



HAL
open science

**Maîtrise de la robustesse de systèmes dynamiques
non-linéaires vis-à-vis de paramètres imprécis :
application à l'optimisation de suspensions GMP en
phase d'avant-projet**

Samuel Boudart

► **To cite this version:**

Samuel Boudart. Maîtrise de la robustesse de systèmes dynamiques non-linéaires vis-à-vis de paramètres imprécis : application à l'optimisation de suspensions GMP en phase d'avant-projet. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, UVHC, (France), 2007. Français. NNT : 2007VALE0002 . tel-03001873

HAL Id: tel-03001873

<https://uphf.hal.science/tel-03001873v1>

Submitted on 12 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée à

L'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

en vue de l'obtention du

DOCTORAT

Spécialité

GENIE MECANIQUE

par

Samuel BOUDART

**Maîtrise de la robustesse de systèmes dynamiques non-linéaires
vis-à-vis de paramètres imprécis : application à l'optimisation de
suspensions GMP en phase d'avant-projet**

Soutenue le 29 janvier 2007 devant le jury composé de :

Rapporteur :	P. PICART	Professeur à l'université de Franche-Comté
Rapporteur :	A. EL HAMI	Professeur à l'université de Rouen
Examineur :	T. TISON	Professeur à l'université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Examineur :	P. DRAZETIC	Professeur à l'université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Examineur :	B. LALLEMAND	Maitre de conférences à l'université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Examineur :	H. MORVAN	Ingénieur de recherche à l'université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Examineur :	P. HENRIOT	Docteur en mécanique, responsable service référentiel et architecture suspension GMP (PSA Peugeot Citroën)
Examineur :	A. KREIS	Docteur en mécanique, responsable service développement composant suspension GMP (PSA Peugeot Citroën)

Remerciements

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués dans le cadre d'une thèse CIFRE, au sein du groupe PSA Peugeot-Citroën en partenariat avec le département génie mécanique du Laboratoire d'Automatique et de Mécanique Industrielle et Humaine (LAMIH) de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis dirigé par Monsieur le Professeur Eric Markiewicz, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je remercie particulièrement Monsieur le professeur Thierry Tison pour l'honneur qu'il m'a fait d'être mon directeur de thèse.

Je remercie grandement Monsieur le Professeur Philippe Picart, de l'université de Franche-Comté et Monsieur le Professeur Abdelkhalak El Hami, de l'université de Rouen, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger et de rapporter mon travail.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Bertrand Lallemand, maître de conférences à l'université de Valenciennes et Monsieur Hervé Morvan, Ingénieur de recherche au LAMIH pour l'aide, les conseils fructueux et la disponibilité dont ils ont fait preuve.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Philippe Henriot, responsable du service référentiel et architecture suspension GMP dans le groupe PSA pour sa disponibilité et son grand soutien tout au long de ces travaux.

Je remercie Monsieur Adrien Kreis, responsable du service développement suspension GMP, pour son aide et pour la qualité des travaux qu'il a réalisés et qu'il m'a transmis.

Je remercie aussi Monsieur Bernard Jacquet, responsable du Pôle suspension moteur dans le groupe PSA de m'avoir accueilli au sein de son équipe et de m'avoir donné les moyens nécessaires au bon déroulement de mes travaux.

Je remercie Monsieur le Professeur Pascal Drazetic, de l'université de Valenciennes d'avoir accepté de participer au jury.

Je souhaite aussi remercier messieurs Yoann Ledriant et Kevin Morin qui, grâce aux travaux réalisés durant leur stage, ont grandement contribué à ces travaux.

Je remercie vivement et tendrement mes parents et Virginie pour leur implication morale au quotidien.

Je remercie aussi tous mes amis de longues dates, kayakistes et sportifs de tout horizon, pour leur soutien et tout particulièrement Pierre et Alban.

Enfin, je tiens à remercier d'une manière générale tous les membres du service suspension GMP et plus particulièrement Jacques Dusi, Stéphane Lanotte, Cédric Rougier, Fabrice Ekue, Amandine Toussaint, Alain Camizuli, Loïc Bourdin, Stéphanie Tomaselli, Hervé Remond et Eric Marchal pour leur soutien, leur aide et surtout leur bonne humeur.

Résumé

Mots-Clés :

Avant-projet, optimisation multi-objectif, robustesse, imprécisions, suspension GMP, système dynamique, non-linéarité, simulation de Monte-Carlo

Résumé :

En conception d'avant projet, les impératifs de rapidité et de réduction des coûts sont à l'origine du recours quasi-systématique aux techniques d'optimisation numérique. La conception la plus performante est ici l'objectif principal recherché. Depuis quelques années, les chercheurs et les industriels s'intéressent à des méthodes de simulation intégrant les imprécisions inhérentes à la réalisation des produits manufacturés. L'objectif est alors d'étudier la robustesse des solutions vis-à-vis de la variabilité des paramètres du modèle. Les produits n'étant jamais le reflet exact de la conception optimale retenue, il s'avère aujourd'hui essentiel de coupler ces deux approches pour répondre également aux exigences de qualité.

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent la définition d'une stratégie d'optimisation robuste répondant à des objectifs multiples et adaptée au dimensionnement dynamique de systèmes mécaniques en phase d'avant projet. La méthodologie proposée s'appuie sur des techniques d'optimisation éprouvées et intègre les imprécisions via des méthodes de réanalyse exploitant des développements en série. Le choix de ces deux approches est justifié par l'utilisation commune des techniques de sensibilité, permettant ainsi des gains de temps. La méthodologie a été appliquée au dimensionnement fonctionnel d'une suspension de groupe motopropulseur (GMP). Cet ensemble mécanique présente en effet des contraintes de dimensionnement multiples et antagonistes associées à des variabilités d'une partie de ses constituants. Sur ce cas industriel, la méthodologie a permis de déterminer et de valider des solutions nouvelles garantissant une stabilité des performances.

Keywords:

Preliminary-project, multi-objective optimization, robustness, imprecision, powertrain engine mount, dynamic system, non-linearity, Monte-Carlo Method

Abstract:

In preliminary projects, numerical optimization techniques allow to obtain efficient solutions rapidly and at lower cost. The aim of such tools is to search and obtain the best design. For a few years, methods of simulation integrating the inaccuracies inherent in the realization of the manufactured goods have been developed. The purpose is then to study the robustness of the solutions with respect to the variability of the parameters of the model. In order to improve the quality of the products it is now essential to take both efficiency and robustness into account.

In this study we propose a new robust optimization strategy which allows handling several objective functions for the improvement of dynamic behaviour of mechanical systems in the design step. The proposed methodology is based on multi-objective optimization method and takes parameters imprecision into account using second-order approximation. Coupling both those methods is justified by the common use of sensitivities. Then, an application on a powertrain mounting system has been performed using this tool. For this industrial test case, new robust and optimal designs have been obtained and validated.

SOMMAIRE

SOMMAIRE	1
NOTATIONS	7
CHAPITRE 1	11
1. INTRODUCTION GENERALE	12
CHAPITRE 2	15
2 analyse de la robustesse et methodes d'optimisation	16
2.1 Introduction	16
2.2 Méthodes stochastiques d'analyse de la robustesse	17
2.2.1 Méthode de simulation de Monte-Carlo	17
2.2.2 Fiabilités et incertitudes	18
2.2.2.1 Analyses fiabilistes	18
2.2.3 Outils statistiques d'analyse de la robustesse	22
2.2.3.1 ANOVA	22
2.2.3.2 ST-ORM	22
2.2.4 Conclusion	22
2.3 Représentation par intervalles de la robustesse	23
2.3.1 Introduction et motivation	23
2.3.2 Intervalles : définitions	23
2.3.3 Problèmes de l'arithmétique par intervalles	24
2.3.4 Application à la résolution de systèmes	26
2.3.5 Extension au nombre flous	28
2.3.6 Conclusions	29
2.4 Analyse de la robustesse via la méthode des perturbations	30
2.4.1 Introduction	30
2.4.2 Méthode de réanalyse par développements en séries	31
2.4.2.1 Série de Taylor	31
2.4.2.2 Série de Neumann	32
2.4.3 Méthodes de calculs des dérivées d'une fonction	34
2.4.3.1 Conclusion	35
2.5 Conclusions sur les différentes méthodes d'analyse de la robustesse.	35
2.6 Méthodes d'optimisation	37
2.6.1 Principe et formulation d'un problème d'optimisation	37
2.6.1.1 Inégalités sur les vecteurs	37
2.6.1.2 Formulation du problème d'optimisation	38
2.6.2 Méthode d'optimisation mono-objectif	41
2.6.2.1 Présentation de la méthode Quasi-Newton	41
2.6.2.2 Calcul du Hessien	42
2.6.2.3 Recherche linéaire	42
2.6.3 Méthode d'optimisation multi-objectif	43
2.6.3.1 Optimalité au sens de Pareto	43
2.6.3.2 Méthodes de combinaison linéaire des objectifs	45
2.6.3.3 Méthode des distances	47
2.6.3.4 Méthodes contraintes	50
2.6.3.5 Méthode « Normal Boundary Intersection » (NBI)	51
2.6.4 Conclusion sur les différentes méthodes d'optimisation	55
2.7 Conclusion	55

CHAPITRE 3	57
3 suspension du groupe moto-Propulseur et VARIABILITE Des paramètres de conception	58
3.1 Introduction	58
3.2 Suspension du groupe moto-propulseur	59
3.2.1 Historique	59
3.2.2 Fonctions élémentaires de la suspension du GMP	59
3.2.3 Vocabulaire et repère GMP	60
3.2.4 Sources d'excitation d'un véhicule	61
3.2.4.1 Excitations en régime stabilisé	61
3.2.4.2 Excitations transitoires	63
3.2.4.3 Les excitations dues au roulage	64
3.2.4.4 Récapitulatif	64
3.2.5 Cahier des charges fonctionnel d'une suspension GMP	65
3.2.5.1 Positionnement et maintien du GMP	65
3.2.5.2 Limitation des débattements du GMP	65
3.2.5.3 Caractérisation du problème de l'excitation GMP très basse fréquence (TBF- 0 à 20 Hz)	66
3.2.5.4 Caractérisation du problème de l'excitation GMP lié aux moyennes fréquences (20-200 Hz)	68
3.2.5.5 Caractérisation du problème lié aux excitations route	69
3.2.5.6 Architectures de suspension GMP	71
3.2.5.7 Implantation des GMP	71
3.2.5.8 Architectures	72
3.2.6 Réalisation technique d'une suspension GMP	73
3.2.6.1 Eléments métalliques et élastomères	73
3.2.6.2 Les supports élastomères	74
3.2.6.3 Les supports hydroélastiques	75
3.2.6.4 Les limiteurs de débattement	77
3.3 Variabilité des paramètres de conception d'une suspension GMP	79
3.3.1 Paramètres dimensionnant une suspension GMP, imprécisions et motivation	79
3.3.2 Variabilités sur les caractéristiques des élastomères et process de fabrication	80
3.3.3 Variabilités sur les caractéristiques des élastomères et comportement mécanique	80
3.3.4 Géométrie et dispersions	81
3.3.5 Conclusion sur les variabilités	82
3.4 Conclusion	83
CHAPITRE 4	85
4 Formulation d'un problème d'optimisation robuste adapté au cas de la suspension GMP	86
4.1 Introduction	86
4.2 Motivation	86
4.3 Robustesse et stade de développement	87
4.3.1 Analyse a posteriori	87
4.3.2 Analyse a priori	88
4.4 Modélisations	88
4.4.1 Caractéristiques mécaniques des supports	88
4.4.2 Courbe effort-déplacement	89
4.4.3 Raideurs dynamiques des supports élastomères	91
4.4.4 Raideurs dynamiques des supports hydroélastiques	93
4.5 Calculs statiques et dynamiques	95
4.5.1 Calculs statiques	95

