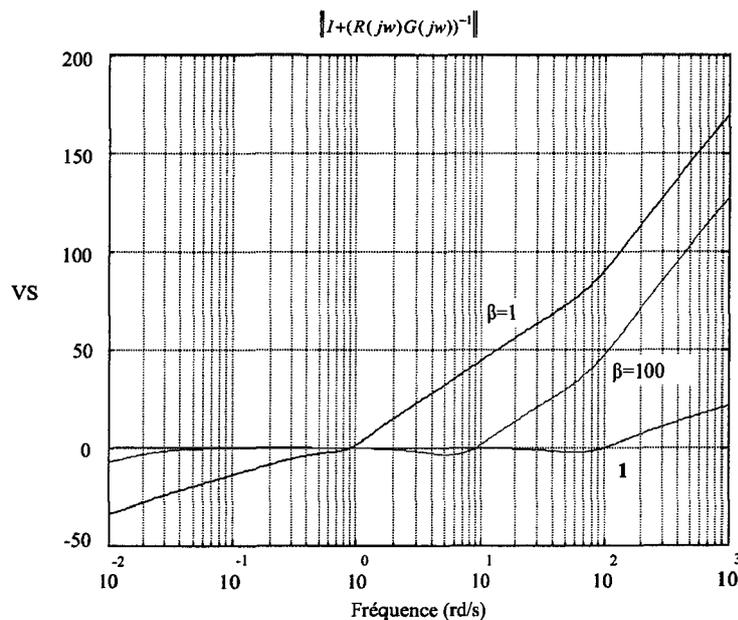


Fig.3.15  $\|1 + (R(jw)G(jw))^{-1}\|$  en fonction de  $\beta$ , comparée à  $\|1 + (K_x \Phi(jw)B)^{-1}\|$   
 1. CGPC sans observateur

### 3.5 Analyse de la stabilité de la structure IMC

La structure de commande par modèle interne (IMC) a été introduite par Garcia et Morari (Garcia and Morari, 1981) comme une alternative à la structure de régulation classique (cf. Fig. 3.16). L'avantage principal de cette approche est que la stabilité de la boucle fermée est simplement assurée par un choix d'un régulateur IMC stable. Aussi, les performances de la boucle fermée vont dépendre directement des paramètres du régulateur IMC, lesquels sont faciles à régler en ligne.

#### 3.5.1 Structure de la boucle IMC

Cette partie est consacrée à l'analyse des performances nominales et de la robustesse en stabilité de la boucle IMC. Soit le schéma bloc de la structure IMC présenté à la figure (3.17), où  $y_c(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $u(t)$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  et  $y_m(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $d_u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $d_y(t) \in \mathbb{R}^p$  désignent respectivement la consigne, l'entrée de commande, la sortie du procédé et celle de son modèle interne, les perturbations à l'entrée et à la sortie du procédé. Le procédé est représenté par la matrice de transfert  $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}$  et son modèle interne par  $G_m(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

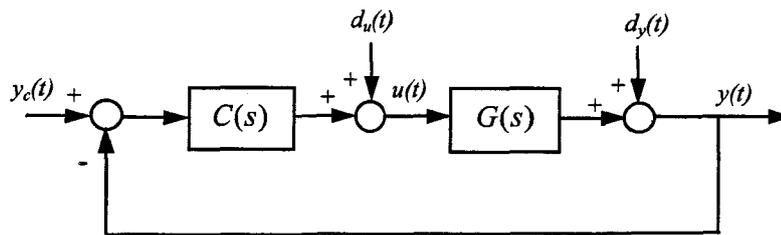


Fig. 3.16 Schéma bloc d'une régulation classique.

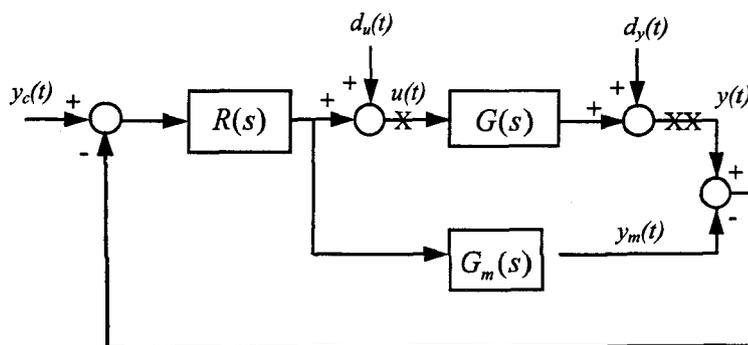


Fig. 3.17 Schéma bloc de la boucle IMC

A partir de la figure (3.17), il est facile d'établir une correspondance entre la structure de la boucle IMC et celle de la régulation classique (cf. Fig. 3.16) à travers les relations suivantes :

$$C(s) = R(s)[I_p - G_m(s)R(s)]^{-1} \quad (3.38)$$

$$R(s) = C(s)[I_p - G_m(s)C(s)]^{-1} \quad (3.39)$$

Considérons maintenant le schéma bloc de la structure IMC (Fig. 3.17). L'écart entre la sortie du procédé  $y(s)$  et la consigne  $y_c(s)$  peut s'obtenir de la façon suivante :

$$\begin{aligned} e(s) &= y(s) - y_c(s) \\ &= [I_p - G_m(s)R(s)][I_p + [G(s) - G_m(s)]R(s)]^{-1}[G(s)d_u(s) + d_y(s) - y_c(s)] \end{aligned} \quad (3.40)$$

En tenant compte de cette équation (3.40), on trouve :

$$\begin{aligned} y(s) &= [I_p - G_m(s)R(s)][I_p + [G(s) - G_m(s)]R(s)]^{-1}[G(s)d_u(s) + d_y(s)] \\ &\quad + G(s)R(s)[I_p + [G(s) - G_m(s)]R(s)]^{-1}y_c(s) \end{aligned} \quad (3.41)$$

et

$$\begin{aligned} u(s) &= [I_m + R(s)[G(s) - G_m(s)]]^{-1}[I_m - R(s)G_m(s)]d_u(s) \\ &\quad + [I_m + R(s)[G(s) - G_m(s)]]^{-1}R(s)[y_c(s) - d_y(s)] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Par ailleurs, si on ouvre respectivement la boucle IMC à l'entrée du procédé (nœud marqué par x) et à la sortie du procédé (nœud marqué par xx), les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire correspondantes sont respectivement données par :

$$\tilde{S}_i(s) = [I_m + R(s)[G(s) - G_m(s)]]^{-1}[I_m - R(s)G_m(s)] \quad (3.43)$$

et

$$\tilde{T}_i(s) = [I_m + R(s)[G(s) - G_m(s)]]^{-1}R(s)G(s) \quad (3.44)$$

à l'entrée du procédé et par :

$$\tilde{S}_o(s) = [I_p - G_m(s)R(s)][I_p + [G(s) - G_m(s)]R(s)]^{-1} \quad (3.45)$$

et

$$\tilde{T}_o(s) = G(s)R(s)[I_p + [G(s) - G_m(s)]R(s)]^{-1} \quad (3.46)$$

à la sortie du procédé.

En cas de modélisation parfaite, c'est à dire ( $G(s) = G_m(s)$ ), les expressions des fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire se réduisent à :

$$S_i(s) = [I_m - R(s)G_m(s)] \quad \text{et} \quad T_i(s) = R(s)G(s) \quad (3.47)$$

à l'entrée du procédé et par

$$S_o(s) = [I_p - G_m(s)R(s)] \quad \text{et} \quad T_o(s) = G(s)R(s) \quad (3.48)$$

à la sortie du procédé.

### 3.5.2 Condition de stabilité interne de la boucle IMC

Afin d'étudier la stabilité interne, on examine les différentes matrices de transfert entre toutes les entrées et les sorties possibles du système. A partir du schéma bloc de la figure (3.17), on peut remarquer qu'il existe trois entrées indépendantes  $y_c(t), d_u(t)$  et  $d_y(t)$  et trois sorties indépendantes  $u(t), y(t)$  et  $y_m(t)$ .

En absence d'erreurs de modélisation ( $G(s) = G_m(s)$ ), les équations du système de commande IMC peuvent être réécrites, en utilisant les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire, comme suit :

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ y_m(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_o(s) & S_o(s)G(s) & S_o(s) \\ T_o(s) & -T_o(s)G(s) & -T_o(s) \\ R(s) & S_i(s) & -R(s) \end{bmatrix}}_{M(G,R)} \begin{bmatrix} y_c(s) \\ d_u(s) \\ d_y(s) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

De la même manière, on peut déduire la condition de stabilité interne pour la structure de régulation classique équivalente (cf. Fig. 3.16). En tenant compte de  $C(s)$  (cf. équation. 3.38), et en supposant que ( $G(s) = G_m(s)$ ), on obtient, pour  $y_c(t) = 0$ ,

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_o(s) & S_o(s)G(s) & S_o(s) \\ R(s) & S_i(s) & -R(s) \end{bmatrix}}_{M(G,R)} \begin{bmatrix} d_u(s) \\ d_y(s) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

On peut maintenant énoncer les théorèmes suivants, (Morari et Zafiriou, 1989) :

**Théorème 3.8** Si le procédé  $G(s)$  est stable, et si le modèle est parfait ( $G(s) = G_m(s)$ ), alors le système de commande IMC représenté sur la figure (3.17) est stable d'une manière interne si et seulement si le régulateur  $R(s)$  est stable.

**Théorème 3.9** Si le procédé  $G(s)$  est stable, et si le modèle est parfait ( $G(s) = G_m(s)$ ), alors le système de régulation classique (cf. Fig. 3.16) avec

$$C(s) = R(s)[I_p - G_m(s)R(s)]^{-1}$$

est stable d'une manière interne si et seulement si le régulateur  $R(s)$  est stable

Ces résultats sont à comparer avec ceux d'une structure classique, où il n'est pas évident de déduire les propriétés de stabilité du système en boucle fermée à partir du régulateur  $C(s)$ .

Par ailleurs, la relation (3.38) est intéressante lors de la conception du régulateur  $C(s)$ . Par conséquent, la détermination de  $R(s)$  devient beaucoup plus simple, car la stabilité de  $R(s)$  garantit automatiquement la stabilité de la boucle fermée d'un système de régulation classique, en choisissant  $C(s)$  selon la relation (3.38).

### 3.5.3 Performance nominale de la boucle IMC

Compte tenu de l'interprétation que nous avons donnée des matrices  $S_{io}(s)$  et  $T_{io}(s)$  représentant respectivement les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire en entrée et en sortie du procédé, il est clair que lorsqu'on effectue la synthèse du régulateur IMC, on doit respecter les conditions de performances nominales, (cf. équation 3.49) :

- rendre  $S_{io}(s)$  le plus faible possible afin de minimiser l'effet des perturbations en entrée et en sortie sur l'entrée et la sortie du procédé, et d'assurer ainsi un bon suivi de la référence, ce qui implique que  $T_{io}(s)$  tends vers  $I$ .
- rendre  $T_{io}(s)$  suffisamment faible afin de minimiser l'influence du bruit de mesure, si c'est le cas, ce qui va faire tendre  $S_{io}(s)$  vers  $I$ .

En général, les objectifs de performances nominales consistent à satisfaire la relation suivante :

$$\|W_1(s)S_oW_2\|_\infty < 1 \quad (3.51)$$

où  $W_1(s)$  et  $W_2(s)$  sont des matrices de transfert propres et asymptotiquement stables, à définir.

Mais comme on a la relation suivante entre la fonction de sensibilité et la sensibilité complémentaire

$$S_{io}(s) + T_{io}(s) = I \quad (3.52)$$

il est évident que ces deux objectifs sont contradictoires. Par conséquent, il faut trouver un compromis entre  $S_{io}(s)$  et  $T_{io}(s)$  pour la synthèse du régulateur IMC.

### 3.5.4 Conditions de stabilité de la boucle IMC en présence d'incertitudes de modélisation

Dans ce qui suit, nous allons considérer la classe des erreurs de modélisation dites non structurées déjà établies au paragraphe § 3.2.4.

L'étude de la robustesse en stabilité du système de commande IMC représenté à la figure (3.17) peut se ramener, d'une manière équivalente, à l'étude du système de régulation classique de la figure (3.16), dans le cas où  $C(s) = R(s)[I_p - G_m(s)R(s)]^{-1}$ .

Pour ce faire, nous allons mettre les systèmes de régulation classique équivalents sous la forme de la figure (3.3) où  $H(s)$  représente la matrice de transfert qui relie la sortie du bloc d'incertitude  $s_L(t)$  à son entrée  $e_L(t)$ .

Dans l'hypothèse que le modèle est parfait, ( $G(s) = G_m(s)$ ), les différentes matrices  $H(s)$  peuvent être facilement déterminées après quelques manipulations algébriques.

- Pour la forme additive directe équivalente (Fig. 3.4), on obtient :

$$\begin{aligned} e_L(s) &= -R(s)[I - G(s)R(s)]^{-1}[G(s)e_L(s) + s_L(s)] \\ &= -[I - R(s)G(s)]^{-1}R(s)[G(s)e_L(s) + s_L(s)] \\ &= -R(s)s_L(s) \\ &= -H_d^a(s)s_L(s) \end{aligned}$$

- Pour la forme additive inverse équivalente (Fig. 3.5), on obtient :

$$\begin{aligned} e_L(s) &= -G(s)[R(s)[I - G(s)R(s)]^{-1}e_L(s) + s_L(s)] \\ &= -[I - G(s)R(s)]G(s)s_L(s) \\ &= -S_o(s)G(s)s_L(s) \\ &= -H_i^a(s)s_L(s) \end{aligned}$$

- Pour la forme multiplicative directe équivalente en entrée (Fig. 3.6), on obtient :

$$\begin{aligned} e_L(s) &= -R(s)[I - G(s)R(s)]^{-1}G(s)[e_L(s) + s_L(s)] \\ &= -[I - R(s)G(s)]^{-1}R(s)G(s)[e_L(s) + s_L(s)] \\ &= -T_i(s)s_L(s) \\ &= -H_d^e(s)s_L(s) \end{aligned}$$

- Pour la forme multiplicative inverse équivalente en entrée (Fig. 3.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
 e_L(s) &= -R(s)[I - G(s)R(s)]^{-1}G(s)e_L(s) - s_L(s) \\
 &= -[I - R(s)G(s)]^{-1}R(s)G(s)[e_L(s) - s_L(s)] \\
 &= -S_i(s)s_L(s) \\
 &= -H_i^e(s)s_L(s)
 \end{aligned}$$

- Pour la forme multiplicative directe équivalente en sortie (Fig. 3.8), on obtient

$$\begin{aligned}
 e_L(s) &= -G(s)R(s)[I - G(s)R(s)]^{-1}[e_L(s) + s_L(s)] \\
 &= -[I - G(s)R(s)]^{-1}G(s)R(s)[e_L(s) + s_L(s)] \\
 &= -T_o(s)s_L(s) \\
 &= -H_d^s(s)s_L(s)
 \end{aligned}$$

- Pour la forme multiplicative inverse équivalente en sortie (Fig. 3.9), on obtient

$$\begin{aligned}
 e_L(s) &= -G(s)R(s)[I - G(s)R(s)]^{-1}e_L(s) - s_L(s) \\
 &= -S_o(s)s_L(s) \\
 &= -H_i^s(s)s_L(s)
 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant appliquer le théorème du petit gain aux diverses représentations équivalentes données par les figures (3.4) à (3.9).

Dans l'hypothèse où  $H_y^x(s)$  et  $\Delta_y^x(s)$  sont stables, et par application du théorème du petit gain aux différentes représentations équivalentes données par les figures (3.4) à (3.9), le système de commande IMC ( $\Delta_y^x H_y^x$ ) résultant est stable si :

$$\|\Delta_y^x(j\omega)H_y^x(j\omega)\|_\infty < 1 \quad (3.53)$$

On retrouve ainsi la condition de stabilité robuste du système de commande IMC (cf. Fig. 3.17).

### 3.5.5 Performance robuste

Les objectifs de performances doivent être réalisés de manière à tenir compte des incertitudes de modèle. En effet, ces performances doivent non seulement être vérifiées pour le modèle nominal  $G_m(s)$  mais aussi pour l'ensemble des systèmes à réguler  $G_p(G_m(s), \Delta(s))$ . La condition de performance robuste s'écrit alors

$$\|\mathcal{W}_1(s)\tilde{S}(s)\mathcal{W}_2(s)\|_\infty < 1 \quad \text{pour tout } G_p(G_m(s), \Delta(s)) \quad (3.54)$$

La synthèse d'un régulateur IMC réalisant des performances robustes se fait par la «  $\mu$ -synthèse » (Doyle et al., 1989). Toutefois, comme il a été mentionné précédemment (cf. §

3.2.5), la vérification simultanée des propriétés de performance nominale et de stabilité robuste permet de réaliser la condition de performance robuste.

### 3.6 Application à la commande IMC/CGPC

Les notions citées au paragraphe § 3.5 vont être appliquées directement sur la structure de commande IMC/CGPC.

Soit le système linéaire invariant du § 2.1.1.1, donné par les équations d'état et de sortie (2.1), avec la loi de commande IMC résultant de l'association

- d'un modèle interne (2.50).
- d'un retour d'état estimé, à partir du modèle interne (2.74), avec  $y_e(t) = 0$ , obtenu à partir du critère quadratique de la CGPC (2.51).

On peut exprimer le régulateur sous forme de transfert :  $u(s) = -R(s)(y(s) - y_m(s))$ . On a alors,

$$R(s) = [k_y^m + K_x^m [sI - A_m + B_m K_x^m]^{-1} B_m k_y^m] \quad (3.55)$$

Les matrices de transfert représentant respectivement le système (2.1) et son modèle interne (2.50) sont données par :

$$G(s) = C\Phi(s)B \in IR^{p \times m}(s) \text{ avec } \Phi(s) = [sI - A]^{-1} \in IR^{n \times n}(s) \quad (3.56)$$

et

$$G_m(s) = C_m \Phi_m(s) B_m \in IR^{p \times m}(s) \text{ avec } \Phi_m(s) = [sI - A_m]^{-1} \in IR^{n \times n}(s) \quad (3.57)$$

La figure suivante montre le schéma de la commande IMC/CGPC,

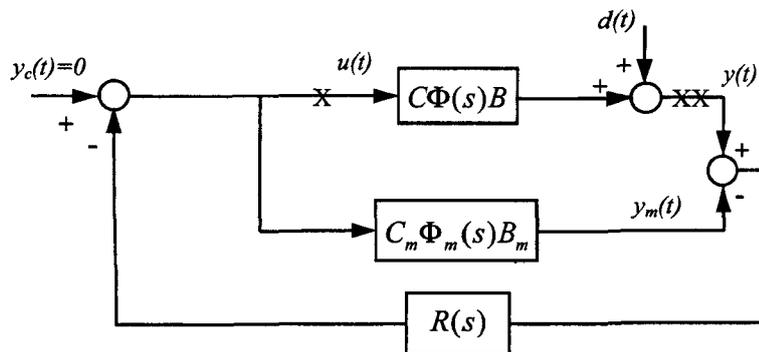


Fig. 3.18 Schéma bloc d'un régulateur IMC/CGPC

En utilisant le schéma de la régulation classique (cf. Fig. 3.16), on peut obtenir les matrices de transfert du système de commande IMC/CGPC (cf. Fig. 3.18), en ouvrant respectivement la boucle à l'entrée et à la sortie du procédé :

$$\begin{aligned}
 G_e(s) &= R(s)[I - C_m \Phi_m(s) B_m R(s)]^{-1} C \Phi(s) B \\
 &= [I - R(s) C_m \Phi_m(s) B_m]^{-1} R(s) C \Phi(s) B \\
 &= [I - R(s) G_m(s)]^{-1} R(s) G(s)
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
 G_s(s) &= C \Phi(s) B R(s) [I - C_m \Phi_m(s) B_m R(s)]^{-1} \\
 &= C \Phi(s) B R(s) [I - C_m \Phi_m(s) B_m R(s)]^{-1} \\
 &= G(s) R(s) [I - G_m R(s)]^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire correspondantes sont respectivement données par :

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_i(s) &= [I_m + G_e(s)]^{-1} \\
 &= [I_m + R(s)[G(s) - G_m(s)]]^{-1} [I_m - R(s)G_m(s)]
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

et

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_i(s) &= [I_m + G_e(s)]^{-1} G_e(s) \\
 &= [I_m + R(s)[G(s) - G_m(s)]]^{-1} R(s)G(s)
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

à l'entrée du procédé et par

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_o(s) &= [I_p + G_s(s)]^{-1} \\
 &= [I_p - G_m(s)R(s)][I_p + [G(s) - G_m(s)]R(s)]^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

et

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_o(s) &= G_s(s)[I_p + G_s(s)]^{-1} \\
 &= G(s)R(s)[I_p + [G(s) - G_m(s)]R(s)]^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

à la sortie du procédé.

En cas de modélisation parfaite, c'est à dire ( $G(s) = G_m(s)$ ), les expressions des fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire sont données par

$$S_i(s) = [I_m - R(s)G_m(s)] \quad \text{et} \quad T_i(s) = R(s)G(s) \tag{3.64}$$

à l'entrée du procédé et par

$$S_o(s) = [I_p - G_m(s)R(s)] \quad \text{et} \quad T_o(s) = G(s)R(s) \tag{3.65}$$

la sortie du procédé.

Ainsi, toutes les propriétés de performances et de robustesse, présentées précédemment, sont valables et peuvent être appliquées au système de commande de la figure (3.18).

#### Exemple 4 :

Reprenons les données de l'exemple 2. On montre maintenant l'effet du paramètre  $N_u$ , sur la condition de stabilité robuste (3.53), pour des incertitudes de type multiplicatives. Les courbes (Fig. 3.19) sont obtenues avec les paramètres :  $t_1 = 0, t_2 = t_u = 0.04$ ,  $N_2 = 6$ , et  $\lambda = 0$ . On retrouve la même conclusion que dans l'exemple 2, lorsque  $N_u$  augmente, la robustesse du système de commande diminue.

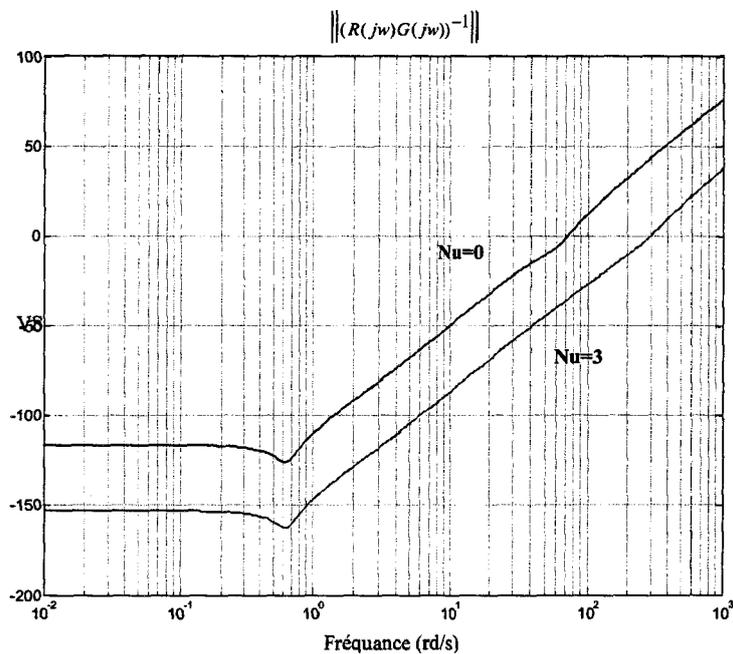
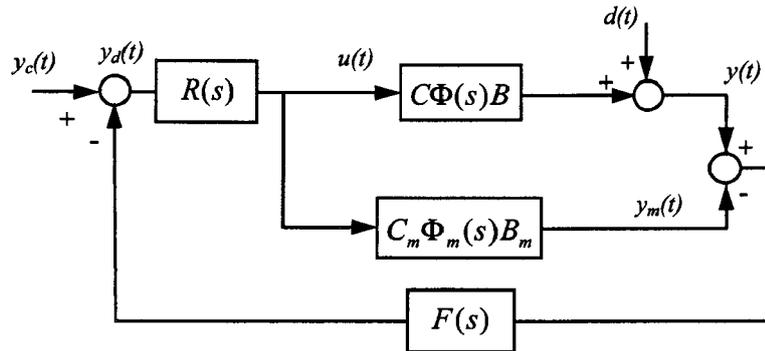


Fig.3.19 Effet de  $N_u$  sur la stabilité robuste

### 3.7 Amélioration de la robustesse de la commande IMC/CGPC

En cas de modélisation imparfaite, ce qui est généralement le cas, la structure de commande par modèle interne peut être augmentée en rajoutant un filtre  $F(s)$  dit de robustesse, placé dans la boucle de retour, de façon à « rendre robuste » le système en boucle fermée vis-à-vis des erreurs de modèle (Garcia and Morari, 1982, 1985a, 1985b).

La figure suivante présente la structure de commande par modèle interne avec filtre de robustesse  $F(s)$  dans la boucle de retour.


 Fig.3.20 Structure de la commande IMC avec filtre de robustesse  $F(s)$ .

### 3.7.1 Filtre de robustesse

Dans le cas d'un modèle imparfait, un filtre  $F(s)$  est utile pour compenser les erreurs de modèle, et donc pour améliorer la robustesse de la boucle de régulation IMC. En effet, dans ce cas, la fonction de transfert du système en boucle fermée s'écrit.

$$y(s) = [I_p - G_m(s)R(s)F(s)][I_p + [G(s) - G_m(s)]R(s)F(s)]^{-1} d_y(s) + G(s)R(s)F(s)[I_p + [G(s) - G_m(s)]R(s)F(s)]^{-1} y_c(s) \quad (3.66)$$

La comparaison de (3.66) et (3.41) montre que le filtre  $F(s)$  agit simultanément sur l'écart  $[G(s) - G_m(s)]$  ainsi que sur la perturbation  $d_y(s)$ . De plus, l'analyse de l'équation caractéristique met en évidence l'effet de  $F(s)$ ,

$$I_p + [G(s) - G_m(s)]R(s)F(s) = 0 \quad (3.67)$$

et la stabilité de la boucle fermée est assurée pour un choix approprié de ses racines.

Un résultat important (Garcia and Morari, 1985a) accroît l'intérêt du filtre  $F(s)$ . En effet, il a été montré que pour n'importe quel écart de modélisation,  $[G(s) - G_m(s)]$ , il existe une constante  $\bar{\tau}$  telle que pour n'importe quel filtre de la forme:

$$F(s) = \frac{1}{1 + \tau_r s} I_p \quad \text{avec} \quad \tau_r < \bar{\tau} \quad (3.68)$$

stabilise le système en boucle fermée et maintient les zéros de l'équation caractéristique (3.67) dans le domaine de stabilité approprié.

Sans rappeler la démonstration originale de cette propriété, on peut la justifier en remarquant qu'un temps de réponse  $\tau_r$  suffisamment grand de  $F(s)$  (à la limite infini) revient à couper la chaîne de retour dans le schéma de la IMC qui est alors stable puisqu'elle est constituée de la mise en série d'éléments stables (Borne et al., 1990).

En résumé, l'introduction du filtre utilisée ici, comme un paramètre de synthèse afin d'améliorer la robustesse. En effet, on peut montrer que les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire vont dépendre de ce paramètre.

**Exemple 5 :**

Toujours avec les données de l'exemple précédent, nous allons illustrer l'apport de robustesse en stabilité (condition 3.53), pour les commandes multiplicatives, lors de l'introduction du filtre de robustesse  $F(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$  (Fig3.21) sont obtenues avec les paramètres :

$t_1 = 0, t_2 = t_u = 0.04, N_2 = 6, N_u$ . On constate que l'augmentation de la constante  $\tau$  du filtre de robustesse tend à améliorer la robustesse en stabilité du système en boucle fermée.

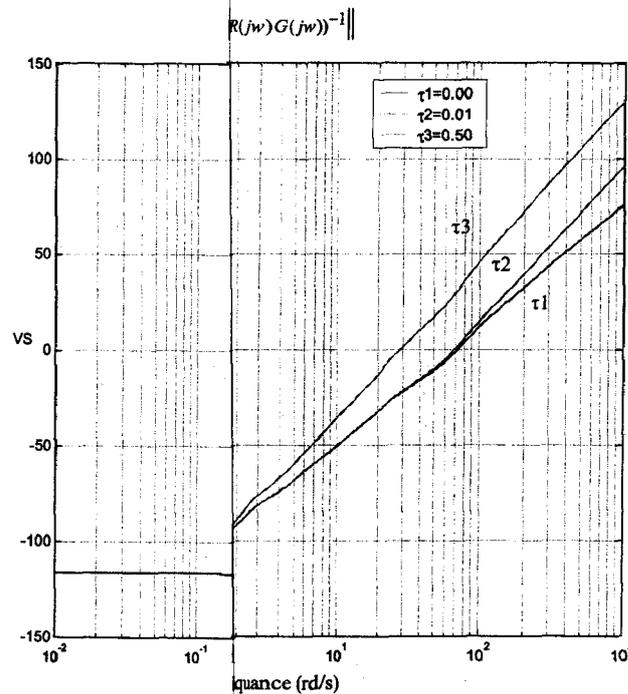


Fig.3.21  $\| (R(j\omega)G(j\omega))^{-1} \|$  de la constante  $\tau$  du filtre de robustesse

**3.8 Conclusion**

La stabilité et les performances en boucle fermée obtenues par la commande CGPC dépendent du choix des paramètres de réglage de cette loi de commande. Par ailleurs, il est difficile de trouver une relation entre ces paramètres et les performances du système en boucle fermée. Néanmoins, il est possible d'établir certaines règles d'ajustement en faisant une analyse des performances de robustesse du système de commande. Après avoir effectué quelques rappels des outils et concepts de base nécessaire à cette analyse, nous les avons appliqués à la boucle de régulation classique et d'autre part à la structure de commande nous avons examiné le moyen d'accroître la robustesse en stabilité des deux en utilisant le concept de la LTR pour la CGPC avec un observateur et par l'introduction d'un filtre de robustesse pour l'IMC/CGPC. La mise en œuvre pratique va être détaillée au chapitre 5.

#### 4. L'approche « Local Model Networks » et la Commande Prédictive

Concevoir un modèle mathématique d'un procédé industriel est une étape déterminante pour la conception et la mise au point d'un système performant de régulation. C'est la raison pour laquelle, dans la majorité des situations pratiques, on est amené à mettre en œuvre une méthode de représentation de ces modèles dynamiques (de commande).

Pour ce faire, il existe deux philosophies différentes qui forment l'outil fondamental de la modélisation, à savoir, l'approche modèle de connaissance (basée sur les lois de la physique, chimie, etc.) et qui permet une description assez complète du système, et l'approche boîte noire qui consiste à décrire le comportement entrée/sortie du système, basée sur un ensemble d'observations spécifiques de celui-ci.

Les modèles de connaissance sont en général extrêmement complexes et difficile à exploiter. D'autre part, l'approche boîte noire ne décrit qu'une partie du comportement du système, puisqu'elle est basée sur un nombre fini d'observation et ne couvre pas toutes les conditions que le système peut satisfaire.

Dans certains cas, le modèle mathématique ne peut être valide que dans une certaine plage de fonctionnement. Ceci peut être restreint par les hypothèses de modélisation pour le modèle de connaissance, ou par les conditions expérimentales afin d'obtenir les observations pour le modèle boîte noire.

Afin de mieux décrire le comportement du système, et d'utiliser une méthode simple à exploiter, on décompose le fonctionnement du système en plusieurs régimes de fonctionnement, dont chacun peut être décrit par un modèle local, par opposition à un modèle global, et qui peut être obtenu par l'une ou l'autre des deux approches de modélisation. L'ensemble de ces modèles locaux peut être combiné dans un modèle global obtenu en utilisant une interpolation appropriée. Le modèle global obtenu peut être hybride ou non.

Cette approche de modélisation présente l'avantage de pouvoir concevoir, pour chaque régime de fonctionnement, un régulateur local approprié, qui tient compte seulement des contraintes imposées par le régime de fonctionnement pour lequel le modèle local est établi. La commande globale n'est autre qu'une combinaison de ces régulateurs locaux.

Dans ce chapitre, nous allons, d'abord, présenter une méthode de représentation de modèle non linéaire basée sur l'approche « local model network » de Johansen et Foss (Johansen et Foss, 1993), et donner quelques théorèmes qui établissent les fondements théoriques de cette représentation. Ensuite, nous allons étendre cette méthode dans le cas d'une représentation dans l'espace d'état, et proposer ainsi une structure de commande non linéaire basée sur un ensemble de régulateurs locaux. Une étude sur l'analyse de la stabilité d'un système de commande basée sur l'approche « Local Controller Networks », (LCN) a été établie. A ce propos, il sera énoncé une extension aux systèmes de commande LCN avec observateurs, du théorème proposé par Tanaka (Tanaka et al., 1996) pour les systèmes de commande par logique floue.

#### 4.1 Présentation de modèles non linéaires

Considérons le système dynamique non linéaire de type NARMAX (non linéaire ARMAX) représenté par :

$$y(t) = f(y(t-1), \dots, y(t-n_y), u(t-1), \dots, u(t-n_u), e(t-1), \dots, e(t-n_e)) + e(t) \quad (4.1)$$

où

$y(t) \in Y \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$  et  $e(t) \in E \subset \mathbb{R}^p$  désignent respectivement le vecteur de sortie, le vecteur d'entrée et le bruit.

La structure de modèle décrite en (3.1) a été proposée par Leontaritis (Leontaritis and Billings, 1985) et Chen (Chen and Billings, 1989). Elle permet ainsi de représenter les modes observables et contrôlables d'une large classe de modèles non linéaires discrets. Tout le long de ce chapitre, nous allons supposer que les indices  $n_y$ ,  $n_u$  et  $n_e$  sont connus. Soit le vecteur d'observation  $\psi(t-1)$  de dimension  $(p(n_y + n_e) + mn_u)$  :

$$\psi(t-1) = [y(t-1) \dots y(t-n_y) \quad u(t-1) \dots u(t-n_u) \quad e(t-1) \dots e(t-n_e)]^T$$

tel que  $\psi(t-1)$  appartient à l'ensemble  $\Psi = Y^{n_y} \times U^{n_u} \times E^{n_e}$

Ceci nous permet d'écrire l'équation (4.1) sous la forme :

$$y(t) = f(\psi(t-1)) + e(t) \quad (4.2)$$

où  $f: \Psi \rightarrow \mathbb{R}^p$  est une fonction de classe  $C^\infty$  (i.e. continûment différentiable).

Il est généralement difficile de travailler avec de telles structures, c'est pourquoi plusieurs méthodes d'approximation ont été proposées. L'un des moyens d'approcher la fonction  $f(\cdot)$  est l'utilisation des développements en séries de fonctions. Parmi ces derniers, on peut citer le développement en série de Taylor à l'ordre un qui permet d'obtenir un modèle linéaire du type ARMAX autour d'un point d'équilibre. Toutefois, cette méthode d'approximation devient très difficile à utiliser en pratique lorsque l'ordre de ce développement devient élevé, puisque toute augmentation de l'ordre entraîne une augmentation du nombre de paramètres dans le modèle.

Les fonctions splines offrent une autre alternative à ce problème; ainsi Wahba (Wahba, 1990) a utilisé une combinaison de polynômes d'ordres peu élevés comme moyen d'approximation de  $f(\cdot)$ , mais cette méthode devient difficile à exploiter dans le cas où l'espace  $\Psi$  est de dimension très élevée. D'autre part, Chen (Chen et al., 1990a) a proposé l'utilisation des réseaux de neurones à fonctions sigmoïdales. Billings et Voon (Billings and Voon, 1987) ont utilisé un modèle linéaire par morceaux, et Chen (Chen et al., 1990b) a appliqué un développement en série à fonction de base radiale comme moyen de représentation de la fonction  $f(\cdot)$ . En s'inspirant des travaux de Stokbro (Stokbro et al., 1990)

et Jones (Jones et al., 1991), Johansen et Foss (Johansen and Foss, 1993) ont proposé une nouvelle approche de représentation qui consiste à approcher la fonction  $f(\cdot)$  par un réseau de modèles locaux appelé « Local Model Networks » que nous allons maintenant présenter d'une manière détaillée.

## 4.2 Combinaison optimale de modèles locaux

### 4.2.1 Définition

Supposons qu'on dispose de  $N$  modèles locaux d'indice  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$y(t) = \hat{f}_i(\psi(t-1)) + e(t) \quad (4.3)$$

et que chaque modèle local représente fidèlement le système dans une plage de fonctionnement  $\Psi_i$  sous certaines conditions, avec  $\Psi = \left\{ \Psi_i / \bigcup_{i=1}^N \Psi_i = \Psi \right\}$ . Par conséquent, s'il peut exister plusieurs modèles locaux pour représenter le système lorsque le point de fonctionnement change, alors l'utilisation d'un seul modèle local, dans ce cas, n'est plus valable pour une représentation globale du système. De plus, on suppose que la validité relative pour chaque modèle local est indiquée par l'ensemble des fonctions  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N : \Psi \rightarrow [0, 1]$ . On peut alors donner la définition suivante :

**Définition 4.1** Etant donné un modèle local d'indice  $i$  (4.3) qui représente fidèlement le système dans le sous ensemble  $\Psi_i$  alors, pour tout point  $\psi \in \Psi_i$  donné, on a :

- la fonction de validité  $\rho_i(\psi)$  proche de un lorsque  $\hat{f}_i(\psi(-1))$  tend vers  $f(\psi(-1))$ , sinon
- la fonction  $\rho_i(\psi)$  qui tend vers zéro, pour tout point  $\psi \notin \Psi_i$ , et  $\hat{f}_i(\psi(-1))$  s'éloigne de  $f(\psi(-1))$ .