4.5.2	Calculs dynamiques	95
4.6	Formulation d'un problème d'optimisation robuste : méthodologie	96
4.6.1	Variables d'optimisation et variables imprécises	96
4.6.2	Fonctions objectif	97
4.6.2.1	Fonction objectif « Compromis » C	97
4.6.2.2	Illustration	99
4.6.2.3	Evaluation de l'intégrale multiple	100
4.6.2.4	Evaluation de l'instabilité	102
4.6.3	Optimisation robuste : compromis entre la performance et la robustesse	103
4.6.4	Fonctions objectifs liées à la problématique suspension GMP	104
4.6.4.1	Fonction objectif à très basse fréquence (TBF)	104
4.6.4.2	Fonction objectif au ralenti	106
4.6.4.3	Fonction objectif en bourdonnement	107
4.6.5	Fonctions contraintes et robustesse	108
4.6.6	Ecriture de l'algorithme complet	109
4.6.7	Adimensionnalisation des variables d'optimisation, fonctions objectifs et contraintes	110
4.6.7.1	Variable d'optimisation	110
4.6.7.2	Contraintes et fonctions objectif	110
4.6.8	Synopsis de l'enchaînement des calculs dans le processus d'optimisation	111
4.6.9	Enchaînement des calculs selon le stade de développement	112
4.7	Application à l'optimisation d'une suspension GMP à un cas d'étude simple	113
4.7.1	Description de l'exemple d'application	113
4.7.2	Compromis entre la performance et la robustesse	115
4.7.2.1	Analyse du critère compromis par la méthode NBI	115
4.7.2.2	Analyse de la solution issue de l'optimisation de la fonction robustesse	116
4.7.3	Optimisation robuste : compromis entre la performance et la robustesse	121
4.8	Conclusion	128
 CHAPITRE 5		 130
5	Application à l'optimisation robuste d'une suspension GMP pendulée	131
5.1	Introduction	131
5.2	Description de l'application	131
5.2.1	Véhicule et motorisation retenue pour l'étude	131
5.2.2	Variables du problème	133
5.2.2.1	Variables d'optimisation	133
5.2.2.2	Variables imprécises	134
5.2.2.3	Nombre maximal de variables	134
5.2.2.4	Minimisation du nombre de paramètres liée aux caractéristiques d'une architecture pendulaire.	135
5.2.2.5	Analyse de sensibilité paramétrique du modèle	135
5.2.2.6	Paramètres retenus	140
5.2.3	Analyse de la performance d'une suspension GMP	142
5.2.4	Analyse de la robustesse	143
5.3	Optimisations multi-objectif d'une suspension GMP	147
5.3.1	Détermination de la configuration de référence	147
5.3.2	Optimisations de chaque objectif	147
5.3.2.1	Optimisation de l'objectif associé aux très basses fréquences	147
5.3.2.2	Optimisation de l'objectif associé au ralenti	149
5.3.2.3	Optimisation de l'objectif associé au bourdonnement	151
5.3.3	Optimisation multiobjectif classique de la performance : détermination de la configuration de référence	153
5.3.3.1	Démarche	153
5.3.3.2	Optimisation via la méthode NBI	153
5.3.4	Optimisation multi-objectif robuste	158

5.3.4.1	Optimisation robuste via la méthode NBI	159
5.3.4.2	Prédictibilité de la moyenne et de l'écart-type par calcul de la robustesse	164
5.3.4.3	Modification des fonctions objectifs	165
5.3.5	Conclusion	177
5.4	Conclusion	178
 CHAPITRE 6		180
6	Conclusion Generale	181
6.1	Conclusion	181
6.2	Perspectives	183
 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES		186
 ANNEXES		205
Annexe A : Processus de fabrications des élastomères et imprécisions		206
Annexe B : Repères et conventions		222
Annexe C : Méthodes de calcul des dérivées d'une fonction		223

NOTATIONS

Les notations suivantes sont utilisées de façon générale dans l'ensemble de l'exposé. D'autres notations, qui ne figurent pas ici, sont introduites ponctuellement pour les besoins de certains chapitres. Elles sont définies le moment venu.

Notations liées à l'optimisation :

n_q	nombre de variables du problème
n_f	nombre de fonctions objectif du problème
n_h	nombre de restrictions d'égalité du problème
n_g	nombre de restrictions d'inégalité du problème
q_k	$k^{\text{ième}}$ variable d'optimisation
$\mathbf{q} = [q_1 \cdots q_{n_q}]^T$	vecteur configuration ou design
\underline{q}_k	borne inférieure de la $k^{\text{ième}}$ variable
$\underline{\mathbf{q}}$	vecteur des bornes inférieures
\overline{q}_k	borne supérieure de la $k^{\text{ième}}$ variable
$\overline{\mathbf{q}}$	vecteur des bornes supérieures
$f_k(\mathbf{q})$	$k^{\text{ième}}$ fonction objectif
$\mathbf{f}(\mathbf{q})$	vecteur objectif
$h_k(\mathbf{q})$	$k^{\text{ième}}$ restriction d'égalité
$\mathbf{h}(\mathbf{q})$	vecteur des restrictions d'égalité
$g_k(\mathbf{q})$	$k^{\text{ième}}$ restriction d'inégalité
$\mathbf{g}(\mathbf{q})$	vecteur des restrictions d'inégalité
\mathcal{Q}_{ad}	ensemble des configurations admissibles
\mathcal{Q}_p	ensemble des configurations optimales au sens de Pareto
$\mathcal{F}_{ad} = \mathbf{f}(\mathcal{Q}_{ad})$	ensemble image de \mathcal{Q}_{ad} par la fonction vectorielle \mathbf{f}
$\mathcal{F}_p = \mathbf{f}(\mathcal{Q}_p)$	ensemble image de \mathcal{Q}_p par la fonction vectorielle \mathbf{f}
\mathbf{f}^I	objectif idéal

Notations liées aux modèles mécaniques de suspensions GMP :

CDG	centre de gravité
X	débattements statiques
K	raideur d'un support
F	effort dans un support
K_S	raideur statique
K_{dyn}	raideur dynamique
γ	accélérations
M	masse de l'élément considéré

$$X_G^S = \begin{bmatrix} x_G^{S^T} & \theta_G^{S^T} \end{bmatrix}^T$$

degrés de liberté du GMP pour les calculs statiques

H_i $i^{\text{ème}}$ harmonique

ω_i fréquence propre du système considéré

Notations liées à la conception robuste:

N	fonction « Coût Nominal » qualifiant le niveau de la prestation étudiée (performance)
I	fonction « Instabilité » : variation de la fonction N inhérente aux imprécisions paramétriques
C	fonction « Compromis » : fonction qualifiant le compromis entre la fonction « coût Nominal » et la fonction « Instabilité » de la prestation étudiée
$C_{(a,b)}$	fonction « Compromis » pondérée : fonction qualifiant le compromis entre la fonction « coût Nominal » et la fonction « Instabilité » de la prestation étudiée et pondérée par les coefficients a et b .
μ	moyenne de l'item considéré
σ	écart-type de l'item considéré

CHAPITRE 1

Introduction générale

1. INTRODUCTION GENERALE

L'accroissement actuel de la puissance des moyens informatiques, associé à l'amélioration continue des moyens de simulations numériques ont contribué à une révolution notoire dans les métiers de la conception mécanique. Désormais, la CAO et surtout les simulations numériques constituent les outils privilégiés des ingénieurs et concepteurs dans le processus de réalisation et validation des pièces. En outre, le consumérisme actuel oblige les industriels à renouveler leurs offres et produits de plus en plus rapidement, poussant ces derniers à favoriser la modélisation virtuelle au détriment de la réalisation de prototypes physiques dans le but de réduire les temps de conception mais aussi les coûts.

Dans ce contexte de course à la productivité via le déploiement systématique de la conception numérique, l'optimisation est devenue un passage obligé. On la retrouve désormais dans la plupart des phases de la conception mécanique. Auparavant, son utilisation se limitait essentiellement à l'amélioration d'une pièce existante, n'intervenant que tard dans le processus de conception. Actuellement, le déploiement massif de ce processus numérique dans la phase de prédimensionnement d'une pièce dès le début de conception permet le renseignement rapide du cahier des charges du système étudié ([KRE01], [MAH96], [MOR96] et [OUD94] et). La différence fondamentale entre ces deux modes d'optimisation réside dans la taille du domaine de variation des paramètres, considérablement plus étendue dans le cadre du prédimensionnement, mais aussi dans le nombre de critères d'évaluation plus important en phase de validation.

Si les techniques d'optimisation ont fait et font encore l'objet d'un grand nombre de recherches et d'écrits ayant pour objectif le développement et surtout l'amélioration de ces méthodes ([HOU95], [OSY94]), la prise en compte des imprécisions sur les paramètres de conception apparaît comme nécessaire depuis quelques années.

Cette volonté d'intégrer ces variabilités a pour objet une représentation plus réaliste des paramètres afin d'aboutir à une solution à la fois robuste et efficace. Si d'ores et déjà la performance peut être considérée comme accessible par l'utilisation d'un optimiseur, garantir la robustesse semble moins trivial. Mais en quoi consiste exactement la robustesse dans le processus de conception mécanique ?

Selon la norme AFNOR, *un produit ou un procédé est dit robuste s'il est insensible aux sources de variabilités, même si ces sources n'ont pas été éliminées*. Aussi, effectuer une conception robuste consiste en la réalisation du meilleur système en prenant en compte l'ensemble des « événements » pouvant nuire aux performances. Ainsi, un système sera dit robuste si ses performances fonctionnelles sont peu sensibles aux variations de ses conditions d'utilisation et de production. Il est possible de catégoriser ces variabilités :

- les imprécisions « subies », liées au processus de fabrication et de caractérisation du système affectant les propriétés des matériaux, les dimensions et chargements.
- les imprécisions « pilotées », inhérentes au processus même de conception. Elles correspondent aux évolutions du projet au cours de sa phase de développement.

En mécanique, plusieurs approches ont été proposées pour modéliser et gérer des imperfections de différentes natures. Ces approches peuvent être non-déterministes, de type probabiliste ([ARN05], [MAT97]), intervalle ([DEC99], [DES00]) convexe ([BEN99]) ou encore exploitent la théorie des sous-ensembles flous ([LAL98], [MAS05], [PLE01]). Elles peuvent également être déterministes par la génération de surfaces de réponse issues de développements en série ([DAS97b]).

Dans les applications industrielles, la conception se limite souvent dans un premier temps à trouver les caractéristiques d'un produit en accord avec le cahier des charges. Ensuite,

la solution peut être optimisée. Néanmoins, le niveau de performance du produit peut éventuellement être altéré voire dégradé par des perturbations inhérentes aux imprécisions gérées. Aussi, l'objectif des travaux présentés ici vise à proposer une méthodologie de conception robuste visant à optimiser les performances du produit et à minimiser sa sensibilité vis-à-vis d'imprécisions. La dualité potentiellement antagoniste de la performance et de la robustesse, la performance consistant en la recherche de la solution la plus performante, la robustesse en la recherche de la solution la moins sensible à une variation des paramètres d'entrée, justifie ainsi la recherche du meilleur compromis. Cette volonté s'inscrit donc dans une logique de réduction des coûts et d'une plus grande réactivité en phase de développement.

Les travaux présentés par la suite auront pour application la suspension du groupe motopropulseur (GMP) qui constitue l'organe d'adaptation reliant le GMP à la caisse d'un véhicule. Cette suspension, représente, de par ses fonctions d'adaptation, une illustration intéressante d'un système dynamique pouvant être dimensionné par optimisation numérique tout en étant soumis à des imprécisions. Ces fonctions sont au nombre de quatre :

- le maintien du GMP sous son poids propre,
- la limitation des débattements du GMP sous couples ou autres chargements afin de ne pas venir interférer avec son environnement sous le capot,
- le filtrage des excitations dynamiques du GMP dans une gamme de fréquences suffisante pour assurer un bon niveau de confort vibratoire et acoustique dans le véhicule,
- l'atténuation ou non-amplification des vibrations de la caisse liées à l'excitation provenant de la route.

Kreis [KRE01] montre le caractère antagoniste de ces fonctions en effectuant quelques unes des constatations suivantes : la limitation des débattements implique une raideur statique élevée, le filtrage dynamique nécessite une raideur dynamique faible alors que le traitement de l'excitation route requiert un amortissement fort donc une rigidité dynamique forte. Ces trois observations mettent en évidence l'intérêt de la mise en place d'une stratégie d'optimisation multi-objectifs permettant la recherche de compromis entre ces diverses fonctionnalités.

Par ailleurs, chez un constructeur automobile généraliste comme le groupe PSA, la recherche de satisfaction chez l'acquéreur d'un véhicule est essentielle et passe entre autres par la réalisation d'enquêtes visant à établir des statistiques sur les retours clientèles, permettant ainsi de corriger des défauts ou problèmes sur un ou plusieurs organes (Ces enquêtes ont pour nom Plan Panne ou Plan Qualité). Elles ont révélé que la plupart des facteurs liés à l'insatisfaction relative au confort vibratoire et acoustique imputable à la suspension GMP n'était pas forcément liée à un défaut des éléments de suspension moteur mais à une dispersion non maîtrisée sur ces éléments. Cette problématique a deux causes essentielles :

- *l'effet de nombre* : contrairement à des industries telle que l'aéronautique, qui, de par la faible quantité de production peut prétendre à la réalisation efficace d'un suivi de fabrication visant à réduire les dispersions, la production de plusieurs millions de véhicules par an, n'autorise pas le même suivi de par le coût engendré.
- *la multiplicité des fournisseurs* : de par cet effet de nombre, les mêmes pièces peuvent être réalisées par plusieurs fournisseurs dont les procédés de fabrication peuvent être différents, créant ainsi une diversité dans la répartition des dispersions.

Aussi, il apparaît clairement qu'un compromis entre le niveau de maîtrise des dispersions et les moyens requis pour y parvenir doit être trouvé. Ce constat justifie alors le bienfondé de la démarche visant à prendre en considération les variabilités sur les paramètres dimensionnant une suspension GMP dans le processus d'optimisation en avance de phase. Fort de ce constat, un couplage de ces deux procédés apparaît alors comme évident.

Ainsi, l'objet des travaux de thèse présentés dans ce document est la définition d'une stratégie d'optimisation multi-objectif robuste adaptée au problème de dimensionnement de systèmes dynamiques en phase d'avant-projet. La finalité de tels travaux est le développement d'outils numériques permettant la prise en compte des imprécisions dans le dimensionnement de tels systèmes dynamiques et plus spécifiquement à celui des suspensions GMP.

La première partie de ce document consiste en une étude bibliographique s'articulant en deux volets. Le premier consiste en un recensement des méthodes les plus usitées des méthodes d'analyse de la robustesse de systèmes sujets à des imprécisions. Une confrontation de ces méthodes sera réalisée en considérant, entre autre, le contexte de l'ingénierie. Le second volet de cette étude bibliographique est consacré à la réalisation d'un état des lieux de différents procédés d'optimisation numériques déterministes classiques pouvant être appliqués au dimensionnement de la suspension GMP. A l'issue de cette partie, les stratégies les plus pertinentes en matière d'optimisation multi-objectif et d'analyse de la robustesse sont retenues afin d'être appliquées à notre problématique industrielle.

La deuxième partie sera consacrée à la description des exigences à satisfaire par les supports du Groupe Moto-Propulseur (GMP). En tant qu'organe d'adaptation reliant ce dernier à la caisse, la suspension du GMP est représentative d'un système mécanique soumis à diverses sources d'excitations. Le fonctionnement de ce système ainsi que les principales sources d'excitation sont alors décrits. De même, les prestations devant être assurées par la suspension sont explicitées en évoquant les règles de conception métier. Ensuite, la description des items dimensionnant une suspension moteur est effectuée. Les principales sources d'imprécisions des variables seront énumérées et qualifiées. Ainsi, le couplage des prestations inhérentes à la suspension GMP avec les imprécisions sur les données d'entrée mettent alors en évidence le besoin du développement d'un outil de dimensionnement robuste d'un tel système.

La troisième partie consistera en la formulation numérique du problème d'optimisation robuste d'une suspension GMP en phase d'avant-projet. Chaque cas de fonctionnement de la suspension fait l'objet du développement d'un modèle numérique dédié représentatif des prestations d'une suspension GMP. Dans chaque modèle sont considérées les imprécisions sur les paramètres de conception via l'élaboration de fonctions « robustes », constituant ainsi l'intérêt principal de ces travaux. Cette méthodologie est appliquée au cas simple d'une optimisation mono-objectif impliquant un nombre de paramètres réduit dans le but de confirmer l'orientation choisie des travaux.

Dans la dernière partie, la mise en œuvre d'une stratégie d'optimisation multi-objectif robuste sur un exemple complet de dimensionnement fonctionnel d'une suspension GMP en avant-projet est proposée. Les résultats issus de ces optimisations mettent en évidence les différences d'architectures obtenues, compte-tenu de l'intégration de la robustesse dans le processus de dimensionnement vis-à-vis d'une optimisation dite classique. Un outil d'analyse statistique basé sur les simulations de Monte-Carlo permet la validation des solutions en termes d'efficacité et de robustesse.

Enfin, en conclusion de ces travaux, une synthèse des remarques et des résultats est exposée de même que les perspectives envisagées.

CHAPITRE 2

*Analyse de la robustesse et
Méthodes d'optimisation*

2 ANALYSE DE LA ROBUSTESSE ET METHODES D'OPTIMISATION

2.1 Introduction

Au terme de la présentation générale, l'intérêt de développer des outils pouvant simplement être qualifié « d'aide à la prise en compte des imprécisions » a été mis en évidence. Cependant, avant d'aborder le cœur même du problème qui nous concerne, nous nous concentrerons sur la façon dont sont décrites les imprécisions et les moyens que l'on peut mettre en œuvre pour analyser la robustesse d'un système. Ce premier chapitre aura donc pour but, dans un premier temps, de recenser de manière non exhaustive les méthodes d'analyse de la robustesse puis de les confronter en considérant, entre autres, le contexte de l'ingénierie.

Ainsi, dans la première partie, les méthodes stochastiques d'analyse de la robustesse seront décrites. Nous décrirons entre autres la méthode des simulations de Monte-Carlo qui reste une référence de par sa fiabilité même si son principal inconvénient reste un coût de calcul pouvant être rédhibitoire. Aussi, dans la deuxième partie, la représentation de la robustesse par la méthode des intervalles sera proposée. Cette méthodologie présente l'avantage d'être extrêmement explicite mais a pour inconvénient majeur une surestimation des résultats. Enfin, dans la troisième partie, l'analyse de la robustesse par la méthode des perturbations sera présentée. Cette méthode est d'ores et déjà répandue dans le monde de l'industrie et notamment dans les codes de calculs par éléments finis. Elle sera pour nous la méthode qui nous permettra de coupler au mieux l'analyse de la robustesse avec l'optimisation numérique.

A l'issue de ce recensement, nous présenterons un état des lieux de différents procédés d'optimisation numérique classiques qui nous permettront d'améliorer le comportement de la suspension GMP.

2.2 Méthodes stochastiques d'analyse de la robustesse

La plupart des problèmes d'ingénierie mécanique sont très souvent modélisés par des procédures déterministes conventionnelles dont la qualité n'est avérée que si le design prend exactement les valeurs au nominal. Pour pallier à cette restriction, la notion de robustesse est introduite pour exprimer la volonté du concepteur d'intégrer les imprécisions sur la valeur des paramètres, de sorte que le design obtenu ne soit plus uniquement valable qu'à la valeur nominale des paramètres.

La méthode la plus utilisée dans le contexte de l'industrie est sans nul doute la méthode des simulations de Monte-Carlo dont l'efficacité n'est plus à prouver mais qui présente le désavantage non négligeable de posséder un coût numérique important limitant ainsi son champ d'application [MCM99]. Pour pallier à cet inconvénient, l'approche stochastique a été développée dès le début des années 80 pour prendre en compte l'influence de la variabilité des paramètres de conception sur la réponse.

Aussi, un ensemble de méthodes utilisant cette approche a été développé et nous allons nous attacher dans ce chapitre à en décrire les principales.

2.2.1 Méthode de simulation de Monte-Carlo

Cette méthode est d'une relative simplicité, le principe étant d'écrire ou de réaliser l'expérience étudiée sous la forme d'une étude statistique. L'objectif de cette méthode est de trouver la valeur de l'espérance mathématique $E(x)$ de l'événement, ainsi que les moments aux différents ordres (variances ...). Pour cela, l'événement doit être décrit par une variable aléatoire x . Pour y parvenir, il faut obtenir n réalisations indépendantes de l'événement auxquelles on associera n valeurs que l'on notera x_i pour i variant de 1 à n . Ce processus s'appelle l'échantillonnage. On obtient ainsi une approximation de l'espérance :

$$E(x) \approx \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad \text{Eq. 2-1}$$

L'analyse de la robustesse telle qu'on l'entend prend alors tout son intérêt puisque d'une manière simple, on a accès à l'estimation de la variance des réalisations de X qui est pour le concepteur un bon estimateur de la sensibilité de l'événement à la variation des paramètres. La valeur de cette estimateur est donnée par :

$$Var(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))^2 \quad \text{Eq. 2-2}$$

La validité de la méthode des simulations de Monte-Carlo est liée aux nombres d'échantillons réalisés. La convergence d'une simulation de Monte-Carlo est atteinte lorsque le nombre d'échantillons réalisés est suffisant pour que l'étude soit représentative de l'expérience que l'on étudie. Aussi, pour des phénomènes complexes décrits par de nombreuses variables aléatoires, la vitesse de convergence de la méthode Monte-Carlo peut être lente.

Deux remarques sont à noter. Tout d'abord, la méthode de simulation de Monte-Carlo est une méthode de référence, d'une grande simplicité mais aussi d'une grande fiabilité. Ensuite, cette méthode est coûteuse en temps de calcul, surtout si le processus étudié est riche en paramètres

Des méthodes avancées des simulations de Monte-Carlo tendent à diminuer ce coût numérique via la diminution de la variance. Cependant, les algorithmes mis en œuvre pour réaliser cette réduction impliquent une connaissance approfondie du système que l'on souhaite étudier [DEC99], [ELI01].

Aussi, outre l'efficacité, il est nécessaire de prendre en compte la faisabilité. C'est pourquoi la méthode Monte-Carlo élémentaire est souvent préférable lorsqu'il s'agit d'un système pour lequel on dispose de peu d'informations, elle constitue ainsi une référence éprouvée.

2.2.2 Fiabilités et incertitudes

Une voie d'analyse avancée de la robustesse passe par le concept de fiabilité dont le principe consiste à s'interroger sur la garantie possible ou non du comportement de la structure par les calculs. Initialement, les études fiabilistes reposaient sur des calculs déterministes pour lesquels, dans le cas du calcul de structure, les chargements et la résistance de la structure étaient supposés certains. La notion de fiabilité résultait alors dans l'ajout de coefficients de sécurité globaux introduits dans les calculs avec pour conséquence un surdimensionnement manifeste et coûteux [DEC99].

Une autre manière d'appréhender la démarche fiabiliste consiste à évaluer le risque sous la forme d'une probabilité de défaillance. Les études fiabilistes actuelles utilisent, outre le traitement des variables aléatoires, un ensemble d'outils mathématiques permettant :

- de traiter les incertitudes paramétriques,
- de quantifier une probabilité de défaillance,
- de déterminer l'influence des paramètres et leur impact sur les risques de défaillance par des études de sensibilités.

2.2.2.1 Analyses fiabilistes

La détermination de la fiabilité d'une structure consiste en l'évaluation de la probabilité d'atteindre et de dépasser un état limite sur cette structure. Cette notion de fiabilité est ainsi étroitement liée à la notion de défaillance.

La détermination de cette probabilité peut s'effectuer selon quatre niveaux de difficulté croissante.

- *Etude de niveau 1*

Le niveau 1 consiste en l'extension d'un calcul déterministe, pondéré par des coefficients de sécurité. Ces coefficients sont déterminés par le type du paramètre imprécis, soit de façon empirique, soit à l'aide de normes.