Ceci nous amène immédiatement à se poser la question suivante : comment prédire la sortie du système pour les autres  $\psi \notin \Psi_i$ , où il n'y a pas exactement qu'un seul modèle qui représente fidèlement le système localement. On doit alors chercher un modèle global de la forme:

$$y(t) = \hat{f}(\psi(t-1)) + e(t) \quad (4.4)$$

basé sur une combinaison des modèles locaux donnés par (3.3). D'après la définition (3.1) des fonctions de validité  $\rho_i$ , il est naturel, dans ce cas, d'avoir la fonction  $\hat{f}(\psi)$  proche de  $\hat{f}_i(\psi)$  pour tout point  $\psi \in \Psi_i$  quand  $\rho_i(\psi)$  tend vers un. Par conséquent, la fonction  $\hat{f}$  doit minimiser le critère suivant :

$$M(\hat{f}) = \sum_{i=1}^N \int \int_{\psi \in \Psi} \left\| \hat{f}(\psi) - \hat{f}_i(\psi) \right\|_2^2 \rho_i(\psi) d\psi$$

où  $\|\bullet\|$  représente la norme euclidienne. On obtient ainsi le résultat suivant, donné par Johansen (Johansen, 1995); où  $C^p(\Psi)$  désigne l'ensemble des fonctions continues de dimension  $p$  définies sur  $\Psi$ .

**Théorème 4.1** (Johansen and Foss, 1993)

Supposons qu'on dispose de

- $N$  fonctions  $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_N$  appartenant à  $C^p(\Psi)$ ;
- $N$  fonctions de validité  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$  définies dans  $\Psi \rightarrow [0, 1]$ , telles que

$$\sum_{i=1}^N \rho_i(\psi) > 0, \text{ pour tout point } \psi \in \Psi .$$

Alors la fonction  $\hat{f}$  définie par

$$\hat{f}(\psi) = \sum_{i=1}^N \hat{f}_i(\psi) w_i(\psi) \quad (4.5)$$

$$w_i(\psi) = \frac{\rho_i(\psi)}{\sum_{j=1}^N \rho_j(\psi)} \quad (4.6)$$

minimise le critère  $M$  sur  $C^p(\Psi)$ .

**Preuve**

La variation de  $M$  en fonction d'une perturbation  $\Delta f$  quelconque appartenant à  $C^p(\Psi)$  est donnée par

$$\delta M(\hat{f}, \Delta f) = 2 \sum_{i=1}^N \int_{\psi \in \Psi} (\hat{f}(\psi) - \hat{f}_i(\psi)) \rho_i(\psi) \Delta f(\psi) d\psi$$

Comme  $M$  est strictement convexe, alors, une condition nécessaire et suffisante pour que  $\hat{f}$  soit globalement optimale est

$$\sum_{i=1}^N (\hat{f}(\psi) - \hat{f}_i(\psi)) \rho_i(\psi) = 0 \quad \text{pour tout point } \psi \in \Psi$$

D'après la deuxième supposition, il est évident que  $\hat{f}$  est bien définie par cette équation.

**Remarque**

Dans la plupart des applications, la première supposition est tout à fait raisonnable, et c'est à l'utilisateur de choisir lui-même les modèles locaux. La deuxième supposition s'explique simplement par le fait qu'il existe au moins un modèle local qui serait proche du système dans un certain domaine de fonctionnement possible. Ceci peut être toujours réalisé, puisqu'on n'a pas besoin d'un modèle local exact, mais juste proche du système.

Par ailleurs, on appelle  $\{w_i\}_{i=1}^N$  l'ensemble des fonctions d'interpolation, car elles sont utilisées comme une interpolation entre les modèles locaux  $\hat{f}_i$ . De plus, il est à noter que chaque modèle local  $\hat{f}_i$  est supposé représenter d'une manière fidèle « la vraie fonction  $f$  » dans le domaine de fonctionnement  $\Psi_i$  correspondant.

La pondération relative  $w_i$ , donnée dans cette approximation, est déterminée à partir des fonctions de validations  $\rho_i$  relatives à chaque modèle local. On peut interpréter la fonction d'interpolation  $w_i$  comme une fonction dont la valeur est proche de un dans le domaine  $\Psi_i$ , où la fonction  $\hat{f}_i$  est la meilleure approximation de  $f$ , sinon elle est proche de zéro ailleurs.

D'après cette définition des fonctions  $w_i$ , nous avons alors  $\sum_{i=1}^N w_i(\psi) = 1$  pour tout point  $\psi \in \Psi$ . Dans ce cas, il en résulte que le modèle global n'est autre qu'une combinaison convexe de modèles locaux.

**4.2.2 Classe de modèles locaux**

L'ensemble des fonctions de la forme (4.5) avec des modèles locaux de type polynomial d'ordre  $n$  est :

$$F_n(K) = \left\{ \hat{f} : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^p / \hat{f}(\psi) = \sum_{i=1}^N \hat{f}_i(\psi) w_i(\psi) \right\} \quad (4.7)$$

On suppose que les fonctions  $\rho_i$  appartiennent à  $K$ , où  $K$  est l'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  (i.e. continûment différentiable) et tendent rapidement vers zéro.

**4.2.3 Choix des fonctions de validation**

On peut choisir, par exemple, comme fonction de validation, l'ensemble des fonctions gaussiennes :

$$K = \left\{ k : \Psi \rightarrow [0, 1] / k(\psi) = \exp(-1/2(\psi - \psi_i) \sum_i^{-1} \hat{f}_i(\psi - \psi_i)) \right\} \quad (4.8)$$

où  $\sum_i$ , est une matrice scalaire définie positive.

#### 4.2.4 Structure de modèles locaux

Le développement en série de Taylor à l'ordre zéro de la fonction  $f$  autour du point  $\psi \in \Psi_i$  peut suffi pour définir le modèle local  $\hat{f}_i$  tel que :

$$\hat{f}_i(\psi) = f(\psi_i)$$

ou bien, comme une structure paramétrique telle que :

$$\hat{f}_i(\psi) = \theta_i \tag{4.10}$$

où  $\theta_i$  est un vecteur de paramètres inconnus (modèle du type « boîte noire »).

Cependant, le développement en série de Taylor à l'ordre un de la fonction  $f$  autour du point  $\psi_i \in \Psi_i$  donne une meilleure approximation que le développement à l'ordre zéro.

Supposons que la dérivée première de la fonction  $f$  autour du point  $\psi_i \in \Psi_i$  existe, la structure du modèle local  $\hat{f}_i$  est alors donnée par :

$$\hat{f}(\psi) = f(\psi_i) + \nabla f(\psi_i)(\psi - \psi_i) \tag{4.11}$$

ou bien, en utilisant une structure paramétrique, elle est donnée par :

$$\hat{f}(\psi) = \theta_i + \Theta_i(\psi - \psi_i) \tag{4.12}$$

où  $\theta_i$  est un vecteur de paramètres inconnus et  $\Theta_i$ , une matrice de paramètres inconnus. Mise sous cette forme, l'équation (3.12) représente alors un modèle de type ARMAX.

Cette représentation rend ainsi possible la construction d'un modèle de type NARMAX par interpolation d'un certain nombre de modèles de type ARMAX.

Par ailleurs, on peut toujours utiliser des modèles locaux d'ordre élevé, ou bien des modelées à structure non-polynomiale.

En outre, il n'y a aucune recommandation sur le fait que tous les modèles locaux doivent avoir la même structure (i.e. modèle de connaissance ou modèle « boîte noire »). En particulier, les modèles locaux qui peuvent avoir des dynamiques différentes ou des structures polynomiales d'ordres différents.

### 4.3 Propriétés d'approximation

Intuitivement, on peut dire que n'importe quelle fonction de classe  $C^\infty$  peut être arbitrairement approchée d'une manière assez bonne en utilisant cette représentation basée

sur une décomposition du domaine  $\Psi$  en un ensemble de sous-ensembles  $\Psi_i$ , suffisamment fins.

Tout d'abord, nous allons utiliser la norme suivante pour mesurer la distance entre la fonction  $f$  et son approximation  $\hat{f}$

$$\|f - \hat{f}\|_{\infty} = \sup_{\psi \in \Psi} \|f(\psi) - \hat{f}(\psi)\|_2$$

où  $\|\cdot\|_2$  représente la norme euclidienne.

On note  $\nabla^{n+1} f(\psi)$  la dérivée d'ordre  $(n+1)$  de la fonction  $f$  au point  $\psi \in \Psi$ . On suppose que  $f$  est une fonction continûment différentiable à l'ordre  $n+1$ , (i.e. de classe  $C^{n+1}$ ) et que la fonction  $\hat{f}_i$ , représentant le modèle local, est égale aux premiers termes du développement en série de Taylor à l'ordre  $n+1$  de la fonction  $f$  autour du point  $\Psi_i$ .

Pour tout point  $\psi \in \Psi$ , on a :

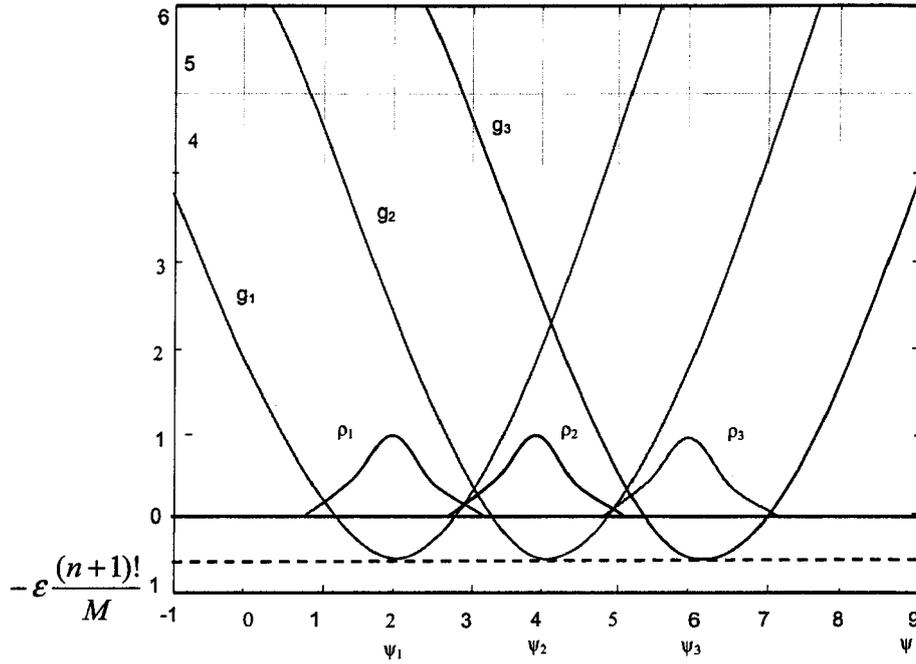
$$f(\psi) - \hat{f}(\psi) = \sum_{i=1}^N (f(\psi) - \hat{f}_i(\psi)) w_i(\psi) \quad (4.13)$$

Si l'on suppose que  $\|\nabla^{n+1} f(\psi)\| < M$  pour tout point  $\psi \in \Psi$ , on obtient alors, d'après le théorème de Taylor :

$$\|f(\psi) - \hat{f}(\psi)\|_2 < \sum_{i=1}^N \frac{M}{(n+1)!} \|\psi - \psi_i\|_2^{n+1} w_i(\psi) \quad (4.14)$$

Afin d'assurer que le terme de droite de cette inégalité soit inférieur à  $\varepsilon$  (positif et arbitraire), on doit assurer, pour tout point  $\psi \in \Psi$ , que la condition suivante soit satisfaite :

$$\sum_{i=1}^N \|\psi - \psi_i\|_2^{n+1} \rho_i(\psi) \leq \varepsilon \frac{(n+1)!}{M} \sum_{i=1}^N \rho_i(\psi) \quad (4.15)$$


 Fig. 4.1 Interprétation géométrique des contraintes sur  $\rho_i$ .

Soit l'ensemble des fonctions  $\{g_i : \Psi \rightarrow \mathbb{R}\}$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  telles que, (cf. Fig. 4.1),

$$g_i = \|\psi - \psi_i\|_2^{n+1} - \epsilon \frac{(n+1)!}{M} \quad (4.16)$$

En réécrivant l'équation (4.15), on obtient la condition suivante qui doit être satisfaite pour tout point  $\psi \in \Psi$

$$\sum_{i=1}^N g_i(\psi) \rho_i(\psi) \leq 0 \quad (4.17)$$

ou d'une manière équivalente, en utilisant les fonctions d'interpolation,

$$\sum_{i=1}^N g_i(\psi) w_i(\psi) \leq 0 \quad (4.18)$$

Le problème, maintenant, est de trouver les conditions sur le nombre  $N$  de modèles locaux et sur l'ensemble des fonctions  $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\} \subset K$  pour assurer que l'équation (4.17) soit satisfaite pour un  $\epsilon > 0$  donné.

La condition (4.17) est satisfaite s'il y a au moins un terme  $g_i(\psi) \rho_i(\psi)$  qui rend la somme  $\sum_{i=1}^N g_i(\psi) \rho_i(\psi)$  négative. Une condition nécessaire est que  $g_i(\psi) \rho_i(\psi) \rightarrow 0$  lorsque

$\|\psi\|_2 \rightarrow \infty$ . Ceci peut être assuré si l'on choisit les fonctions  $\rho_i$  comme des fonctions exponentielles ou des fonctions gaussiennes.

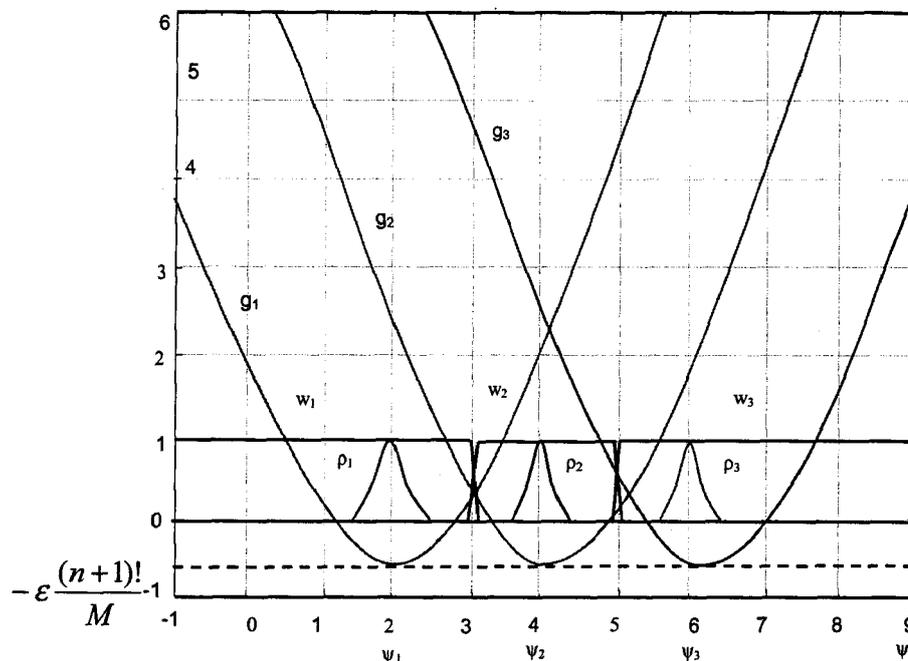


Fig. 4.2 Cas où la largeur des fonctions  $\rho$  tend vers zéro.

Par ailleurs, la forme des fonctions  $g_i$  est fixée, et on est libre de choisir les points de fonctionnement  $\psi_i$ , et le nombre  $N$  des modèles locaux.

Choisissons maintenant l'ensemble des points de fonctionnement  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  assez large et "suffisamment dense dans l'ensemble  $\Psi$ " pour qu'il y ait au moins une fonction  $g_i$  appartenant à l'ensemble  $\{g_i\}_{i=1}^N$  qui soit négative en tout point  $\psi \in \Psi$ . L'ensemble des fonctions  $\{g_i\}_{i=1}^N$  est alors fixé, et il nous reste seulement à choisir les fonctions de validation  $\rho_i$ , telle que l'équation (4.17) soit satisfaite.

Ceci peut être réalisé de différentes manières. A la limite, quand la largeur des fonctions  $\rho_i$  tend vers zéro, les fonctions d'interpolation  $w_i$  se rapprochent des fonctions de type échelon comme il est montré sur la figure (4.2). Le modèle va donc représenter un modèle constant, par morceaux, si  $n=0$ , ou un modèle linéaire par morceaux, si  $n=1$ , etc. Dans ce cas, il existe un entier  $j$  tel que, pour tout point  $\psi \in \Psi$ ,

$$w_i(\psi) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Avec le choix des points  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  que l'on a imposé, on sait que  $g_j(\psi) < 0$ , et comme  $w_i(\psi) = 0$ , pour  $i \neq j$ , la condition (3.18) est alors satisfaite. On peut maintenant formuler ce résultat dans le cas où  $\Psi$  est un ensemble compact.

**Théorème 4.2** (Johansen and Foss, 1993)

Soit un entier  $n \geq 0$  donné, et soit une fonction  $f$  continûment dérivable à l'ordre  $n+1$  ( i.e. de classe  $C^{n+1}$ ). Si  $\Psi$  est un ensemble compact, alors pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , il existe une fonction  $\hat{f} \in F_n(K)$  telle que  $\|f - \hat{f}\|_\infty < \varepsilon$ .

**Preuve**

Puisque  $\nabla^{p+1} f(\psi)$  est continue et que sa norme  $\|\nabla^{p+1} f(\psi)\|$  est bornée (par  $M < \infty$ ) sur l'ensemble compact  $\Psi$ , un nombre fini  $N$  est suffisant pour assurer qu'au moins une fonction  $g_i$  est négative en tout point  $\psi \in \Psi$ . Puisque  $N$  est fini, on n'a pas besoin d'aller jusqu'à la limite et rendre l'ensemble des fonctions d'interpolation  $\{g_i\}_{i=1}^N$  comme des fonctions échelons. Alors on peut choisir l'ensemble  $\{g_i\}_{i=1}^N$  comme des fonctions continûment différentiables telles que l'équation (4.17) soit satisfaite. Ceci est possible, puisque les fonctions  $\rho_i$  tendent rapidement vers zéro.

**Remarque**

La démonstration de ce théorème est constructive, puisqu'elle nous donne des indications sur la manière de construire la fonction d'approximation  $\hat{f}$ . En utilisant la démonstration du théorème (4.2) et dans le but de choisir une borne supérieure sur cette erreur d'approximation, on introduit la définition suivante de la distance entre deux ensembles, similaire à la « métrique de Hausdorff ».

**Définition 4.2** Si deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}^p$  sont non vides, alors, la distance entre l'ensemble  $A$  et l'ensemble  $B$  est définie par

$$\vartheta(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|_2$$

Le point essentiel dans la démonstration du théorème (4.2) est qu'à tout point  $\psi \in \Psi$ , il y ait une fonction  $g_i$ , qui soit négative, et que les fonctions  $\rho_i$ , soient choisies telles que le terme négatif  $g_i(\psi)\rho_i(\psi)$  domine la somme (4.17) (pour tout point  $\psi \in \Psi$ ), la condition suivante soit satisfaite :

$$\vartheta(\{\psi_i\}, \Psi) \leq \left( \varepsilon \frac{(n+1)!}{M} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tag{4.19}$$

Si l'ensemble  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  est dense dans  $\Psi$ , cette distance tendra vers zéro. « Le terme suffisamment dense » utilisé ci-dessus, signifie que l'ensemble  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  doit être choisi de sorte que la condition (4.19) soit satisfaite, pour un  $\varepsilon$  donné.

**Théorème 4.3** (Johansen and Foss, 1993)

Soit  $n \geq 0$  un entier donné. Si  $\Psi$  est un ensemble compact et si la fonction est continûment différentiable à l'ordre  $n+1$  (i.e. de classe  $C^{n+1}$ ) et si sa dérivée d'ordre  $n+1$  est bornée (i.e.  $\|\nabla^{n+1} f(\psi)\| < M$ ) pour tout point  $\psi \in \Psi$ , alors il existe un ensemble de  $N$  polynômes  $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\} \subset K$  et un ensemble de  $N$  fonctions  $\{\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_N\} \subset K$  tels que l'erreur d'approximation soit bornée par

$$\|f(\psi) - \hat{f}(\psi)\|_{\infty} < \frac{M}{(n+1)!} (\mathcal{V}(\{\psi_i\}, \Psi))^{n+1} \quad (4.20)$$

**Preuve**

L'équation (4.19) est satisfaite pour un  $\varepsilon$  égal au terme de droite de l'équation (4.20). D'après ce qui a été dit précédemment, il est évident que la condition (4.18) est satisfaite pour tout  $\psi \in \Psi$ . Donc, la norme  $\|f(\psi) - \hat{f}(\psi)\|_{\infty}$  est bornée par  $\varepsilon$ .

Le résultat ci-dessus est satisfait sous la condition que les fonctions  $\rho_i$  soient choisies « suffisamment étroites », et que les modèles locaux soient obtenus à partir d'un développement en série du Taylor tronqué à l'ordre  $n$ . De plus, cette borne est conservatrice, c'est à dire, qu'on peut avoir une meilleure approximation si les fonctions  $\rho_i$  ne sont pas choisies « suffisamment étroites ». Il est évident que le choix des fonctions  $\rho_i$ , comme des fonctions gaussiennes ne soit qu'une possibilité parmi d'autres. Les fonctions gaussiennes tendent assez rapidement vers zéro que les fonctions  $g_i$  tendent vers l'infini, ce qui est une propriété souhaitable dans ce cas. En général, l'ensemble  $K$  des fonctions continûment différentiables (de classe  $C^{\infty}$ ), peut être généralisé par l'utilisation des réseaux d'ondelettes (Benveniste et al., 1994).  $K$  est alors constitué de toutes les fonctions dont seule la localisation  $\psi_i$  et l'échelle  $\sum_i$  varient pour une fonction de type ondelette donnée, et tendant rapidement vers zéro.

Il est clair que si la fonction  $f$  n'est pas continûment différentiable, alors la démonstration du théorème (4.2) ne serait pas satisfaite. Toutefois, si  $f$  est telle qu'on peut l'approcher arbitrairement par une fonction continûment différentiable, alors il est tout à fait évident qu'on peut l'approcher à partir d'une combinaison de modèles locaux continûment différentiables. D'où le corollaire suivant :

**Corollaire 4.1**

La conclusion du théorème (4.2) peut également être satisfaite dans le cas où la fonction  $f$  est seulement continue au lieu d'être continûment différentiable. En d'autres termes, l'ensemble  $F_n$  est dense sur  $C^p(\Psi)$ .

**Preuve**

On utilise le théorème d'approximation de Weierstrass. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe, une fonction polynôme  $\tilde{f}$  telle que  $\|f - \tilde{f}\|_\infty < \varepsilon/2$ . Et d'après le théorème (4.2), il existe une fonction  $\hat{f} \in F_n(K)$  définie sur le compact  $\Psi$  telle que  $\|\tilde{f} - \hat{f}\|_\infty < \varepsilon/2$ .

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient  $\|f - \hat{f}\|_\infty < \varepsilon$

**Exemple 4.1**

Si on pose  $n=1$ , alors les modèles locaux obtenus sont de type ARMAX. Dans ce cas, l'équation (3.20) peut s'écrire comme suit :

$$\|f(\psi) - \hat{f}(\psi)\|_\infty < \frac{M}{2} (\mathcal{V}(\{\psi_i\}, \Psi))^2 = \varepsilon \tag{4.21}$$

où  $M$  est le majorant du Hessian de la fonction  $f$ .

Si  $f$  est linéaire, alors  $M=0$ . Un modèle local linéaire est alors suffisant pour construire un modèle global valide. Par ailleurs,  $M$  n'est autre qu'une indication sur la non-linéarité et/ou la complexité de la fonction  $f$ . De plus, on s'attend à ce que  $M$  augmente avec la non-linéarité; ce qui est le cas (cf. équation 4.21). Toutefois, en utilisant une borne supérieure sur  $M$ , on aura une borne conservatrice puisque  $f$  peut avoir une forte non-linéarité dans certaines régions contrairement à d'autres. Donc, on n'a pas besoin d'avoir une concentration (grande densité) de modèles locaux dans les régions de  $\Psi$  où le système ne présente pas un comportement non linéaire conséquent.

**Exemple 4.2**

Avec cet exemple, on va illustrer l'application du théorème (4.3). On considère la fonction  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(\psi) = \psi^2 + 1$ . Supposons qu'on dispose de deux modèles locaux linéaires (obtenus à partir du développement en série de Taylor à l'ordre un) localisés aux points  $\psi_0 = 0.5$  et  $\psi_1 = 1.5$ . Alors,  $\mathcal{V}(\{0.5, 1.5\}, [0, 2]) = 0.5$ ,  $n=1$  et  $M=1$ . D'après le théorème (4.3), on aura avec cette approximation, une borne  $\varepsilon$  égale à 0.25. Comme le montre la figure (4.3), cette borne n'est pas conservatrice, lorsqu'on utilise des fonctions  $\rho_i$  infiniment étroites, une approximation linéaire par morceaux. La raison pour cela est

que  $M = \frac{\partial^2 f(\psi)}{\partial \psi^2} = 2$  pour tout point  $\psi \in [0, 2]$ . Donc, il n'y a pas une région dans  $[0, 2]$  qui présente une « faible non-linéarité ».

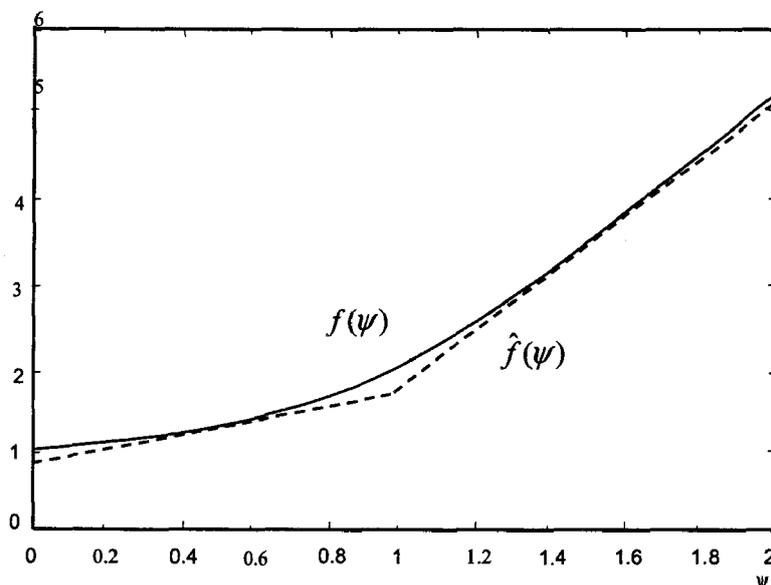


Fig. 4.3 Approximation de  $f(\psi) = \psi^2 + 1$  en utilisant deux modèles locaux linéaires.

#### 4.4 Régimes de fonctionnement

Dans la représentation (4.5), les fonctions d'interpolation  $w_i$  sont définies dans l'ensemble  $\Psi$ , qui est un sous-ensemble de l'espace d'observation ou espace d'information. Il est évident que si la dimension de l'espace d'information devient importante, alors le champ d'application de toute approche de modélisation se restreindra. En conséquence, les fonctions d'interpolation peuvent être définies dans un espace de dimension inférieure, ce qui réduit considérablement le problème de dimension. Ceci nous amène à introduire les termes suivants : régime de fonctionnement et point de fonctionnement. Tout d'abord, on définit  $Z$  comme étant l'ensemble des points de fonctionnement. Un point de fonctionnement  $z \in Z$  est un vecteur de variables qui caractérisent le comportement des différents modes du système.

##### Définition 4.3

On appelle un régime de fonctionnement  $Z_i$ , un sous ensemble de  $Z$  où le comportement du système peut être décrit d'une manière adéquate par un modèle local muni d'une structure donnée.

Par conséquent, lorsque le modèle local présente une structure linéaire dans un régime de fonctionnement donné, le comportement du système est « approximativement linéaire ».

La fonction de validité  $\rho_i : Z \rightarrow [0, 1]$ , relative à un modèle local et appartenant à l'ensemble  $K$  des fonctions continûment différentiables, doit satisfaire la condition suivante :  $\rho_i(z) \approx 1$  pour  $z \in Z_i$ , et tend rapidement vers zéro ailleurs.

La fonction d'interpolation  $w_i : Z \rightarrow [0, 1]$  est définie alors par :

$$w_i(z) = \frac{\rho_i(z)}{\sum_{j=1}^N \rho_j(z)},$$

en supposant qu'à chaque point de fonctionnement  $z \in Z_i$ , il y ait au moins une fonction de validité qui ne soit pas nulle.

En général, il existe une fonction  $H : \Psi \rightarrow Z$  telle que, pour tout  $t$ ,  $z(t) = H(\psi(t))$ . La fonction  $H$  n'est autre qu'une projection,  $Z$  devient un sous espace ou une sous variété de l'espace d'information  $\Psi$ .

Pour résumer, le modèle de représentation, qui sera utilisé par la suite, est le suivant :

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \hat{f}_i(\psi(t-1)) w_i(z(t-1)) + e(t) \quad (4.22)$$

avec la structure du modèle local  $\hat{f}_i$

$$\hat{f}_i(\psi(t-1)) = f(\psi_i) + \nabla f(\psi_i)(\psi(t-1) - \psi_i) \quad (4.23)$$

ou bien, sous forme d'un modèle de type ARMAX

$$\hat{f}_i(\psi(t-1)) = \theta_i + \Theta(\psi(t-1) - \psi_i) \quad (4.24)$$

On définit maintenant l'ensemble des fonctions

$$F_n(K) = \left\{ \hat{f} : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^p / \hat{f}(\psi) = \sum_{i=1}^N \hat{f}_i(\psi) w_i(H(\psi)) \right\}$$

où  $\hat{f}_i$ , est un polynôme d'ordre  $n$ .

Les fonctions d'interpolation  $w_i$  sont des fonctions continûment différentiables et  $z = H(\psi)$ .

En général,  $f$  peut être écrite sous forme d'une fonction affine de certains de ces arguments. En effet, en réarrangeant les éléments de  $\Psi$  telle que  $\psi^T = [\psi_L, \psi_N]^T$  on obtient alors :

$$f(\psi) = f(\psi_L, \psi_N) = f_1(\psi_N) + f_2(\psi_N) \psi_L \quad (4.25)$$

où  $\psi_L \in \Psi_L$ ,  $\psi_N \in \Psi_N$ ,  $\Psi_L$  et  $\Psi_N$  sont deux sous-ensembles de l'espace d'information  $\Psi$ , tels que  $\Psi_L \times \Psi_N = \Psi$ . Par ailleurs,  $f_1 : \Psi_N \rightarrow \mathbb{R}^p$  est un vecteur de fonctions non linéaires et  $f_2 : \Psi_N \rightarrow \mathbb{R}^{p \times \dim(\Psi_L)}$  est une matrice de fonctions non linéaires. Un choix trivial de (4.25) consiste à prendre  $\Psi_N = \Psi$  et  $\Psi_L = \Phi$ .

**Théorème 4.4** (Johansen and Foss, 1993)

Supposons que la fonction  $f$  donnée par (4.25) soit continue, et que  $\Psi$  soit un ensemble compact, alors pour tout  $\varepsilon$ , il existe une fonction  $\hat{f} \in F_1(K)$  avec  $z = H(\psi) = \psi_N$  telle que  $\|f - \hat{f}\|_\infty < \varepsilon$ .

**Preuve**

Soit  $\psi \in \Psi$  choisi arbitrairement, et soient  $\psi_L \in \Psi_L$ ,  $\psi_N \in \Psi_N$ . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f(\psi) - \hat{f}(\psi) &= f(\psi_N, \psi_L) - \sum_{i=1}^N \hat{f}_i(\psi_N, \psi_L) w_i(\psi_N) \\ &= \sum_{i=1}^N (f_1(\psi_N) + f_2(\psi_N) \psi_L - \hat{f}_i(\psi_N, \psi_L)) w_i(\psi_N) \\ &= \sum_{i=1}^N (f_1(\psi_N) - \hat{f}_{Ni}(\psi_N) + f_2(\psi_N) \psi_L - \hat{f}_{Li}(\psi_L)) w_i(\psi_N) \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, nous avons divisé la fonction linéaire  $\hat{f}_i : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^p$  en deux fonctions linéaires  $\hat{f}_{Ni} : \Psi_N \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $\hat{f}_{Li} : \Psi_L \rightarrow \mathbb{R}^p$ . On représente la fonction  $\hat{f}_{Li}$  comme  $\hat{f}_{Li}(\psi_L) = \beta_i \psi_L$ , où  $\beta_i$  est une matrice de paramètres constants à déterminer. On aura alors

$$\begin{aligned} \|f(\psi) - \hat{f}(\psi)\| &= \left\| \sum_{i=1}^N (f_1(\psi_N) - \hat{f}_{Ni}(\psi_N) + (f_2(\psi_N) - \beta_i) \psi_L) w_i(\psi_N) \right\|_2 \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^N (f_1(\psi_N) - \hat{f}_{Ni}(\psi_N)) w_i(\psi_N) \right\|_2 + \left\| \sum_{i=1}^N (f_2(\psi_N) - \beta_i) \psi_L w_i(\psi_N) \right\|_2 \\ &\leq \left\| f_1(\psi_N) - \sum_{i=1}^N \hat{f}_{Ni}(\psi_N) w_i(\psi_N) \right\|_2 + \|\psi_L\|_2 \left\| f_2(\psi_N) - \sum_{i=1}^N \beta_i w_i(\psi_N) \right\|_2 \end{aligned}$$

Le premier terme dans cette équation peut être rendu arbitrairement petit, (cf. corollaire 4.1), en prenant  $n=1$ , car la fonction  $\hat{f}_{Ni}$  est linéaire et  $\Psi_N$  est un ensemble compact. De la même manière, le deuxième terme peut être rendu arbitrairement petit, en utilisant le même corollaire, et en prenant  $n=0$ , avec un choix donné des  $\beta_i$ , et  $\Psi_L$  un ensemble compact.

En conséquence, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut assurer :

$$\|f(\psi) - \hat{f}(\psi)\|_2 < \varepsilon$$

puisque  $\psi$  est choisi arbitrairement, nous avons alors  $\|f - \hat{f}\|_\infty < \varepsilon$ .

Il est clair que la réduction de l'ordre dans la dimension de l'espace d'information réduit considérablement le problème de dimension dans beaucoup de cas de modélisation.

### Exemple 4.3

Soit le système suivant représenté par la structure affine suivante :

$$\begin{aligned} y(t) &= f(y(t-1), u(t-1)) + e(t) \\ &= f_1(y(t-1)) + f_2(y(t-1))u(t-1) + e(t) \end{aligned}$$

On peut choisir  $z(t-1) = y(t-1)$ , sans perte de précision par cette approximation.

Ce résultat peut être généralisé, en prenant des modèles locaux de type polynôme d'ordre  $n$ . On peut toujours décomposer l'ensemble  $\Psi$  en deux sous ensembles  $\Psi_L$  et  $\Psi_H$  tel que  $\Psi_L \times \Psi_H = \Psi$  et

$$f(\psi) = f(\psi_L, \psi_H) = f_{H1}(\psi_H) + f_{H2}(\psi_H)f_L(\psi_L) \quad (4.26)$$

où  $f_L : \Psi_L \rightarrow \mathbb{R}^l$  est un polynôme d'ordre inférieur ou égal à  $n$ ;  $f_{H1} : \Psi_H \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $f_{H2} : \Psi_H \rightarrow \mathbb{R}^{p \times l}$  peuvent être des polynômes d'ordre supérieur.

### Théorème 4.5 (Johansen and Foss, 1993)

Supposons que la fonction  $f$  donnée par (4.26) soit continue, et que  $\Psi$  soit un ensemble compact. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction d'approximation  $\hat{f} \in F_n(K)$  avec  $z = H(\psi) = \psi_H$  telle que  $\|f - \hat{f}\|_\infty < \varepsilon$

### Preuve

La démonstration de ce théorème suit la même idée que celle donnée par la démonstration du théorème (4.4).