- *Etude de niveau 2*

C'est à partir de ce niveau d'analyse de fiabilité qu'intervient la notion d'étude statistique. En effet, les variables du problème sont désormais décrites par leurs deux premiers moments statistiques à savoir la moyenne et l'écart-type. Deux notions sont associées [DEC99] :

- Fonction d'état limite : cette dernière est basée sur le principe qu'une structure possède deux états, à savoir un état de défaillance et un état de sécurité, et dont la frontière prend le nom de fonction d'état limite. Cette surface d'état limite est une fonction aléatoire pilotée par les variables du problème $x_{i,i=1..n}$. La fonction d'état limite peut alors s'écrire $G = G(x_1, \dots, x_n)$ avec les conventions suivantes :
 - $G = 0$ pour l'état limite
 - $G < 0$ pour les points du domaine de défaillance
 - $G > 0$ pour les points du domaine de sécurité
- Probabilité de défaillance : celle-ci correspond à la probabilité qu'un point quelconque $x = x_1, \dots, x_n$ de l'état courant de la structure soit situé dans le domaine de défaillance. Généralement, la probabilité de défaillance est opposée à la probabilité de résistance (ou fiabilité) pour laquelle le point x appartient à l'état de sécurité. Il pourra alors être déterminée une variable additionnelle prenant le nom de marge de sécurité M , qui pour le cas d'une structure de résistance R soumis à un chargement S peut être déterminée par $M = R - S$. L'analyse de fiabilité consiste alors à déterminer la probabilité de défaillance pouvant être écrite $P_f = P(R - S < 0) = P(M < 0)$. A cette probabilité sera alors associé un indice de fiabilité β représentatif de la marge résiduelle par rapport au risque de défaillance.

• *Etude de niveau 3*

Les études du niveau 3 ne constituent en fait qu'une avancée des études de niveau 2 pour lesquelles l'indice de fiabilité est modifié. Le principe des études de ce niveau consiste alors à linéariser la surface d'état limite de telle sorte que la variable aléatoire M soit écrite comme suit :

$$M = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = \langle a \rangle x + b \quad \text{Eq. 2-3}$$

Le nouvel indice de fiabilité, proposé par Hasofer et Lind [DEC99] s'écrit (cf. Figure 2-1) :

$$\beta_{HL} = \frac{E[M]}{\sqrt{\text{var}(M)}} \quad \text{Eq. 2-4}$$

avec $E[M]$ espérance de la marge et $\sqrt{\text{var}(M)}$ son écart-type.

La valeur de cet indice correspond à la distance minimale entre la surface d'état limite et l'origine de l'espace standard. L'espace standard correspond au changement de repère nécessaire à l'évaluation de la probabilité de défaillance des variables dans l'espace normal centré réduit. Ainsi, à la variable aléatoire M , d'espérance μ_M et d'écart-type σ_M sera associée une nouvelle variable normée et centrée, définie par :

$$u = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad \text{Eq. 2-5}$$

Le point de surface d'état limite définissant β_{HL} est appelé point de conception et noté U^* . Dans l'espace standard, les variables de base sont devenues indépendantes et elles définissent un vecteur normal U . U^* correspond au point de défaillance le plus probable : c'est donc le point appartenant à la surface d'état limite qui définit la marge de sécurité la plus faible.

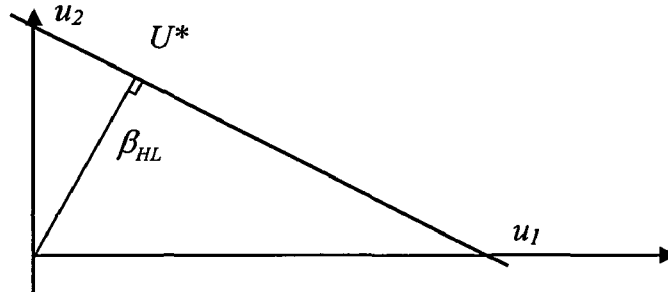


Figure 2-1 : Indice de fiabilité de Hasofer et Lind.

Cette technique d'approximation, consistant à linéariser une surface d'état limite quelconque par un hyperplan, est appelée approche FORM (First Order Reliability Method). Elle constitue le niveau 3 des études fiabilistes. Il est possible d'en résumer le principe en quatre étapes :

- linéarisation du problème (afin de déterminer la fonction d'état limite),
- transformation des variables « physiques » vers l'espace standard,
- détermination du point de conception et de l'indice β_{HL} ,
- évaluation de la probabilité de défaillance.

La probabilité de défaillance peut être évaluée par différentes méthodes numériques :

- Les méthodes de Monte-Carlo

Les méthodes de Monte-Carlo ont été décrites dans la section précédente. Il est à noter que pour la méthode directe, l'évaluation de cette probabilité devient :

$$P = \frac{\text{nombre de résultats conduisant à la défaillance}}{\text{nombre total de simulations}} \quad \text{Eq. 2-6}$$

- Approximations FORM et SORM

Ces méthodes constituent des techniques approchées permettant l'évaluation des données caractéristiques. Comme il a été cité précédemment, la méthode FORM a pour principe la linéarisation de la fonction d'état limite $G(X)$ à l'aide d'un développement en série de Taylor limité au premier ordre (autour du point de conception X^*).

$$G_{FORM}(u) = g(u_i^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_u}{\partial u_i}(U^*) (u_i - u_i^*) \quad \text{avec } g(u_i^*) = 0 \quad \text{Eq. 2-7}$$

Un indice de fiabilité est alors défini à l'aide des moments de la fonction linéarisée :

$$\mu_{GFORM} = -\sum_{i=1}^n u_i^* \frac{\partial g}{\partial u_i} = -U^{*T} G_u \quad \text{Eq. 2-8}$$

Et

$$\sigma^2_{GFORM} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} \right)^2 = G_u^T G_u \quad \text{Eq. 2-9}$$

Finalement,

$$\beta_{HL} = \frac{-U^{*T} G_u}{\left(G_u^T G_u \right)^{1/2}} \quad \text{Eq. 2-10}$$

La probabilité de défaillance est approximée, quant à elle, par la relation :

$$P_f = \Phi(-\beta_{HL}) = \Phi(-|U^*|) \quad \text{Eq. 2-11}$$

où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de distribution cumulée.

De la même manière, pour la méthode SORM, l'approximation obtenue est plus précise car la surface est approchée par une surface quadratique dont le rayon de courbure (R) est celui de la surface réelle au point de conception. Ainsi, un développement de la fonction d'état limite donne une équation de la forme :

$$G_{SORM}(u) = \nabla g_u(u^*)^T (u - u^*) + \frac{1}{2} (u - u^*)^T H(u^*) (u - u^*) \text{ avec } g(u_i^*) = 0$$

avec $H = \nabla^2 g(u)$, matrice Hessienne.

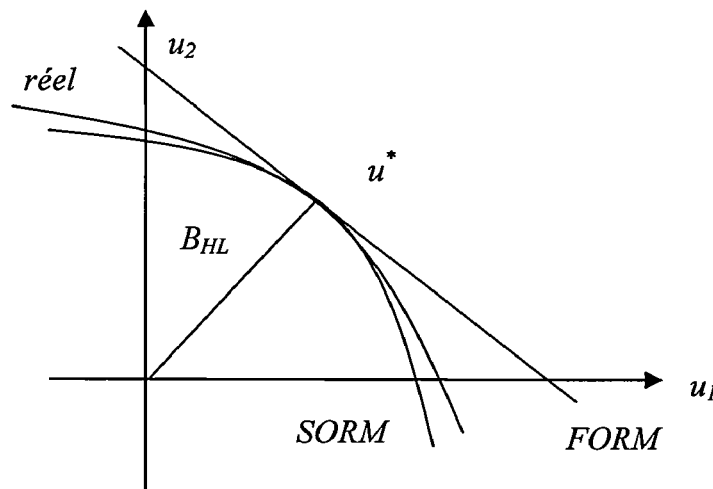


Figure 2-2 : Approximation FORM et SORM

2.2.3 Outils statistiques d'analyse de la robustesse

Depuis quelques années, des outils permettant la prise en compte d'imprécision en calcul de structures ont été développés, que ce soit en régime statique ou dynamique. Ces approches considèrent les paramètres traités comme des variables aléatoires avec des distributions de probabilité connues. Dans ces conditions, la réponse du système pourra être déterminée en utilisant des méthodes telles que les simulations de Monte-Carlo, décrites précédemment, ou des méthodes d'analyse statistiques avancées.

2.2.3.1 ANOVA

La méthode ANOVA [JAU00] est un outil statistique permettant l'analyse systématique de la variance d'échantillons. Cette méthode s'inscrit complètement dans le concept d'analyse de la robustesse d'un design dans le sens où elle permet de réaliser l'étude de l'influence de la distribution d'un variable aléatoire sur le comportement global de la structure.

2.2.3.2 ST-ORM

La méthode ST-ORM [DEC99] a pour but la réalisation de simulations stochastiques de systèmes physiques. Il s'inscrit directement dans le processus d'analyse de la robustesse dans la mesure où il a pour but la recherche de la dispersion de la réponse d'un système liée aux imprécisions existant sur les paramètres décrivant le système. L'inconvénient majeur d'un tel outil est la nécessité de connaître la fonction de densité de probabilités des paramètres du système étudié.

2.2.4 Conclusion

Cette partie a permis de présenter le mode d'analyse privilégié pour l'étude des imprécisions dans le domaine industriel. En effet, il est d'usage de réaliser l'analyse des dispersions via la méthode d'analyse stochastique afin de se donner un intervalle de confiance de la réponse du système étudié. La méthode de référence, dans un contexte industriel, est bien entendu la méthode de Monte-Carlo car elle présente l'avantage non négligeable d'être facile à mettre en place et surtout de s'adapter à l'ensemble des problèmes, même complexe. Cependant, on voit apparaître depuis quelques années des méthodes d'analyse statistique de la dispersion, qui permettent d'avoir une plus grande réactivité en termes de temps de calcul, les simulations de Monte-Carlo étant inapplicables si le système étudié est de taille conséquente.

2.3 Représentation par intervalles de la robustesse

2.3.1 Introduction et motivation

Lorsque la question d'analyser la robustesse d'un système se pose, le premier mode de réflexion est de s'interroger sur l'incidence de la variation de la valeur d'un paramètre dimensionnant sur la réponse du système étudié. Aussi on peut être amené à se demander quel sera le comportement du phénomène, que l'on étudie, si les données d'entrée qui le caractérisent peuvent prendre une multitude de valeurs comprises dans un intervalle borné.

C'est en ce sens que les premiers travaux concernant l'arithmétique des intervalles ont été effectués. Le précurseur de ces travaux fut Young en 1931, mais Moore en 1966 [MOO66] parle le premier d'arithmétique des intervalles et établit les bases de cette théorie. Par la suite, plusieurs chercheurs se sont attachés à développer, utiliser et appliquer ce nouveau mode de calcul sur des problèmes réels [ALE98], [NEU93], [RUM95]. Une synthèse des travaux sur les intervalles a été réalisée par Neumaier [NEU90].

D'autres chercheurs apportent aussi leur contribution sur la complexité de l'utilisation d'une telle arithmétique et propose des solutions. Différents principes de résolutions de systèmes linéaires à intervalles ont été notamment développés par Rohn [ROH95], [ROH97], par Rump [RUM98], puis améliorés [BEA98], [KEA96].

L'arithmétique des intervalles constitue une approche différente des méthodes probabilistes dans le sens où il n'est pas toujours possible d'avoir une description statistique de la répartition des variables. La plupart des implantations de cette arithmétique sont basées sur l'arithmétique flottante. L'utilisation de celle-ci est motivée par le fait que les calculs sont très peu coûteux puisque la représentation des nombres est de longueur fixe, ce qui permet l'implémentation matérielle des opérations sur ces nombres. Cependant ses résultats ne sont pas garantis.

L'arithmétique par intervalles est par contre une arithmétique qui offre des résultats garantis. Tout nombre est constitué par un intervalle le contenant, dont les bornes sont représentées par l'arithmétique flottante. De plus, tout calcul fournit un intervalle qui encadre le résultat recherché. Cependant certaines propriétés mathématiques ne sont plus vérifiées, ce qui nécessite une grande vigilance de l'utilisateur lors de l'écriture des algorithmes. En outre, il est souvent difficile d'échapper à un accroissement des intervalles, autrement dit à une surestimation des résultats.

La prochaine partie sera consacrée à la définition de l'arithmétique par intervalles et à ses propriétés, ainsi qu'au problème de l'évaluation d'une fonction f définie sur \mathbb{V} pour un argument intervalle. Dans la troisième partie, nous montrerons que pour utiliser cette arithmétique, il est nécessaire de revoir les algorithmes numériques usuels.

2.3.2 Intervalles : définitions

Le principe fondamental de l'arithmétique des intervalles consiste à remplacer tout nombre par un intervalle le contenant et à effectuer les calculs sur des intervalles. Le résultat du calcul déterministe exact appartient à l'intervalle calculé. Contrairement aux méthodes

probabilistes, aucune notion de pondération, de graduation ou d'occurrence n'est rattachée aux valeurs de l'intervalle.

Le premier intérêt est de pouvoir prendre en compte les imprécisions de mesure dans le cas où les données sont des valeurs expérimentales. Le second intérêt est de permettre de manipuler sur ordinateur, en utilisant le calcul flottant, des quantités qui ne sont pas exactement représentables : par exemple, le nombre π sera représenté par $[3,14 ; 3, 15]$ sur une machine qui calcule en base 10 avec 3 chiffres de mantisse. Cet intervalle contient de façon garantie la valeur de π et tout calcul impliquant cet intervalle contiendra le résultat du calcul avec π . Cette propriété de résultats garantis constitue l'avantage essentiel de l'arithmétique des intervalles; comme il est de plus possible de préserver cette propriété avec une implantation basée sur l'arithmétique flottante, son intérêt essentiel provient de son effectivité. En effet, et ce même si les données sont représentables exactement, les calculs intermédiaires sont arrondis et une bonne implantation de l'arithmétique des intervalles prend en compte ces erreurs d'arrondi.

Un intervalle A est défini par l'ensemble borné dans ∇ suivant :

$$A = [a_1, a_2] = \{x / a_1 \leq x \leq a_2 ; a_1, a_2 \in \nabla\} \quad \text{Eq. 2-12}$$

Si $a_1 = a_2$, l'intervalle est dit dégénéré et correspond à un scalaire.

Cette écriture marque de manière significative l'appartenance des intervalles aux théories ensemblistes. La plupart des publications faisant appel aux théories des intervalles adoptent ces notations. Hansen [HAN67], quant à lui, propose une écriture différente des intervalles sous forme centrée, où l'intervalle est décrit par son centre et sa largeur (cf. Annexe A).

De la même manière que sont définies des opérations et des relations élémentaires dans ∇ , on définit des opérations et des relations dans $\cup \nabla$. Neumaier [NEU90] propose une présentation complète et étoffée de l'arithmétique des intervalles, d'outils et de méthodes de résolutions pour les systèmes d'équations linéaires et non-linéaires en présence de paramètres imprécis.

2.3.3 Problèmes de l'arithmétique par intervalles

L'inconvénient majeur de l'arithmétique par intervalles est la surestimation des résultats. Deux phénomènes ont été principalement identifiés comme sources de ce problème. Le premier problème, connu sous le nom d'effet enveloppant ou « wrapping effect », est illustré par la figure suivante.



Figure 2-3 : Effet enveloppant : le plus petit pavé contenant l'image de la fonction f est le pavé grisé.

Si f est une fonction de ∇^m dans ∇^n , l'image par f d'un pavé X de ∇^m sera un ensemble de ∇^n de forme quelconque. Or l'arithmétique des intervalles impose que le résultat calculé soit un pavé de côtés parallèles aux axes qui contient $f(X)$ et ce pavé peut être de volume beaucoup plus grand que celui de $f(X)$.

Une solution pour remédier à ce problème consiste à découper X en sous-pavés et à prendre pour encadrement de $f(X)$, la réunion des images de ces sous-pavés. Le résultat n'est alors plus un pavé mais peut être très proche de l'image exacte [JAU00].

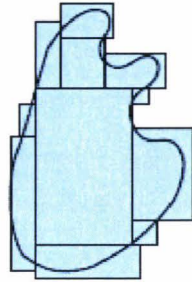


Figure 2-4 : Solutions d'un système par sous-pavage.

Le second phénomène expliquant la surestimation des résultats est le problème de dépendance des données ou décorrélation des données. Une des hypothèses permettant de s'assurer de l'équivalence de deux expressions est que chaque variable n'apparaisse qu'une fois dans les expressions [NEU90].

Prenons l'exemple de la fonction mono-paramétrique $f(x) = 2x - x$ ([DES99]) sur les intervalles A tel que, pour $A = [a_1, a_2] \in \cup \nabla$:

$$B = f(A) = 2A - A \quad \text{Eq. 2-13}$$

En appliquant l'arithmétique classique des intervalles (cf en Annexe A), on obtient :

$$B = [2a_1 - a_2, 2a_2 - a_1] \quad \text{Eq. 2-14}$$

Or il semble évident que le résultat obtenu n'est pas celui escompté. En effet, $2A - A$ a été calculé comme $2A - A = \{2a - b \mid a \in A, b \in A\}$ en ne prenant pas en compte la dépendance des occurrences de A . Ce résultat est à la base du théorème suivant, dû à Moore [MOO66] :

Si f est une fonction continue de ∇^n dans ∇^n définie par une expression dans laquelle chaque variable x_i apparaît au plus une fois, alors pour tout pavé $X \subset \nabla^n$, l'évaluation par intervalles obtenue en remplaçant x_i par la composante correspondante de X est exactement égale à $f(X)$.

2.3.4 Application à la résolution de systèmes

Comme cela a été exposé précédemment, l'arithmétique par intervalles ne présente pas les propriétés arithmétiques usuelles et les calculs ont une fâcheuse propension à surestimer les résultats. En particulier l'utilisation directe des algorithmes usuels ne donne que rarement des résultats satisfaisants. C'est ce que nous nous attacherons à mettre en évidence dans cette partie.

Cependant, avant d'entrer plus précisément dans ces problèmes de résolutions, il est utile de mettre en évidence deux approches des résultats que l'on peut obtenir par l'arithmétique des intervalles.

Ces deux approches sont connues sous le nom d'optimiste et de pessimiste. En considérant le système $Ax = b$, deux manières s'offrent à nous d'écrire les solutions [DES99] :

$$\begin{cases} A \cdot x_{opt} = b \\ \text{Ou } x_{pes} = A^{-1}b \end{cases} \quad \text{Eq. 2-15}$$

La solution optimiste x_{opt} cherche à s'adapter au membre de droite. Dans la Figure 2-5, cette solution correspond à la figure géométrique en forme de « papillon » compris dans le pavé alors que la solution pessimiste x_{pes} s'apparente à une propagation d'erreur et pourrait être représentée par le pavé incluant la figure géométrique

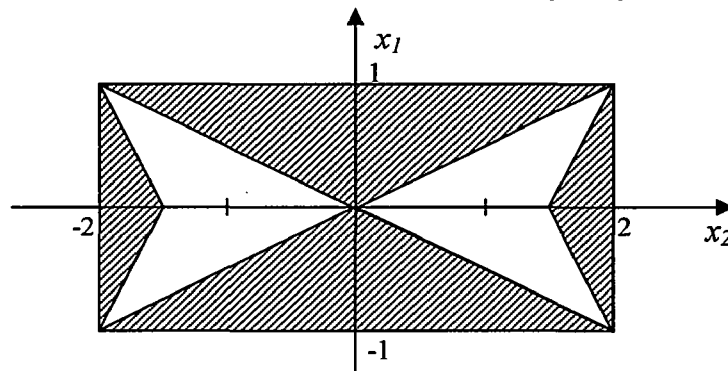


Figure 2-5 : Solution optimiste et solution pessimiste.

A cette terminologie sont associées deux formulations de problème : la solution optimiste sera obtenue grâce à une formulation implicite alors que la solution pessimiste sera issue d'une formulation explicite.

Nous allons illustrer nos propos par un exemple simple que l'on retrouve dans [DEC99] ou [DES99].

Soit le système linéaire simple suivant :

$$[1;2][x_1; x_2] = [3;8] \quad \text{Eq. 2-16}$$

La solution implicite doit vérifier le système précédent tel qu'il est écrit donc la solution qui vient naturellement est $[3;4]$

En effet, on peut alors écrire :

$$[1;2][3;4] = [3;8]$$

Eq. 2-17

alors que la solution explicite vient de la résolution classique du système à savoir :

$$[x_1; x_2] = \frac{[3;8]}{[1;2]} = [3;8] \times \left[\frac{1}{2}; 1 \right] = \left[\frac{3}{2}; 8 \right]$$

Eq. 2-18

Ainsi, les deux solutions permettent de réécrire les formulations de manière simple afin de bien appréhender la différence entre les deux modes de raisonnement :

Pour la solution explicite, on a :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 8 \right], \exists a \in [1;2]; \exists b \in [3;8] / ax = b$$

Eq. 2-19

alors que la solution implicite vérifie,

$$\forall x \in [3;4], \forall a \in [1;2]; \exists b \in [3;8] / ax = b$$

Eq. 2-20

ou encore

$$\forall x \in [3;4], \forall b \in [3;8]; \exists a \in [1;2] / ax = b$$

Eq. 2-21

On voit clairement déjà apparaître la complexité du choix du mode de résolution de systèmes linéaires à intervalles et de l'analyse des solutions issues de ces résolutions.

Les méthodes de résolution de systèmes linéaires par intervalles sont désormais largement décrites dans la littérature [DES99], [LAL98], [NEU90]. Elles sont de différents types et apportent chacune une nouvelle approche de la problématique.

2.3.5 Extension au nombre flous

La théorie des sous-ensembles flous permet d'associer à un paramètre considéré comme imprécis une fonction de forme, appelée fonction d'appartenance, caractérisant le degré de confiance affecté aux valeurs prises par ce paramètre. C'est en fait cette fonction d'appartenance qui définit complètement le nombre flou, noté \tilde{A} : support, forme, valeur crête Figure 2-6.

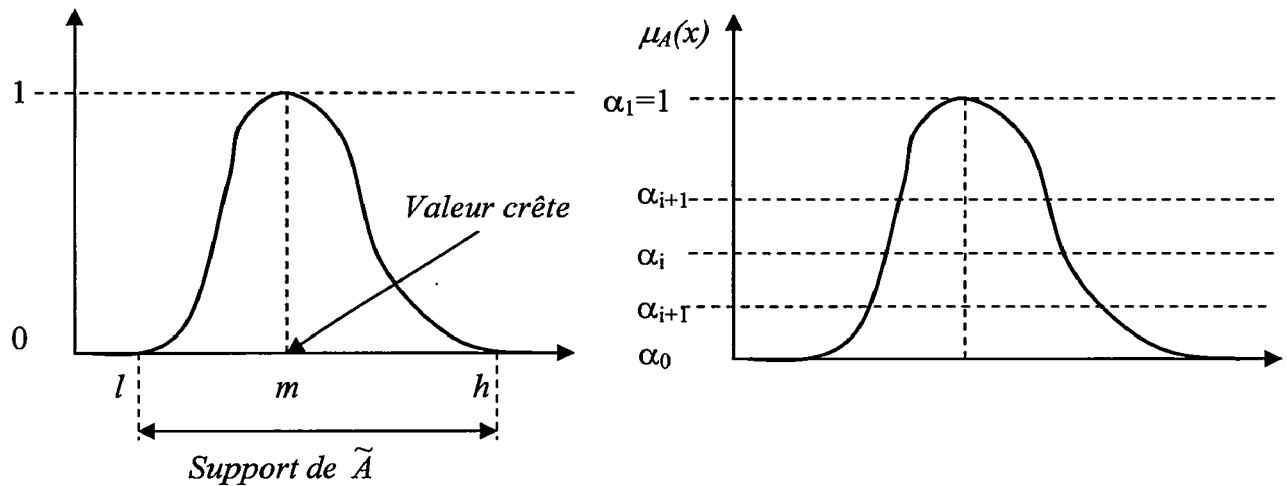


Figure 2-6: Un nombre flou \tilde{A} et discrétisation en α -coupures.

La valeur crête m représente en fait la valeur la plus fréquente prise par la donnée imprécise. Le support, borné par les valeurs l et h , permet de déterminer les limites prises par ces données. Enfin, la forme définit le degré d'imprécision associé à la donnée.

Il existe deux voies principales différentes qui permettent de manipuler les nombres flous et donc de résoudre les équations floues. La première repose sur le principe d'extension qui ne sera pas détaillé ici mais pour lequel le lecteur pourra trouver les fondements et références dans [LAL98]. Ce principe possède un inconvénient non négligeable à savoir qu'il est très coûteux et donc peu adapté à la résolution de systèmes linéaires. La seconde méthode repose sur l'utilisation d'une discrétisation des fonctions d'appartenance suivant différentes valeurs d' α -coupure. Par cette méthode, nous passons d'une représentation continue de la fonction d'appartenance $\mu(x)$ à une représentation discrète. En effet, la fonction d'appartenance est étudiée pour diverses valeurs du degré de confiance, comprises entre 0 et 1. Ces différentes valeurs sont appelées α -coupure.