#### 4.5 Comparaison avec d'autres approches

En utilisant des modèles locaux à structure linéaire, le modèle de représentation (4.22) s'écrit :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\psi(t-1)) &= \sum_{i=1}^N (\theta_i + \Theta_i \psi(t-1)) w_i(z(t-1)) \\ &= \sum_{i=1}^N (\theta_i w_i(z(t-1))) + \left( \sum_{i=1}^N \Theta_i w_i(z(t-1)) \right) \psi(t-1) \\ &= \theta(z(t-1)) + \Theta_i(z(t-1)) \psi(t-1)\end{aligned}$$

Ceci signifie que la structure d'un modèle non linéaire peut être toujours écrite sous forme d'une structure d'un modèle quasi-linéaire, où les paramètres dépendent du point de fonctionnement. Priestley (Priestley, 1988) a introduit le modèle dépendant de l'état qui est sous la forme :

$$y(t) = \theta(x(t-1)) + \Theta(x(t-1))\psi(t-1) + e(t) \quad (4.27)$$

où  $x$  est le vecteur d'état,  $\theta$  est un vecteur qui dépend de l'état et  $\Theta$  est une matrice qui dépend aussi de l'état. La structure de modèle proposée par Tong et Lim (Tong and Lim, 1980) peut toujours se ramener à la forme donnée par l'équation (4.27) en remplaçant  $x(t-1)$  par  $y(t-1)$  et

$$\begin{aligned}\theta(y(t-1)) &= \begin{cases} \theta_1, & \text{si } y(t-1) \in Y_1 \\ \theta_2, & \text{si } y(t-1) \in Y_2 \end{cases} \\ \Theta(y(t-1)) &= \begin{cases} \Theta_1, & \text{si } y(t-1) \in Y_1 \\ \Theta_2, & \text{si } y(t-1) \in Y_2 \end{cases}\end{aligned}$$

où  $Y = Y_1 \cup Y_2$  et  $Y_1 \cap Y_2 = \Phi$ . Chaque paramètre est choisi à partir d'un ensemble formé de deux valeurs possibles, où la décision est basée sur la valeur de  $y(t-1)$ . Le modèle résultant est un modèle linéaire par morceaux, établissant ainsi un lien avec l'approche « Local Model Networks » si  $z(t-1) = y(t-1)$  et si les fonctions d'interpolation sont des fonctions de type échelon.

Cette notion de points de fonctionnement et de modèles locaux basés sur les fonctions de validité est perçue comme une approche complémentaire par rapport à la méthode du modèle dépendant de l'état donnée par Priestley (Priestley, 1988).

Takagi et Sugeno (Takagi and Sugeno, 1985) ont proposé une technique basée sur la théorie des ensembles flous (Zadeh, 1973) pour obtenir un modèle global non linéaire à partir de la combinaison d'un ensemble de modèles linéaires. Dans ce cas, l'ensemble des régimes de fonctionnement  $\{Z_i\}$  est vu comme un ensemble flou dont les éléments sont des fonctions  $\mu_{z_i}(z)$  égales aux fonctions de validité  $\rho_i(z)$  relatives à chaque modèle local. Alors, les règles d'inférences basées sur la logique floue de la forme

Si  $y(t-1)$  est  $Z_i$ , Alors  $y(t) = \hat{f}_i(\psi(t-1)) + e(t)$

donnent un modèle global de la forme (4.5), (4.6). Ceci suggère l'utilisation des ensembles flous et les règles d'inférences lors de la conception des régimes de fonctionnement. D'autre part, La théorie des ensembles flous fournit une représentation puissante vis-à-vis des régimes de fonctionnement à travers la définition des opérateurs flous qui vérifient les propriétés de la logique binaire :

$$\mu_{z_a \cup z_b}(z) = \max(\mu_{z_a}(z), \mu_{z_b}(z))$$

$$\mu_{z_a \cap z_b}(z) = \min(\mu_{z_a}(z), \mu_{z_b}(z))$$

$$\mu_{\bar{z}_a}(z) = 1 - \mu_{z_a}(z)$$

où  $Z_a$  et  $Z_b$  sont deux ensembles flous. Par exemple, un ensemble flou défini par :

$z$  est  $Z_i = (z_1 \text{ est grand}) \text{ et } (z_2 \text{ diminue})$

avec la fonction suivante:

$$\mu_{z_i}(z) = \min(\mu_{z_1, \text{grand}}(z_1), 1 - \mu_{z_2, \text{augmente}}(z_2))$$

où  $\mu_{z_1, \text{grand}}(z_1)$  est une fonction mono-variable appartenant à l'ensemble flou « $z_1$  est grand » et  $\mu_{z_2, \text{grand}}(z_2)$  est une fonction mono-variable appartenant à l'ensemble flou « $z_2$  augmente ».

Pour une description complète de la logique floue, on peut se reporter par exemple à (Wang, 1994). Ces modèles flous peuvent être utilisés pour représenter un système non linéaire (Lee, 1990), (Sjoberg et al., 1995). Ils présentent l'avantage de pouvoir facilement associer des informations numériques à des informations symboliques lors de la modélisation.

D'autres part, si on considère  $\{w_i\}_{i=1}^N$  comme un ensemble de fonctions de base, l'approche « Local Model Networks » devient similaire à l'approche basée sur les réseaux à fonction de base radiales (Radial Basis-Function Networks, RBF), (Powell, 1987); (Broomhead and Lowe, 1988); (Dyn, 1989); (Moody and Darken, 1989); (Poggio and Girosi, 1990).

En utilisant les fonctions de base radiales, une fonction non linéaire peut être approximée par un développement en série de fonctions de la manière suivante :

$$\hat{f}(\psi) = \sum_{i=1}^N \theta_i r_i(\|\psi - \psi_i\|_2)$$

où  $r_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  peut être choisi comme une fonction de type spline, gaussienne, ou sigmoïdale, et  $\theta_i = \hat{f}_i(\psi)$  est un modèle local constant obtenu à partir du développement en

série de Taylor à l'ordre zéro (cf. Fig. 4.4). Si les fonctions  $\rho_i$  sont choisies comme des fonctions locales radiales, alors l'ensemble  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  des fonctions normalisées définies par (4.6) ne sont pas, en général, des fonctions de type radial, mais peuvent avoir, d'une manière qualitative, la même forme en dehors de la frontière de l'ensemble  $\Psi$ .

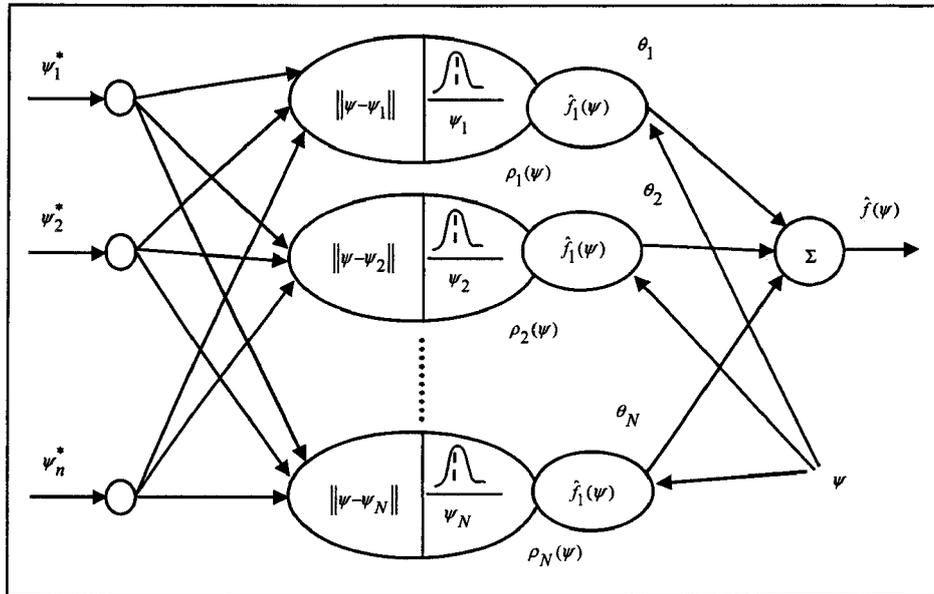


Fig. 4.4 Équivalence : Réseaux de neurones à fonctions de base radiales-  
Approche « Local Model Networks »

**Exemple 4.4**

Soit la fonction  $f$  donnée par l'exemple (4.2), et soit les trois approches suivantes de modélisation :

1. On utilise, dans ce cas, un développement en série de Taylor à l'ordre un, aux points  $\psi_1 = 0.5$  et  $\psi_2 = 1.5$  ; comme dans l'exemple (4.2). On obtient ainsi un modèle global linéaire par morceaux par combinaison de deux modèles locaux.
2. L'approximation de la fonction  $f$  est obtenue, à partir de fonctions de validité de type gaussienne

$$\rho_i(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z - z_i}{\sigma_i}\right)^2\right)$$

avec  $z_1 = \psi_1 = 0.5$  et  $z_2 = \psi_2 = 1.5, \sigma_i = 1.5$  et deux modèles linéaires locaux.

3. On utilise maintenant un développement en série de Taylor à l'ordre zéro aux points  $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0.5, \psi_3 = 1, \psi_4 = 1.5, \text{ et } \psi_5 = 2$ . On obtient ainsi l'approximation de la fonction  $f$  basée sur cinq modèles constants locaux et sur des fonctions de validité de type gaussienne avec  $\sigma_i = 0.5$ .

Les résultats obtenus sont montrés sur la figure (4.5). En comparant les figures (4.5a) et (4.5b), il est évident qu'en utilisant l'interpolation par des modèles locaux avec un choix approprié des fonctions de validité, on peut nettement améliorer la précision de l'approximation comparée à celle où on a seulement utilisé des modèles linéaires par morceaux obtenus par développement en série de Taylor à l'ordre un.

Notons que, pour cet exemple, la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[-1, 3]$ , tandis que le domaine d'information considéré, est défini sur l'intervalle  $[0, 2]$ . Ainsi, la caractéristique d'extrapolation peut être évaluée dans ce cas. Il est intéressant de remarquer qu'en dehors du domaine d'information  $[0, 2]$ , il y a des différences fondamentales concernant la possibilité d'extrapolation, alors qu'à l'intérieur de ce domaine, on obtient, d'une manière générale, des résultats assez comparables (4.5b) et (4.5c).

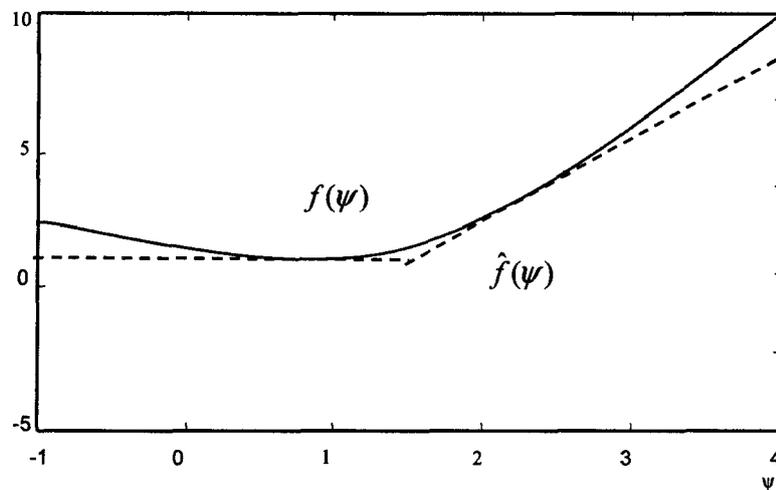


Fig 4.5a Modèle Linéaire par morceaux obtenu par combinaison de deux modèles linéaires locaux

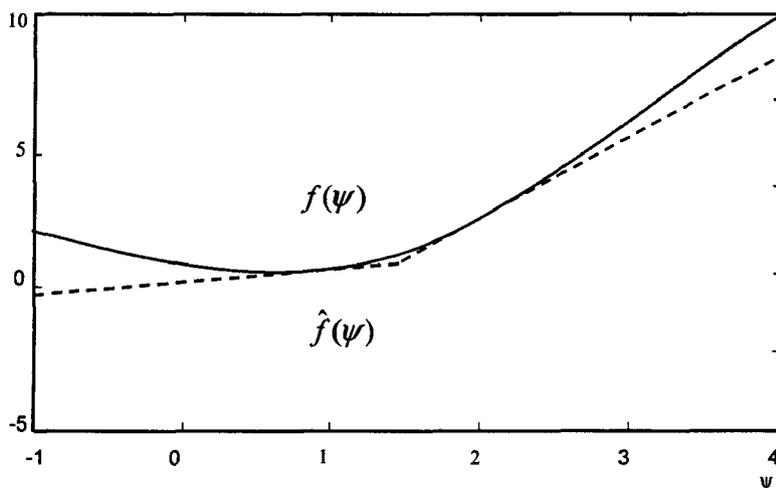


Fig 4.5b Modèle global basé sur deux modèles linéaires locaux et des fonctions de validité gaussienne

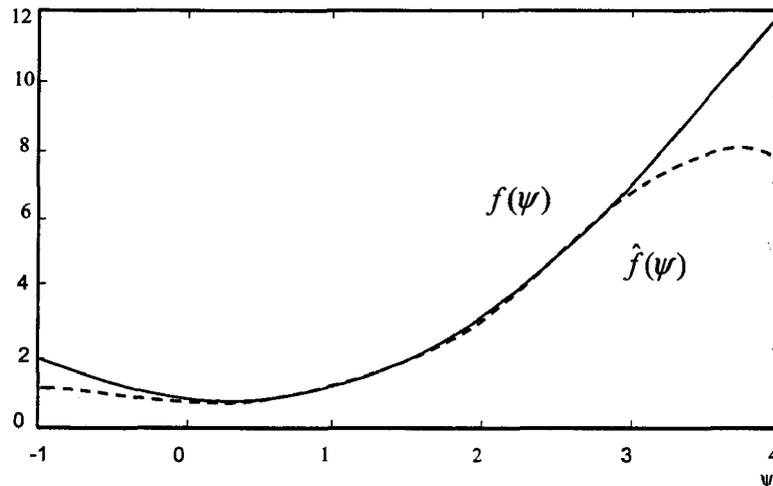


Fig 4.5a Modèle global basé sur cinq modèles constants et des fonctions de validité gaussienne

#### 4.6 Régime de fonctionnement basé sur une modélisation dans l'espace d'état

Les paragraphes précédents ont été consacrés à la présentation de la version discrète de l'approche « Local Model Networks » de Johansen et Foss (Johansen et Foss, 1993). Nous allons maintenant étendre cette méthode aux systèmes continus basés sur une représentation d'état, et proposer ensuite une structure de commande non linéaire basée sur un ensemble de régulateurs locaux.

##### 4.6.1 Représentation d'état basée sur l'approche « Local Model Networks »

Soit le système continu non linéaire décrit dans l'espace d'état sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) + v(t) \\ y(t) &= h(x(t)) + w(t)\end{aligned}\quad (4.28)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  désigne le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de commande et  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de sortie.  $\{v(t)\}$  et  $\{w(t)\}$  sont des séquences de bruit blanc de moyenne nulle et de densité spectrale  $Q_0$  et  $R_0$ . Les fonctions  $f(\cdot)$  et  $h(\cdot)$  sont, respectivement, les fonctions d'évolution de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$  et de sortie de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

On définit, tout d'abord,

- un ensemble de  $N$  points de fonctionnement statique, donnés par  $z_i (x = x_i^e, u = u_i^e, y = y_i^e)$ , où  $\{z_i\}_{i=1}^N$  qui correspond à un ensemble de  $N$  points d'équilibre du système tels

$$\begin{aligned}0 &= f(x_i^e, u_i^e) \\ y_i^e &= h(x_i^e)\end{aligned}\quad (4.29)$$

- et un ensemble de  $N$  modèles locaux, tels que chaque modèle local est valide dans un régime de fonctionnement  $Z_i$ , comprenant le point  $z_i \in Z_i$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_i(x(t), u(t)) + v(t) \\ y(t) &= h_i(x(t)) + w(t) \end{aligned} \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.30)$$

Cela nous permet de réaliser une description du système en utilisant un ensemble de  $N$  modèles linéaires tangents obtenus à partir du développement en série de Taylor à l'ordre un.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_i(x(t), u(t)) + v(t) = f(x_i^e, u_i^e) + A_i x_i^l + B_i u_i^l + o(\|x_i^l\|, \|u_i^l\|) + v(t) \\ y(t) &= h_i(x(t)) + w(t) = h(x_i^e) + C_i x_i^l + o(\|x_i^l\|) + w(t) \end{aligned} \quad (4.31)$$

pour  $i=1, \dots, N$

Les variables  $x_i^l, u_i^l$  et  $y_i^l$  sont définies par

$$\begin{aligned} x_i^l &= x - x_i^e \\ u_i^l &= u - u_i^e \quad \text{pour } i=1, \dots, N \\ y_i^l &= y - y_i^e \end{aligned} \quad (4.32)$$

Les  $(jk)$  éléments des matrices jacobiennes  $A_i, B_i$ , et  $C_i$  sont définis par

$$\begin{aligned} A_i^{jk} &= \left. \frac{\partial f_j(x, u)}{\partial x_k} \right|_{z=z_i} \\ B_i^{jk} &= \left. \frac{\partial f_j(x, u)}{\partial u_k} \right|_{z=z_i} \\ C_i^{jk} &= \left. \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_k} \right|_{z=z_i} \end{aligned} \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.33)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à un, on obtient un ensemble de  $N$  modèles locaux linéaires de vecteur d'état  $x_i^l$ , de commande  $u_i^l$  et de sortie  $y_i^l$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\approx f(x_i^e, u_i^e) + A_i x_i^l + B_i u_i^l + v(t) \\ y(t) &\approx h(x_i^e) + C_i x_i^l + w(t) \end{aligned} \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.34)$$

ou encore, en utilisant l'équation (4.29),

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^l &= A_i x_i^l + B_i u_i^l \\ y_i^l &= C_i x_i^l \end{aligned} \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.35)$$

Dans ce qui suit, nous supposons que chaque point de fonctionnement  $z \in Z$  est une fonction de la sortie et de l'entrée du système :

$$z = H(y, u) \quad (4.36)$$

De plus, nous supposons que pour chaque modèle local (3.35), il existe une fonction de validité  $\rho_i : Z \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\rho_i(z)$  tende vers un, pour tout  $z \in Z$  et tende rapidement vers zéro ailleurs.

Les fonctions de validité  $\rho_i(z)$  sont données par

$$\rho_i(z) = \exp(E_i^T \Sigma^{-1} E_i) \quad (4.37)$$

où  $\Sigma$  est une matrice gain choisie et,

$$e_i = [y - y_i^e, u - u_i^e]^T \quad (4.38)$$

est le vecteur d'erreur.

En appliquant l'approche LMN (Johansen and Foss, 1993), les deux fonctions  $f(\cdot)$  et  $h(\cdot)$  peuvent être approchées par l'intermédiaire de l'interpolation suivante :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, u) &= \sum_{i=1}^N [A_i(x - x_i^e) + B_i(u - u_i^e)] w_i(z) \\ \hat{h}(x) &= \sum_{i=1}^N [y_i^e + C_i(x - x_i^e)] w_i(z) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$w_i(z) = \frac{\rho_i(z)}{\sum_{j=1}^N \rho_j(z)} \quad (4.40)$$

sont les fonctions d'interpolation  $w_i : Z \rightarrow [0, 1]$  telles que  $\sum_{i=1}^N w_i(z) = 1$  pour tout  $z \in Z$ .

L'état et la sortie du système non linéaire (4.28) peuvent être approximativement reconstruits à partir des  $N$  modèles locaux linéaires d'équations (4.35)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^N [A_i(x - x_i^e) + B_i(u - u_i^e)] w_i(z) + v(t) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^N [y_i^e + C_i(x - x_i^e)] w_i(z) + w(t) \end{aligned} \quad (4.41)$$

ou, à partir d'une combinaison pondérée des états locaux

$$\begin{aligned}
 x_L(t) &= \sum_{i=1}^N [x_i^e + x_i^l] w_i(z) \\
 y_L(t) &= \sum_{i=1}^N [y_i^e + y_i^l] w_i(z)
 \end{aligned}
 \tag{4.42}$$

où  $x_L$  désigne l'état global et  $y_L$  est la sortie globale, obtenus par l'approche LMN, comme le montre le schéma de la figure (4.6).

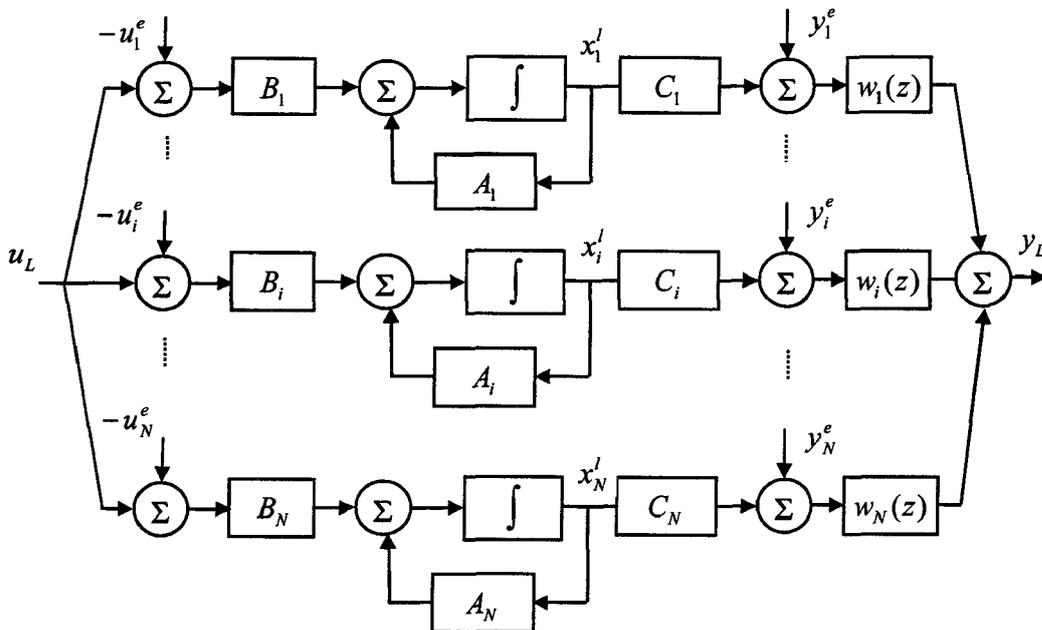


Fig 4.6 Représentation d'état d'un système non linéaire basée sur l'approche « Local Model Network »

L'état global  $x_L$ , basé sur l'approche LMN, présente l'avantage que chaque état local  $x_i^l$  peut être utilisé dans un retour d'état avec observateur basé sur une synthèse locale linéaire.

#### 4.6.2 Observateurs d'état basés sur l'approche « Local Model Networks »

Lorsqu'un modèle local (4.35) est activé, l'état local  $x_i^l$  va donc présenter une erreur par rapport à la variation  $x - x_i^e$  de l'état réel par rapport à son point d'équilibre correspondant. Ainsi, le système d'équations en boucle ouverte (4.42) ne donne pas une meilleure approximation de l'état réel  $x$  et de la sortie réelle  $y$  de l'équation (4.28). Par conséquent, il est naturel d'incorporer un retour local via un observateur d'état pour chaque modèle local.

On suppose que chaque modèle local  $(A_i, B_i, C_i)$  est stabilisable et détectable. Pour un choix approprié du gain  $L_i$ , on peut alors associer à chaque modèle local un observateur d'état local tel que

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_i^l &= A_i \hat{x}_i^l + B_i u_i^l + L_i ((y - y_i^e) - \hat{y}_i^l) \\ \hat{y}_i^l &= C_i \hat{x}_i^l\end{aligned}\quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.43)$$

Le problème de l'observation, basée sur l'état local, consiste donc à appliquer la théorie des systèmes linéaires. Dans l'hypothèse que la paire  $(C_i, A_i)$  soit détectable, la dynamique de l'observateur peut être rendue stable en choisissant le gain  $L_i$  tel que la matrice  $(A_i - L_i C_i)$  soit de Hurwitz, et assure donc un amortissement exponentiel de l'erreur d'observation locale  $(\tilde{x}_i^l) = x_i^l - \hat{x}_i^l$ . L'état absolu  $\hat{x}_i$  et la sortie absolue  $\hat{y}_i$  obtenus par estimation locale sont de la forme:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i &= \hat{x}_i^l + x_i^e \\ \hat{y}_i &= \hat{y}_i^l + y_i^e\end{aligned}\quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.44)$$

D'une manière similaire à l'équation (4.42), on reconstruit l'état global estimé  $\hat{x}$ , et la sortie globale estimée

$$\begin{aligned}\hat{x}_L &= \sum_{i=1}^N \hat{x}_i w_i(z) \\ \hat{y}_L &= \sum_{i=1}^N \hat{y}_i w_i(z)\end{aligned}\quad (4.45)$$

En utilisant les variables absolues, l'équation (4.43) devient

$$\dot{\hat{x}}_i = A_i (\hat{x}_i - x_i^e) + B(u - u_i^e) + L(y - \hat{y}_i) \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.46)$$

avec

$$\begin{aligned}y - \hat{y} &= \sum_{i=1}^N [(y_i^e + C_i(x - x_i^e)) - (y_i^e + C_i(\hat{x} - x_i^e))] w_i(z) \\ &= \sum_{i=1}^N C_i(x - \hat{x}) w_i(z)\end{aligned}\quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.47)$$

D'une manière équivalente à l'équation (4.41), l'état du système non linéaire (4.28) peut être approximativement reconstruit à partir des  $N$  observateurs locaux linéaires (4.46) et (4.47)

$$\begin{aligned}\hat{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^N [A_i (\hat{x}_i - x_i^e) + B(u - u_i^e) + L(y - \hat{y}_i)] w_i(z) \\ &= \sum_{i=1}^N [A_i (\hat{x}_i - x_i^e) + B(u - u_i^e) + L_i (\sum_{j=1}^N C_j (x - \hat{x}) w_j(z))] w_i(z) \\ &= \sum_{i=j=1}^N [A_i (\hat{x}_i - x_i^e) + B_i (u - u_i^e) + L_i C_j (x - \hat{x})] w_i(z) w_j(z)\end{aligned}\quad (4.48)$$

Le but de cette méthode est non seulement d'aboutir à une modélisation pratique du système d'équations (4.28), mais aussi de synthétiser une loi de commande pour le processus non linéaire.

#### 4.6.3 Régulateurs locaux basés sur l'approche « Local Model Networks »

Dans cette partie, nous allons utiliser l'approche LMN afin de concevoir  $N$  régulateurs locaux (Local Controller Networks, LCN) basés sur les modèles locaux d'équations (4.35) afin de générer un signal de retour pour la commande du système non linéaire (4.28) (Zbikowski et al., 1994), (Hunt and Johansen, 1997).

Considérons le retour d'état pour le système non linéaire (4.28) de la forme :

$$u(t) = g(\hat{x}(t)) \quad (4.49)$$

En se basant sur l'approche LMN, il est naturel d'exploiter la même partition de l'ensemble  $\{Z_i\}_{i=1}^N$  donnée au § 4.6.1 afin de concevoir, pour chaque régime de fonctionnement  $Z_i$  un régulateur local dont la validité est aussi donné par la même fonction  $\rho_i(z)$ . La commande globale est alors définie d'une manière analogue à l'équation (4.39) comme une combinaison pondérée de régulateurs locaux. Le régulateur LCN est donc décrit par

$$u(t) = \hat{g}(\hat{x}(t)) = \sum_{i=1}^N \left[ g(x_i^e) + \left. \frac{\partial g(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=x_i^e} (\hat{x} - x_i^e) \right] w_i(z) \quad (4.50)$$

où

$$g(x_i^e) = u_i^e, \text{ et } \left. \frac{\partial g(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=x_i^e} = K_i \text{ pour } i=1, \dots, N \quad (4.51)$$

ou encore

$$u(t) = \sum_{i=1}^N \left[ u_i^e - K_i (\hat{x} - x_i^e) \right] w_i(z) \quad (4.52)$$

Pour chaque modèle local (4.35), le signal de commande local correspondant est :

$$u_i^l = -K (\hat{x} - x_i^e) \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.53)$$

où le gain de retour  $K_i$  peut être synthétisé par les techniques linéaires.

Nous avons utilisé la commande CGPC, comme méthode de synthèse. La fonction coût est la suivante :

$$J = \int_0^t \left\{ \left[ \hat{y}_i^l(t+T) - w_i^l(t+T) \right]^T \left[ \hat{y}_i^l(t+T) - w_i^l(t+T) \right] dT + \int_0^u \left[ u_i^l(t+T) \right]^T Q_i \left[ u_i^l(t+T) \right] dT \right\} dT \quad (4.54)$$

où  $w_i^l = y^r - y_i^e$  est la consigne locale, telle que la trajectoire de référence  $y^r$  est solution de

$$\begin{aligned} 0 &= f(x^r, u^r) \\ y^r &= h(x^r) \end{aligned} \quad (4.55)$$

et  $x^r$  et  $u^r$  soient respectivement, l'état et l'entrée du système définis par le point d'équilibre  $z^r (x = x^r, u = u^r, et y = y^r)$ . L'écart entre la consigne locale et la sortie prédite locale peut être formulé par

$$w_i^l - \hat{y}_i^l = (C_i x_i^r - C_i \hat{x}_i^l) \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.56)$$

En utilisant (4.56), le critère (4.54) devient

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \{ [x_i^r(t+T) - \hat{x}_i^l(t+T)]^T C_i^T C_i [x_i^r(t+T) - \hat{x}_i^l(t+T)] dT + \int_0^{t_u} \{ [u_i^l(t+T)]^T Q_i [u_i^l(t+T)] \} dT \quad (4.57)$$

Tout calcul fait, on obtient la commande locale  $u_i^l$

$$u_i^l(t) = K_i (x_i^r(t) - \hat{x}_i^l(t)) \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (5.58)$$

où  $K_i$  est donné par

$$K_i = \alpha (H_i^T T_y^i H_i + T_u^i)^{-1} H_i^T T_y^i O_i \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (5.59)$$

avec

$$H_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_i B_i & B_i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_i^{N_y} B_i & A_i^{N_y-1} B_i & \dots & A_i^{N_y-N_y} B_i \end{bmatrix}, \quad O_i = \begin{bmatrix} I_n \\ A_i \\ \vdots \\ A_i^{N_y} \end{bmatrix}$$

$$T_y^i = \int_{t_1}^{t_2} T_{N_y}^T C_i^T C_i T_{N_y} dT \quad (4.60)$$

$$T_u^i = \int_0^{t_u} T_{N_u}^T Q_i T_{N_u} dT$$

ou encore, en utilisant les variables absolues,

$$u_i^l(t) = K_i (x_i^r(t) - \hat{x}_i^l(t)) \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.61)$$

Finalement, on génère la commande globale  $u_L(t)$ , qui sera appliquée au système non linéaire

$$u_L(t) = \sum_{i=1}^N [u_i^l(t) + u_i^e] w_i(z) \quad (4.62)$$

Le calcul de la commande  $u_L(t)$  basé sur l'approche LMN peut donc se résumer de la façon suivante :

**Algorithme :**

**\* Initialisation**

- Linéariser le système d'équations (4.28) autour de  $N$  points d'équilibre ;
- Calcul de  $N$  observateurs basés sur l'approche LMN (4.43) ;
- Calcul des paramètres des  $N$  régulateurs basés sur l'approche LMN (4.59) et (4.60).

**\* En ligne**

- Générer les entrées/sorties du système  $(y, u)$  ;
- Générer le vecteur d'erreur  $e^T = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]$  donné par (4.38) ;
- Générer les  $N$  fonctions d'interpolation  $w_i(t)$  données par (4.40) ;
- Calcul du signal de commande local  $u_i^l(t)$ , pour  $i=1, \dots, N$ , donné par (4.61) ;
- Générer la commande globale  $u_L(t)$  pour le système non linéaire donné par (4.62).

**4.7 Analyse de la stabilité d'un système de commande basée sur l'approche « Local Model Networks »**

Nous allons maintenant présenter quelques résultats sur l'analyse de la stabilité d'un système en boucle fermée, basé sur une structure de commande LCN.

Comme il a été montré dans (Murray-Smith and Johansen, 1997), la structure de commande par LCN est directement liée à la traditionnelle commande à gains programmés (gain-scheduling control), (Shamma and Athans, 1990, 1992), (Rugh, 1991). Par conséquent, la stabilité du système de commande LCN en boucle fermée peut être étudiée en utilisant l'approche basée sur la fonction de Lyapunov commune (common Lyapunov fonction). Cette méthode a été aussi appliquée pour l'analyse des systèmes de commande par logique floue, (Tanaka and Sugeno, 1992).

Considérons maintenant le problème de commande d'un système non linéaire d'équations (4.28), avec  $v(t) = 0$  et  $w(t) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u) \\ y(t) &= h(x) \end{aligned} \tag{4.63}$$

qui peut être approximativement décrit par une combinaison pondérée de  $N$  modèles linéaires

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{i=1}^N [(f(x_i^e, u_i^e)) + A_i(x - x_i^e) + B(u - u_i^e)] w_i(z) \\
 y(t) &= \sum_{i=1}^N [(h(x_i^e)) + C_i(x - x_i^e)] w_i(z)
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

où  $\{(x_i^e, u_i^e)\}_{i=1}^N$  désigne l'ensemble des  $N$  points d'équilibre choisis,  $\{w_i(z)\}_{i=1}^N$  l'ensemble des  $N$  fonctions d'interpolation. On a :

$$\begin{aligned}
 A_i &= \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x=x_i^e, u=u_i^e} \\
 B_i &= \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x=x_i^e, u=u_i^e} \\
 C_i &= \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=x_i^e}
 \end{aligned} \quad \text{pour } i=1, \dots, N \tag{4.65}$$

De plus, considérons le signal de commande LCN suivant :

$$u(t) = \sum_{i=1}^N [u_i^e - K_i(\hat{x} - x_i^e)] w_i(z) \tag{4.66}$$

où l'état estimé  $\hat{x}(t)$  est donné par

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^N [A_i(x - x_i^e) + B_i(u - u_i^e) + L_i(y - \hat{y}_i)] w_i(z) \tag{4.67}$$

Notons que les gains  $K_i$ , peuvent être obtenus par différentes méthodes de synthèse, par exemple la commande CGPC dans notre cas. Pour le calcul des gains  $L_i$ , on peut utiliser, soit la méthode de placement de pôles, soit un filtre de Kalman.

D'une façon similaire à l'équation (4.64), le signal de référence  $y^r$  défini précédemment (4.55), peut être approché par

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=1}^N [(f(x_i^e, u_i^e)) + A_i(x^r - x_i^e) + B(u^r - u_i^e)] w_i(z) \\
 y^r(t) &= \sum_{i=1}^N [(h(x_i^e)) + C_i(x^r - x_i^e)] w_i(z)
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

De même pour l'entrée de référence  $u^r$

$$u^r = \sum_{i=1}^N [u_i^e - K_i(x^r - x_i^e)] w_i(z) \tag{4.69}$$

En soustrayant successivement l'équation (4.68) de (4.64), et de (4.67), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \sum_{i=1}^N [A_i e_x + B_i e_u] w_i(z) \\ e_y &= \sum_{i=1}^N C_i e_x w_i(z) \end{aligned} \quad (4.70)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\hat{x}} &= \sum_{i=1}^N \left[ A_i e_{\hat{x}} + B_i e_u + L_i \left( \sum_{j=1}^N [(y - y^r) - (\hat{y} - y^r)] w_j(z) \right) \right] w_i(z) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ A_i e_{\hat{x}} + B_i e_u + L_i \left( \sum_{j=1}^N C_j (e_x - e_{\hat{x}}) w_j(z) \right) \right] w_i(z) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [A_i e_{\hat{x}} + B_i e_u + L_i C_j (e_x - e_{\hat{x}})] w_i(z) w_j(z) \end{aligned} \quad (4.71)$$

De plus, en soustrayant l'équation (4.69) de (4.66), on obtient :

$$e_u(t) = - \sum_{i=1}^N K_i e_{\hat{x}} w_i(z) \quad (4.72)$$

où

$$\begin{aligned} e_x &= x - x^r \\ e_{\hat{x}} &= \hat{x} - x^r \\ e_u &= u - u^r \\ e_y &= y - y^r \end{aligned} \quad (4.73)$$

désignent les nouvelles variables d'état, d'état estimé, de commande et de sortie.

On suppose que chaque modèle local  $(A_i, B_i, C_i)$  est stabilisable et détectable. Considérons maintenant le nouveau système local

$$\dot{e}_x = A_i e_x + B_i e_u \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.74)$$

avec le retour d'état local  $e_u(t)$

$$e_u(t) = -K_i e_{\hat{x}} \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.75)$$

où l'état local estimé  $e_{\hat{x}}$  est déterminé par

$$\dot{e}_x = A_i e_{\hat{x}} + B_i e_u + L_i C_i (e_x - e_{\hat{x}}) \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.76)$$

En regroupant les équations (4.74) pour le modèle local, (4.75) pour le retour d'état local et (4.76) pour l'observateur local, on obtient, pour  $i = 1, \dots, N$ , le système local en boucle fermée sous la forme suivante

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_x \\ e_{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & -B_i K_i \\ L_i C_i & A_i - L_i C_i - B_i K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_{\tilde{x}} \end{bmatrix} \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.77)$$

D'après le changement de variable (2.38), on obtient le système suivant :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_x \\ e_{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_i & B_i K_i \\ 0 & A_i - L_i C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_{\tilde{x}} \end{bmatrix} \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (4.78)$$

où  $[e_x \ e_{\tilde{x}}]^T$  représentent les nouvelles coordonnées dans l'espace d'état ;  $e_{\tilde{x}} = e_x - e_{\tilde{x}}$  est l'erreur d'estimation.

Finalement, l'étude de la stabilité du système (4.77) est équivalente à celle du système (4.78).