Le nombre flou est donc discrétisé en autant d'intervalles que d' α -coupures. La résolution d'un système flou peut alors être réalisée en utilisant l'arithmétique des intervalles pour chaque α -coupure considérée.

2.3.6 Conclusions

L'arithmétique par intervalles constitue une bonne approche pour répondre à l'exigence de fiabilité des calculs. En effet, elle repose sur le principe que tout calcul retourne un encadrement garanti de son résultat. De plus, elle peut être implantée efficacement sur ordinateur et une panoplie d'algorithmes numériques a été développée spécifiquement pour tirer partie de cette arithmétique. Elle présente en outre l'intérêt de s'appliquer au cas où on n'a pas à disposition des informations sur la répartition des variables imprécises.

Cependant, il serait naïf de croire que les algorithmes transposés directement de l'arithmétique flottante donnent des résultats probants sur des intervalles. Le plus souvent, les encadrements obtenus sont trop pessimistes. En revanche, des algorithmes conçus pour l'arithmétique des intervalles fournissent des informations et des résultats inaccessibles en arithmétique flottante.

2.4 Analyse de la robustesse via la méthode des perturbations

2.4.1 Introduction

La majeure partie des travaux réalisés sur l'utilisation de cette méthode est décrite dans les ouvrages et publications ayant trait aux éléments finis, et plus précisément aux éléments finis stochastiques [BEN88], [BOU98], [IBR87], [MAL02]. Les premiers travaux relatifs à ces problèmes remontent au début des années 70 mais désormais de nombreux auteurs se sont penchés sur la question de la prise en compte des imprécisions dans des applications moins restreintes que les éléments finis.

Rappelons simplement que le but de cette méthode réside dans le calcul approché des modifications d'un système résultant soit d'une variation des paramètres d'un système, soit de l'introduction de paramètres nouveaux n'intervenant pas dans le système initial. Il s'agit d'une méthode très générale permettant d'exprimer les solutions d'un problème complexe en fonction de celle d'un problème voisin dont on connaît les solutions.

Comme il a été décrit ci-dessus, les champs d'application sont assez divers mais on retrouve très souvent ces méthodes dans les réanalyses statistiques. Ainsi, si on se réfère à la méthode de Monte-Carlo, on peut expliciter la réanalyse du système comme suit : considérons un processus qui implique la réalisation d'un grand nombre d'analyses d'un même problème, les variables n'étant que peu modifiées à chaque tirage, le nombre de calculs devant être effectués pour peut être considéré comme excessif au vue de l'information « nouvelle » qui va être apportée. C'est pour diminuer ce temps de calcul que l'on va chercher à réanalyser le système autour d'une configuration donnée.

Ce processus de réanalyse du système est basé sur le principe de perturbation d'un système via l'utilisation de méthodes déjà connues. La méthode que l'on retrouve de manière quasi systématique est la méthode du développement en série de Taylor. Dans [RIC02], les développements sont utilisés pour l'analyse, la réanalyse et le contrôle des systèmes non-linéaires chaotiques. [BER99] étudie efficacement la sensibilité des structures composites en fonction des paramètres de conception en exprimant la solution du système étudié sous forme polynomiale. [KHE95] l'applique à la thermique numérique et aux éléments finis. On retrouve ainsi naturellement ce procédé dans certains codes éléments finis pour la réalisation de calcul optimal de structures via l'analyse de sensibilité. Dans [IDE01], les développements en série de Taylor permettent de s'affranchir d'un nombre de calculs importants et longs pour l'analyse de sensibilité d'une structure éléments finis. Dans [GAR01], les séries de Taylor sont utilisées pour la programmation dans un code éléments finis de la réponse fréquentielle d'une structure.

Dans le contexte qui nous intéresse, à savoir l'optimisation, les développements en série et le calcul de sensibilités prennent tout leur sens. La méthode la plus connue qui utilise les informations concernant les sensibilités est la méthode Quasi-Newton [MAT97] pour laquelle, à chaque itération, on reformule le problème sous une forme plus simple. Ainsi, le modèle auquel on aboutit est un modèle quadratique qui n'est ni plus ni moins qu'un développement en série de Taylor à l'ordre 2.

D'autres types de développements sont utilisés dans les études de systèmes mécaniques. Ainsi on retrouve aussi dans les ouvrages les développements de Neumann. [CHA98] les utilise pour inverser la matrice de raideur stochastique. Il semble alors que l'application de cette méthode à ce type de problème se révèle efficace au sens où les résultats obtenus sont relativement bons et rapidement atteints en comparaison de la méthode de Monte-Carlo directe, à la condition, valable pour l'ensemble des développements en série, que les variations des paramètres soient relativement faibles.

Dans le paragraphe suivant, nous allons nous attacher à décrire de manière succincte les deux développements cités ci-dessus.

2.4.2 Méthode de réanalyse par développements en séries

2.4.2.1 Série de Taylor

Afin de pouvoir connaître le comportement de la fonction déplacement au voisinage de la valeur centre sans faire de calculs itératifs et répétitifs, une approximation de la fonction est réalisée. Pour ce faire, on utilise le développement en série de Taylor :

Soit la fonction f , dérivable à l'ordre n en un point x_0 de son domaine :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left[\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \right]_{x=x_0} \quad \text{Eq. 2-22}$$

avec ε , représentant l'imprécision au voisinage du paramètre x , supposé d'ordre de grandeur faible ($\varepsilon = x - x_0$).

Pour une fonction à une seule variable et pour un développement à l'ordre n , on trouve donc :

$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon \cdot f'(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \cdot f''(x_0) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \cdot f^n(x_0) \quad \text{Eq. 2-23}$$

Pour une fonction de plusieurs variables,

$$\text{en posant } P_m(\varepsilon) = \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^p \dots \sum_{i_m=1}^p \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}(x_0) \cdot \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_m} \quad \text{Eq. 2-24}$$

avec $m \in [0, n]$, p le nombre d'imprécisions et ε l'imprécision au voisinage du point considéré.

le développement devient

$$f(x_0 + \varepsilon) = P_0(\varepsilon) + P_1(\varepsilon) + \dots + P_n(\varepsilon) + 0 \cdot (\|\varepsilon\|^n)$$

avec n l'ordre de dérivation considéré.

Généralement, le développement est limité à l'ordre 2, soit :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \cdot \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \varepsilon_i + \frac{1}{2!} \cdot \sum_{i=1}^p \sum_{i_2=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(x_0) \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_{i_2} + 0 \cdot (\|\varepsilon\|^2) \quad \text{Eq. 2-25}$$

D'après le théorème de Schwarz,

$$\sum_{i=1}^p \sum_{i_2=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(x_0) \cdot \varepsilon_{i_1} \cdot \varepsilon_{i_2} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) \cdot \varepsilon_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \quad \text{Eq. 2-26}$$

Le développement devient :

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + \left[\sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \varepsilon_i \right] + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) \cdot \varepsilon_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \right] + o(\|\varepsilon\|^2)$$

Eq. 2-27

Le gradient est ainsi défini par :

$$\left[\sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \varepsilon_i \right]$$

Eq. 2-28

et le Hessien par :

$$\left[\sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) \cdot \varepsilon_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \right]$$

Eq. 2-29

• Troncature et erreur

Comme il a été montré précédemment, les développements en série de Taylor sont en général tronqués à un ordre défini pour lequel l'erreur doit être inférieure à :

$$\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \left[\frac{\partial^{n+1} f(x)}{\partial x^{n+1}} \right]_{\max}$$

Eq. 2-30

où $\left[\frac{\partial^{n+1} f(x)}{\partial x^{n+1}} \right]_{\max}$ est la valeur maximale de la dérivée d'ordre $n+1$ dans l'intervalle $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ et ceci pour un développement à l'ordre n .

Le lecteur pourra trouver dans la littérature d'autres développements en série, le paragraphe suivant se propose d'exposer un autre type de développement permettant d'avoir accès aux ordres supérieurs en optimisant le nombre de calculs. En effet, les travaux présentés ont pour objet non seulement l'analyse de la robustesse mais aussi l'optimisation numérique pour laquelle le calcul des sensibilités est fondamental. Ainsi, un même calcul de sensibilité interviendra à la fois pour l'analyse de robustesse et pour l'optimisation.

2.4.2.2 Série de Neumann

Considérons un système linéaire classique $A_0 \cdot X_0 = b$ et considérons une perturbation ΔA de la matrice A_0 , on a :

$$\begin{aligned} (A_0 + \Delta A) \cdot X &= b \\ A_0 (I + A_0^{-1} \Delta A) X &= b \end{aligned}$$

Eq. 2-31

En modifiant l'écriture de l'équation précédente, on a :

$$X = \left(I + A_0^{-1} \cdot \Delta A \right)^{-1} \cdot A_0^{-1} \cdot b \text{ avec } I \text{ matrice identité} \quad \text{Eq. 2-32}$$

Les termes entre parenthèses ci-dessus peuvent être exprimés en ce qui est appelé développement en série de Neumann

$$X = \left(I - P + P^2 - P^3 + \dots \right) A_0^{-1} \cdot b = \left(\sum_k (-P)^k \right) A_0^{-1} \cdot b \quad \text{Eq. 2-33}$$

avec $P = A_0^{-1} \cdot \Delta A$. Le vecteur réponse du système peut être écrit comme suit :

$$X = X_0 - P X_0 + P^2 X_0 - P^3 X_0 + \dots \quad \text{Eq. 2-34}$$

ou encore :

$$X = X_0 - X_1 + X_2 - X_3 + \dots \quad \text{Eq. 2-35}$$

La solution de la série peut être alors exprimée par les équations récursives suivantes :

$$A_0 \cdot X_i = \Delta A \cdot X_{i-1} \text{ avec } i = 1, 2, \dots \quad \text{Eq. 2-36}$$

L'avantage de cette méthode réside dans le fait que seule la partie fixe de la matrice A doit être inversée une fois, alors que les termes de perturbations supplémentaires X_i sont calculées de manière itératives. La série peut alors être tronquée à un ordre arbitraire pour lequel l'erreur est donnée par la norme :

$$\frac{\|X_i\|}{\left\| \sum_{k=0}^i (-1)^k X_k \right\|} \leq \varepsilon_1 \quad \text{Eq. 2-37}$$

ou encore

$$\frac{\|r_i\|}{\|b\|} \leq \varepsilon_2 \quad \text{Eq. 2-38}$$

où $r_i = b - (A_0 + \Delta A) \cdot X_i$. Ainsi, la solution finale est atteinte lorsque le critère d'arrêt (ε_1 ou ε_2) est satisfait. Il est ainsi possible d'effectuer un test de précision après chaque itération de calcul de X_i . En règle générale, le premier critère est le plus souvent utilisé, car il s'avère être le plus efficace et le plus facilement implémentable en termes de programmation [PAP96].

Les développements en séries nécessitent le calcul des dérivées à des ordres parfois élevés. Le paragraphe suivant se propose de présenter les méthodes de calculs de dérivées les plus usitées.

2.4.3 Méthodes de calculs des dérivées d'une fonction

A la vue des opérations nécessaires à la mise en place des méthodes de développement décrites ci-dessus, nous avons été amenés à nous poser la question du mode de calcul des dérivées de la réponse d'un système. Cette question prend tout son intérêt quand on est amené à faire l'étude de la sensibilité d'un système dont le nombre de paramètres le décrivant n'est pas négligeable. Cette réflexion est d'autant plus justifiée que l'ordre de dérivation auquel on veut aboutir est grand, notamment à cause de l'aspect combinatoire. Ainsi pour l'évaluation du Hessien d'un système à n paramètres, il faut $n(n+1)/2$ évaluations des dérivées secondes. Aussi, étant donné le nombre d'opérations que l'on peut être amené à effectuer, le choix d'une méthode efficace pour réaliser ces calculs est prépondérant. Le lecteur pourra trouver une description détaillée des divers modes de calculs des dérivées en Annexe C

Ci-dessous est proposée une description rapide des trois modes de dérivations les plus usités.