Pour démontrer la stabilité du système en boucle fermée (4.78), nous allons d'abord rappeler le lemme suivant :

**Lemme d'élimination** (Boy et al., 1994)

Etant données des matrices  $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $V \in \mathbb{R}^{q \times n}$ , il existe une matrice réelle  $X$  telle que

$$G + UXV^T + VX^T U^T > 0$$

si et seulement si

$$\tilde{U}^T G \tilde{U} > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{V}^T G \tilde{V} > 0$$

où  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{V}$  sont des compléments orthogonaux de  $U$ ,  $V$ ,  $\tilde{U}^T U = 0$  et  $\tilde{V}^T V = 0$ , et  $[U \ \tilde{U}]$  et  $[V \ \tilde{V}]$  sont des matrices non singulières.

Le point d'équilibre  $[e_x \ e_{\tilde{x}}]^T = [0 \ 0]^T$  du système (4.78), est globalement asymptotiquement stable, au sens de Lyapunov, s'il existe une matrice  $\tilde{P}_i > 0$ , pour  $i = 1, \dots, N$ , telle que

$$\begin{bmatrix} A_i - B_i K_i & B_i K_i \\ 0 & A_i - L_i C_i \end{bmatrix}^T \tilde{P}_i + \tilde{P}_i \begin{bmatrix} A_i - B_i K_i & B_i K_i \\ 0 & A_i - L_i C_i \end{bmatrix} < 0 \quad (4.79)$$

Ceci peut être facilement vérifié en utilisant la fonction de Lyapunov suivante

$$V \begin{bmatrix} e_x \\ e_{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_{\tilde{x}} \end{bmatrix}^T \tilde{P}_i \begin{bmatrix} e_x \\ e_{\tilde{x}} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{P}_i > 0$$

Chaque système local, décrit par (4.78), est alors globalement asymptotiquement stable.

Supposons qu'il existe  $\tilde{P}_i > 0$  pour  $i = 1, \dots, N$ , telle que la condition (4.79) est satisfaite. De plus, la condition (4.79) peut être réécrite comme suit :

$$G_i + J_1(B_i K_i)^T J_2^T \tilde{P}_i + \tilde{P}_i J_2(B_i K_i) J_1^T < 0 \quad (4.80)$$

où

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_i & 0 \\ 0 & A_i - L_i C_i \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } G_i = A_0^T \tilde{P}_i + \tilde{P}_i A_0$$

En appliquant le lemme précédent pour éliminer la matrice  $B_i K_i$ , on obtient une condition équivalente

$$\tilde{J}_1^T G_i \tilde{J}_1 < 0 \text{ et } \tilde{J}_2^T \tilde{P}_i^{-1} G_i \tilde{P}_i^{-1} \tilde{J}_2 < 0 \quad (4.81)$$

où

$$\tilde{J}_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Posons

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} P_i & M_i \\ M_i^T & * \end{bmatrix} \quad \text{où } P_i > 0$$

On rappelle qu'une matrice symétrique est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux successifs sont positifs (Rotella and Borne, 1995).

Alors la première condition de (4.81) s'écrit uniquement en fonction de  $P_i$ ,

$$P_i > 0 \quad (A_i - B_i K_i)^T P_i + P_i (A_i - B_i K_i) < 0 \quad (4.82)$$

De même, si on pose

$$\tilde{Q}_i = \tilde{P}_i^{-1} = \begin{bmatrix} * & N_i \\ N_i^T & Q_i \end{bmatrix} \quad \text{où } Q_i > 0$$

On rappelle que si  $\tilde{P}_i$  est une matrice définie positive alors  $Q_i$  l'est également (Rotella and Borne, 1995).

Alors la deuxième condition de (4.81) s'écrit uniquement en fonction de  $Q_i$ ,

$$Q_i > 0 \quad Q_i (A_i - L_i C_i)^T + P_i (A_i - L_i C_i) < 0 \quad (4.83)$$

On peut énoncer le résultat suivant :

**Théorème 4.6**

Le point d'équilibre  $[e_x \ e_{\bar{x}}]^T = [0 \ 0]$  du système (4.78), est globalement asymptotiquement stable, au sens de Lyapunov, s'il existe deux matrices  $P_i > 0$  et  $Q_i > 0$ , pour  $i = 1, \dots, N$ , telles que :

$$(A_i - B_i K_i)^T P_i + P_i (A_i - B_i K_i) < 0 \quad \text{pour } i=1, \dots, N$$

et

$$Q_i (A_i - L_i C_i)^T + (A_i - L_i C_i) Q_i < 0 \quad \text{pour } i=1, \dots, N$$

Nous allons maintenant étendre cet argument pour les systèmes non linéaires continus (4.70) commandés par des régulateurs LCN (4.72) et (4.71).

Tout d'abord, on va utiliser quelques théorèmes pour l'étude de la stabilité d'un système de commande LCN en accord avec la définition de la stabilité au sens de Lyapunov. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{e}_x(t) = \sum_{i=1}^N A_i e_x w_i(z) \tag{4.84}$$

où on suppose  $\sum_{i=1}^N w_i(z) = 1$ , et  $w_i(z) \geq 0$  pour  $i = 1, \dots, N$

**Théorème 4.7** (Tanaka et al., 1996)

Le point d'équilibre  $e_x = 0$  du système (4.84), est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $P > 0$  telle que

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \tag{4.85}$$

**Preuve**

Considérons la fonction de Lyapunov candidate telle que :

$$V(e_x(t)) = e_x^T(t) P e_x(t)$$

où  $P$  est une matrice définie positive. Cette fonction satisfait les propriétés suivantes :

- $V(0) = 0$
- $V(e_x(t)) > 0$  pour  $e_x(t) \neq 0$
- $V(e_x(t))$  tend vers l'infini quand  $\|e_x^T(t)\| \rightarrow \infty$

de plus,

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e_x(t)) &= \dot{e}_x^T(t) P e_x + e_x^T P \dot{e}_x \\
 &= \left( \sum_{i=1}^N A_i e_x(t) w_i(z) \right)^T P e_x + e_x^T P \left( \sum_{i=1}^N A_i e_x(t) w_i(z) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N w_i(z) \left\{ e_x^T(t) A_i^T P e_x(t) + e_x^T(t) P A_i e_x \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^N w_i(z) e_x^T(t) \left\{ A_i^T P + P A_i \right\} e_x(t)
 \end{aligned}$$

où  $w_i(z) \geq 0$  pour  $i = 1, \dots, N$ . D'après la condition (4.85), on obtient :

$$- \dot{V}(e_x(t)) < 0 \quad \forall e_x \neq 0.$$

Alors le système (4.84) est globalement asymptotiquement stable

Ce théorème se réduit au théorème de stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes linéaires continus lorsque  $i=1$ . D'autre part, la condition de stabilité obtenue par le théorème (4.7) est suffisante. Intuitivement, on peut supposer que le système approche (4.84) est stable si tous les sous systèmes locaux sont stables. Ceci n'est pas vrai en général.

Considérons, maintenant, le système non linéaire (4.70) avec le retour d'état reconstruit (4.72)

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_x(t) &= \sum_{i=1}^N \left[ A_i e_x - B_i \left( \sum_{j=1}^N K_j e_{\tilde{x}} w_j(z) \right) \right] w_i(z) \\
 &= \sum_{i=1}^N \left[ A_i e_x - B_i \left( \sum_{j=1}^N K_j e_{\tilde{x}} w_j(z) \right) + B_i \left( \sum_{j=1}^N K_j e_{\tilde{x}} w_j(z) \right) - B_i \left( \sum_{j=1}^N K_j e_{\tilde{x}} w_j(z) \right) \right] w_i(z) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i(z) w_j(z) \left[ (A_i - B_i K_j) e_x + B_i K_j e_{\tilde{x}} \right]
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

En soustrayant l'équation (4.71) de (4.70), on obtient :

$$\dot{e}_{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i(z) w_j(z) \left[ (A_i - L_i C_j) \right] e_{\tilde{x}} \tag{4.87}$$

Le système global en boucle fermée ((4.86) et (4.87)) devient :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_x \\ e_{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i(z) w_j(z) \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_{\tilde{x}} \end{bmatrix} \tag{4.88}$$

Par application du théorème (4.7), on obtient la condition suffisante de stabilité globale et asymptotique du système en boucle fermée (4.88). D'où le théorème suivant:

**Théorème 4.8**

Le point d'équilibre  $[e_x \ e_{\bar{x}}]^T = [0 \ 0]^T$  du système (4.88), est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune  $\tilde{P} > 0$  telle que

$$\begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix}^T \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix} < 0 \quad (4.89)$$

pour tout  $i, j=1, \dots, N$  où  $w_i(z)w_j(z) \neq 0$

**Preuve**

La démonstration de ce théorème est similaire à celle donnée par la démonstration du théorème (4.7).

En appliquant le lemme d'élimination, comme dans la preuve du théorème (4.6), la condition (4.89) revient, dans ce cas, à chercher l'existence de deux matrices communes  $P > 0$  et  $Q > 0$ , telles que :

$$(A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) < 0 \quad (4.90)$$

$$Q(A_i - L_i C_j)^T + (A_i - L_i C_j) < 0 \quad (4.91)$$

Pour tout  $i, j=1, \dots, N$  où  $w_i(z)w_j(z) \neq 0$ . Alors, le système de commande LCN est globalement asymptotiquement stable.

**Théorème 4.9**

Le point d'équilibre  $[e_x \ e_{\bar{x}}]^T = [0 \ 0]$  du système (4.88), est globalement asymptotiquement stable s'il existe deux matrice communes  $P > 0$  et  $Q > 0$ , telles que

$$(A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) < 0 \quad (4.92)$$

et

$$Q(A_i - L_i C_j)^T + (A_i - L_i C_j) < 0 \quad (4.93)$$

pour tout  $i, j=1, \dots, N$  où  $w_i(z)w_j(z) \neq 0$ .

Le système (4.88) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_x \\ e_{\bar{x}} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^N w_i(z) \begin{bmatrix} A_i - B_i K_i & B_i K_i \\ 0 & A_i - L_i C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_{\bar{x}} \end{bmatrix} + 2 \sum_{i=0}^N w_i(z)w_j(z) \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij} & \tilde{B}_{ij} \\ 0 & \tilde{C}_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_{\bar{x}} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{ij} &= \frac{(A_i - B_i K_j) + (A_j - B_j K_i)}{2}, & B_{ij} &= \frac{(B_i K_j) + (B_j K_i)}{2} \\ \tilde{C}_{ij} &= \frac{(A_i - L_i C_j) + (A_j - L_j C_i)}{2}, & i < j\end{aligned}$$

En appliquant les théorèmes (4.8) et (4.9), on obtient le résultat suivant :

#### Corollaire 4.2

Le point d'équilibre  $[e_x \ e_{\bar{x}}]^T = [0 \ 0]$  du système (4.88), est globalement asymptotiquement stable s'il existe deux matrices communes  $P > 0$  et  $Q > 0$ , telles que :

$$(A_i - B_i K_i)^T P + P (A_i - B_i K_i) < 0 \quad (4.95)$$

$$Q(A_i - L_i C_i)^T + (A_i - L_i C_i) < 0 \quad \text{pour tout } i, j=1, \dots, N \quad (4.96)$$

$$\tilde{A}_{ij}^T P + P \tilde{A}_{ij} < 0 \quad (4.97)$$

et

$$Q\tilde{C}_{ij}^T + \tilde{C}_{ij}^T Q < 0 \quad \text{pour tout } i < j \leq N \quad (4.98)$$

Il est à noter que ce résultat dépend aussi de la manière d'approcher le système non linéaire (4.28) par (4.39). D'autre part, afin de vérifier l'existence des deux matrices  $P$  et  $Q$  citées ci dessus, on peut formuler les systèmes d'équations (4.70), (4.71) et (4.72) sous la forme d'un problème de type inégalités matricielles linéaires (Linear Matrix Inequalities, LMI), (Boyd et al., 1993, 1994).

### 4.8 Commande CGPC avec le mode de glissement

Cette partie présente la commande par mode glissant en utilisant le CGPC. Le processus est contrôlé par la commande équivalente, dès que le système atteint la trajectoire de référence, ou bien son point de fonctionnement, la commande prédictive à temps continu est appliquée.

Pour ne pas trop rentrer dans les détails et faciliter la compréhension, nous allons donner la méthodologie générale pour la synthèse de la commande par mode glissant, pour plus d'information sur la méthode voir Annexe B.

#### 4.8.1 Présentation du système

Nous considérons le système non linéaire en cascade suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) + B(x)u \\ \dot{x}_2 = f_2(x) \\ y = h(x_2) \end{cases} \quad (4.99)$$

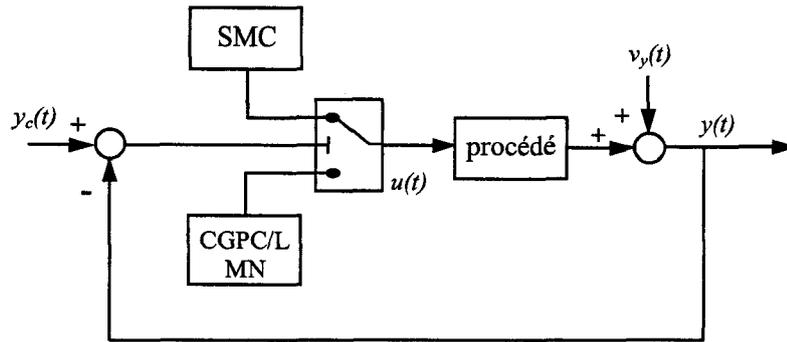


Fig 4.7 Combinaison de la commande CGPC avec le SMC

Où  $x_1 \in \Theta_1 \subset \mathfrak{R}^m$ ,  $x_2 \in \Theta_2 \subset \mathfrak{R}^{n-m}$  sont deux vecteurs d'état  $x = [x_1^T, x_2^T]^T$ ,  $u \in U \subset \mathfrak{R}^m$  est la commande bornée telle que :  $|u_i| \leq U_0$ , avec  $U_0 > 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ),  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont des fonctions vectorielles connues différentiables  $f_1 : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  et  $f_2 : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n-m}$ ,  $B(x)$  est une matrice  $(m \times m)$ , avec  $\text{rang}(B) = m$ ,  $y \in Y \subset \mathfrak{R}^m$  est la sortie du système.

L'objectif de la commande par mode de glissement est de :

- Synthétiser une surface  $S(x) = [S_1, S_2, \dots, S_m]^T$ ,  $S \in \mathfrak{R}^m$  /  $S(x) = 0$  telle que toutes les trajectoires du système obéissent à un comportement désiré de poursuite, régulation et stabilité.

- Déterminer une loi de commande capable d'attirer toutes les trajectoires d'état vers la surface de glissement  $S(x) = 0$  et les maintenir sur cette surface :

$$u_i = \begin{cases} u_i^+ & \text{si } S_i > 0 \\ u_i^- & \text{si } S_i < 0 \end{cases} \quad (4.100)$$

#### 4.8.2 Surface de glissement

La surface de glissement est une fonction de la sortie  $y(t)$  et de sa dérivée  $\dot{y}(t)$  soit :

$$S(t) = S(\tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) \quad (4.101)$$

Avec  $\tilde{y} = y - y_{ref}$ ,  $y_{ref} \in Y_{ref} \subset \mathfrak{R}^m$  est le vecteur de la référence désirée.

**Notations :**

**1. Soit les matrices suivantes :**

$$A = \frac{\partial S}{\partial \dot{y}} \Pi \frac{\partial f_2}{\partial x_1} B(x), \quad \text{rang}(A) = m,$$

$$A_1 = \frac{\partial S}{\partial \dot{y}} \Pi \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad A_2 = \frac{\partial S}{\partial \dot{y}} \left( \Psi + \Pi \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial S}{\partial x_2} \Pi \quad \text{et} \quad A_3 = \frac{\partial S}{\partial \dot{x}_2} \Pi$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial \dot{y}_1} & \dots & \frac{\partial S_1}{\partial \dot{y}_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial S_m}{\partial \dot{y}_1} & \dots & \frac{\partial S_m}{\partial \dot{y}_m} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial S_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial S_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial S_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial x_{11}} & \dots & \frac{\partial f_{21}}{\partial x_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2(n-m)}}{\partial x_{11}} & \dots & \frac{\partial f_{2(n-m)}}{\partial x_{1m}} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial x_{21}} & \dots & \frac{\partial f_{21}}{\partial x_{2(n-m)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2(n-m)}}{\partial x_{21}} & \dots & \frac{\partial f_{2(n-m)}}{\partial x_{2(n-m)}} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial S}{\partial \dot{y}_{ref}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial \dot{y}_{ref1}} & \dots & \frac{\partial S_1}{\partial \dot{y}_{refm}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial S_m}{\partial \dot{y}_{ref1}} & \dots & \frac{\partial S_m}{\partial \dot{y}_{refm}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial y_{ref}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial y_{ref1}} & \dots & \frac{\partial S_1}{\partial y_{refm}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial S_m}{\partial y_{ref1}} & \dots & \frac{\partial S_m}{\partial y_{refm}} \end{bmatrix}$$

Les matrices  $\Psi$  et  $\Pi$  sont définies comme suite:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \text{grad} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_{21}} \right) \dot{x}_2 & \dots & \text{grad} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_{2(n-m)}} \right) \dot{x}_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{grad} \left( \frac{\partial h_m}{\partial x_{21}} \right) \dot{x}_2 & \dots & \text{grad} \left( \frac{\partial h_m}{\partial x_{2(n-m)}} \right) \dot{x}_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi = \begin{bmatrix} \text{grad}(h_1) \\ \vdots \\ \text{grad}(h_m) \end{bmatrix}$$

Avec  $\text{grad}(f)$  est le vecteur gradient de la fonction  $f$ .

2. Soit  $\eta$  un vecteur  $\eta \in \mathfrak{R}^m$  et  $K$  est une matrice  $K \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  tels que :

$$|\eta| = [|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_m|]^T \quad \text{et} \quad K(\eta) = \text{diag}\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_m\}$$

### 4.8.3 Synthèse de la loi de commande par mode de glissement

Nous allons déterminer une loi de commande, qui est capable d'attirer toutes les trajectoires d'état vers la surface de glissement et de les maintenir sur cette surface en supposant que le système ne subit pas de perturbation extérieure et qu'il n'y a pas d'incertitude paramétrique.

#### Proposition 1

Considérons le système (4.99) et la surface de glissement (4.101). Soit la loi de commande  $u$  appliquée au système définie par :

$$u = u_{eq} + u_c \tag{4.102}$$

$$\begin{cases} u_{eq} = -A^{-1}(A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \zeta) \\ u_c = -A^{-1}K(q) \operatorname{sign}(S) \end{cases} \quad (4.103)$$

avec  $q_i > 0$ .

Les expressions des matrices A, A1, A2 et A3 sont celles définies au paragraphe précédent.  $\zeta$  est un vecteur donné par :

$$\zeta = -\frac{\partial S}{\partial \dot{y}_{2ref}} \ddot{y}_{2ref} - \frac{\partial S}{\partial y_{2ref}} \dot{y}_{2ref}$$

Dans ces conditions,  $S(\tilde{y}, \tilde{y}) = 0$  est attractive et invariante.

### Preuve

Nous pouvons vérifier la convergence et la stabilité de la surface de glissement en appliquant le théorème de Lyapunov.

Soit la fonction

$$V(S) = \frac{1}{2} S^T S \quad (4.104)$$

La surface est attractive pour les trajectoires de phase si  $V(S)$  est définie positive et sa dérivée par rapport au temps est négative, soit :

$$\dot{V}(S) = S^T \dot{S} < 0 \quad (4.105)$$

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial \dot{y}} \ddot{y} + \frac{\partial S}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial S}{\partial \dot{y}_{2ref}} \ddot{y}_{2ref} - \frac{\partial S}{\partial y_{2ref}} \dot{y}_{2ref}$$

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial \dot{y}} \left[ \frac{\partial (\frac{\partial h}{\partial x_2})}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial h}{\partial x_2} \ddot{x}_2 \right] + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial S}{\partial \dot{y}_{2ref}} \ddot{y}_{2ref} + \frac{\partial S}{\partial y_{2ref}} \dot{y}_{2ref}$$

on a 
$$\dot{S} = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \zeta + Au.$$

En substituant la valeur de  $u$  par la forme proposée en (4.102) et (4.103) nous obtenons :

$$\dot{S} = -K(q) \operatorname{sign}(S) \quad (4.106)$$

Pour que la condition (4.105) soit vérifiée, il suffit de choisir une valeur appropriée positive de  $q_i > 0$ .

### Remarque

Dans le cas nominal (pas d'incertitude paramétrique ni perturbations extérieures), l'interpolation de la fonction  $\operatorname{sat}(S)$  à la place de  $\operatorname{sign}(S)$  ne pose pas le problème de convergence car nous avons un système d'équations différentielles de la surface de glissement suivant :

$$\dot{S} = -K(q) K(\varphi)^{-1} S \quad (4.107)$$

avec la fonction  $sat(S) = K(\varphi)^{-1} S$  et  $\varphi = [\varphi_1 \cdots \varphi_m]^T$

Nous avons donc un système de  $m$  équations différentielles indépendantes du premier ordre. Chaque surface va exponentiellement vers l'origine et, par conséquent, la convergence de  $y$  vers  $y_{ref}$  est assurée.

#### 4.8.3.1 Dynamique glissante

Le régime glissant est atteint sur chaque surface  $S_i = \dot{S}_i = 0$ . Nous calculons la commande équivalente en tenant compte de  $\dot{S} = 0$ . On a

$$\dot{S} = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \zeta + Au \quad (4.108)$$

et, par conséquent,

$$u_{eq} = -A^{-1}(A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \zeta).$$

Finalement, en mode de glissement nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (I - B(x)A^{-1}A_1)f_1(x) - B(x)A^{-1}(A_2 f_2(x) + \zeta) \\ S(\tilde{y}, \tilde{y}) = 0 \end{cases} \quad (4.109)$$

Ainsi la dynamique du système dépend de la dynamique glissante, et la convergence de  $y$  dépend de la fonction de glissement choisie dans l'espace d'état.

**Robustesse paramétrique et perturbations extérieures**

En présence de perturbations extérieures et d'incertitudes paramétriques, le système (4.99) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \hat{f}_1(x) + \Delta f_1(x) + (\hat{B}(x) + \Delta B(x))u \\ \dot{x}_2 &= \hat{f}_2(x) + \Delta f_2(x) + w(t) \\ y &= h(x_2) \end{aligned} \quad (4.110)$$

$\hat{f}_1(x, t)$ ,  $\hat{f}_2(x, t)$  et  $\hat{B}(x)$  sont les fonctions estimées de  $f_1(x, t)$ ,  $f_2(x, t)$  et  $B(x)$ .  $\Delta f_1(x)$ ,  $\Delta f_2(x)$  et  $\Delta B(x)$  sont des incertitudes paramétriques bornées,  $w(t)$  et sa dérivée par rapport au temps sont bornées,  $w \in \mathbb{R}^p$  avec  $|w(t)| < w_0$  et  $|\dot{w}(t)| < d w_0$  ..

Soit  $F(x)$  une fonction vectorielle telle que

$$F(x) = \hat{F}(x) + \Delta F(x) = A_1 f_1(x) + A_2 \dot{x}_2 + A_3 \dot{w}(t) + \zeta \quad (4.111)$$

$\Delta F$  est une incertitude sur la fonction vectorielle  $F(x)$  supposée bornée et  $\hat{F}(x)$  la fonction estimée de  $F(x)$ ,  $\Delta A(x)$  une matrice d'incertitude sur la matrice  $A(x)$  constituée d'éléments

$\Delta a_{ij}$  bornés, et  $\hat{A}(x)$  la matrice estimée de  $A(x)$  telle que :

$$\Delta F = \hat{A}_1 \Delta f_1 + \Delta \hat{A}_1 f_1 + \Delta A_2 \dot{x}_2 + A_3 \dot{w}$$

où  $|\Delta F_i(x)| < \Gamma_i$ ,  $|\Delta a_{ij}(x)| < \theta_{ij}$   $i, j = 1, \dots, m$ . Avec  $\theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \dots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m1} & \dots & \theta_{mm} \end{bmatrix}$  et  $\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_m \end{bmatrix}$ .

### Proposition 2

Considérons la surface de glissement (4.101), et la commande suivante:

$$u = -\hat{A}^{-1}(\hat{F}(x) + K(q) \text{sign}(S)) \quad (4.112)$$

avec  $\hat{F}(x) = \hat{A}_1 \hat{f}_1(x) + \hat{A}_2 \dot{x}_2 + \zeta$ ,  $N = [N_1, N_2, \dots, N_m]^T$ ,  $q = [q_1, \dots, q_m]^T$  deux vecteurs tels que :

$$N = \Gamma + \theta |u| = [N_1, \dots, N_m]^T \text{ et } q_i > N_i$$

Avec la commande (4.112), chaque surface  $S_i$  converge en un temps fini  $t_r$  vers le domaine de glissement  $D_s$  telle que :

$$D_s = \{(\dot{\tilde{y}}_2, \tilde{y}_2) / \|S(\dot{\tilde{y}}_2, \tilde{y}_2)\| < \phi\} \quad (4.113)$$

$\phi$  est l'amplitude de la couche limite du domaine de glissement.

### Preuve

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(S) = \frac{1}{2} S^T S \quad (4.114)$$

La dérivée de cette fonction doit être négative pour que la surface de glissement converge vers zéro, c'est-à-dire

$$\dot{V}(S) = S^T \dot{S} < 0$$

Nous avons :

$$\dot{S} = F(x) + Au \quad (4.115)$$

Nous substituons la valeur de la commande donnée par l'expression (4.111), on trouve

$$\dot{S} = \Delta F(x) + \Delta A(x)u - K(q) \text{sign}(S) \quad (4.116)$$

donc

$$\dot{V}(S) = S^T \dot{S} = S^T (\Delta F(x) - \Delta A(x)u - K(q) \text{sign}(S)) < 0 \quad (4.117)$$

Soit

$$N = \Gamma + \theta |u| = [N_1, \dots, N_m]^T$$

La matrice  $K(q)$  est choisie telle que  $q_i > N_i$ .

Alors la surface converge vers zéro  $S(\dot{\tilde{y}}, \tilde{y}) = 0$  et reste dans le domaine  $D_s$ , tel que  $D_s = \{(\dot{\tilde{y}}, \tilde{y}) / \|S(\dot{\tilde{y}}, \tilde{y})\| < \phi\}$ .

#### 4.9 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter une nouvelle méthode de représentation de modèle concernant les systèmes non linéaires, basée sur un ensemble de modèles locaux. La version continue de l'approche LMN a été décrite par la suite. En vue d'étendre la commande CGPC pour les systèmes non linéaires, une structure de commande par LCN basée sur des régulateurs CGPC a été développée dans le paragraphe § 4.6.

Un résultat important, concernant l'analyse de la stabilité d'un système de commande par LCN avec observateurs a été établi. A cet effet, le paragraphe § 4.7 fournit une extension aux systèmes de commande par LCN avec observateurs, du théorème proposé par Tanaka (Tanaka et al., 1996) pour les systèmes de commande par logique floue, en utilisant l'approche basée sur la fonction de Lyapunov commune.

C'est l'ensemble de ces résultats concernant la structure de commande par LCN, et la combinaison de SMC avec CGPC/LMN, que nous allons appliquer sur un banc d'essais d'un système de trois colonnes et qui constitue un système multi-variable non linéaire.

## 5. Applications de la commande prédictive généralisée à temps continu

Dans ce chapitre, et afin de valider les lois de commande CGPC développées lors des chapitres précédents, des simulations et une application sur deux systèmes mécatroniques seront présentées. Il s'agit dans,,, un premier temps d'une simulation pour commander en vitesse une machine asynchrone, et dans,,, un second temps d'une validation expérimentale sur un système hydraulique. L'approche se sert des modèles existants pour aboutir à la construction de lois de type CGPC de faible complexité, qui sont ensuite validées à l'aide d'un simulateur (Matlab-Simulink) puis sur une plate-forme expérimentale de l'Institut Universitaire de Technologie de Cuffies-Soissons.

### 5.1 Simulation

L'application choisie se classe dans la catégorie des machines électriques, et plus particulièrement des machines asynchrones, type de moteurs électriques très répandu de nos jours, avec des versions variant de quelques watts jusqu'à quelques mégawatts. Même si la machine asynchrone est très appréciée pour ses qualités de robustesse, de fiabilité et de coût, les variateurs de vitesse ont parfois posé problème (alimentation à fréquence variable), des réponses acceptables n'ayant été fournies qu'après l'émergence de la technologie à semi-conducteurs.

Le moteur à commander est une machine asynchrone à cage d'écureuil, montée en triangle, qui possède quatre pôles, et dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous

TABLE I  
CHARACTERISTIQUES DE LA MCHINE ASYNCHRONNE

Puissance nominale	0.37 kW
Tension nominale ( $\Delta/Y$ )	220/380 V
Courant nominale ( $\Delta/Y$ )	3.1/1.8 A
Fréquence	50 Hz
Vitesse nominale	1420 rpm
Resistances $R_s, R_r$	23, 15 $\Omega$
Inductances $L_s, L_r, L_m$	0.9, 1.05, 0.957 H
Inertie J	0.0041 kg.m <sup>2</sup>

#### 5.1.1 Modélisation de la machine asynchrone en vue de la commande prédictive

Les équations de Park sont désormais célèbres pour l'élaboration du modèle de connaissance traduisant le comportement dynamique des modes électriques et électromagnétiques de la machine asynchrone (Bose, 1986), (Leonhard, 1990).

Ce modèle, décrit par un système algèbro-différentiel non linéaire, admet plusieurs classes de représentation d'état. Ces classes de modèles dépendent directement des objectifs de commande (couple, vitesse, position), de la nature de la source d'alimentation (tension ou courant), du référentiel de travail  $((\alpha, \beta)$  ou  $(d, q)$ ), et enfin du choix des composants du vecteur d'état (flux ou courants, statoriques ou rotoriques). Quelle que soit la classe étudiée, l'application des théories de la commande linéaire ou non linéaire a pour objet principal l'augmentation des performances dynamiques des sorties du système.

Nous étudions ici la classe d'objectif relative au contrôle de la vitesse. En effet, ce choix représente la majorité des applications de commande de la machine asynchrone dans le domaine industriel des entraînements à vitesse variable. De plus, nous avons adopté le plan  $(d, q)$  comme référentiel de travail, en vue d'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement ; cela n'est pas pratique, dans le cas du repère  $(\alpha, \beta)$ , où le régime permanent de la machine asynchrone conduit à une linéarisation autour d'une trajectoire d'équilibre. En effet, les grandeurs alternatives dans le plan  $(\alpha, \beta)$  deviennent des grandeurs continues en régime permanent dans le plan  $(d, q)$  (Thomas, 1995).

### 5.1.1.1 Modèle nominal non linéaire

Considérons le modèle dynamique de la machine asynchrone alimentée en tension dans un repère de Park lié au champ tournant (Yang et al., 1995)

#### Equations électriques

$$\begin{aligned}\frac{di_{ds}}{dt} &= -a_1 i_{ds} + \omega_s i_{qs} + a_2 \phi_{dr} + a_3 \omega_r \phi_{qr} + c u_{ds} \\ \frac{di_{qs}}{dt} &= -a_1 i_{qs} - \omega_s i_{ds} + a_2 \phi_{qr} - a_3 \omega_r \phi_{dr} + c u_{qs} \\ \frac{d\phi_{dr}}{dt} &= -a_4 \phi_{dr} + a_5 i_{ds} + (\omega_s - p \omega_r) \phi_{qr} \\ \frac{d\phi_{qr}}{dt} &= -a_4 \phi_{qr} + a_5 i_{qs} - (\omega_s - p \omega_r) \phi_{dr}\end{aligned}\tag{5.1}$$

#### Equations mécaniques

$$\begin{aligned}T_e &= K_T (\phi_{dr} i_{qs} - \phi_{qr} i_{ds}) \\ J \dot{\omega}_r &= -f \omega_r + T_e - T_L\end{aligned}\tag{5.2}$$

#### Equation de l'autopilotage

$$\omega_r = \frac{(\omega_s - \omega_{sl})}{p}\tag{5.3}$$

avec

$$\begin{aligned}x &= [i_{ds} \ i_{qs} \ \phi_{dr} \ \phi_{qr} \ \omega_r] \\ u &= [u_{ds} \ u_{qs} \ \omega_{sl}] \\ y_m &= [i_{ds} \ i_{qs} \ \omega_r]\end{aligned}$$

où  $x$  représente le vecteur d'état,  $u$  le vecteur de commande et  $y$  le vecteur de sortie.

### 5.1.1.2 Modèle nominal linéaire tangent

Soit le système non linéaire de la machine asynchrone défini au paragraphe précédent. Au voisinage d'un point d'équilibre  $(x_0, u_0)$ , le développement limité en série de Taylor, à l'ordre un, conduit au modèle linéarisé suivant :

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t)\end{aligned}\tag{5.4}$$

pour lequel nous définissons les vecteurs des petites variations :

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta u = u - u_0, \quad \text{et} \quad \Delta y = y - y_0$$

Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  du modèle (5.4) sont définies par :

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & (\omega_{slo} + p\omega_{ro}) & a_2 & a_3\omega_{ro} & (a_3\varphi_{qro} + pi_{qso}) \\ (\omega_{slo} + p\omega_{ro}) & -a_1 & a_3\omega_{ro} & a_2 & (a_3\varphi_{dro} + pi_{dso}) \\ a_5 & & 0 & -a_4 & \omega_{slo} & 0 \\ 0 & a_5 & & -\omega_{slo} & -a_4 & 0 \\ -(K_T/J)\varphi_{qro} & (K_T/J)\varphi_{dro} & (K_T/J)i_{qso} & -(K_T/J)i_{dro} & & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} c & 0 & i_{qso} \\ 0 & c & -i_{dso} \\ 0 & 0 & \varphi_{qro} \\ 0 & 0 & -\varphi_{dro} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les points d'équilibre s'obtiennent par une résolution numérique ou analytique du système algèbro-différentiel, défini au § 5.1.2, en posant  $\dot{x} = 0$ .

Pour une vitesse rotorique donnée  $\omega_{ro}$ , le vecteur de commande  $u_0$ , associé au point d'équilibre  $x_0 = [i_{dso}, i_{qso}, \varphi_{dro}, \varphi_{qro}, \omega_{ro}]^T$ , est défini par  $u_0 = [u_{dso}, u_{qso}, \omega_{slo}]^T$ .

D'autre part, on peut vérifier aisément que la commandabilité et l'observabilité du système d'équations (5.4), défini par le point d'équilibre  $(x_0, u_0)$ , sont toujours assurées.

Le modèle linéarisé tangent (5.4) n'est autre qu'une approximation plus ou moins juste du fonctionnement du système réel autour de son point d'équilibre. Il est donc nécessaire de tenir compte de ces erreurs de modélisation dans toutes lois de commande. De plus, on doit disposer d'une technique de synthèse robuste qui permet de déterminer un correcteur

réalisant de bonnes performances pour toute la classe de modèle d'incertitudes, définie au chapitre 3. Une exigence minimale est la stabilité du système en boucle fermée.

### 5.1.1.3 Conditionnement du modèle linéarisé et normalisation

Il a été montré que les systèmes mal conditionnés étaient particulièrement sensibles aux incertitudes de modélisation et rendaient ainsi plus difficile le problème d'analyse de robustesse d'une loi de commande (Skogestad et al., 1988), (Morari and Zafiriou, 1989), (Thomas, 1995).

#### 5.1.1.3.1 Facteur de conditionnement

**Définition 5.1** Soient  $\sigma_{\max}(G(j\omega))$ ,  $\sigma_{\min}(G(j\omega))$  respectivement les valeurs singulières maximales et minimales d'un système linéaire  $G$ , le facteur de conditionnement de  $G$ , noté  $\kappa(G)$ , est défini par la relation :

$$\kappa(G(j\omega)) = \frac{\sigma_{\max}(G(j\omega))}{\sigma_{\min}(G(j\omega))} = \frac{\sigma_{\max}(G(j\omega))}{\sigma_{\max}(G^{-1}(j\omega))} \quad (5.5)$$

Dans le cas d'un système linéaire  $G$ , (Mounce, 1990, Patel et al., 1994), la notion de conditionnement d'une matrice constante se traduit par :

- Si  $\kappa(G)$  est infini, le système est dit mal posé.
- Si  $\kappa(G)$  est fini et relativement grand ( $\kappa(G) \gg 1$ ), le système est dit mal conditionné.

Dans ce cas, la relation (5.5) doit être calculée pour chaque point de fonctionnement du modèle (5.4). Toutefois, le facteur  $\kappa(G)$  ne représente qu'un indicateur de conditionnement d'un système.

La figure (5.1) traduit la réponse fréquentielle des valeurs singulières relatives au modèle (5.4) défini autour du point de fonctionnement  $u_{dso} = 150V$ ,  $u_{qso} = 0V$ ,  $\omega_{slo} = 0.05rd/s$  et  $\omega_{ro} = 100rd/s$ . Les valeurs de  $i_{dso}$ ,  $i_{qso}$ ,  $\varphi_{dro}$  et  $\varphi_{qro}$  tendent vers  $0.1074A$ ,  $-0.8192A$ ,  $0.1001Wb$  et  $-0.7844Wb$ . La figure (5.2) illustre la définition (5.1) dans le cas du modèle (5.4), défini pour le même point d'équilibre. L'analyse de la figure (5.2) montre que le système est très mal conditionné pour  $\kappa(G) = 2137.5$  en régime statique.

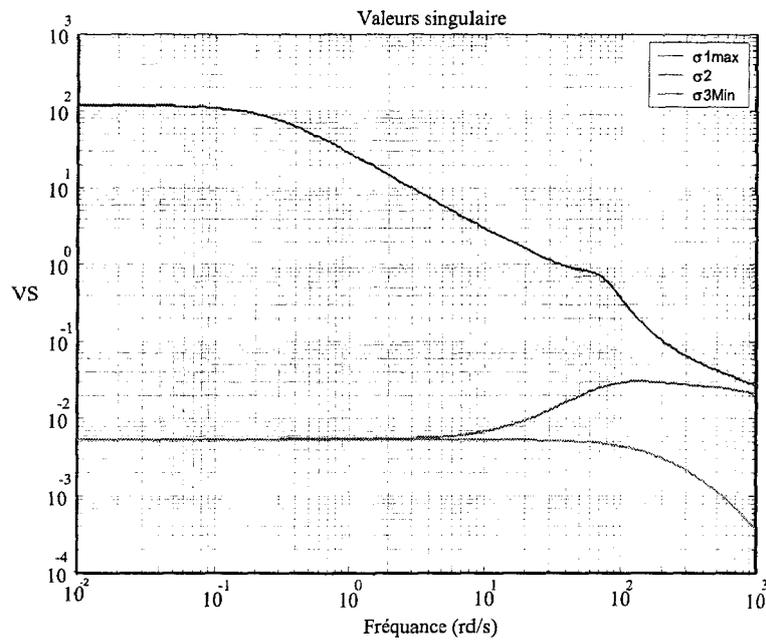


Fig.5.1 Valeurs singulières du modèle linéarisé  $G(j\omega)$

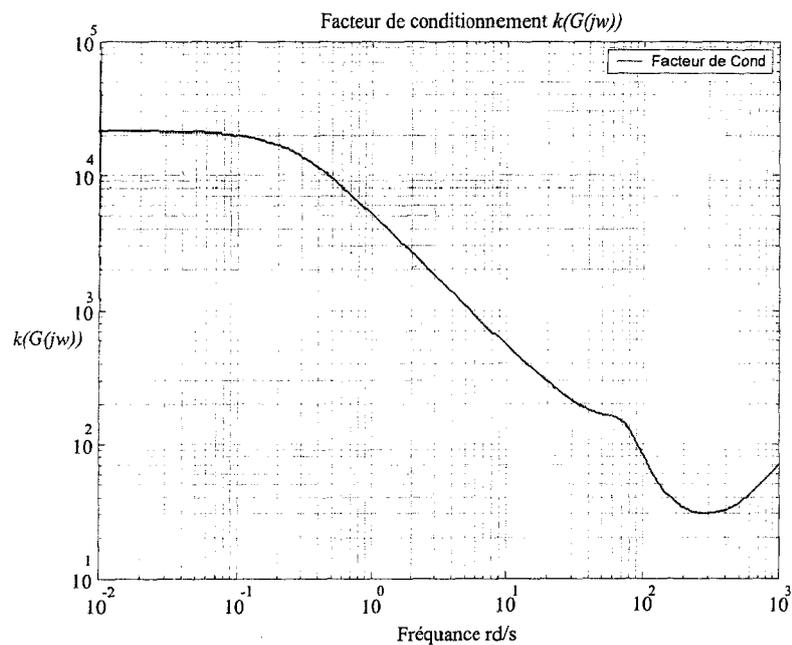


Fig.5.2 Facteur de conditionnement du modèle linéarisé  $G(j\omega)$

### 5.1.1.3.2 Normalisation

Il est montré dans (Chen et al., 1992) que l'amplitude du facteur de conditionnement est en fonction de la mise à l'échelle des entrées et des sorties du procédé. Cette mise à l'échelle s'apparente à la normalisation d'un modèle. Dans notre cas, il est naturel de s'intéresser à

un modèle de Park exprimé en valeurs réduites. Ceci nous a permis de rendre possible l'analyse de la robustesse de la commande prédictive. De plus, cette étude peut être facilement appliquée à des machines de puissance différente.

En règle générale, on choisit comme référence de normalisation les valeurs inhérentes au régime nominal.

Dans le cas du modèle linéarisé tangent (5.4), il est possible d'appliquer directement le changement de base sous forme matricielle, traduisant ainsi un changement d'échelle sur les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie.

### 5.1.1.3.3 Matrice de normalisation

Soit le modèle linéaire continu  $G$  exprimé en valeurs physiques, dont la représentation d'état s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t)\end{aligned}\quad (5.6)$$

Posons

$$\Delta x = [X_n]\Delta x^*, \quad \Delta u = [U_n]\Delta u^* \quad \text{et} \quad \Delta y = [Y_n]\Delta y^* \quad (5.7)$$

où  $[X_n]$ ,  $[U_n]$  et  $[Y_n]$ , dites matrices de normalisation, sont des matrices diagonales représentant les grandeurs nominales,

$$\begin{aligned}[X_n] &= \text{diag}\{I_n, I_n, \Psi_n, \Psi_n, \Omega_n\} \\ [U_n] &= \text{diag}\{U_n, U_n, \Omega_{s,ln}\} \\ [Y_n] &= \text{diag}\{I_n, I_n, \Omega_n\}\end{aligned}\quad (5.8)$$

et  $\Delta x^*$ ,  $\Delta u^*$  et  $\Delta y^*$  définissent respectivement l'état, l'entrée et la sortie exprimés en valeurs réduites du système (5.6). Le modèle en grandeurs relatives, noté  $G^*$ , s'exprime alors par :

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}^* &= [X_n^{-1}AX_n]\Delta x^* + [X_n^{-1}BU_n]\Delta u^* \\ \Delta y^* &= [Y_n^{-1}CX_n]\Delta x^*\end{aligned}\quad (5.9)$$

Par comparaison avec les résultats de la figure 5.1, la réduction importante de l'écart entre valeurs singulières de  $G^*$ , essentiellement en basse fréquence, est illustrée par la figure 5.3.

Ceci montre clairement l'intérêt d'utiliser un modèle en grandeurs relatives pour améliorer le conditionnement du système. On a  $\kappa(G^*(0)) = 21.4795$  en régime statique.

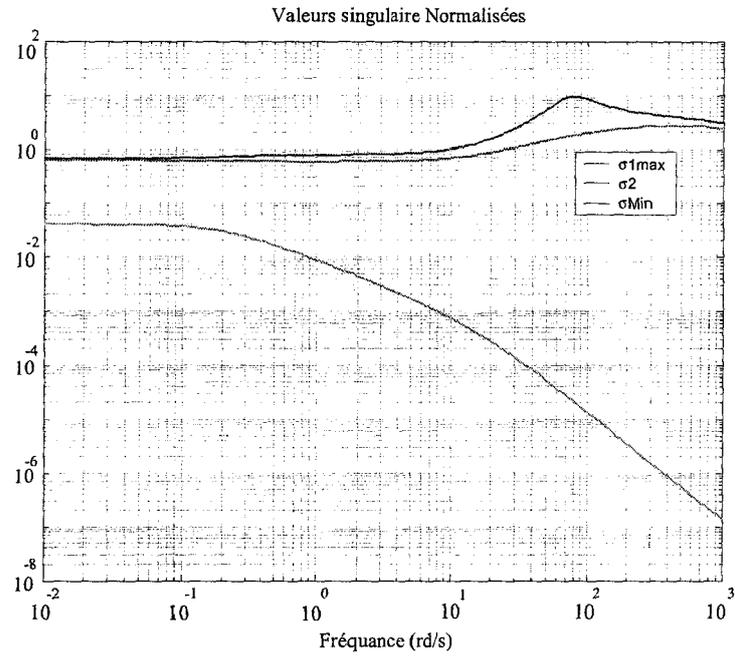


Fig.5. 3 Valeurs singulières du modèle normalisé  $G^*(jw)$

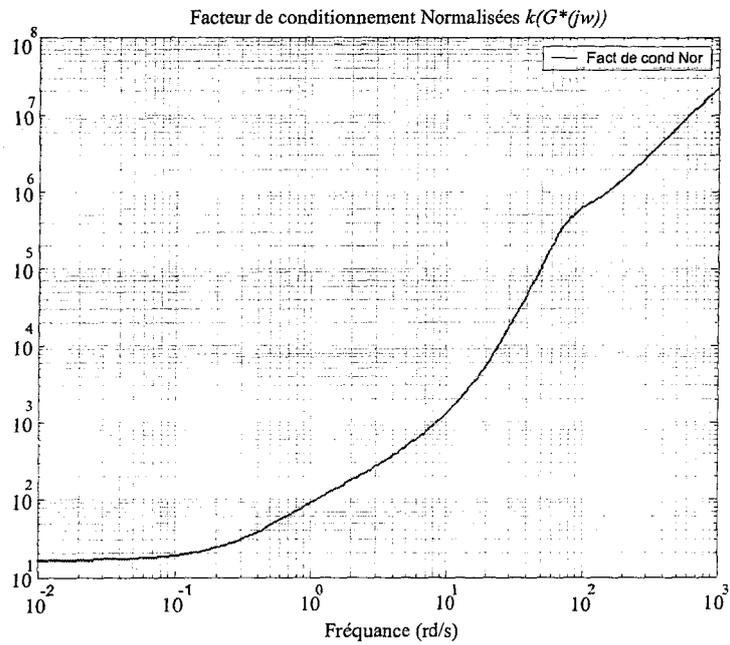


Fig.5.4 Facteur de conditionnement du modèle normalisé  $G^*(jw)$

### 5.1.2 Choix des paramètres de la CGPC pour la prédiction de la sortie

Le modèle que nous allons prendre comme modèle nominal afin de synthétiser la loi de commande est le modèle linéaire tangent normalisé, défini au paragraphe § 5.1.3.1, par le point de fonctionnement  $u_{dso} = 150V$ ,  $u_{qso} = 0V$ ,  $\omega_{slo} = 0.05rd/s$  et  $\omega_{ro} = 100rd/s$ . Les valeurs de  $i_{dso}$ ,  $i_{qso}$ ,  $\varphi_{dro}$  et  $\varphi_{gro}$  tendent vers  $0.1074 A$ ,  $-0.8192 A$ ,  $0.1001 Wb$  et  $-0.7844 Wb$ .

Dans l'étape de prédiction, la sortie future est seulement fonction du jeu de paramètres suivants,  $T_1, T_2, T_u$ , et  $N_y$ .

Le système ne présente pas de retard pur, le paramètre  $T_1$ , est alors pris égal à zéro. D'autre part, comme dans la GPC à temps discret, le paramètre  $T_2$  est équivalent à  $N_2$ , et il présente le même effet. En général, une faible valeur de  $T_2$  correspond à une réponse rapide de la sortie et une action de commande très active. Nous avons pris, dans ce cas,  $T_2 = 5ms$  et  $T_u = T_2$ .

Le paramètre  $N_y$  est choisi de telle sorte qu'il réponde aux recommandations données au chapitre 2, c'est à dire,  $N_y$  est choisi tel que l'on ait une meilleure approximation de la réponse indicielle (ou impulsionnelle) du système en boucle ouverte dans l'intervalle  $]0, T_2[$ , ce qui se traduit par une meilleure approximation de la sortie future. En effet, la prédiction, dans ce cas, est basée sur la réponse du système en boucle ouverte.

Pour un certain nombre d'essais effectués en simulation, le système peut être raisonnablement commandé en boucle fermée, pour des valeurs plus faibles du paramètre  $N_y$ . Ceci a pour effet de réduire considérablement le temps de calcul et la taille mémoire de la tâche en diminuant le nombre d'éléments des matrices mises en jeu lors de la synthèse de la loi de commande. Le choix de  $N_y$  égal à 6 est satisfaisant.

### 5.1.3 Analyse de la robustesse en fonction de $N_u$ et $Q = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

Nous allons utiliser les résultats obtenus au chapitre 3 ainsi que les propriétés données en Annexe B. Le modèle nominal utilisé, est le modèle linéaire tangent normalisé, défini au paragraphe § 5.2.

#### 5.1.3.1 Cas de la commande CGPC avec observateur

##### 5.1.3.1.1 Ordre de commande $N_u$

Etudions d'abord, la robustesse pour des incertitudes de modèles ramenées à l'entrée du système. Les figures 5.5.a, 5.5.b et 5.5.c montrent respectivement les valeurs singulières de  $\sigma(I_m + R(jw)G(jw))$  et  $\sigma(I_m + (R(jw)G(jw))^{-1})$  en fonction de  $N_u$ . Les courbes sont

obtenues avec les paramètres  $N_2 = 6$  et  $Q = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.0001)$ . En utilisant les résultats des propriétés A.3 et A.4 données en Annexe A, on en déduit les marges minimales suivantes :

- Pour  $N_u = 0$  on a, marge de gain ]0.9679, 1.0451[ et marge de phase ]-1.8994°, 1.8994°[
- Pour  $N_u = 1$  on a, marge de gain ]0.9639, 1.0388[ et marge de phase ]-2.1418°, 2.1418°[
- Pour  $N_u = 2$  on a, marge de gain ]0.9915, 1.0086[ et marge de phase ]-0.4899°, 0.4899°[
- Pour  $N_u = 3$  on a, marge de gain ]0.9949, 1.0052[ et marge de phase ]-0.2950°, 0.2950°[

Lorsque  $N_u$  augmente, la robustesse du système de commande pour des incertitudes de modèles ramenées en entrée diminue.

Les figures 5.6.a, 5.6.b, et 5.6.c montrent respectivement les valeurs singulières de  $\sigma(I_p + R(j\omega)G(j\omega))$  et  $\sigma(I_p + (R(j\omega)G(j\omega))^{-1})$  en fonction de  $N_u$ , pour des incertitudes de modèles ramenées en sortie. Les courbes sont obtenues avec les paramètres  $N_2 = 6$  et  $Q = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.0001)$ . En utilisant les résultats des propriétés A.1 et A.2 données en Annexe A, on en déduit les marges minimales suivantes :

- Pour  $N_u = 0$  on a, marge de gain ]0.8517, 1.2109[ et marge de phase ]-9.9936°, 9.9936° [
- Pour  $N_u = 1$  on a, marge de gain ]0.7912, 1.3586[ et marge de phase ]-15.1646°, 15.1646° [
- Pour  $N_u = 2$  on a, marge de gain ]0.8772, 1.1628[ et marge de phase ]-8.0279°, 8.0279° [
- Pour  $N_u = 3$  on a, marge de gain ]0.9131, 1.1052[ et marge de phase ]-5.4572°, -5.4572° [

Lorsque  $N_u$  augmente, la robustesse du système de commande pour des incertitudes de modèles ramenées en sortie diminue. Ceci s'explique par le fait que lorsque  $N_u$  augmente, la commande devient plus active, et la réponse temporelle du système en boucle fermée devient de plus en plus oscillatoire.

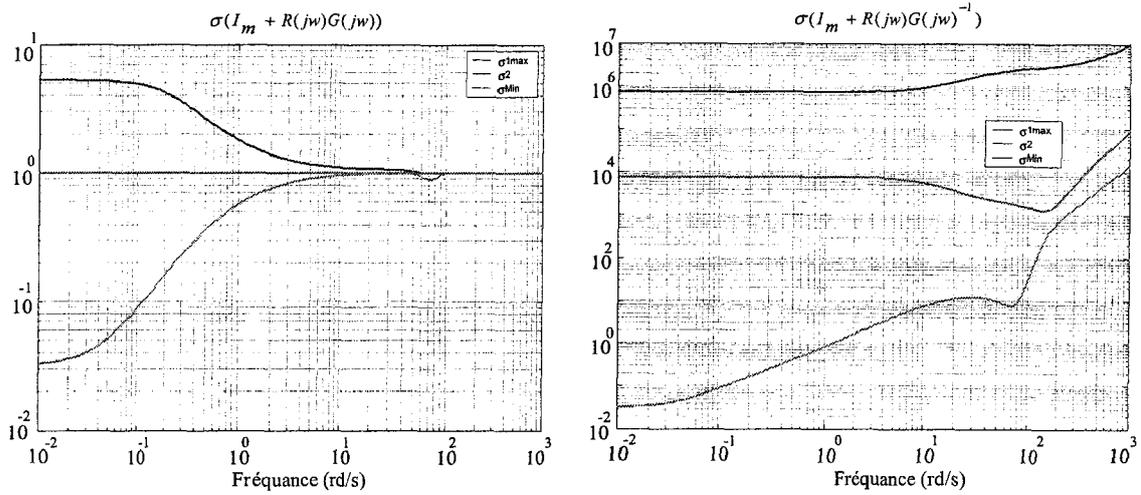


Fig.5.5.a Calcul des marges de stabilité en entrée pour  $N_u = 0$

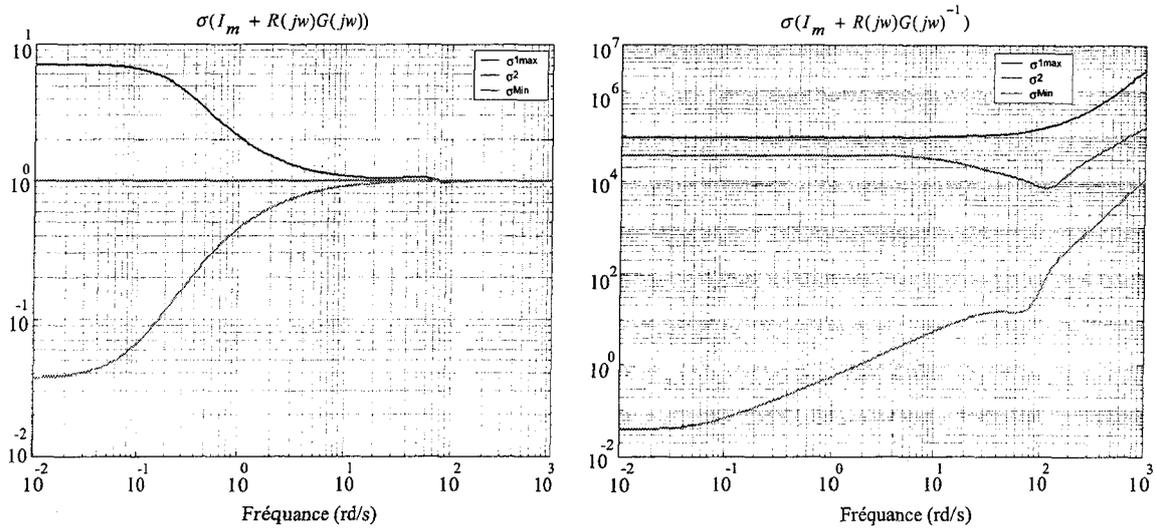


Fig.5.5.b Calcul des marges de stabilité en entrée pour  $N_u = 1$

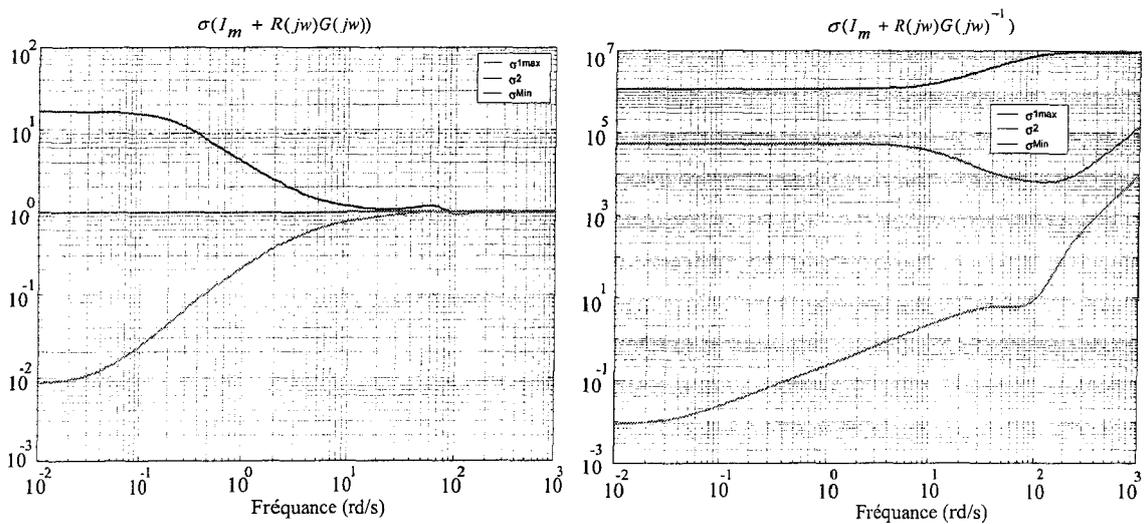


Fig.5.5.c Calcul des marges de stabilité en entrée pour  $N_u = 2$

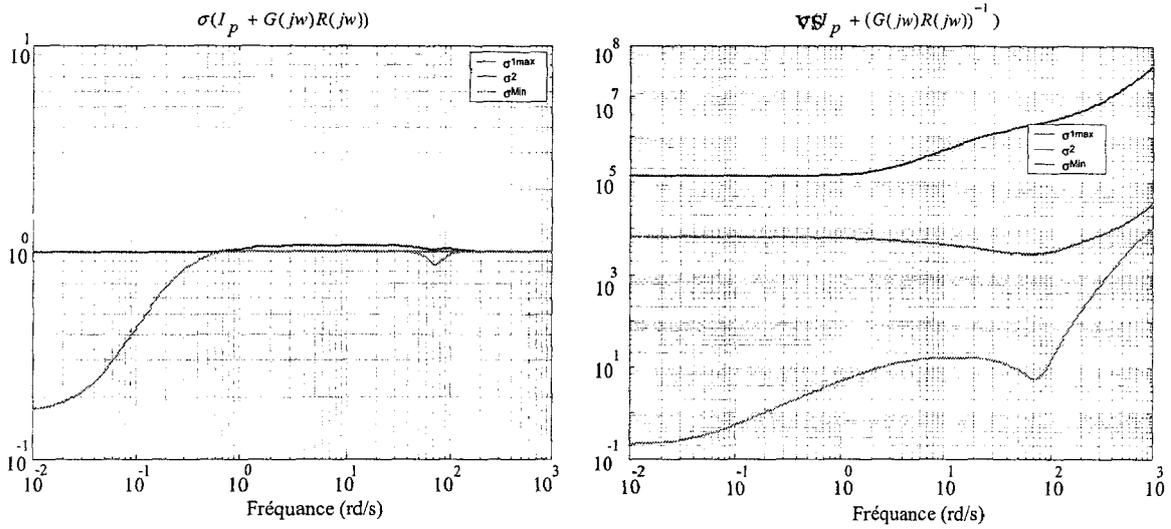


Fig.5.6.a Calcul des marges de stabilité en sortie pour  $N_u = 0$

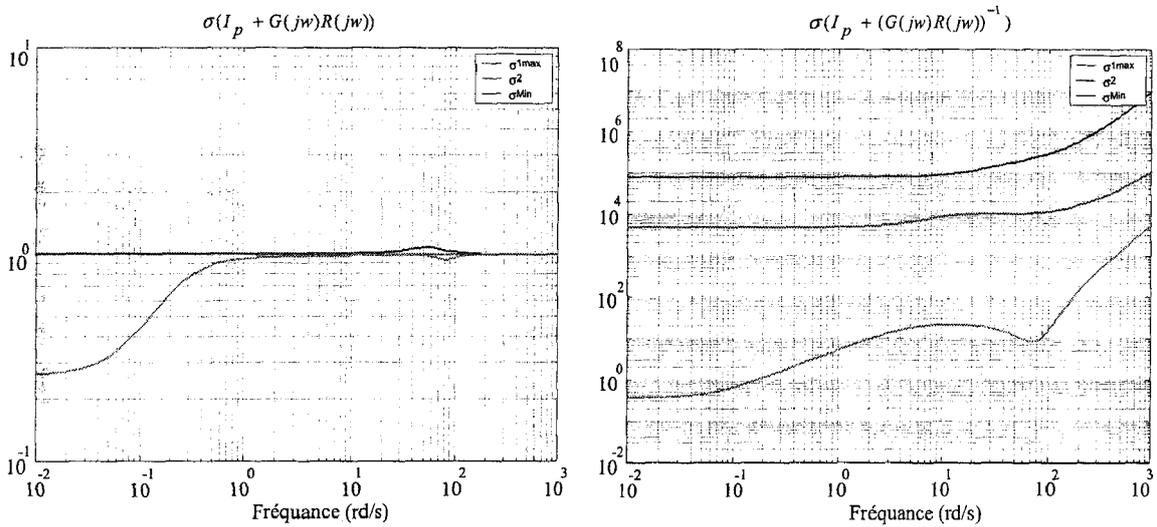


Fig.5.6.b Calcul des marges de stabilité en sortie pour  $N_u = 1$

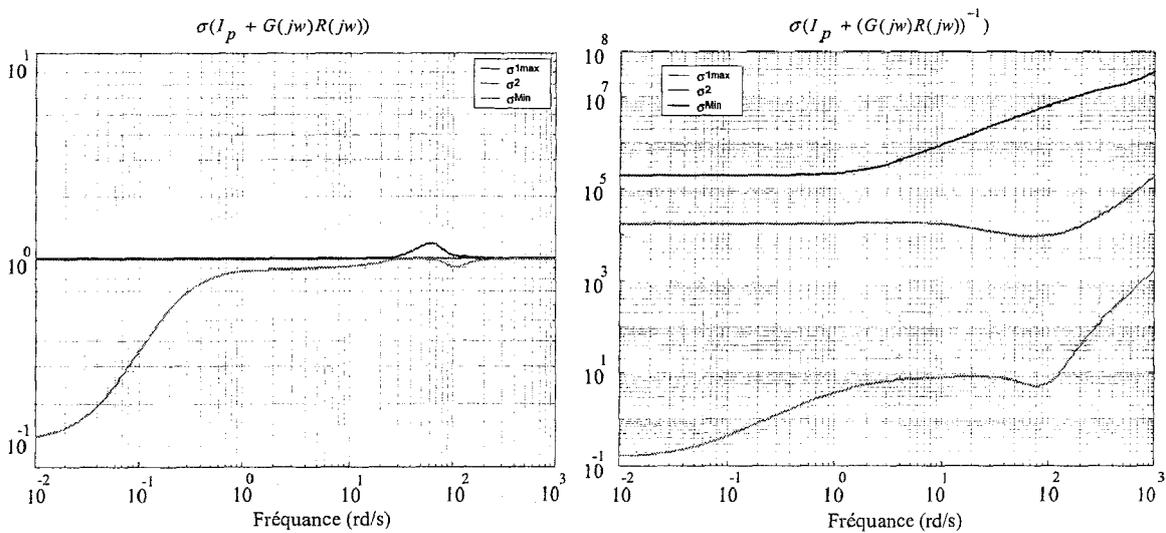


Fig.5.6.c Calcul des marges de stabilité en sortie pour  $N_u = 2$

### 5.1.3.1.2 Facteur de pondération $Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

Les figures 5.7.a, 5.7.b et 5.7.c montrent respectivement les valeurs singulières de  $\sigma(I_m + R(j\omega)G(j\omega))$  et  $\sigma(I_m + (R(j\omega)G(j\omega))^{-1})$  en fonction de  $Q$  pour des incertitudes de modèles ramenées à l'entrée. Les courbes sont obtenues avec les paramètres  $N_2 = 6$  et  $N_u = 1$ . On en déduit les marges minimales suivantes :

- Pour  $Q = \text{diag}(0.001, 0.001, 0.0001)$ , on a : marge de gain ]0.9960, 1.0040[ et marge de phase ]-0.2291°, 0.2291° [

- Pour  $Q = \text{diag}(0.01, 0.01, 0.001)$ , on a : marge de gain ]0.9401, 1.0700[ et marge de phase ]-3.6486°, 3.6486° [

- Pour  $Q = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.001)$ , on a : marge de gain ]0.8201, 1.2811[ et marge de phase ]-12.5960°, 12.5960° [

Lorsque le facteur de pondération  $Q$  augmente, la robustesse du système de commande augmente.

Les figures 5.8.a, 5.8.b et 5.8.c montrent respectivement les valeurs singulières de  $\sigma(I_p + G(j\omega)R(j\omega))$  et  $\sigma(I_p + (G(j\omega)R(j\omega))^{-1})$  en fonction de  $Q$ , pour des incertitudes de modèles ramenées en sortie. Les courbes sont obtenues avec les paramètres  $N_2 = 6$  et  $N_u = 1$ . On en déduit les marges minimales suivantes :

- Pour  $Q = \text{diag}(0.001, 0.001, 0.0001)$ , on a : marge de gain ]0.9284, 1.0836[ et marge de phase ]-4.4203°, -4.4203° [

- Pour  $Q = \text{diag}(0.01, 0.01, 0.001)$ , on a : marge de gain ]0.6595, 2.0669[ et marge de phase ]-29.915°, 29.915° [

- Pour  $Q = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.001)$ , on a : marge de gain ]0.6310, 2.409[ et marge de phase ]-34.003°, 34.003° [

Lorsque le facteur de pondération  $Q$  augmente, la robustesse du système de commande augmente.

L'étude d'une augmentation du facteur  $Q$  sur le système améliore la stabilité. En revanche, le temps de réponse augmente ; ceci montre qu'une faible valeur de  $Q$  à une valeur de  $N_u$  bien ajustée, permet d'obtenir une bonne robustesse en stabilité et des performances satisfaisantes.

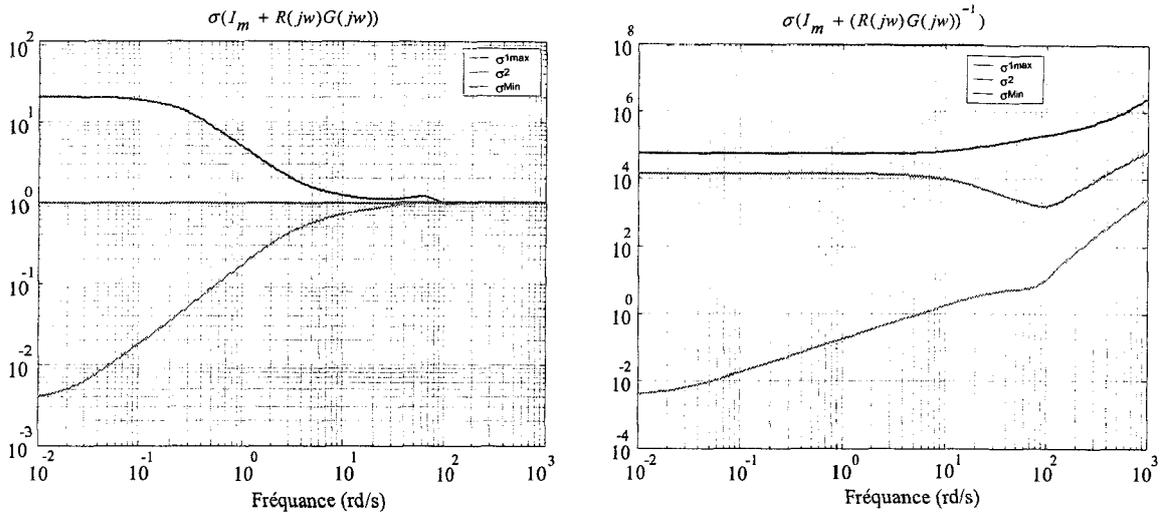


Fig.5.7.a Calcul des marges de stabilité en entrée pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.001, \lambda_3 = 0.0001$

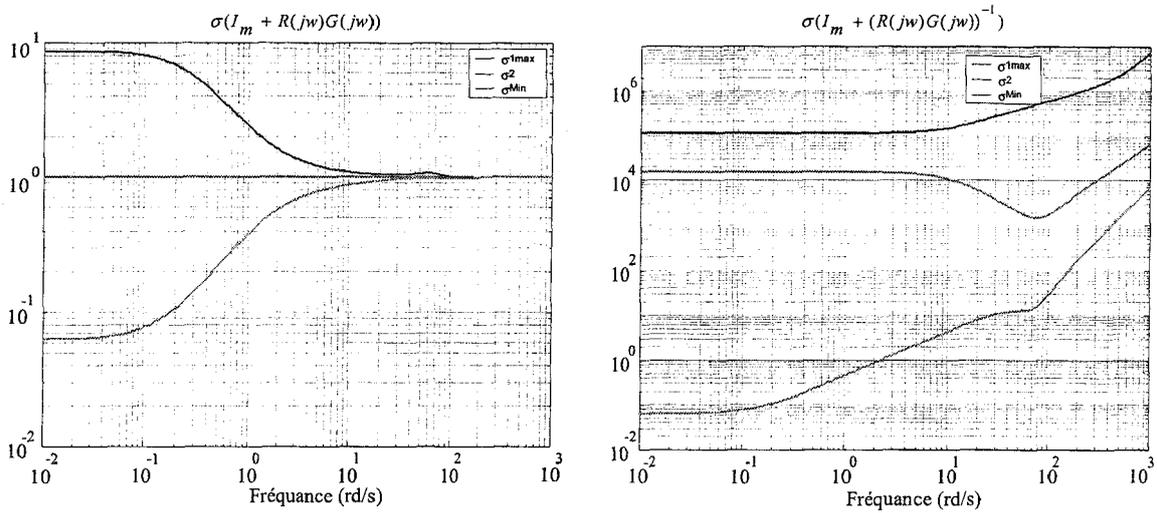


Fig.5.7.b Calcul des marges de stabilité en entrée pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.01, \lambda_3 = 0.001$

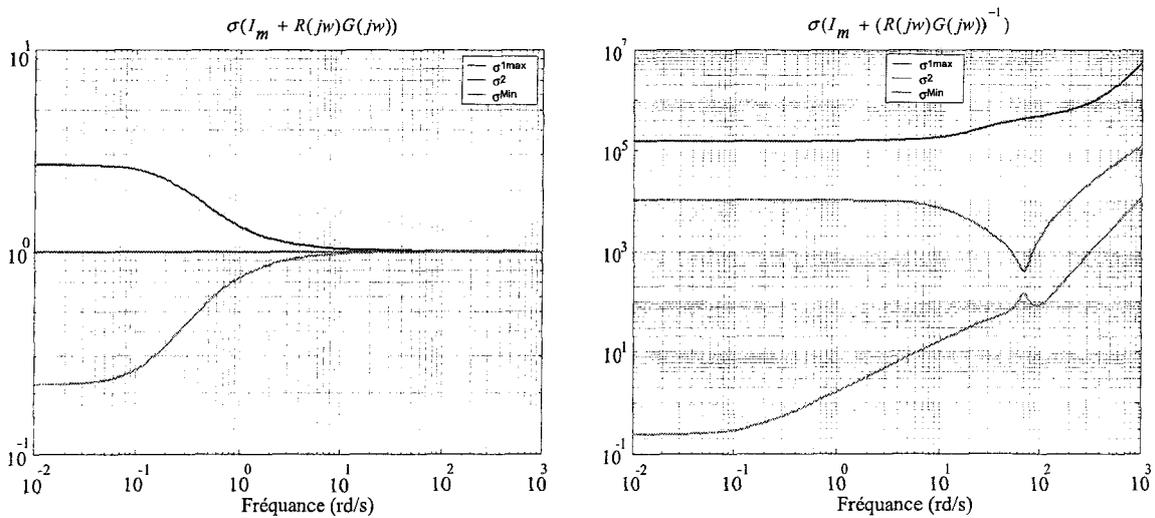


Fig.5.7.c Calcul des marges de stabilité en entrée pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1, \lambda_3 = 0.001$

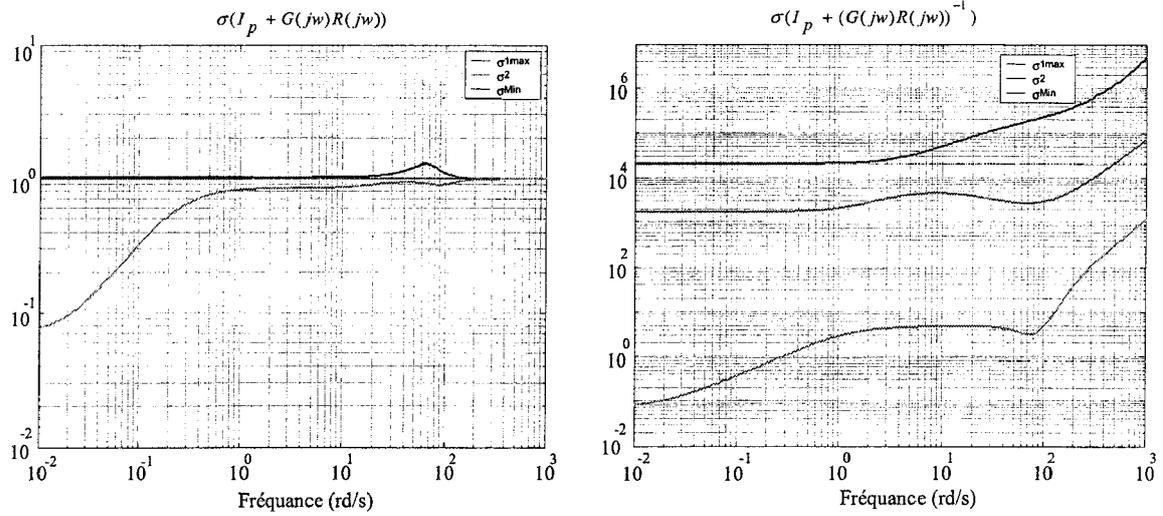


Fig.5.8.a Calcul des marges de stabilité en sortie pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.001, \lambda_3 = 0.0001$

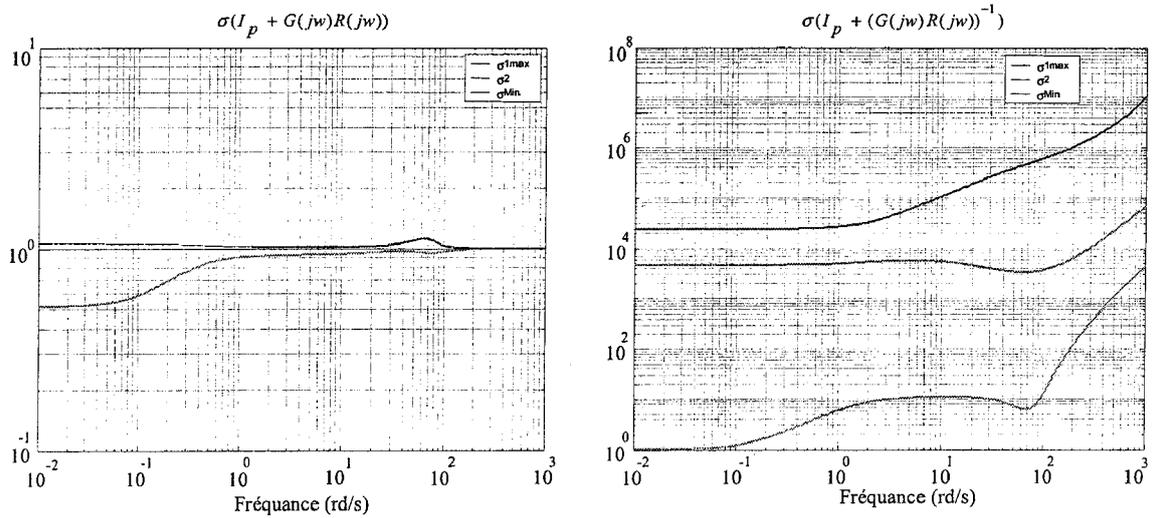


Fig.5.8.b Calcul des marges de stabilité en sortie pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.01, \lambda_3 = 0.001$

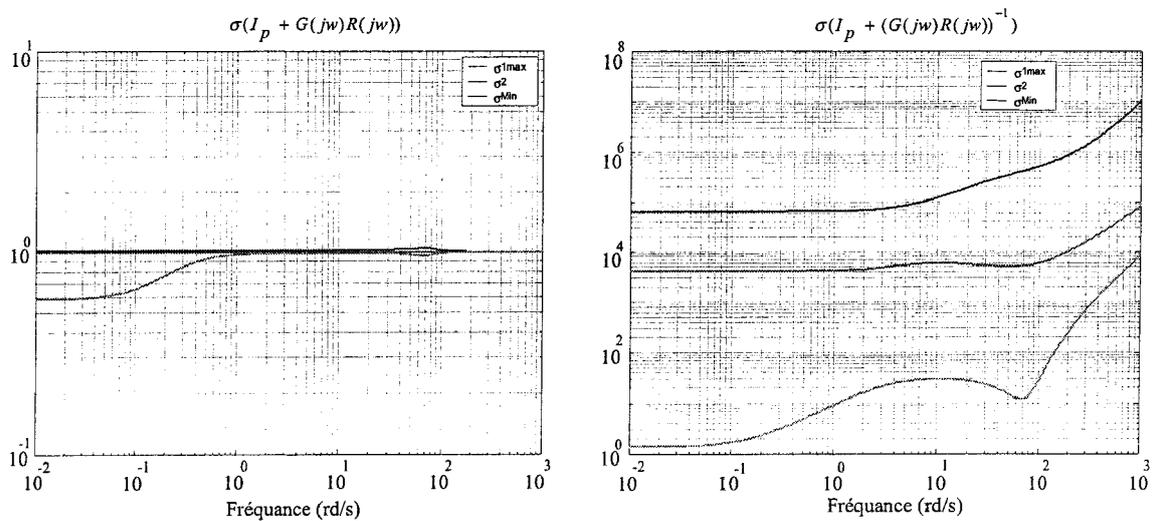


Fig.5.8.c Calcul des marges de stabilité en sortie pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1, \lambda_3 = 0.001$

5.1.4 Amélioration de la robustesse de la commande prédictive

5.1.4.1 En utilisant l'approche LTR (CGPC avec observateur)

La figure 5.9 met en évidence l'effet de recouvrement obtenu progressivement en augmentant la valeur de  $\beta$ . Les courbes sont obtenues avec les paramètres  $N_2 = 6$ ,  $N_u = 1$  et  $Q = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.001)$ . Les deux dernières valeurs peuvent être jugées satisfaisantes.