- Calculs analytiques

Le premier mode de calcul de dérivées est la méthode analytique pour laquelle existent deux méthodes de résolutions dépendantes de la complexité du problème :

- Si l'expression du problème est celle d'une composition de fonctions arithmétiques simples, on peut calculer directement la dérivée de l'expression via la méthode de composition des dérivées de fonctions.
- Si la fonction ou le problème ne peut être exprimé de manière analytique, il peut alors être utilisé la méthode des dérivées non-entières [KRE01].

- Calculs par méthodes des différences finies

C'est en soit la méthode la plus systématique pour le calcul des dérivées. C'est une méthode générale qui ne nécessite que l'évaluation de la fonction en tous les points du domaine que l'on souhaite étudier. Cette méthode est soumise à des restrictions en terme de validité : la valeur de la dérivée est fonction du pas de perturbation et de la stabilité de la fonction.

- Calcul par différenciation automatique

La méthode de différenciation automatique est un ensemble de techniques de programmation informatique qui ont pour objectif le calcul systématique des dérivées d'une fonction, d'ordre 1 ou supérieur. Cette technique repose sur le principe que chaque fonction, aussi complexe soit-elle, est exprimée numériquement comme une succession d'opérations élémentaires et de fonctions élémentaires (telles les fonctions trigonométriques) pour lesquelles le calcul des dérivées peut être plus facilement réalisé [MAT98].

2.4.3.1 Conclusion

Il est clair que le choix de la méthode est fonction de la complexité et du type de problème étudié. Le calcul analytique s'avère plus précis mais sa mise en œuvre peut être délicate si le nombre de paramètres et de fonctions à analyser est important.

La méthode des différences finies a le gros avantage d'être une méthode tout à fait générale. Elle peut en effet s'adapter à tous les cas et ne nécessite que l'évaluation de la fonction étudiée autour du point courant. Un des inconvénients est son instabilité potentielle vis-à-vis du pas d'évaluation et la nature de la fonction. En outre, le coût de calcul est proportionnel aux nombres de paramètres et peut rapidement devenir prohibitif.

La méthode de calcul des dérivées via la différenciation automatique paraît intéressante dans la mesure où le calcul de la dérivée est systématique une fois que la fonction est implémentée dans le code. Cependant, elle nécessite une modification du code pour intégrer, à chaque étape de la composition de la fonction, les dérivées intermédiaires.

Aussi, étant donné la complexité de la mise en place des méthodes élaborées de calculs de dérivées, la majeure partie des calculs de sensibilités, utilisés dans le développement des routines qui seront présentées dans les chapitres suivants, sera réalisée par la méthode des différences finies.

2.5 Conclusions sur les différentes méthodes d'analyse de la robustesse.

Dans cette première partie, nous avons exposé différentes techniques permettant de traiter de manière distincte les imprécisions sur les données définissant un système. La méthode de Monte-Carlo est une méthode fiable et sûre pour déterminer le comportement d'un système soumis à des incertitudes. En effet, via l'analyse de l'espérance et de la variance de ce système, il est possible d'avoir rapidement une appréciation de sa sensibilité vis-à-vis de perturbations. L'avantage non négligeable de cette méthode est qu'elle est systématique et ne nécessite que l'évaluation de la fonction que l'on souhaite étudier ainsi que le mode de variations des paramètres. L'inconvénient majeur de ces simulations est le temps de calculs qui peut être rédhibitoire, quand le nombre de paramètres considéré et le temps d'évaluation de la fonction sont importants, et ce, plus particulièrement, dans un contexte industriel. Cependant, il est clair que si l'évaluation du problème est précise, alors les résultats obtenus sont exacts et fiables puisqu'à aucun moment il n'est fait d'approximation. La méthode de Monte-Carlo sera alors pour nous une méthode de référence privilégiée. De plus, des outils élaborés d'analyse stochastique des dispersions visant à améliorer de manière non négligeable la rapidité de calcul sont apparus depuis quelques années. Leurs inconvénients majeurs résident dans le fait qu'il est nécessaire de connaître la distribution des paramètres mais également que ces méthodes utilisent généralement des techniques d'approximations.

La méthode des intervalles, quant à elle, repose sur une modification de l'arithmétique classique. Les variables ne sont alors plus décrites en termes de valeurs mais d'intervalles. Cette méthode trouve ses origines dans la recherche de résultats robustes en programmation, où la précision des résultats est liée à la précision de la machine. On a donc naturellement cherché à étendre cette méthode à des problèmes dont les variables sont dites imprécises. Cependant aux vues des différents résultats et des divers ouvrages, il semble apparaître que la mise en place d'une telle méthode sur des problèmes complexes nécessite

une modification importante des algorithmes. De plus, les résultats obtenus ne sont toujours qu'un encadrement de la réponse et jamais la réponse elle-même. Enfin, l'ensemble des travaux tend à montrer que l'utilisation des intervalles dans des calculs itératifs aboutit de manière quasi-systématique à une surestimation de la réponse non négligeable.

Pour pallier à cet inconvénient, les méthodes dites de perturbations, sont également utilisées pour déterminer les bornes des intervalles de variation, en s'affranchissant de l'utilisation de l'arithmétique des intervalles. Dans ce contexte, elles peuvent se rapprocher des méthodes de réanalyse. Pour cela, une approximation du comportement d'un système au voisinage d'un point de fonctionnement considéré est réalisée via les développements en série. Dans le cas qui nous intéresse, à savoir l'optimisation, l'étude du développement en série de Taylor est privilégiée puisque celui-ci nécessite le calcul des sensibilités du système nécessaire à la plupart des procédés d'optimisation. Les solutions approximées par ce type de développement pourront nous permettre de déterminer les plages de variation des différents champs étudiés et dont les bornes seront calculées de manière plus fiable que par la méthode des intervalles.

Les paragraphes précédents ont permis de recenser de manière non exhaustive les méthodes d'analyse de la robustesse. Cependant, les travaux présentés dans cette thèse ont pour objet la mise en place d'un procédé d'optimisation robuste. Aussi, nous allons nous attacher dans les paragraphes suivants à faire un état des lieux de différents procédés d'optimisation numérique classiques qui nous permettront de réaliser un couplage entre la robustesse et l'optimisation.

2.6 Méthodes d'optimisation

Le développement de l'analyse numérique et des moyens de simulation a révolutionné les métiers de la conception mécanique. Les concepteurs des bureaux d'études, via les outils tels que la CAO ou la méthode des éléments finis par exemple, peuvent maintenant concevoir et tester virtuellement leurs pièces, sans avoir à les réaliser. Ainsi, ce concept permet, dans un cadre industriel, un gain de temps, une réduction du coût de développement et un accroissement de performance.

C'est dans ce contexte que s'inscrit l'optimisation comme un des outils prédominants et essentiels de la conception moderne [BRA85]. Dans l'industrie, son utilisation s'est longtemps limitée à l'amélioration d'une pièce déjà existante et dimensionnée, pour la plupart des cas, de façon empirique. Si cette utilisation des techniques d'optimisation en phase de mise au point a fait ses preuves, elle n'intervient que tard dans le processus de conception [KRE01].

Aussi, devant la demande industrielle et étant donné le fort potentiel des techniques d'optimisation, une nouvelle tendance émerge depuis le début des années 90 : le prédimensionnement en tout début de conception du système étudié et la rédaction du cahier des charges des éléments constituant ce système ([MAH96], [MOR96], [OUD94]). La problématique n'est alors plus la même. En effet, le concepteur dispose à ce moment de beaucoup plus de liberté, tant sur le domaine de variation des paramètres que sur l'évaluation des solutions.

Les techniques d'optimisation ont fait et font encore l'objet d'un grand nombre de recherches et d'écrits. De nombreux chercheurs se sont penchés sur le développement et surtout l'amélioration de ces méthodes. Désormais, la plupart des logiciels de calculs numériques appliqués à la mécanique intègrent des modules d'optimisation. Le but du paragraphe suivant est de faire un état des lieux succinct des procédés d'optimisation numérique classiques. Les méthodes d'optimisation étant déjà très largement évoquée dans la littérature, les algorithmes à proprement parler ne seront pas détaillés, [MAT96] et [HOU95] fournissent une description approfondie de ces différentes techniques.

2.6.1 Principe et formulation d'un problème d'optimisation

Le but de ce paragraphe est d'introduire le vocabulaire et les principales notions utilisés en optimisation.

2.6.1.1 Inégalités sur les vecteurs

Il est nécessaire de préciser les notations utilisées par la suite pour la comparaison de deux vecteurs de \mathbb{V}^n . A partir des inégalités \leq et $<$ (respectivement \geq et $>$) sur \mathbb{V}^n , il est possible de définir, pour deux vecteurs $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{V}^n$, les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{p} \leq \mathbf{q} \Leftrightarrow p_k \leq q_k \text{ (resp. } \mathbf{p} \geq \mathbf{q} \Leftrightarrow p_k \geq q_k) \\
 & k \in \{1, \dots, n\} \\
 & \mathbf{p} < \mathbf{q} \Leftrightarrow p_k < q_k \text{ (resp. } \mathbf{p} > \mathbf{q} \Leftrightarrow p_k > q_k), \mathbf{p} \neq \mathbf{q} \\
 & k \in \{1, \dots, n\} \\
 & \mathbf{p} \prec \mathbf{q} \Leftrightarrow p_k < q_k \text{ (resp. } \mathbf{p} \succ \mathbf{q} \Leftrightarrow p_k > q_k) \\
 & k \in \{1, \dots, n\} \\
 & \mathbf{p} = \mathbf{q} \Leftrightarrow p_k = q_k \qquad k \in \{1, \dots, n\}
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 2-39}$$

2.6.1.2 Formulation du problème d'optimisation

- **Variables**

Les variables d'optimisation sont les variables du problème à résoudre. Elles sont représentées par un vecteur $\mathbf{q} \in \nabla^{n_q}$, n_q étant le nombre de variables. Un vecteur $\mathbf{q}_0 \in \nabla^{n_q}$ donné permet de définir une configuration ou un design dit initial.

Dans un contexte industriel, ces variables sont les variables de conception. Elles représentent des paramètres du système physique étudié pour lesquels le concepteur dispose d'une certaine liberté. Le but de l'optimisation est de déterminer la meilleure configuration, c'est-à-dire le meilleur jeu de paramètres, vis-à-vis de critères propres à l'étude considérée.

- **Bornes**

De façon générale, les variables prennent leurs valeurs dans un intervalle de ∇ :

$$\begin{aligned}
 q_k & \in [q_k, \overline{q_k}] \\
 k & = 1 \dots n_q
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 2-40}$$

$q_k \in \nabla$ et $\overline{q_k} \in \nabla$ sont respectivement les bornes minimale et maximale de la variable q_k .

Dans le cadre de la conception, les bornes sont souvent liées à des limitations technologiques ou physiques, donnant un domaine de valeurs possibles pour chaque paramètre.

- **Restrictions**

Outre les limitations dues aux bornes, le problème est souvent contraint de vérifier certaines restrictions, plus ou moins sévères. Ces restrictions s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Restrictions d'égalités :} & \qquad h_k(\mathbf{q}) = 0 & k = 1 \dots n_h \\
 \text{Restrictions d'inégalités :} & \qquad g_k(\mathbf{q}) \leq 0 & k = 1 \dots n_g
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 2-41}$$

Les restrictions peuvent également s'écrire de façon vectorielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{q}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &\leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad \text{Eq. 2-42}$$

$$\text{avec } \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ h_{n_h}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ g_{n_g}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}. \quad \text{Eq. 2-43}$$

L'ensemble $\mathcal{Q}_{ad} = \{\mathbf{q} \in \nabla^{n_q} / \underline{\mathbf{q}} \leq \mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}, \mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{g}(\mathbf{q}) \leq \mathbf{0}\}$ est appelé ensemble admissible et $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{Q}_{ad}$ est une configuration admissible.

- **Fonctions mono et multi-objectif**

Dans un problème à un seul objectif classique, la fonction objectif est une fonction des variables du problème, qui doit être minimisée ou maximisée. Par la suite, les fonctions objectifs seront systématiquement minimisées, sachant que les deux problèmes sont équivalents : passer de l'un à l'autre peut se faire en utilisant $\max_{q \in \mathcal{Q}_{ad}}(f(\mathbf{q})) = -\min_{q \in \mathcal{Q}_{ad}}(-f(\mathbf{q}))$.