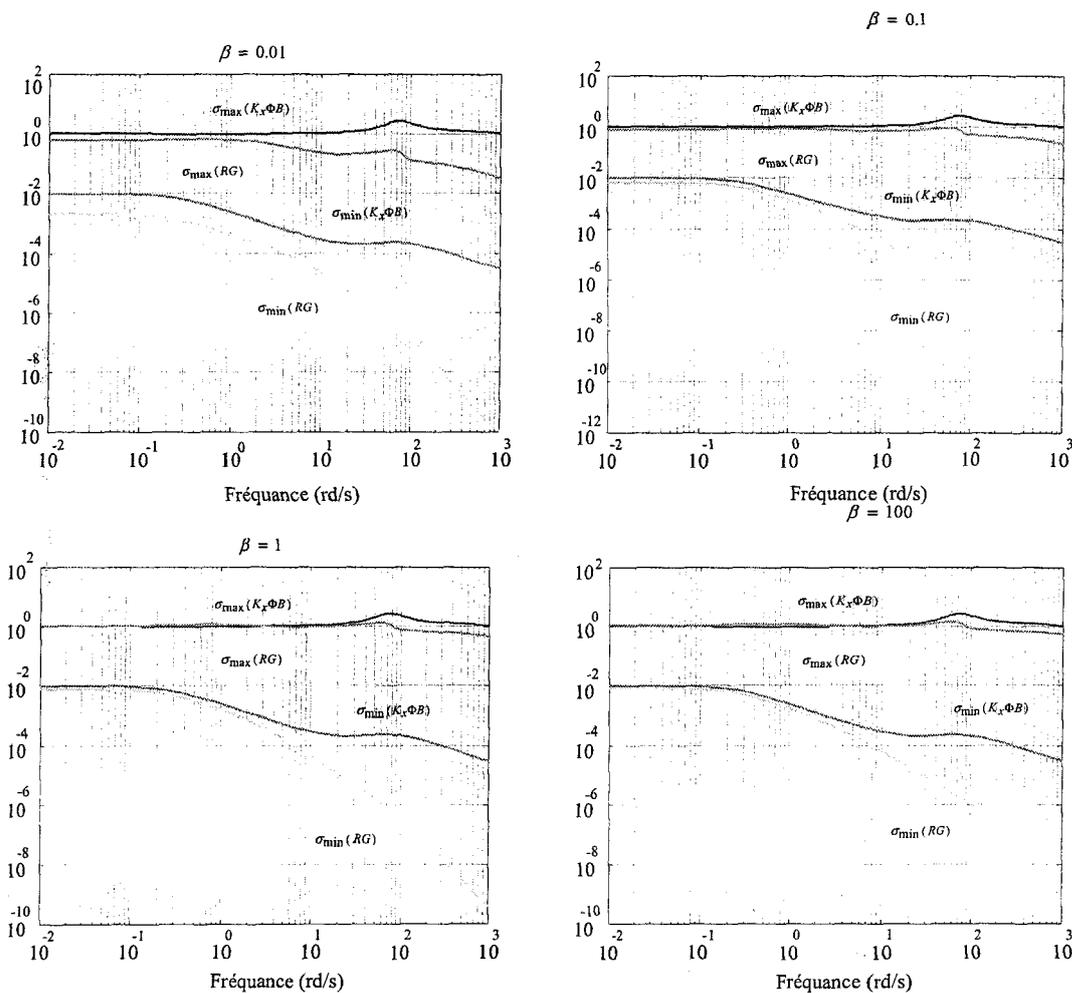


Fig. 5.9 Valeurs singulières de  $K_x \Phi B$  (CGPC sans observateur) et de  $RG$  (CGPC avec observateur).

L'analyse de la robustesse par les valeurs singulières conduit aux courbes de la figure 5.18. On en déduit les marges minimales obtenues, suivant la valeur de  $\beta$  :

$\beta = 0.01$	marge de gain ]0.9443, 1.0575[ et marge de phase ]-3.1921°, 3.1921°[
$\beta = 0.10$	marge de gain ]0.9424, 1.0597[ et marge de phase ]-3.2995°, 3.2995°[
$\beta = 001$	marge de gain ]0.9413, 1.0589[ et marge de phase ]-3.3086°, 3.3086°[
$\beta = 100$	marge de gain ]0.9354, 1.0673[ et marge de phase ]-3.7018°, 3.7018°[

On constate que l'augmentation de  $\beta$  tend à améliorer les marges de stabilité, donc la robustesse en stabilité du système en boucle fermée. En revanche, on obtient des commandes d'amplitudes de plus en plus importantes, ce qui a tendance à déstabiliser le système de commande.

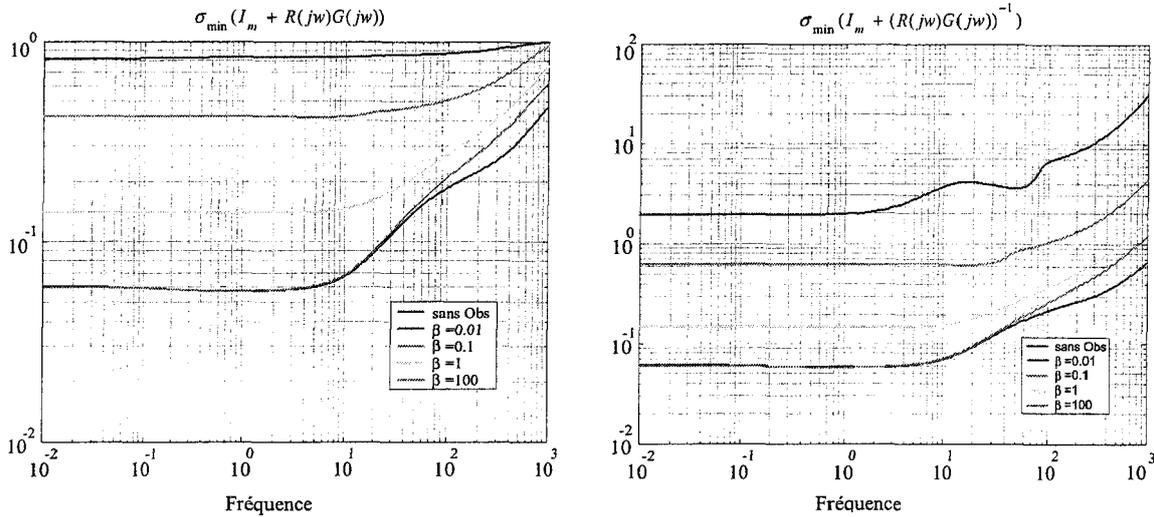


Fig.5.10  $\sigma_{\min}(I_m + R(jw)G(jw))$  et  $\sigma_{\min}(I_m + (R(jw)G(jw))^{-1})$  pour différentes valeurs de  $\beta$ , comparées à  $\sigma_{\min}(I_m + K_x \Phi(jw)B)$  et  $\sigma_{\min}(I_m + (K_x \Phi(jw)B)^{-1})$

#### 5.1.4.2 En utilisant le filtre de robustesse (structure de commande IMC/CGPC)

Comme il a été montré dans le chapitre 3, nous allons illustrer l'apport de robustesse en stabilité, pour des incertitudes de modèles ramenées à l'entrée et en sortie, lors de l'introduction du filtre de robustesse  $F(s) = \frac{1}{1 + \tau s} I_p$

Les courbes de la figure 5.11 montrent respectivement les valeurs singulières de  $\sigma_{\min}(I_m - R(jw)G(jw))^{-1}$  et  $\sigma_{\min}(R(jw)G(jw))^{-1}$  en fonction de la constante  $\tau$  du filtre, pour des incertitudes de modèles ramenées à l'entrée du système. Les courbes sont obtenues avec les paramètres  $N_2 = 6$ ,  $N_u = 1$  et  $Q = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.0001)$ . On en déduit les marges minimales obtenues, suivant la valeur de  $\tau$  :

$\tau = 0.01$	marge de gain ]0.9175, 1.0987[ et marge de phase ]-5.1503°, 5.1503°[
$\tau = 0.05$	marge de gain ]0.7749, 1.4116[ et marge de phase ]-16.7672°, 16.7672°[
$\tau = 0.10$	marge de gain ]0.6610, 2.0552[ et marge de phase ]-29.7486°, 29.7486°[

On constate que l'augmentation de la constante  $\tau$  du filtre  $F(s)$  tend à améliorer les marges de stabilité, donc la robustesse en stabilité du système en boucle fermée.

Les courbes de la figure 5.12 montrent respectivement les valeurs singulières de  $\sigma_{\min}(I_p - G(j\omega)R(j\omega))^{-1}$  et  $\sigma_{\min}(G(j\omega)R(j\omega))^{-1}$  en fonction de la constante  $\tau$  du filtre, pour des incertitudes de modèles ramenées en sortie du système. Les courbes sont obtenues avec les paramètres  $N_z = 6$ ,  $N_u = 1$  et  $Q = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.0001)$ . On en déduit les marges minimales obtenues, suivant la valeur de  $\tau$  :

- $\tau = 0.01$       marge de gain ]0.9174, 1.0989[ et marge de phase ]-5.1601°, 5.1601°[
- $\tau = 0.05$       marge de gain ]0.7737, 1.4134[ et marge de phase ]-16.8193°, 16.8193°[
- $\tau = 0.10$       marge de gain ]0.6602, 2.0610[ et marge de phase ]-29.8317°, 29.8317°[

On constate que l'augmentation de la constante  $\tau$  du filtre  $F(s)$  tend à améliorer les marges de stabilité, donc la robustesse en stabilité du système en boucle fermée.

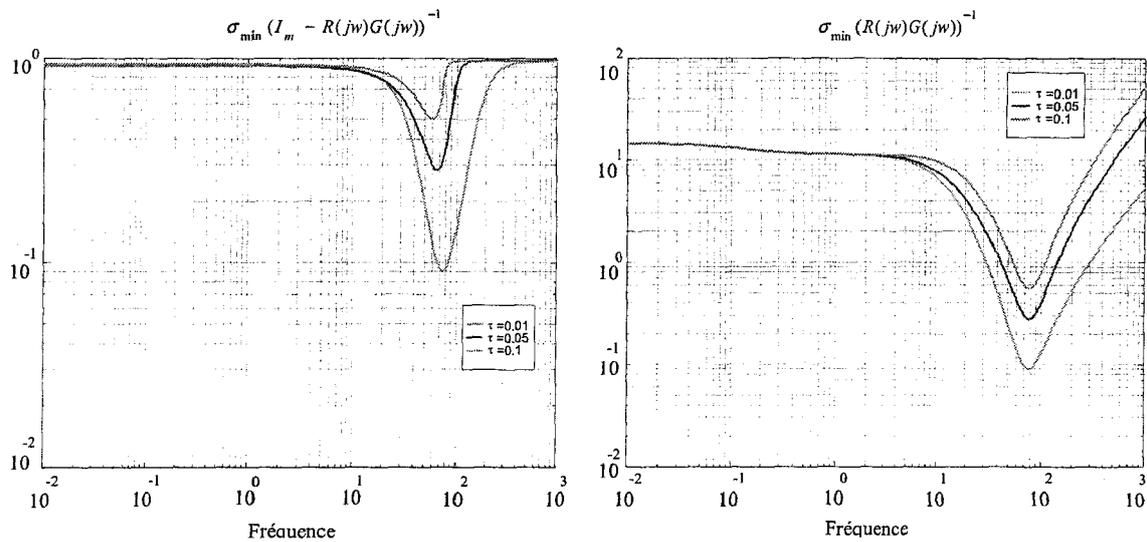


Fig.5.11 Les valeurs singulières à l'entrée en fonction de la constante  $\tau$  du filtre de robustesse

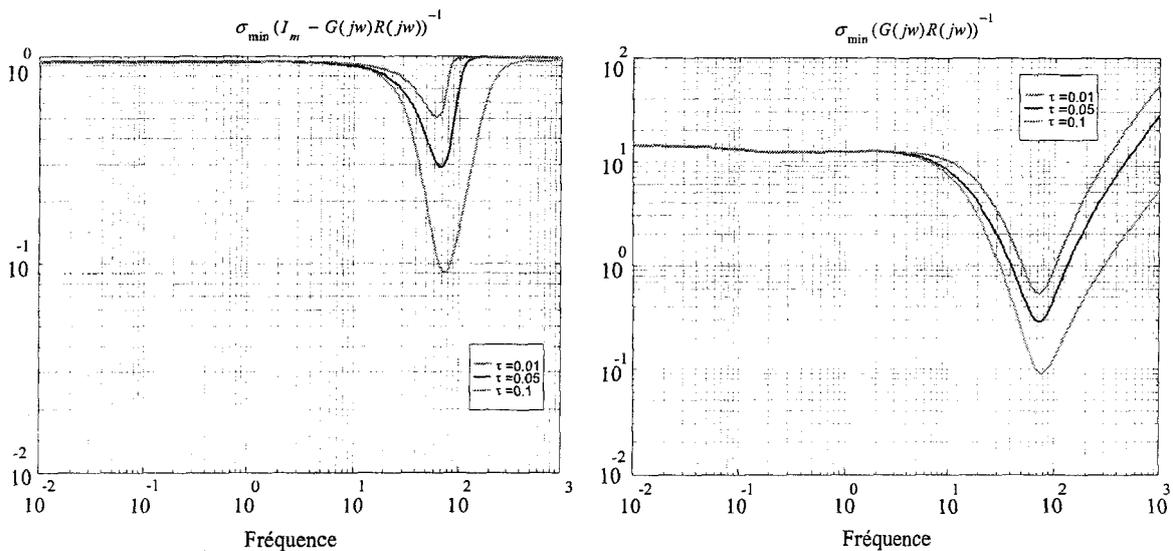


Fig.5.12 Les valeurs singulières en sortie en fonction de la constante  $\tau$  du filtre de robustesse

### 5.1.5 Règles de choix des paramètres de la CGPC et commentaire

Nous avons vu dans les analyses précédentes que pour le système de commande, il n'existe pas une relation explicite entre les paramètres de la loi de commande et la robustesse du système en boucle fermée. Cela nous a permis alors d'établir quelque règle pour la détermination de ces paramètres.

On choisit  $T_2$  et  $N_y$  en tenant compte seulement des caractéristiques du système en boucle ouverte et du temps de réglage pour prédire la sortie future.

On règle ensuite les deux paramètres  $N_u$  et  $Q$  de sorte à satisfaire les conditions de stabilité robuste et les performances du système en boucle fermée.

Deux méthodes concernant l'amélioration de la robustesse du système de commande ont été utilisées : l'approche LTR classique qui permet d'augmenter les marges de stabilité de la commande CGPC utilisant un observateur ou un filtre de Kalman, et l'introduction d'un filtre de robustesse dans le cas de la structure IMC.

### 5.1.6 Résultat de simulation

- Résultat de simulation CGPC

Les simulations ont été effectuées par MATLAB pour étudier les caractéristiques de la commande prédictive généralisée à temps continu (CGPC). Pour trouver le point de fonctionnement, nous indiquons  $\omega_{slo}, u_{dso}, u_{qso}$ , et  $\omega_{ro}$ , puis nous résolvons le système avec le reste de variables  $\omega_{so}, I_{dso}, I_{qso}, \varphi_{dro}$ , et  $\varphi_{qro}$ . Les figures (5.13-18) traduisent les réponses du système (5.4) défini autour du point de fonctionnement  $\omega_{slo} = 0.05rd/s$ ,  $u_{dso} = 210V$ ,  $u_{qso} = 0V$  et  $\omega_{ro} = 150rd/s$ . Les courbes sont obtenues avec les paramètres  $N_2 = 6$ ,  $N_u = 1$ , et  $Q = diag(0.1, 0.1, 0.0001)$ .

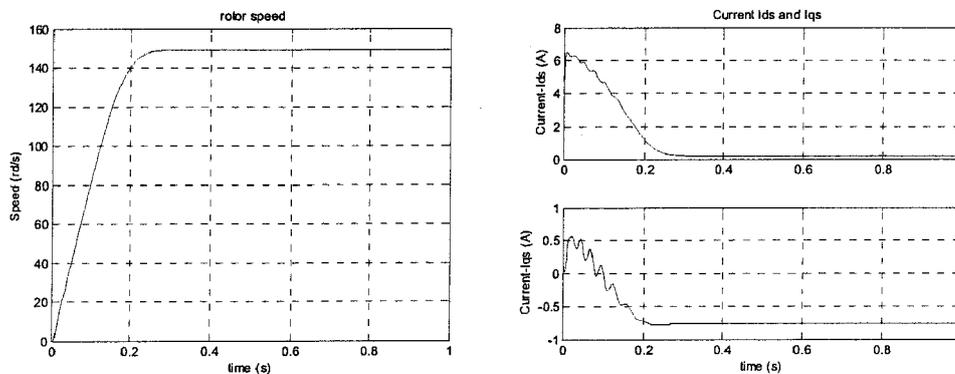


Fig.5.13 Trajectoire de vitesse et les courants  $I_{ds}$ ,  $I_{qs}$  pour CGPC

Les performances dynamiques du système ont été vérifiées par simulation, en supposant que les paramètres du système ont dévié de leurs valeurs nominales. Pour une augmentation de 10% de  $R_r$ ,  $L_r$ ,  $L_s$  et  $L_m$  et de 100% de  $R_s$ , le système linéaire en boucle fermée est stable comme il est montré sur la figure 5.14.

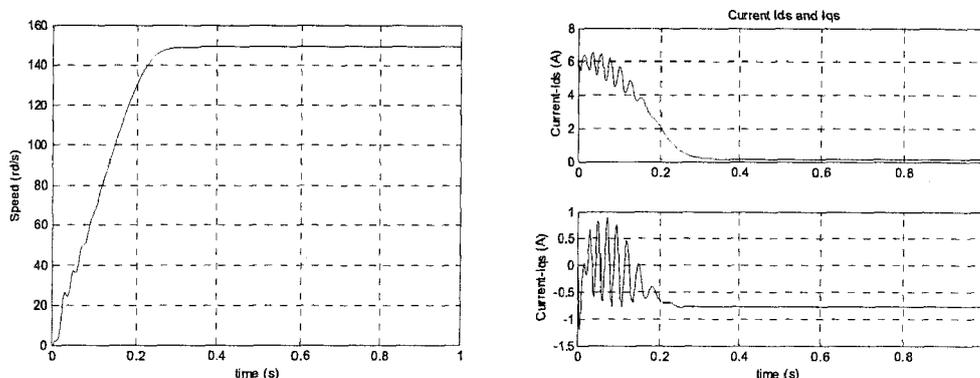


Fig.5.14 Réponse du système avec 100% d'erreur sur  $R_s$ , et 10% d'erreur sur  $R_r$ ,  $L_r$ ,  $L_s$  et  $L_m$

• **Résultat de simulation CGPC/IMC**

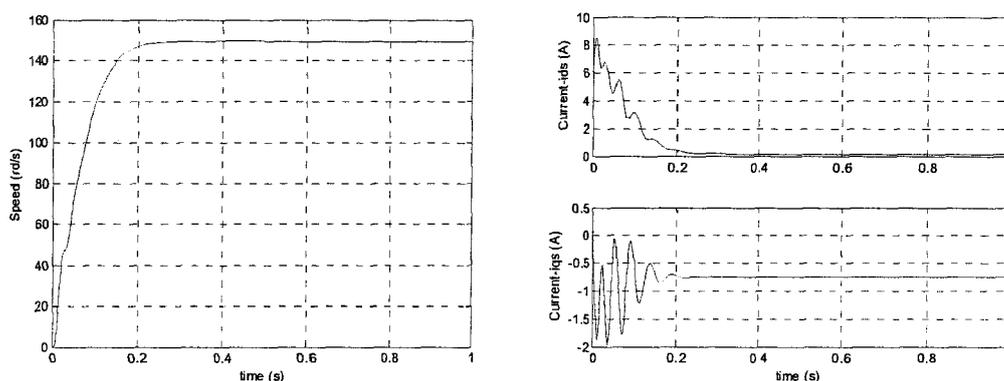


Fig.5.15 Trajectoire de vitesse et les courants  $I_{ds}$ ,  $I_{qs}$  pour CGPC/IMC

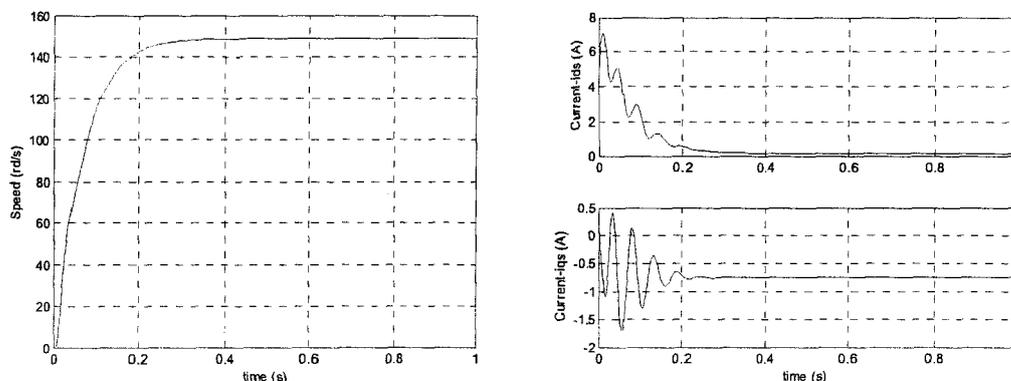


Fig.5.16 Réponse du système avec 100% d'erreur sur  $R_s$ , et 20% d'erreur sur  $R_r$ ,  $L_r$ ,  $L_s$  et  $L_m$

- **Résultat de simulation CGPC/LMN**

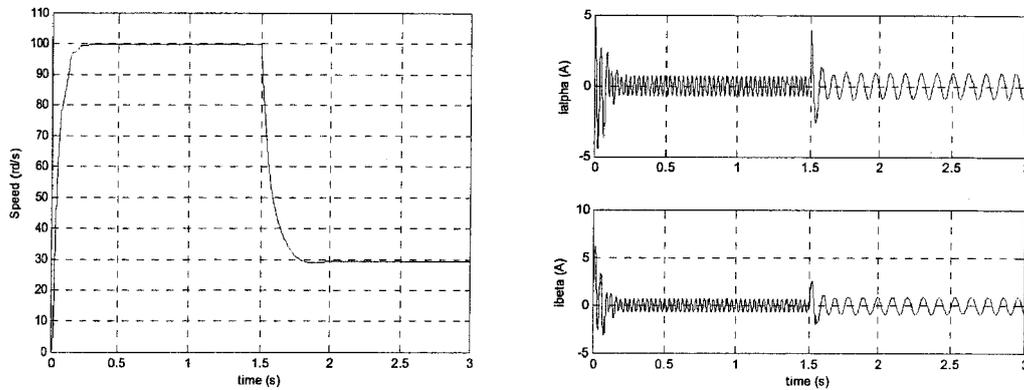


Fig.5.17 Trajectoire de vitesse et les courants  $I_\alpha$ ,  $I_\beta$  pour CGPC/LCN

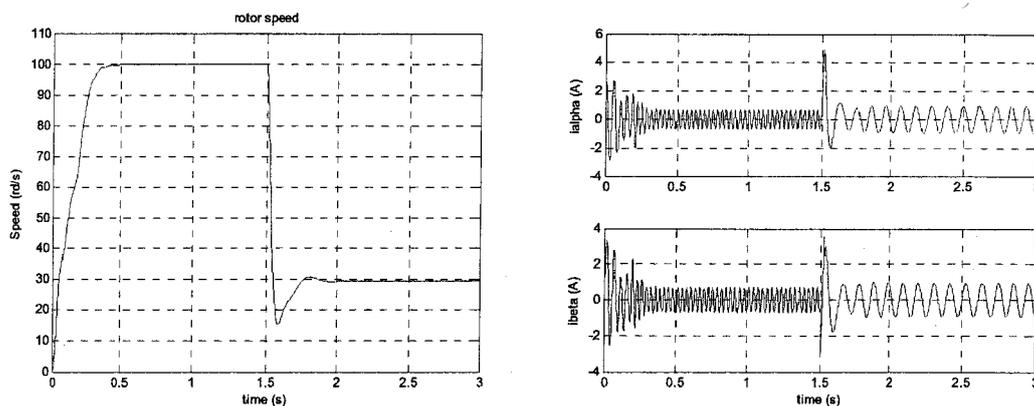


Fig.5.18 Réponse du système avec 100% d'erreur sur  $R_s$ , et 20% d'erreur  
Sur  $R_r$ ,  $L_r$ ,  $L_s$  et  $L_m$

## 5.2 Validation expérimentale

Dans cette partie nous présentons l'implantation des lois de commande développées dans les chapitres précédents, sur un système hydraulique de trois colonnes avec deux entrées et trois sorties. A cet effet, la réponse du système commandé sans et avec perturbation suivant la conception de contrôleur est analysé.

### 5.2.1 Description du banc d'essai expérimental

L'installation expérimentale, sur laquelle toutes les expériences ont été effectuées est représentée sur la figure (5.19).

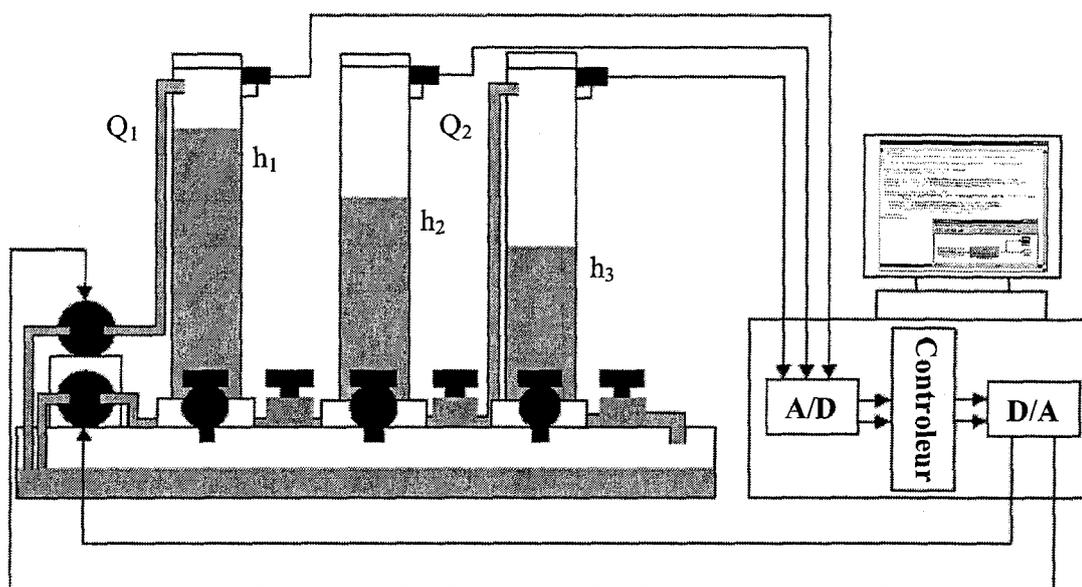


Fig.5.19 Structure du banc de test

Le système hydraulique se compose de trois cylindres de plexiglas,  $h_1$ ,  $h_2$ , et  $h_3$ , de hauteur maximale  $h_{\max}$ , de section  $A$ . Ceux-ci sont reliés en série les uns avec les autres par des pipes conduits cylindriques de section  $S_n$ , nommées vannes de transfert. Les trois cylindres peuvent être vidangés dans un réservoir par des vannes de fuites. Ces vannes de fuites et de transfert notées  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  ont des sections efficaces identiques  $S_n$ . Ces trois soupapes rotatives peuvent être utilisées pour changer la section du canal et par conséquent changer les caractéristiques d'écoulement entre les colonnes. Ces derniers ont des coefficients de conduite  $\lambda_i$ , avec  $i=1,2$ , et  $3$ . On trouve aussi sur chaque colonne une conduite supplémentaire qui peut être utilisée comme perturbation par l'intermédiaire d'une valve  $L_i$ ,  $i=1,2$ , et  $3$  ajustable manuellement.

Le système hydraulique est actionné par deux pompes entraînées par deux moteurs électriques de débit maximal  $q_{\max}$ . Le débit maximum de la pompe  $117\text{ml/s}$  est atteint quand une tension de  $10\text{ volts}$  est appliquée à la pompe et le débit est nul à  $0\text{ volt}$ . Les mesures de niveau nécessaires sont effectuées par des sondes de pression piezo-résistive. Notre système est commandé par un PC équipé d'une carte d'acquisition de données DS1102 dSpace.

### La carte dSpace™

Le système dSpace™ est conçu pour développer des systèmes de commande numérique en temps réel. Grâce à son DSP (Digital Signal Processor) TMS320C31 rapide (temps de cycle de  $50\text{ns}$ ), et ses possibilités d'entrées/sorties analogiques et logiques, il permet, en temps réel, de faire l'acquisition des différentes mesures, d'élaborer la commande et de transmettre les signaux de commande au convertisseur.

L'ensemble du système dSpace™, DS 1102, est implanté sur une carte unique s'insérant sur un connecteur d'extension de type ISA du micro-ordinateur.

La carte dSpace™ DS 1102 est constituée par :

- un processeur de signal à virgule flottante TMS320C31
- un co-processeur TMS320Pi4 (DSP à virgule fixe)
- deux convertisseurs A/D 12 bits (3µs), ±10V
- deux convertisseurs A/D 16 bits (10µs), ±10V
- quatre convertisseurs D/A 12 bits (4µs), ±10V
- deux interfaces de codeur incrémental avec des entrées différentielles
- divers ports E/S numériques

Pour envoyer les signaux et réajuster les paramètres en ligne, nous utilisons les programmes TRACE et COCKPIT. Les algorithmes de commande ont été programmés en langage C. La période d'échantillonnage est de 1ms.

### 5.2.2 Modélisation du système trois colonnes

Le système de trois colonnes peut être modélisé par trois équations non linéaires couplées :

$$\begin{aligned}
 A \frac{dh_1}{dt} &= Q_1(t) - \lambda_1 SGN(h_1(t) - h_3(t)) \sqrt{abs(h_1(t) - h_3(t))} + w_1(t) \\
 A \frac{dh_3}{dt} &= \lambda_1 SGN(h_1(t) - h_3(t)) \sqrt{abs(h_1(t) - h_3(t))} - \lambda_2 SGN(h_3(t) - h_2(t)) \sqrt{abs(h_3(t) - h_2(t))} \\
 A \frac{dh_2}{dt} &= Q_2(t) + \lambda_2 SGN(h_3(t) - h_2(t)) \sqrt{abs(h_3(t) - h_2(t))} - \lambda_3 \sqrt{h_2(t)}
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

où A est la section de chaque colonne  $w_1(t)$  et  $w_2(t)$  représentent les perturbations,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont les coefficients de conduite de valves v1, v2 et v3 respectivement donnés par :

$$\lambda_i = L_i S_n \sqrt{2g}$$

La perturbation  $w_2(t)$  peut être estimée à l'aide de la colonne 2. Son expression est donnée par :

$$w_2(t) = \lambda_2 SGN(h_3(t) - h_2(t)) \sqrt{abs(h_3(t) - h_2(t))}$$

Supposons que  $(0.006/A) \leq \lambda_2 \leq (0.0073/A)$

Dans l'objectif de réguler le niveau d'eau de la troisième colonne  $y(t) = h_3$ , au voisinage d'un point d'équilibre  $(x_0, u_0)$ , le développement limité en série de Taylor, à l'ordre un, du système non linéaire (5.10) conduit au modèle linéarisé suivant :

$$\begin{aligned}\Delta \dot{h}(t) &= A\Delta h(t) + B\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C\Delta h(t)\end{aligned}\quad (5.11)$$

Pour lequel nous définissons les vecteurs des petites variations :

$$\Delta h = h - h_0, \quad \Delta u = u - u_0, \quad \text{et} \quad \Delta y = y - y_0$$

Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  du modèle (5.11) sont définies par :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - h_{10} \\ h_3 - h_{30} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/A \\ 0 \end{bmatrix} Q_1(t) \quad (5.12)$$

Les paramètres  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  dépendent de points de fonctionnement

Le modèle linéarisé tangent (5.11) n'est autre qu'une approximation plus ou moins juste du fonctionnement du système réel autour de son point d'équilibre. Il est donc nécessaire de tenir compte de ces erreurs de modélisation dans toute loi de commande. De plus, on doit disposer d'une technique de synthèse robuste qui permet de déterminer un correcteur réalisant de bonnes performances pour toute la classe de modèle d'incertitudes, définie au chapitre 3. Une exigence minimale est la stabilité du système en boucle fermée.

### 5.2.3 Résultat expérimental : Cas linéaire

Nous avons expérimenté les deux premières lois de commande CGPC et CGPC/IMC sur le système de trois colonnes. Le but est de maintenir le niveau de la colonne 3 à 150cm, puis 200cm. Pour tester la robustesse de l'algorithme de commande vis-à-vis des incertitudes extérieures, en introduisant des perturbations par l'ouverture de la vanne  $v_1$ , ou bien par l'intermédiaire de la deuxième colonne  $h_2$ . Les résultats de tests sont pour les paramètres  $N_2 = 6$ ,  $N_u = 1$ ,  $T_2 = 3.25s$  et  $Q = 40$ . Les figures (5.20-25) traduisent les réponses du système (5.11) défini autour du point de fonctionnement  $h_3 = 150ml$ ,  $h_3 = 200ml$  et  $h_3 = 300ml$ . D'après les figures (5.20-25) on voit que la sortie suit sa référence malgré la présence de perturbation, en plus, pas de dégradation de la commande quand la sortie s'approche à sa référence.

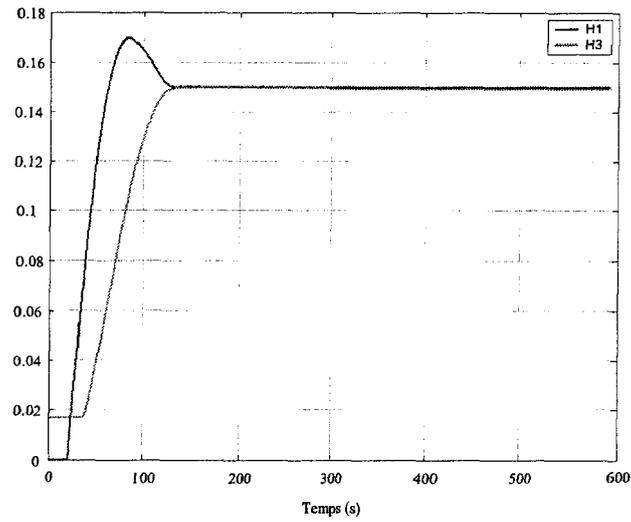


Fig.5.20 Réponse du système pour l'algorithme CGPC sans perturbation,  $h_{30}=150\text{m}$

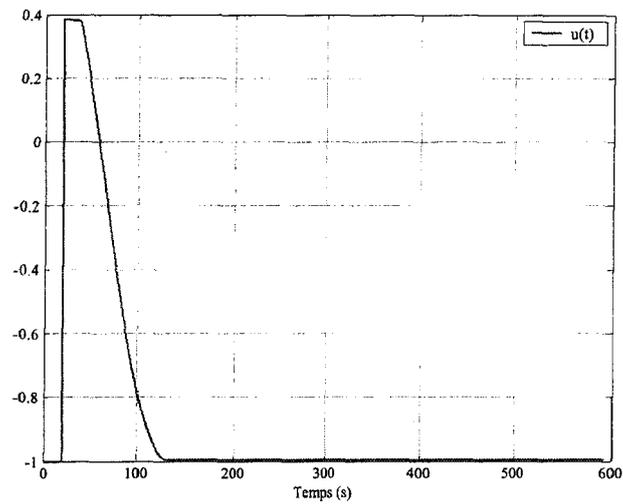


Fig.5.21 Commande du système pour l'algorithme CGPC sans perturbation  $h_{30}=150\text{m}$

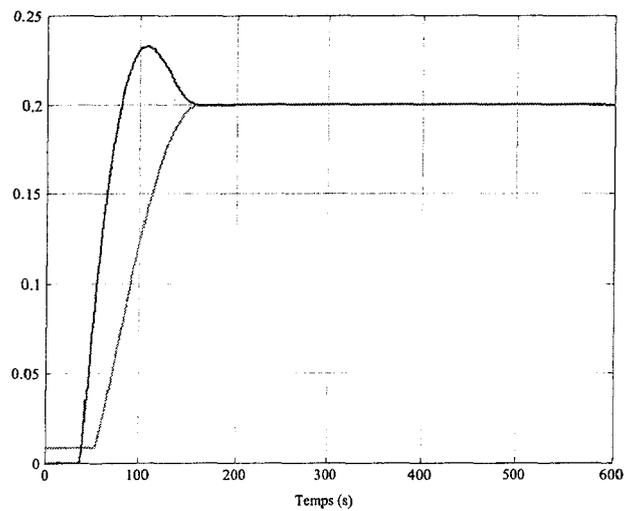


Fig.5.22 Réponse du système pour l'algorithme CGPC sans perturbation,  $h_{30}=200\text{m}$

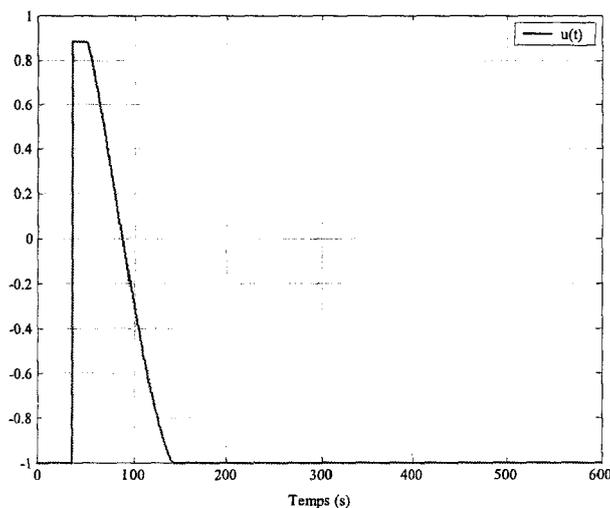


Fig.5.23 Commande du système pour l'algorithme CGPC sans perturbation  $h_{30}=200m$

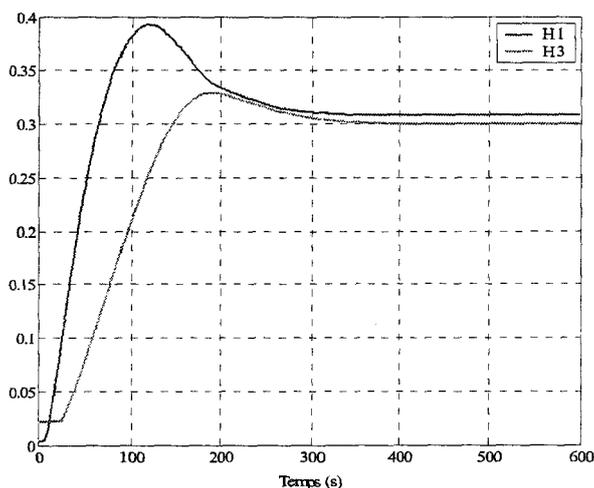


Fig.5.24 Réponse du système pour l'algorithme CGPC avec perturbation

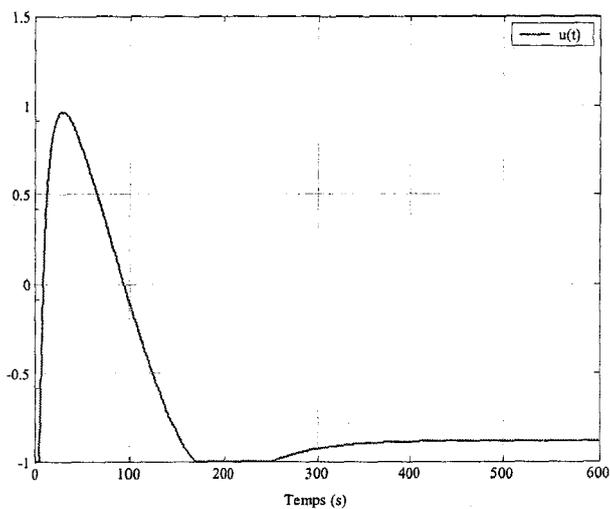


Fig.5.25 La commande du système pour l'algorithme CGPC avec perturbation

### 5.2.4 Résultat expérimental : Cas non linéaire

Dans le cas non linéaire, l'algorithme CGPC/LMN est vérifié sur le même système des trois colonnes. Les résultats sont pour les paramètres  $N_2 = 6$ ,  $N_u = 1$ ,  $T_2 = 3.25s$  et  $Q = 40$ . Les figures (5.26-27) traduisent les réponses du système (5.11) défini autour du point de fonctionnement  $h_3 = 150ml$ , puis  $h_3 = 250ml$ . D'après les figures (5.26-27) on voit que la sortie suit sa référence malgré la présence de perturbations, en plus, pas de dégradation de la commande quand la sortie s'approche à sa référence.

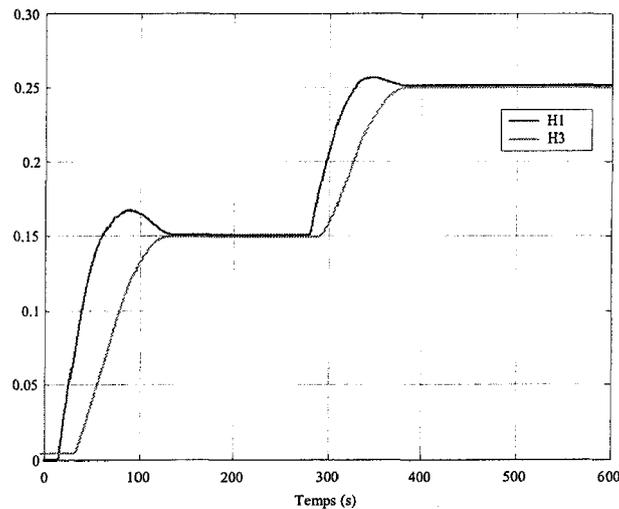


Fig.5.26 Réponse du système pour l'algorithme CGPC/LMN sans perturbation,  $h_3=150m$  puis  $250m$

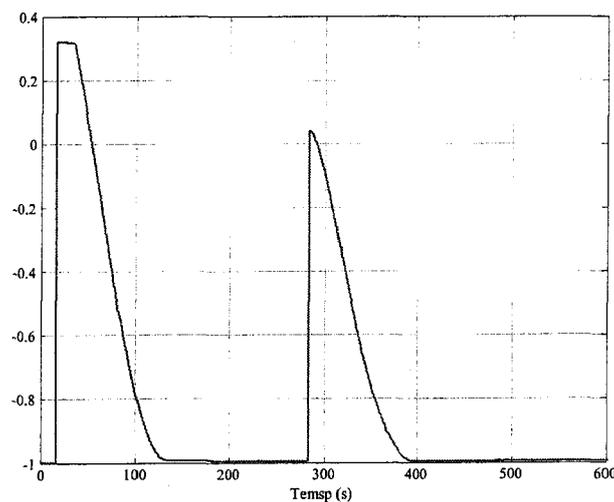


Fig.5.27 Commande du système pour l'algorithme CGPC/LMN sans perturbation  $h_3=150m$  puis  $250m$

### 5.2.5 Résultat expérimental : CMG avec CGPC

Dans le cas de la commande prédictive avec le mode glissant, l'algorithme de commande est vérifié par tests sur le même système des trois colonnes. Les résultats sont pour les paramètres  $N_2 = 6$ ,  $N_u = 1$ ,  $T_2 = 3.25s$  et  $Q = 40$ . De zéro au mois 3% de la valeur final de la référence, la commande CMG est appliquée, des que l'erreur  $y - y_{ref} \leq 3\%$  de la valeur finale, la CGPC est activée (partie linéaire). Les figures (5.28-30) présentent les niveaux  $h_1$ ,  $h_2$ , et la commande  $u$ . Les résultats obtenues montrent l'utilité de la commande CGPC/CMG pour atteindre le cible de point de consigne, en plus l'effet de broutements sur la commande est atténué dès que la CGPC est appliquée.

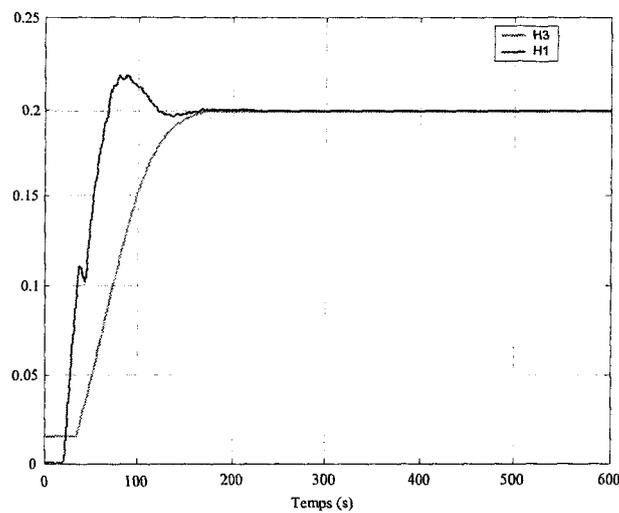


Fig.5.28 Réponse du système pour l'algorithme CGPC/CMG sans perturbation, h30=200m

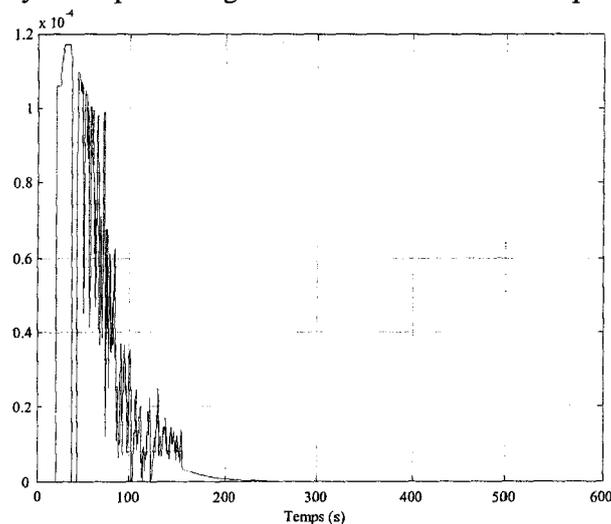


Fig.5.29 Commande du système pour l'algorithme CGPC/CMG sans perturbation h30=150m

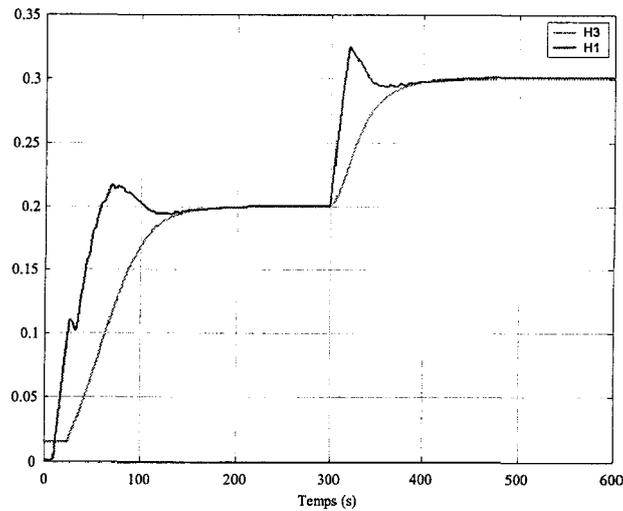


Fig.5.30 Réponse du système pour l'algorithme CGPC/CMG sans perturbation,  $h_{30}=200m$  puis  $300m$

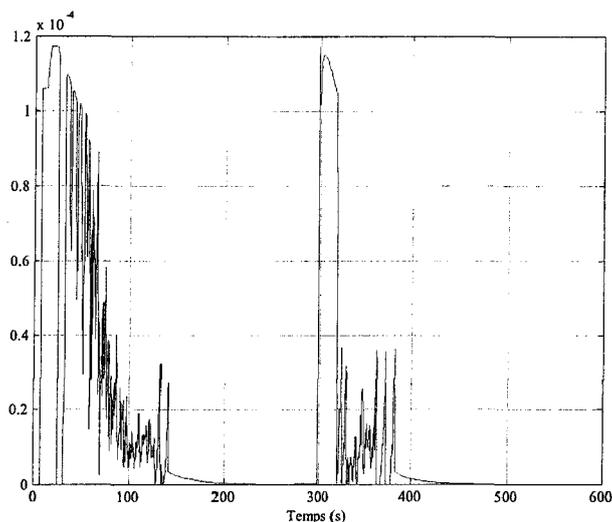


Fig.5.31 Commande du système pour l'algorithme CGPC/CMG sans perturbation  $h_{30}=200m$  puis  $300m$

Figures 5.32-37 montrent les réponses et les commandes du système avec perturbations. Dans un premier temps, la vanne  $v1$  est ouverte à 10%. On voit bien que la sortie du système coïncide avec la référence. A l'instant  $t = 350s$ , le soupape rotatif  $v1$  est ouverte 100% pendant 5s. Le régulateur CGPC/CMG est très vite agit, est le système stabilise après 90s, Fig 5.32.

Dans un autre cas, la vanne  $v1$  est toujours ouverte à 10%, à  $t = 260s$  le soupape rotatif (L32) est ouverte à 50%, le régulateur CGPC/CMC essaye de réguler la sortie du système à sa référence,  $h_3 = 198ml$ , 1% d'erreur.

Dans les deux cas du régulateur CGPC/CMG avec perturbations, on constate que le système est stable et robuste aux incertitudes extérieures.

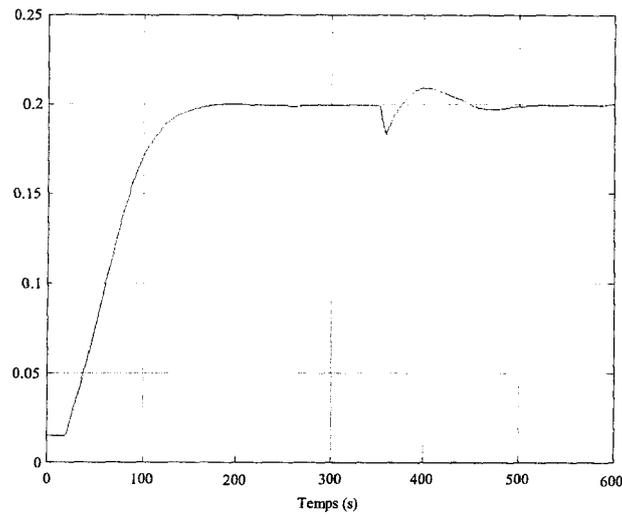


Fig.5.32 Réponse du système  $h_3$  pour l'algorithme CGPC/CMG avec perturbation

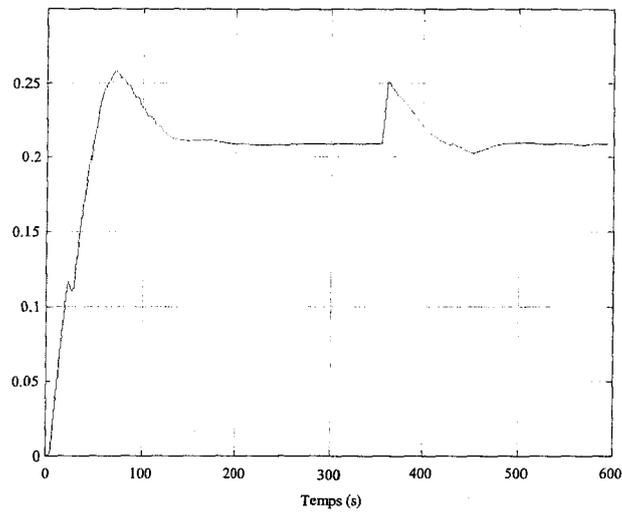


Fig.5.33 Réponse du système  $h_1$  pour l'algorithme CGPC/CMG avec perturbation

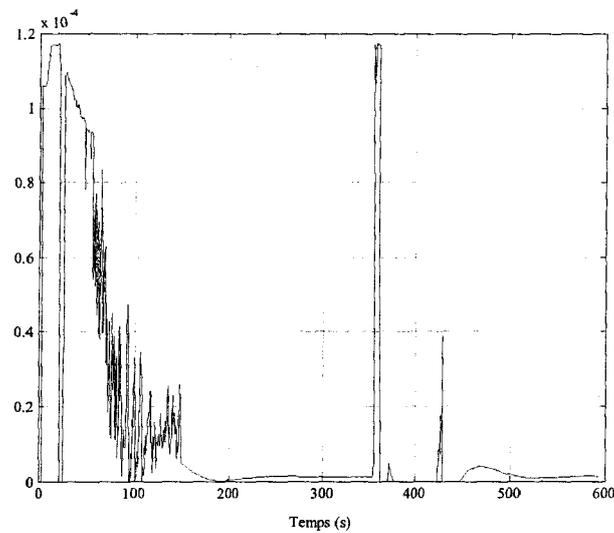


Fig.5.34 La commande du système pour l'algorithme CGPC/CMC avec perturbation

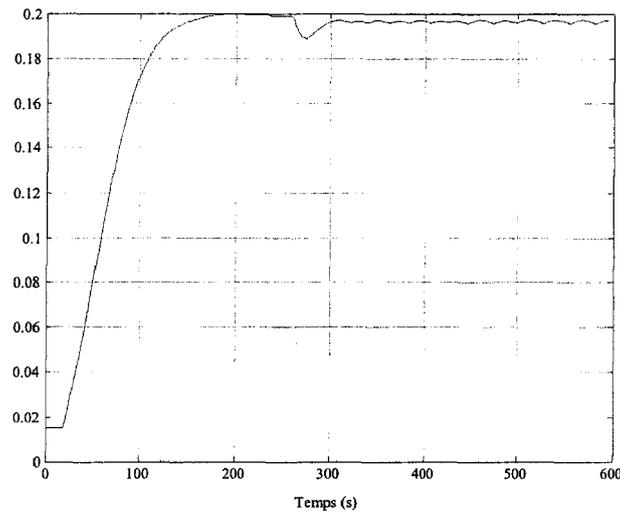


Fig.5.35 Réponse du système  $h_3$  pour l'algorithme CGPC/CMG avec perturbation

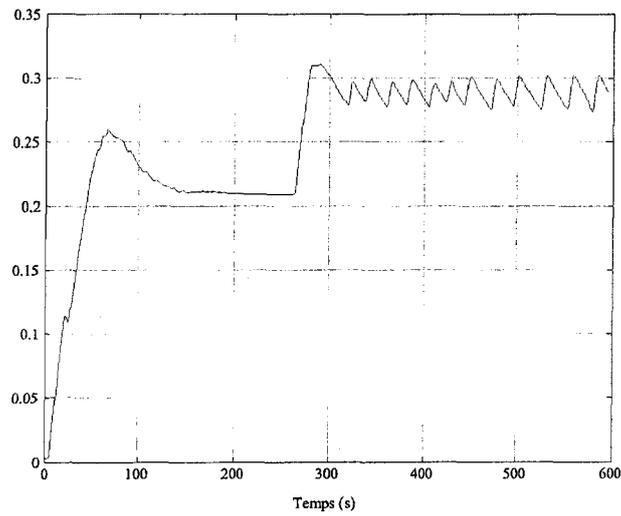


Fig.5.36 Réponse du système  $h_1$  pour l'algorithme CGPC/CMG avec perturbation

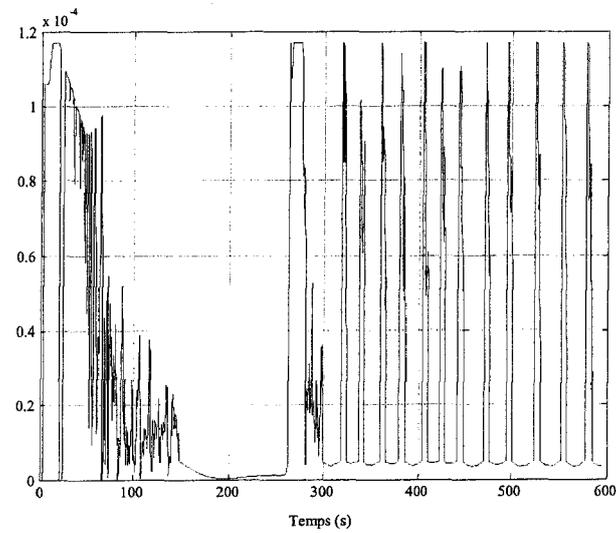


Fig.5.37 La commande du système pour l'algorithme CGPC/CMC avec perturbation

### 5.3 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la simulation et à l'application de la commande prédictive généralisée à temps continu pour la régulation de la vitesse d'une machine asynchrone, et pour une régulation de niveau d'eau pour un système hydraulique de trois colonnes.

Il a été montré que les résultats issus des deux structures de commande à savoir, la structure CGPC utilisant un filtre de Kalman et la structure CGPC/IMC, en terme de robustesse et de performance, sont à peu près semblables.

Cette approche a montrée sa capacité à piloter beaucoup de différents systèmes linéaires ou linéarisés, mais elle reste relativement restreinte dans le cas des systèmes non linéaires. C'est pourquoi, l'approche LMN offre une autre alternative pour la commande des systèmes non linéaires, dans le cas où elle consiste en la combinaison d'un nombre de régulateurs, dont chacun est validé localement dans le domaine de fonctionnement du système.

La mise en œuvre pratique de la commande par LCN basée sur des régulateurs CGPC nous a permis d'obtenir des résultats satisfaisants en ce qui concerne la poursuite de trajectoire.

A la fin de ce chapitre, nous avons présenté une loi de commande non linéaire par l'utilisation de la CMG avec la commande prédictive. Nous avons pu montrer l'efficacité de cette stratégie et sa robustesse en présence d'incertitudes paramétriques et de perturbations extérieures. Cette méthode présente une régulation rapide pour les systèmes lents, en plus élimine le problème de broutement rencontré dans la commande par mode glissant.

## Conclusion Générale et Perspectives

Le travail présenté dans cette thèse apporte une contribution à l'analyse et à la synthèse de lois de commande robuste basées sur la minimisation d'un critère quadratique à horizon fini et fuyant à temps continu. Une lecture assez exhaustive de la littérature dans ce domaine, nous a orienté à proposer une méthodologie pour obtenir un régulateur robuste en stabilité avec conservation des performances pour deux algorithmes de commande prédictive. Cette dernière est basée sur une représentation d'état, pour une commande avec observateur (CGPC) dans un premier cas, et pour une commande par modèle interne (IMC/CGPC) dans un second cas.

Néanmoins, malgré les résultats et progrès encourageants enregistrés dans ce domaine, la méthode CGPC proposée jusqu'ici ne traduit pas une facilité d'implantation, du moins en multi-variables, et le réglage des paramètres qui interviennent au sein de cet algorithme n'est pas aussi simple. De plus, la synthèse de la commande CGPC, effectuée sous sa version algorithmique originale, ne permet pas de façon explicite une analyse de la stabilité. C'est pourquoi, nous avons développé une version basée sur une représentation d'état, dont le principal intérêt est de permettre une facilité de mise en œuvre et une généralisation éventuelle au cas des systèmes multi-variables.

D'autre part, nous avons proposée un autre schéma de commande prédictive, qui consiste à combiner de la structure IMC et la minimisation d'un critère quadratique de la CGPC. La méthode en question permet, d'une part, d'incorporer une capacité de poursuite explicite dans la commande CGPC et, d'autre part, de tirer profit de la robustesse qu'offre la structure IMC.

La synthèse de la commande prédictive, donnée sous forme d'état, nous a permis d'étudier la robustesse en stabilité des algorithmes CGPC et IMC/CGPC. Dès lors quelques règles concernant le choix des paramètres de réglage ont été établies. Ensuite, nous nous sommes intéressé à examiner le moyen d'accroître la stabilité robuste de ces algorithmes. Dans le cas d'un retour d'état avec observateur, les paramètres de synthèse du filtre de Kalman ont été déterminés de manière à réaliser la propriété LTR. Dans le cas de la structure de commande IMC, un filtre dit de robustesse a été introduit.

En vue d'étendre la commande prédictive pour les systèmes non linéaires, nous avons alors proposé une version à temps continu de l'approche « Local Model Networks » de Johansen et Foss, basée sur une représentation d'état. Ainsi, nous avons développé une structure de commande non linéaire basée sur une combinaison pondérée d'un ensemble de régulateurs CGPC. Puis, nous avons réalisé une analyse de la stabilité du système de commande, ce qui a nous a conduits à énoncer une extension du théorème proposé par Tanaka et al. (1996) aux systèmes de commande par LCN avec observateurs.

Une autre approche a été développée pendant cette thèse, c'est la combinaison entre la commande prédictive et le mode glissant CGPC/CMG. Cette méthode a montré ses efficacités et ses performances en termes d'erreur statique quasiment nulle, et sa rapidité de régulation aux perturbations extérieures. Cette approche s'applique très bien aux régulations des systèmes lents, par exemple un processus chimique.

Une simulation des algorithmes de commande prédictive proposés dans ce travail a été réalisée sur un modèle de machine asynchrone. Ainsi une validation expérimentale a été effectuée sur un système hydraulique « trois colonnes ».

Au terme de ce travail, nous nous permettons de proposer des thèmes de poursuites de ces études en vue d'applications futures :

- Applications des algorithmes présentés sur d'autres systèmes de commande.
- Validation expérimentale sur un bon d'essai d'une machine asynchrone.
- Mise au point d'un programme d'aide au choix des paramètres de CGPC pour des opérateurs non automaticiens et éventuellement la construction d'un système expert.
- Développement de la stratégie CGPC/CMG afin de résoudre le problème lié à la commande par mode glissant.

## Bibliographie

- Astrom, K. J. and Wittenmark, B. (1973). On self-tuning regulators. *Automatica*, vol. 9, n° 2, pp. 185-199.
- Aström, K. J. and Wittenmark, B. (1980). Self-tuning, controllers based on pole-zero placement. *Proc. IEE*, vol. 127, pp. 120-130.
- Abu el Ata-Doss, S., Fiani, P. and Richalet, J. (1990). Handling input and state constraints in predictive functional control. *IEEE 30th CDC*, Brighton, U.K.
- Alamir, M. (1995). Contributions à l'étude de la commande optimale à horizon fuyant des systèmes non linéaires. Thèse de Doctorat, INPG, Novembre.
- Anderson, B. D. O. and Moore, J. B. (1990). *Optimal control : Linear quadratic methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Arjin, N., Tian, C. S., Viriya, K., Thanit, T. and Kittit, T. I-P Controller design for quadruple tank system. *IEEE 2004*.
- Bars, R. and Haber, R. (1993). One-step ahead predictive control algorithms for nonlinear nonparametric models. *ECC*, pp. 941-945.
- Benveniste, A., Juditsky, A., Delyon, B., Zhang, Q. and Glorennec, P. Y (1994). Wavelets in identification. In *Preprints 10th IFAC Sym. Identification*, Copenhagen, vol. 2, pp. 27-48.
- Billings, S. A. and Voon, W. S. G. (1987). Piecewise linear identification of nonlinear systems. *International Journal of Control*, vol. 46, pp. 215-235.
- Bitmead, R. R., Gevers, M. and Wertz, V. (1990). *Adaptive optimal control*. Prentice Hall.
- Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J. P., Rotelle, F. and Zambettakis, I. (1990). *Commande et optimisation des processus*. Editions Technip, Paris.
- Bose, B. K. (1986). *Power electronics and AC drives*. Prentice Hall.
- Boucher, P. and Dumur, D. (1996). *La commande prédictive*. Editions Technip, Paris.
- Boucher, P., Dumur, D. and Neumann, R. (1993). Control axis using delta-operator generalized predictive control. In *ECC'93*, vol. 2, Groningen, Netherlands, pp. 937-940.
- Boyd, S., Balakrishnan, V., Feron, E. and El Ghaoui, L. (1993). Control system analysis and synthesis via linear matrix inequalities. In *Proc. ACC*, pp. 2147-2154.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, Philadelphia.

- Bregel, D. D. and Seider, W. D. (1989). Multistep nonlinear predictive controller. *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, vol. 28, pp. 241-250.
- Broomhead, D. S. and Lowe, D. (1988). Multivariable functional interpolation and adaptive networks. *Complex Systems*, vol. 2, pp. 321-355.
- Bruijn, P. N4. and Verbruggen, H. B. (1984). Model algorithmic control using impulse response models. *Journal A.*, vol. 25, pp. 69-74.
- Chen, H., Kremling, A. and Allgower, F. (1995). Nonlinear predictive control of a benchmark cstr. In proceedings of the 3rd ECC, Rome, Italy, pp. 3247-3252.
- Chen, J., Freudenberg, J. S. and Nett, C. N. (1992). On relative gain array and condition number. In 31st CDC, Tucson, Arizona, pp. 219-224.
- Chen, S. and Billings, S. A. (1989). Representation of nonlinear systems: The NARMAX model. *International Journal of Control*, vol. 49, pp. 1013-1032.
- Chen, S., Billings, S. A. and Grant, P. M. (1990a). Nonlinear system identification using neural networks. *International Journal of Control*, vol. 51, pp. 1191-1214.
- Chen, S., Billings, S. A., Cowan, C. F. N. and Grant, P. M. (1990b). Practical identification of NARMAX models using radial basis functions. *International Journal of Control*, vol. 52, pp. 1327-1350.
- Clarke, D. W. (1982). Model following and pole placement self-tuners. *Optim. Contr. Appl. Met.*, vol. 3, pp. 323-335.
- Clarke, D. W. (1988). Application of generalized predictive control to industrial process. *IEEE Control systems Magazine*, vol.8, pp. 49-55.
- Clarke, D. W. (1994). *Advances in model-based predictive control*. Oxford University Press.
- Clarke, D. W. and Gawthrop, P. J. (1975). Self-tuning controller. *Proc. IEE*, vol. 122, pp. 929-934.
- Clarke, D. W. and Gawthrop, P. J. (1979). Self-tuning control. *Proc. IEE*, vol.126, pp. 633-934.
- Clarke, D. W. and Mohtadi, C. (1989). Properties of generalized predictive control. *Automatica*, vol. 25, pp. 859-875.
- Clarke, D. W., Mohtadi, C. and Tuffs, P. S. (1987a). Generalized predictive control. Part I. The basic Algorithm. *Automatica*, vol. 23, pp. 137-148.
- Clarke, D. W., Mohtadi, C. and Tuffs, P. S. (1987b). Generalized predictive control. Part II. Extensions and Interpretations. *Automatica*, vol. 23, pp. 149-160.
- Cruz, J. B., Feudenberg, J. S. and Looze, D. P. (1981). A relationship between sensitivity and stability of multivariable feedback systems. *IEEE Trans. Auto; Cotr.*, vol. 26, pp. 66-74.

- Culter, C. R. and Ramaker, B. C. (1980). Dynamic matrix control : a computer control algorithm. In Proc. Joint Automatic Control Conf., San Francisco, CA, pp. WP-5.
- De Oliveira, S. L. and Morari, M. (1994). Robust model predictive control for nonlinear systems. In Proc. Conf. on Decision and Control, Orlando, Florida.
- Demircioglu, H. and C. Y. IMAZ (2002). Constrained continuous-time generalized predictive control. IEEE Control Systems Magazine, pp. 57-67.
- Demircioglu, H. (1999). Constrained continuous-time generalized predictive control. IEE. Proc Contr Theory app, vol. 146, N°5, pp. 470-476;
- Demircioglu, H. Gawthrop, P. J. Alcalá.L.I.S (1998). Multivariable continuous-time generalized predictive control: A state-space approach to linear and nonlinear systems. IEE. Proc Contr Theory app, vol. 145, N°3, pp. 241-250
- Demircioglu, H. and Gawthrop, P. J. (1991). Continuous-time generalized predictive control (CGPC). Automatica, vol. 27, pp. 55-74.
- Demircioglu, H. and Gawthrop, P. J. (1992). Multivariable continuous-time generalized predictive control. Automatica, vol. 28, pp. 697-713.
- Doyle, J. C. (1978). Guaranteed margins for LQG regulators. IEEE Trar.s Contr., vol. 23, pp. 756-757.
- Doyle, J. C. (1982). Analysis of feedback systems with structured uncertainties Proc. IEE-D, 129, 6, pp. 242-250.
- Doyle, J. C. and Stein, G. (1979). Robustness with observers. IEEE Trans. Auto. Contr, vol. 24, pp. 607-611.
- Doyle, J. C. and Stein, G. (1981). Multivariable feedback design: concept for classical/modern synthesis. IEEE Trans. Auto. Contr., vol. 26, pp. 4-16.
- Doyle, J. C., Francis, B. A. and Tannenbaum, A. R. (1992). Feedback control theory. Macmillan, New York.
- Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A. (1989). State space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. IEEE Trans. Auto. Contr., vol. 34, pp. 831-847.
- Duc, G. (1993). Robustesse des systèmes linéaires multivariables. Cours, Supélec.
- Dumur, D. (1993). Commande prédictive et machine-outil. Thèse de doctorat de l'Université de Paris XI, Mai.
- Dyn, N.(1989). Interpolation and approximation by radial related functions. In Chui. C. K. Schumaker, L. L. and Ward, J. D. eds, Approximation theory IV, vol. 1. Academic Press, Inc., pp. 211-234.

- Economoa., C., Morari M. and Palsson, O. (1986). Internal model control. 5. extensions to nonlinear systems. *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, vol. 25. pp.403-411.
- EL Ghaoui, L. (1995). *Optimisation convexe et contrôle de systèmes incertains. Cours de spécialisation, DEA. ENSTA, Paris.*
- Eric. R, Taner. A, Peter J. G, and David J. H., A globally valid continuous-time GPC through successive system linearisations. *Proc of 38 conf on decision & contr*, Phoenix, Arizona USA, Dec 1999.
- Feudenberg, J. S. and Looze, D. P. (1988). *Frequency domain properties of scalar and multivariable feedback systems.* Springer Verlag, Berlin.
- Foulard. C., Gentil, S. and Sandraz, J. P. (1987). *Commande et régulation par ordinateur numérique. De la théorie à la pratique, (2nd édition), Eyrolles.*
- Gambier. A, and H. Unbehauen, Adaptive predictive state-space control of a multivariable 3-tank system. *Proc of 38 conf on decision & contr*, Phoenix, Arizona USA, Dec 1999.
- Garcia, C. E. and Morari, M. (1982). Internal model control. 1. A unifying review and some new results. *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, vol. 21. pp. 308-323.
- Garcia, C. E. and Morari, M. (1985a). Internal model control. 2. Design procedure for multivariable systems. *Ind. Eng. Chem. Proc. Des, Dev.*, vol. 24. pp. 472-484.
- Garcia, C. E. and Morari, M. (1985b). Internal model control. 3. Multivariable control Law computation and tuning guidelines. *Ind. Eng. Chem. Proc. Des.Dev.*, vol. 24. pp. 484-494.
- Garcia, C. E., Prett, D. M. and Morari, M. (1989). *Model predictive control: Theory and practice, a Survey.* *Automatica*, vol. 25, pp. 335-348.
- Gawthrop P.J. Jones R.W. Sbarbaro D.G. *Emulator-based Control and Internal Model Control: Complementary Approaches to Robust Control Design.* *Automatica*, Vol 32, N° 8, August 1996, pp. 1223-1227.
- Gawthrop, P. J. (1986). Continuous-time self-tuning control: A unified approach. *Preprints 2nd IFAC Workshop on Adaptive systems in Control and Signal Processing*, Lund, Sweden, pp. 19-24.
- Gawthrop, P. J. and Demircioglu, H. (1989). Continuous-time generalized predictive control. *Adaptive Systems Control signal Processing*, vol. 1, pp. 67-71.
- Ge Guo, Wei Li, Jun W, Man. Q. Liu. A CGPC controller in continuous casting process. 3<sup>th</sup> WCIC and Automation, June 28-July 2, 2000, Hefei, China
- Gregorcic G., Lightbody G., Internal model control based on a Gaussian process prior model, *Proceedings of ACC 2003*, Denver, Co, 4981-4986, 2003.

---

Gu Dongbing and Huosheng Hu, Receding Horizon Tracking Control of Wheeled Mobile Robots, IEEE Trans on Contr Sys, Vol. 14, N° 4, July 2006.

Heise, S. A. and Maciejowski, J. M. (1994). Stability of constrained MBPC using an internal model control structure. Advances in MBPC, Oxford University Press.

Hentabli, K.M., Benbouzid, E. H. and Pinchon, D. (1997c). CGPC with internal model control: Application to induction motor control. In proceedings of the IEEE-CCA Conference, Hartford, Connecticut, USA, October, pp. 235-237.

Hunt, K. J. and Johansen, T. A. (1997). Design of gain-scheduled control using local controller networks. International Journal of Control, vol. 66, pp. 619-651.

Igor Skrjanc and Drago Matko. Predictive Functional Control Based on Fuzzy Model for Heat-Exchanger Pilot Plant. IEEE Trans on fuzzy sys, Vol. 8, N° 6, Dec 2000, pp 705-712.

Irving, E., Falinower, C. M. and Fonte, C. (1986). Adaptive generalized predictive control with multiple reference model. Proc. of the 2nd IFAC workshop on adaptive systems in control and signal processing, Lund. Sweden.

Johansen, T. A. and Bjarne A. Foss, Operating Regime Based Process Modeling and Identification, Computers and Chemical Engineering, Vol. 21, pp. 159-176, 1997

Johansen, T. A. and Foss, B. A. (1995), Identification of nonlinear system structure and parameters using regime decomposition. Automatica, vol. 31, pp. 321-326.

Johansen, T. A. and Foss, B. A. (1993), Constructing NARMAX models using ARMAX models. International Journal of Control, vol. 58, pp. 1125-1153.

Jones, R. D. and co-workers (1991). Nonlinear adaptive networks: A little theory, a few applications. Technical report, 91-273, Los Alamos national Lab., NM.

Kamel. B, Khier. B, New extended cascaded predictive control with multiple reference models ECGPC/MRM of induction motor drive with efficiency optimization. Journal of ELECTRICAL ENGINEERING, VOL. 58, N° 2, 2007, 71-78.

Keiji Watanabe and Eiichi Muramatsu. Adaptive Internal Model Control of SISO Systems. SICE Annual confr in Fukui, August 4-6, 2003.

Kouvari. B. Nonlinear Predictive Control, Theory and Practice. Neural Networks, IEEE Transactions on Volume 17, Issue 2, March 2006, pp 535-535.

Kwon. W. K ; CHOI H.H. ; DAE GYU BYUN ; SEONBONG NOH ; Recursive solution of generalized predictive control and its equivalence to receding horizon tracking control, Automaica, 1992, vol. 28, N° 6, pp. 1235-1238.

Kwon, W. H. and Byun, D. G. (1989). Receding horizon tracking control as a predictive control and its stability properties. International Journal of Control, vol. 50, pp. 1807-1824.

- Kwon, W. H. and Pearson, A. E. (1977). A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, pp. 838-842.
- Kwon, W. H., Choi, H., Byun, D. G. and Noh, S. (1992). Recursive solution of generalized predictive control and its equivalence to receding horizon tracking control. *Automatica*, vol. 28, pp. 1235-1238.
- Lee, C. C. (1990). Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller, Part I, Part II. *IEEE Trans. on systems, Man, and cybernetics*, vol. 20, pp. 419-43
- Leonhard, W. (1990). *Control of electrical drives*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin.
- Leontaritis, I. J. and Billings, S. A. (1985). Input-output parametric models for nonlinear systems. *International Journal of Control*, vol. 41, pp. 303-344.
- M, Hou, Y.S, Xiong, and R.J. Patton. Observing a three-tank system. *IEEE, Trans on Contr. Sys*, Vol, 13, N0 3 May 2005.
- Levien, K. L. and Morari, M. (1987). Internal model control of couple distillation columns. *Aiche Journal*, vol. 33, pp. 83-98.
- Li, Z, and Evans, RJ, Generalised minimum variance control of linear time-varying systems, *IEE Proc, Contr Theory and Appl*, January 2002, 149(1), 111-116. Copyright IEEE 2002.
- Marqués, D. and Morari, M. (1986). Model predictive control of gas pipeline networks. In *Proc. ACC*, Seattle, Washington, pp. 349-354.
- Middleton, R., and Goodwin, G. C. (1990). *Digital control and estimation: unified approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Moody, J. and Darken, C. J. (1989). Fast learning in networks of locally-tuned processing units. *Neural Computation*, vol. 1, pp. 281-294.
- Morari, M. and Zafiriou, E. (1989). *Robust process control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Morshedi, A. M. (1986). Universal dynamic matrix control. *Chem. Proc. Contr. Conf. III*.
- Mounce, B. (1990). The role of singular value decomposition in the analysis design of control systems. Master's thesis, University of Alberta, Canada.
- M'Saad, M. Avl 1987. Sur l'applicabilité de la commande adaptative. Thèse t'état, INPG.
- Murray-Smith, R. and Johansen, T. A. (1997). *Multiple model approaches modeling and control*. Taylor and Francis, UK.
- Neumann, R., Dumur, D. and Boucher, P. (1992). Delta-operator generalized predictive control (DGPC). In *Proc. 31st IEEE CDC*, Tucson, vol. 2, pp. 2224-2225.

- Patel, R. J., Laub, A. J. and Van Dooren, P. M. (1994). Numerical linear algebra techniques for systems and control. IEEE press.
- Peterson, T. E., Arkun, Y. and Schork, F. J. (1989). Nonlinear predictive control of a semi Batch polymerization reactor by an extended DMC. In Proc. ACC
- Poggio, T. and Girosi, F. (1990). Networks for approximation Proceedings of the IEEE, vol. 78, pp. 1481-1497.
- Powell, M. J. D. (1987). Radial basis function approximations to polynomials. 12th Biennial Numerical Analysis Conference, Dundee, pp. 223-241.
- Rault, A. and Jaume, D. Commande par modèle interne: présentation et applications. Congrès International S.E.E Automatique Appliquée, Vice, Mai.
- Ray W. Herrick, Comparison of Adaptive Control Techniques Applied to Diesel Engine Idle Speed Regulation, Joul of Dync Sys, Meas and Cotr, Dec 2002, Vol 124, Issue 4, pp. 682-688.
- Richalet, J., Guy, L et Joëlle, M., La commande prédictive, Eyrolles, décembre 2004.
- Richalet, J. Pratique de la commande prédictive. Hermès, Paris, 1993.
- Richalet, J., Abu el Ata-Doss, S., Arber, C., Kuntze, H. B., Jacobash, A. and Schill, W. (1987). Predictive Functional Control. Application to fast and accurate robots. Preprints IFAC IOth World Congress, Munich.
- Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L. and Papon, J. (1978). Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. 413-428.
- Ricker, N. L. (1990). Predictive control with state estimation. Ind. Eng. Chem. Proc. Des., vol. 28. pp. 374-382.
- Rivals, I and Léon Personnaz. Internal Model Control Using Neural Networks. Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics, june 17-20 1996, Warsaw
- Rossiter, J A, J. R. Gossner, and B. Kouvaritakis. Infinite Horizon Stable Predictive Control. IEEE tras on Aut Cont, Vol 41, N0. 10, Oct 1996.
- Rostgaard, M., Lauritsen, M. B. and Poulsen, N. K. (1996). A state-space approach to emulator-based GPC design. systems and Control Letters, vol, 28, pp. 291-301.
- Rotella, F. and Borne, P. (1995). Théorie et pratique du calcul matriciel. Editions Technip, Paris.
- Rouhani, R. and Mehra, R. K. (1982). Model Algorithm control (MAC) : Basic Theoretical Properties. Automatica, vol. 18, pp. 401-414.
- Sorin Olaru (2005). Contribution a l'étude de la commande prédictive sous contraintes par approche géométrique. Thèse de Doctorat, Supélec, Septembre.

- Saint-Donat, J., Bhat, N. and Me Avoy, T. J. (1991). Neural net based model predictive control. *International Journal of Control*, vol. 54, pp. 1453-1468.
- Shamma, J. S. and Athans, M. (1990). Analysis of gain-scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 35, pp. 898-907.
- Shamma, J. S. and Athans, M. (1992). Gain-scheduling: Potential hazards and possible remedies. *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 12, pp. 101-107.
- Sjoberg, J., Hjalmarsson, H. and Ljung, L. (1995). Neural networks in systems identification, in *Preprints 10th IFAC symp. system Identification, Copenhagen*, vol. 2, pp. 49-72.
- Skogestad, S., Morari, M. and Doyle, J. C. (1988). robust control of ill-conditioned plants: High-purity distillation. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 33, pp. 1092-1105.
- Soloway, D. and Haley, P. J. (1996). Neural generalized predictive control: A Newton-Raphson implementation. *Proc. of the IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Dearborn, MI, September.
- Sommer, S. (1994). Model-based predictive control methods based on nonlinear and bilinear parametric system descriptions. *Advances in MBPC*, Oxford University Press.
- Stokbro, K., Hertz, J. A. and Umberger, D. K. (1990). Exploiting neurons with localized receptive fields to learn chaos. *Journal of Complex Systems*, vol. 4, pp. 603-622.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. *IEEE Trans. on systems, Man, and cybernetics*, vol. 15, pp. 116-132.
- Tan, Y. and De Keyser, R. (1994). Neural network based adaptive predictive control. *Advances in MBPC*, Oxford University Press.
- Tanaka, K. and Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, pp. 135-156.
- Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1996). Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilization,  $H_\infty$  controls theory and linear matrix inequalities. *IEEE trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, pp. 1-13.
- Thomas, J. L. (1995). Contribution à la commande robuste des machines asynchrones. Thèse de doctorat, CNAM, Paris.
- Tong, H. and Lim, K. S. (1980). Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, vol. 42, pp. 245-292.
- Utkin, V., Jurgen Gildner et Jingxin Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor & Francis 1999, USA.
- Vivas, A., Poignet, P., Predictive functional control of a parallel robot. *Control Engineering Practice*, Elsevier 2004, pp 863-873.

Wang, W. and Henriksen, R. (1993). Direct adaptive generalize predictive control. *Mod. Ident. Contr.*, vol. 14, pp. 181-191.

Wellstead, P. E., Prager, D. and Zanker, P. (1979). Pole assignment self-tuning regulator. *Proc. IEE*, vol. 126, pp. 781-787.

Yang, J. H. Yu, W. H. and Fu, L. C. (1995). Nonlinear observer-based adaptive tracking control for induction motors with unknown load. *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 42, pp. 579-586.

Yank, T. H. and Polak, E. (1993). Moving horizon control of nonlinear systems with input saturation, disturbances and plant uncertainty. *International Journal of Control*, vol. 58, pp. 875-903.

Zadeh, L. A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. on systems, Man. and cybernetics*, vol. 3, pp. 28-44.

Zenghui Wang, Zeng. Q. C, Qinglin S, Zhu. Z. Y. Robust Stability analysis of CGPC, Proc 6<sup>th</sup> WCIC and Automation, June 21-23, 2006, Dalian, China.

Wang, W. and Henriksen, R. (1993). Direct adaptive generalize predictive control. *Mod. Ident. Contr.*, vol. 14, pp. 181-191.

Wellstead, P. E., Prager, D. and Zanker, P. (1979). Pole assignment self-tuning regulator. *Proc. IEE*, vol. 126, pp. 781-787.

Yang, J. H. Yu, W. H. and Fu, L. C. (1995). Nonlinear observer-based adaptive tracking control for induction motors with unknown load. *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 42, pp. 579-586.

Yank, T. H. and Polak, E. (1993). Moving horizon control of nonlinear systems with input saturation, disturbances and plant uncertainty. *International Journal of Control*, vol. 58, pp. 875-903.

Zadeh, L. A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. on systems, Man. and cybernetics*, vol. 3, pp. 28-44.

Zenghui Wang, Zeng. Q. C, Qinglin S, Zhu. Z. Y. Robust Stability analysis of CGPC, *Proc 6<sup>th</sup> WCIC and Automation*, June 21-23, 2006, Dalian, China.

On a donc  $\sigma_{\max}(\Delta_d^s) = \max |k_i - 1|$  et  $\sigma_{\max}(\Delta_i^s) = \max \left| \frac{1}{k_i} - 1 \right|$ , et par application du théorème du petit gain, la stabilité est assurée si l'une au moins des 2 conditions suivantes est vérifiée :

$$\forall \omega \in IR, \quad \forall i, |k_i - 1| < \sigma_{\min} \left( I_p + (G(j\omega)R(j\omega))^{-1} \right)$$

où

$$\forall \omega \in IR, \quad \forall i, \left| \frac{1}{k_i} - 1 \right| < \sigma_{\min} \left( I_p + G(j\omega)R(j\omega) \right)$$

soient :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \min_{\omega} \sigma_{\min} \left( I_p + (G(j\omega)R(j\omega))^{-1} \right) = \min_{\omega} \frac{1}{\sigma_{\max}(T_o)} \\ \alpha_2 &:= \min_{\omega} \sigma_{\min} \left( I_p + G(j\omega)R(j\omega) \right) = \min_{\omega} \frac{1}{\sigma_{\max}(S_o)} \end{aligned} \quad (A.3)$$

Les 2 conditions suffisantes de stabilité permettent d'écrire :

$$\forall i, |k_i - 1| < \alpha_1 \quad \text{ou} \quad \forall i, \left| \frac{1}{k_i} - 1 \right| < \alpha_2$$

soit encore :

$$\forall i, 1 - \alpha_1 < k_i < 1 + \alpha_1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1 + \alpha_2} < k_i < \frac{1}{1 - \alpha_2} \quad (A.4)$$

La réunion des 2 intervalles obtenus fournit un intervalle d'incertitude autorisé pour chaque gain affectant l'une des sorties du système, ce qui généralise la notion classique de marge de gain. On peut donc énoncer le résultat suivant :

**Propriété A.1** (marge de gains en sortie) : Les gains peuvent varier simultanément en sortie de chaque boucle du système sans le déstabiliser à condition qu'ils demeurent dans la réunion des intervalles  $]1 - \alpha_1; 1 + \alpha_1[$  et  $\left] \frac{1}{1 + \alpha_2}; \frac{1}{1 - \alpha_2} \right[$ .

On suppose maintenant que le système soit perturbé par des déphasages purs  $e^{j\varphi_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$  affectant chaque sortie :

$$I_p + \Delta_d^s(s) = \text{diag} \left\{ e^{j\varphi_1} \dots e^{j\varphi_p} \right\} = \left( I_p + \Delta_i^s(s) \right)^{-1} \quad (A.5)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \Delta_d^s(s) &= \text{diag} \left\{ e^{j\varphi_1} - 1; \dots; e^{j\varphi_p} - 1 \right\} \\ \Delta_i^s(s) &= \text{diag} \left\{ e^{-j\varphi_1} - 1; \dots; e^{-j\varphi_p} - 1 \right\} \end{aligned} \quad (A.6)$$

Les conditions de stabilité, avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  définis par (A.3), permettent d'écrire :

$$\forall i, |e^{j\varphi_i} - 1| < \alpha_1 \quad \text{ou} \quad \forall i, |e^{j\varphi_i} - 1| < \alpha_2$$

Or  $|e^{\pm j\varphi_i} - 1| = \sqrt{(\cos \varphi_i - 1)^2 + (\sin \varphi_i)^2} = \sqrt{2 - 2 \cos \varphi_i} = 2 \left| \sin \frac{\varphi_i}{2} \right|$ , on obtient donc :

$$\forall i, |\varphi_i| < 2 \text{Arcsin} \frac{\alpha_1}{2} \quad \text{ou} \quad \forall i, |\varphi_i| < 2 \text{Arcsin} \frac{\alpha_2}{2} \quad (\text{A.7})$$

D'où le résultat suivant, qui généralise la notion de marge de phase :

**Propriété A.2** (marge de phases en sortie) : Les déphasages peuvent varier simultanément en sortie de chaque boucle du système sans le déstabiliser à condition qu'ils demeurent dans la réunion des intervalles

$$\left] -2 \text{Arcsin} \frac{\alpha_1}{2}; 2 \text{Arcsin} \frac{\alpha_1}{2} \right[ \quad \text{et} \quad \left] -2 \text{Arcsin} \frac{\alpha_2}{2}; 2 \text{Arcsin} \frac{\alpha_2}{2} \right[$$

De la même façon, si l'on considère un système de commande avec des incertitudes de modèle ramenées à l'entrée, et en définissant :

$$\begin{aligned} \beta_1 &:= \min_{\omega} \sigma_{\min} (I_p + (R(j\omega)G(j\omega))^{-1}) = \min_{\omega} \frac{1}{\sigma_{\max}(T_i)} \\ \beta_2 &:= \min_{\omega} \sigma_{\min} (I_p + R(j\omega)G(j\omega)) = \min_{\omega} \frac{1}{\sigma_{\max}(S_i)} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

On établit les résultats suivants :

**Propriété A.3** (marge de gains en entrée) : Les gains peuvent varier simultanément en entrée du système sans le déstabiliser à condition qu'ils demeurent dans la réunion des intervalles

$$\left] 1 - \beta_1; 1 + \beta_1 \right[ \quad \text{et} \quad \left] \frac{1}{1 + \beta_2}; \frac{1}{1 - \beta_2} \right[.$$

**Propriété A.4** (marge de phases en entrée) : Les déphasages peuvent varier simultanément en entrée du système sans le déstabiliser à condition qu'ils demeurent dans la réunion des intervalles

$$\left] -2 \text{Arcsin} \frac{\beta_1}{2}; 2 \text{Arcsin} \frac{\beta_1}{2} \right[ \quad \text{et} \quad \left] -2 \text{Arcsin} \frac{\beta_2}{2}; 2 \text{Arcsin} \frac{\beta_2}{2} \right[.$$

## Marges de Stabilité Multi-variables

### Application aux Systèmes Perturbés Diagonalement

Un des objectifs de l'analyse robuste consiste à trouver une mesure des marges de stabilité des systèmes asservis. On rappelle que le degré de stabilité des systèmes mono-variables en boucle fermée est mesuré par la marge de gain et la marge de phase : la marge de gain est définie comme le nombre de décibels dont le gain en boucle ouverte a le droit d'augmenter sans provoquer l'instabilité ; la marge de phase est le déphasage supplémentaire qui, dans la zone de résonance, fait passer le lieu de Nyquist de l'autre côté du point critique  $(-1 \pm 0j)$ . A partir de là, il est intéressant d'établir des notions similaires pour les systèmes multi-variables. Cependant, ces notions dépendent du point où est appliquée la variation de gain ou de phase. Considérons le système multi-variable perturbé représenté sur les figures suivantes :

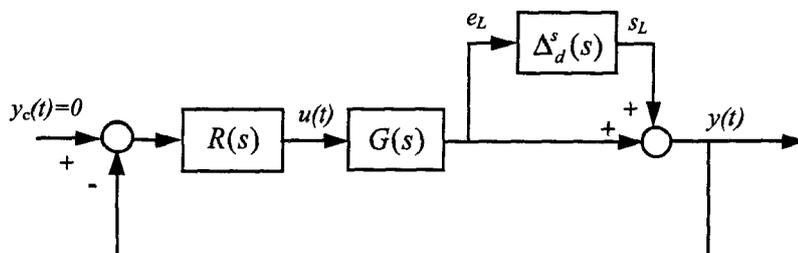


Fig.A.1 Système bouclé avec incertitude multiplicative directe en sortie.

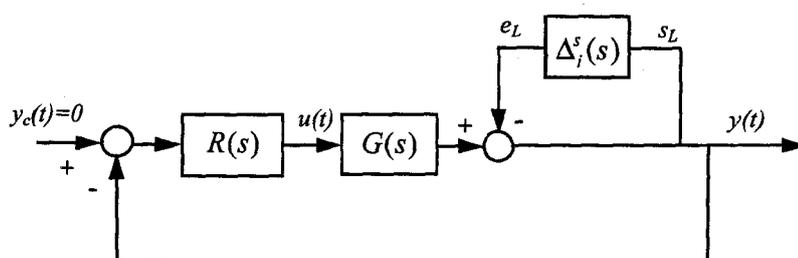


Fig.A.2 Système bouclé avec incertitude multiplicative inverse en sortie.

Supposons que l'incertitude de modèle soit constituée de gains réels  $k_i$ ,  $i=1, \dots, p$  affectant chacune des sorties. En d'autres termes :

$$I_p + \Delta_d^s(s) = \text{diag}\{k_1 \cdots k_p\} = (I_p + \Delta_i^s(s))^{-1} \quad (\text{A.1})$$

d'où

$$\Delta_d^s(s) = \text{diag}\{k_1 - 1; \dots; k_p - 1\}$$

$$\Delta_i^s(s) = \text{diag}\left\{\frac{1}{k_1} - 1; \dots; \frac{1}{k_p} - 1\right\} \quad (\text{A.2})$$

Une particularité de la commande par régime glissant est que tout système commandé par cette technique aura des propriétés implicites de « robustesse », car le système sera contraint à chaque instant à respecter la condition de glissement. En général, on combine cette technique avec des méthodes de commande à structure variable (voir section (B.3)), dans le but de définir de manière explicite la robustesse du système.

### Exemple

Supposons que notre problème consiste à amener vers l'origine l'état d'un système linéaire du deuxième ordre, représenté par la forme normale :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= u\end{aligned}\tag{B.2}$$

Le premier pas consiste à définir la surface de glissement et la variable de glissement. Grâce au lemme de Barbalat (voir lemme de Barbalat et figure (B.2)), nous savons que, la valeur de la commande  $u$  étant bornée ( $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = u$ ), lorsque  $\xi_1$  converge vers une valeur constante, ici vers zéro, sa dérivée convergera vers zéro. En utilisant ce lemme,

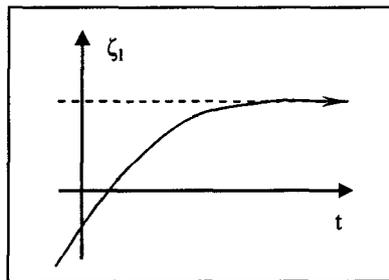


Fig. B.2 - Rappel du lemme de Barbalat.

et en regardant la première ligne de l'équation (B.2), on peut en déduire qu'il suffit de commander seulement  $\xi_1$  à l'origine pour garantir que  $\xi_2$  convergera également vers zéro. A partir de ce raisonnement, on peut définir la surface de glissement de façon à garantir que lorsque la surface est atteinte,  $\xi_1$  tend vers zéro de manière exponentielle.

$$s = 0 \Rightarrow \dot{\xi}_1 = -\alpha_1 \xi_1, \quad \alpha_1 > 0$$

Avec cette dernière expression, et avec la relation  $\dot{\xi}_1 = \xi_2$ , nous allons pouvoir définir la variable de glissement de la manière suivante :

$$s = \xi_2 + \alpha_1 \xi_1\tag{B.3}$$

La deuxième étape consiste alors à imposer la dynamique sur  $s$  dans le but de vérifier que  $s$  converge vers zéro de manière exponentielle :

$$\dot{s} = -\alpha_2 s, \quad \alpha_2 > 0$$

## Commande par Régime Glissant et Structure Variable

Nous allons consacrer cette annexe à la description des idées clés relatives à la commande par régime glissant et structure variable VSC (Variable Structure Control). Après avoir présenté en quoi consistent ces types de commande, nous donnerons un exemple pour montrer comment la technique VSC peut être utilisée en combinaison avec la commande par régime glissant. Finalement, nous indiquerons la manière dont il est possible de réduire les effets indésirés produits par la technique du type VSC.

### B.1 Régime Glissant.

La commande par régime glissant consiste à garantir qu'un système dynamique d'ordre  $n$  peut être amené vers l'origine à partir de la stabilisation d'un nouveau système d'ordre 1. Une seule variable,  $s$ , va définir le nouveau système. Donc, au lieu de stabiliser de manière explicite les  $n$  variables qui constituent le système original, le problème sera « réduit » par la stabilisation de  $s$ . Cette nouvelle variable est fonction des variables originales du système. Elle est couramment appelée variable de glissement.

Plus précisément, cette technique repose sur les deux étapes décrites ci-dessous :

1. On définit d'abord une variété,  $s = 0$ , de dimension  $n - 1$ , appelée surface ou variété de glissement. Cette variété est déterminée de telle sorte que lorsque le point représentatif du système l'atteint, sa dynamique le fait converger vers zéro.
2. Ensuite, on impose une dynamique sur  $s$  afin de garantir que le système va effectivement atteindre la surface de glissement. Une manière d'assurer que la surface de glissement sera atteinte est de définir la condition suivante,

$$s\dot{s} < 0, \quad \forall s \neq 0 \quad (\text{B.1})$$

appelée condition de glissement. La façon de définir  $s$  doit nous permettre d'en déduire la commande pour assurer la stabilisation de  $s$ , i.e. on détermine la valeur de la commande à partir de la dynamique imposée.

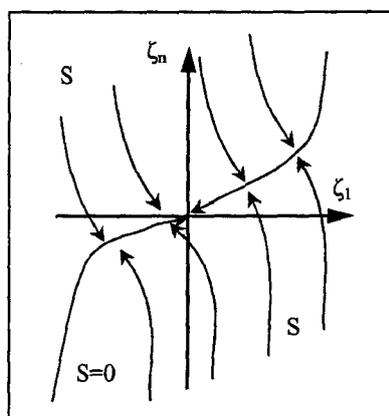
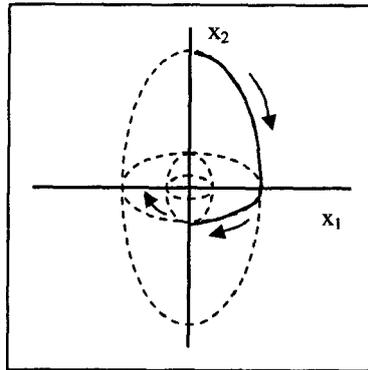


Fig. B.1 - Commande par régime glissant.



Combinaison appropriée des deux structures

Fig. B.4 - Exemple de la Commande à Structure Variable.

### b) Avantages et inconvénients du VSC

Un des principaux avantages résidant dans l'utilisation de la commande à structure variable, est de pouvoir définir de manière explicite des propriétés de robustesse du système, vis-à-vis des incertitudes paramétriques du modèle et des perturbations du système.

En revanche, théoriquement l'utilisation directe d'une telle commande, impose la nécessité d'appliquer au système un commutateur logique à vitesses infinies. Bien que dans le cas pratique les actionneurs ne puissent pas produire la commutation à ces vitesses, celles-ci doivent suffisamment rapides.

Quand l'état du système se trouve à la limite du changement de structure, (les commutations successives à fréquences élevés peuvent se produire. Ce phénomène pouvant produire un bruit sur les actionneurs, est appelé broutement (en l'anglais « chattering »). Pour certaines applications, le broutement n'est pas acceptable pour deux raisons principales :

- i) Pour des fréquences de broutement élevées, dans certains cas, le système n'est plus modélisé correctement et peut devenir instable en boucle fermée.
- ii) Le broutement produit une dynamique importante sur les actionneurs (moteurs), ce qui peut réduire leurs « temps de vie ».

Nous verrons plus loin comment ce phénomène peut être atténué. Pour notre besoin, nous avons montré dans le chapitre (II) comment ce type de commande peut être employé pour conférer au système des propriétés de robustesse vis-à-vis des erreurs de localisation. De nombreux autres exemples d'applications de cette technique peuvent être trouvés dans [Utkin 77], [DeCarlo 88] et [Young 93].

### B.3 Commande à Structure Variable par Régime Glissant

Nous allons illustrer maintenant la manière dont il est possible de définir une commande à structure variable par régime glissant.

Considérons le système de deuxième ordre que nous avons introduit à la section (B.1) (voir l'équation (B.2)), et la variable de glissement définie dans l'équation (B.3).

Cette équation vérifie la condition de glissement (13.1), car

$$s\dot{s} = -\alpha_2 s^2 < 0, \forall s \neq 0$$

La valeur de la commande est déduite en dérivant (B.3) et en utilisant la deuxième ligne de (B.2)

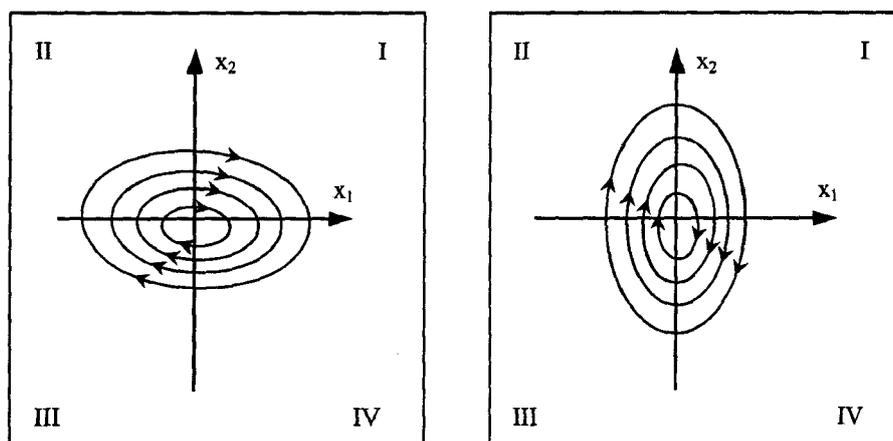
$$\begin{aligned} u &= -\alpha_2 s - \alpha_1 \xi_2 \\ &= -\alpha_1 \alpha_2 \xi_1 - (\alpha_1 + \alpha_2) \xi_2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

## B.2 Commande à Structure Variable (VSC)

Comme son nom l'indique, une commande à structure variable est constituée par des lois de commande de structures différentes, permettant d'assurer la convergence du système vers l'origine [Utkin 77]. Chaque structure appliquée au système de manière individuelle n'entraîne pas sa stabilisation vers l'origine, seule une combinaison appropriée de l'ensemble de ces structures va permettre de le faire.

### a) Description graphique de la commande à structure variable

Considérons par exemple un système d'ordre deux de variables  $(x_1, x_2)$ . Supposons qu'avec la première structure de commande, le comportement du système dans le plan de phase soit donné par la figure (B.3-a). De manière similaire, supposons qu'avec la deuxième structure le système se comporte comme il est montré sur la figure (B.3-b). Nous pouvons garantir qu'en combinant ces deux structures de manière



a) Commande avec la première structure    b) Commande avec la deuxième structure

Fig. B.3 - Exemple de la Commande à Structure Variable.

adéquate, le système convergera à l'origine. En effet, si on utilise la première structure lorsque le système est dans le deuxième et quatrième quadrant, et la deuxième structure lorsque le système se trouve dans les deux autres quadrants, on amènera alors le système à l'origine (voir figure(B.4)).

Une manière de réduire ce phénomène consiste à utiliser une approximation continue de la commutation, en remplaçant le terme discontinu par une fonction de saturation [Slotine 91]. L'inconvénient de cette approche est que la précision de la régulation en présence des perturbations est réduite.

Par ailleurs, il a été montré que si les commutations sont appliquées sur la dérivée de la commande ([Sira Ramirez 93a], [Sira Ramirez 93b] et [Hajri 96c] pour le cas mono-variable et [Hajri 96b] et [Hajri 96a] pour le cas multivariables), le phénomène de broutement est nettement atténué.

Il est donc intéressant de considérer une extension dynamique du système, de telle sorte que la commutation soit appliquée sur la dérivée de la commande, ce qui va nous permettre de filtrer avec un intégrateur le terme discontinu et éliminer ainsi le broutement.

Pour illustrer ce résultat, considérons à nouveau le modèle linéaire du deuxième ordre donné par l'équation (B.2). Considérons la commande de ce système comme une nouvelle variable d'état. On définit alors l'extension dynamique comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 &= \gamma\end{aligned}\tag{B.7}$$

$\gamma$  étant la nouvelle variable de commande, et  $\xi_3 = u$ .

Comme nous voulons élaborer la loi de commande à partir des techniques de commande par régime glissant, la première étape va consister à définir la variable de glissement pour le système (B.7).

Dans la section (B.1), nous avons vu la manière dont on pouvait choisir une loi de commande pour le système de deuxième ordre (B.2).

Si nous regardons l'équation qui définit la commande stabilisante pour ce système (B.4), en considérant que  $u = \xi_3$  nous réécrivons l'équation (B.4) sous la forme équivalente :

$$\xi_3 + (\alpha_1 + \alpha_2)\xi_2 + \alpha_1\alpha_2\xi_1 = 0\tag{B.8}$$

Ainsi, en ne regardant que les deux premières équations de (B.7), on peut en déduire que lorsque la relation (B.8) est satisfaite,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , et  $\xi_3$  convergent vers zéro.

On définit alors la variable de glissement du système (B.7) comme :

$$s = \xi_3 + (\alpha_1 + \alpha_2)\xi_2 + \alpha_1\alpha_2\xi_1\tag{B.9}$$

Si on impose maintenant pour la variable de glissement une dynamique du même type que celle de l'équation (B.5)

$$\dot{s} = -\alpha_3(s + W \operatorname{sgn}(s)), \quad \alpha_3, W > 0\tag{B.10}$$

## Résumé de la thèse

Le travail présenté dans ce mémoire est principalement consacré à l'étude de la commande prédictive généralisée à temps continu (CGPC) appliquée à des systèmes mécatroniques. Il s'agit d'une contribution à l'analyse et la synthèse d'une loi de commande basée sur la minimisation d'un critère quadratique à horizon fini et fuyant. Cette loi de commande s'est révélée comme une stratégie bien adaptée, capable de contrôler une large classe de systèmes. En effet, elle s'applique aussi bien aux systèmes instables, qu'aux systèmes à non minimum de phase. Une connaissance exacte du retard n'est pas indispensable.

Un autre schéma de commande prédictive a été proposé, il consiste à utiliser la structure de commande par modèle interne basée sur la minimisation du critère quadratique de la CGPC. Cette méthode permet, d'une part, d'incorporer une capacité de poursuite explicite dans la commande CGPC, et d'autre part, de tirer profit de la robustesse qu'offre la structure IMC.

L'analyse de la robustesse des algorithmes CGPC et IMC/CGPC a permis d'établir quelques règles concernant le choix des paramètres de réglages. De plus, nous avons examiné le moyen d'accroître la stabilité robuste des deux algorithmes, en utilisant le concept de la LTR pour la CGPC avec observateur, et en introduisant un filtre de robustesse dans la structure IMC/CGPC.

En vue d'étendre la commande prédictive aux systèmes non linéaires, une version à temps continu de l'approche « Local Model Networks », basée sur une représentation d'état a été proposée. Enfin, une autre approche basée sur la combinaison de la commande prédictive et la commande à mode glissant est développée. Cette méthode a montré son efficacité et ses performances en termes d'erreur statique quasiment nulle et sa rapidité de régulation en présence de perturbations extérieures. Une validation expérimentale des différents algorithmes a été faite sur un système à trois cuves. Les avantages ainsi que les limitations des lois de commandes proposées ont été soulignés.

Bibliothèque Universitaire de Valenciennes



00900448