Dans un cadre multiobjectif, il n'y a plus une unique fonction objectif mais un ensemble de fonctions objectif qui doivent être minimisées simultanément.

Le vecteur des objectifs est noté $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ f_{n_f}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \in R^{n_f}$, avec n_f le nombre

d'objectifs à minimiser.

$\mathcal{F}_{ad} = \mathbf{f}(\mathcal{Q}_{ad})$ est l'ensemble des objectifs réalisables. Il correspond à l'ensemble des valeurs vectorielles que peut prendre la fonction \mathbf{f} sur l'ensemble \mathcal{Q}_{ad} . Une représentation des ensembles \mathcal{Q}_{ad} et \mathcal{F}_{ad} est donnée Figure 2-7 dans un cas à deux dimensions.

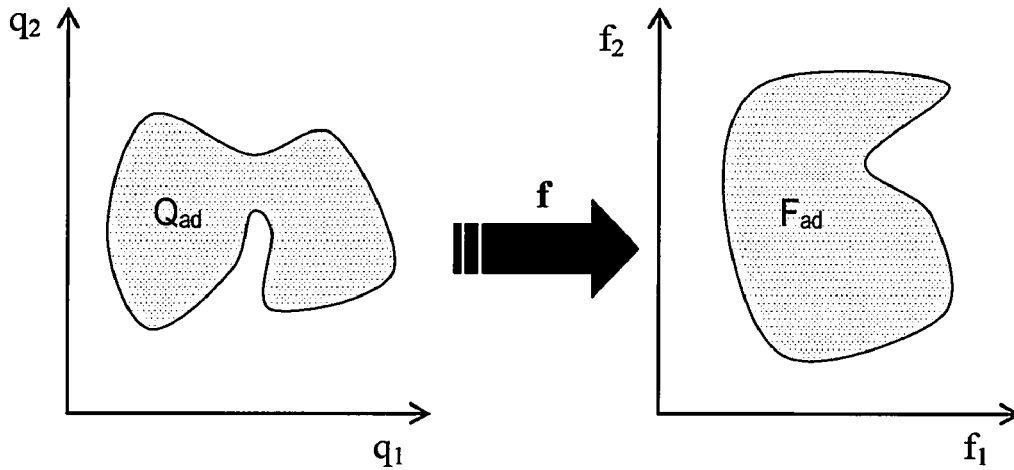


Figure 2-7: Illustration des ensembles Q_{ad} et F_{ad} .

- **Formulation des problèmes mono et multi-objectifs**

En tenant compte des définitions données précédemment, le problème mono-objectif s'écrit finalement :

Minimiser	$f(\mathbf{q})$
sous	$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$
	$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \leq \mathbf{0}$
avec	$\underline{\mathbf{q}} \leq \mathbf{q} \leq \overline{\mathbf{q}}$

Pour un problème multi-objectifs, le nombre de fonctions à minimiser est supérieur à un, ce qui, en terme de notation, nous amène à la formulation suivante :

Minimiser	$\mathbf{f}(\mathbf{q})$
sous	$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$
	$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \leq \mathbf{0}$
avec	$\underline{\mathbf{q}} \leq \mathbf{q} \leq \overline{\mathbf{q}}$

Le sens donné au verbe « minimiser » pour une fonction prenant des valeurs vectorielles est explicité dans la partie suivante.

2.6.2 Méthode d'optimisation mono-objectif

Avant de décrire les principales méthodes d'optimisation, il est nécessaire d'analyser le type de problème étudié. En effet, l'efficacité et la précision de la solution d'un problème d'optimisation ne sont pas seulement liées à la taille du problème mais aussi aux caractéristiques de celui-ci. Il est nécessaire de définir la ou les fonctions objectif ainsi que les restrictions s'il y en a. Ainsi, si les fonctions objectifs et les contraintes sont des fonctions linéaires, on parlera alors de LP problème (Linear Programming). On parlera de programmation quadratique (Quadratic Programming) dans le cas où la fonction à maximiser ou minimiser est quadratique et linéairement contrainte. Pour ces deux cas, les algorithmes de résolution existent et sont qualifiés de fiables et efficaces. Pour les fonctions non-linéaires, on parle de NP problème (Non linear Programming) et la résolution s'en trouve être beaucoup plus complexe. Pour y parvenir, on fait généralement appel à un procédé itératif pour établir une direction de recherche à chaque itération majeure en utilisant les solutions de sous-problèmes LP ou QP.

2.6.2.1 Présentation de la méthode Quasi-Newton

L'une des premières méthodes permettant de résoudre les NP problèmes est connue sous le nom de Quasi-Newton. Elle est basée sur un procédé itératif établissant à chaque itération majeure de l'optimisation une direction de descente privilégiée.

On cherche ici à réaliser un développement limité à l'ordre 2 de la fonction que l'on cherche à minimiser.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + b \quad \text{Eq. 2-44}$$

où \mathbf{H} est la matrice Hessienne, qui est la matrice des dérivées secondes de $f(\mathbf{x})$, \mathbf{c} le gradient et b une constante.

Un optimum de $f(\mathbf{x})$ existe lorsque le gradient de cette fonction est nul à savoir:

$$\text{grad}(f(\mathbf{x}^*)) = \mathbf{H} \mathbf{x}^* + \mathbf{c} = 0 \quad \text{Eq. 2-45}$$

ou \mathbf{x}^* est le vecteur solution de l'équation précédente. Cette solution optimale peut également s'écrire :

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{c} \quad \text{Eq. 2-46}$$

Ainsi, l'algorithme d'optimisation va permettre de trouver \mathbf{x}^* de manière itérative, en déterminant, dans un premier temps, les matrices \mathbf{H} et \mathbf{H}^{-1} au point courant puis déterminera une direction de descente \mathbf{d} en ce point. Ce vecteur permet de déterminer la direction d'évolution de la fonction $f(\mathbf{x})$ en fonction des variables \mathbf{x} . L'optimisation sera alors considérée comme atteinte lorsque, par exemple, la variation de $f(\mathbf{x})$ sera inférieure à un critère d'arrêt.

2.6.2.2 Calcul du Hessien

Contrairement aux méthodes de type Newton pour lesquelles le calcul du Hessien se fait de manière systématique et complète impliquant un nombre de calculs élevé, les méthodes quasi-newtoniennes s'affranchissent de cette évaluation en utilisant les informations fournies par la fonction et son gradient pour réaliser une approximation de \mathbf{H} , en utilisant des techniques de réévaluation. La méthode la plus connue est sans nul doute la méthode BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfar et Shanno) [MAT98]. Elle évalue l'inverse du Hessien à l'itération k en calculant :

$$\mathbf{H}_{k+1}^{-1} = \mathbf{H}_k^{-1} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{\gamma}_k'}{\boldsymbol{\gamma}_k' \boldsymbol{\delta}_k} - \frac{\mathbf{H}_k^{-1} \boldsymbol{\delta}_k \boldsymbol{\delta}_k' \mathbf{H}_k^{-1}}{\boldsymbol{\delta}_k' \mathbf{H}_k^{-1} \boldsymbol{\delta}_k} \quad \text{Eq. 2-47}$$

avec

$$\boldsymbol{\delta}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \quad \text{Eq. 2-48}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad \text{Eq. 2-49}$$

L'inverse du Hessien ayant été déterminé, la direction de descente peut alors être évaluée comme suit :

$$\mathbf{d} = -\mathbf{H}_k^{-1} \cdot \text{grad}(f(\mathbf{x}_k)) \quad \text{Eq. 2-50}$$

où k est l'indice de l'itération.

2.6.2.3 Recherche linéaire

La méthode de recherche linéaire est la méthode sous-jacente des problèmes d'optimisation, qui utilise ce principe de direction de recherche. Ainsi, le minimum trouvé le long de la ligne de direction de descente est généralement approximé via une procédure de recherche discrète (Fibonacci) ou par des méthodes polynomiales impliquant des interpolations ou extrapolations (quadratique ou cubique). Les méthodes d'interpolation polynomiale se révèlent généralement être les plus efficaces lorsque la fonction, devant être minimisée, est continue. Le problème étant de trouver un nouvel itéré de la forme :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d} \quad \text{Eq. 2-51}$$

avec α le pas dans la direction de descente \mathbf{d} et \mathbf{x}_k les variables de conception à l'itération courante.

2.6.3 Méthode d'optimisation multi-objectif

La méthode présentée précédemment est une méthode adaptée à l'optimisation mono-objectif. Dans le cas d'application qui nous intéresse, plusieurs fonctions objectif doivent être simultanément minimisées. Nous allons donc, dans la suite, nous attacher à décrire quelques méthodes d'optimisation multi-objectif. Cependant, avant de réaliser une telle description, il est utile de définir un ensemble de termes spécifiques.

2.6.3.1 Optimalité au sens de Pareto

Cette partie est consacrée à la définition des notions associées à l'optimisation multiobjectif.

- **Solution idéale**

Une configuration \mathbf{x}^I est dite idéale si :

$$\forall k \in \{1, \dots, n_f\}, \quad f_k(\mathbf{q}^I) = \min_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}_{ad}} [f_k(\mathbf{q})] \quad \text{Eq. 2-52}$$

Et le vecteur associé, appelé objectif idéal, est défini par $\mathbf{f}^I = \begin{pmatrix} \min[f_1(\mathbf{q})] \\ \vdots \\ \min[f_{n_f}(\mathbf{q})] \end{pmatrix}$.

La Figure 2-8 illustre le cas où une solution idéale existe pour deux fonctions objectif. Quand une telle solution existe, elle est incontestablement la solution recherchée puisqu'elle permet de minimiser tous les objectifs simultanément, sans aucun compromis.

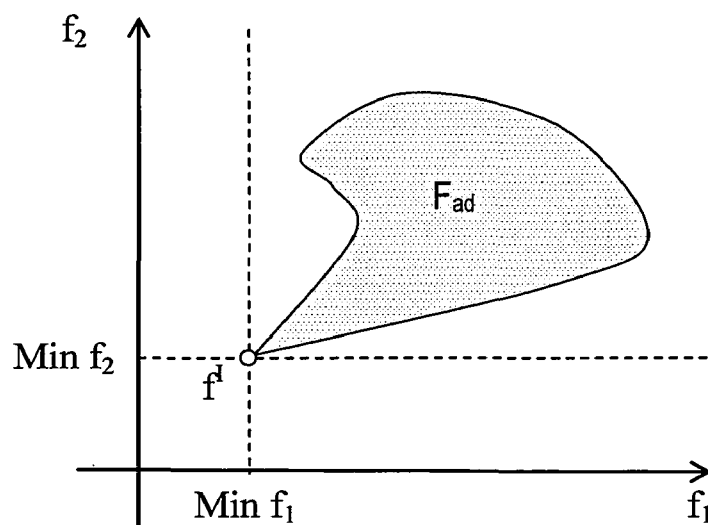


Figure 2-8 : Solution idéale.

- **Ensemble de Pareto**

Une configuration $\mathbf{q}^* \in \mathcal{Q}_{ad}$ est dite optimale au sens de Pareto, ou encore non-dominée, si et seulement si

$$\forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}_{ad}, \mathbf{f}(\mathbf{q}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{q}^*) \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}^*)$$

Eq. 2-53

Formulé différemment, une configuration \mathbf{q}^* est optimale au sens de Pareto s'il n'existe pas de configuration admissible \mathbf{q} , qui améliore simultanément tous les objectifs par rapport aux valeurs obtenues pour \mathbf{q}^* . Pour trouver une configuration admissible donnant de plus faibles valeurs que \mathbf{q}^* pour certains des objectifs, il sera donc nécessaire de dégrader au moins un des autres objectifs.

D'une façon générale, il existe plusieurs solutions Pareto-optimales qui forment l'ensemble de Pareto \mathcal{Q}_P du problème. A cet ensemble \mathcal{Q}_P , correspond son ensemble image par la fonction vectorielle \mathbf{f} , noté $\mathcal{F}_P = \mathbf{f}(\mathcal{Q}_P)$. Comme illustré sur la Figure 2-9 \mathcal{F}_P est inclus dans la frontière du domaine \mathcal{F}_{ad} .

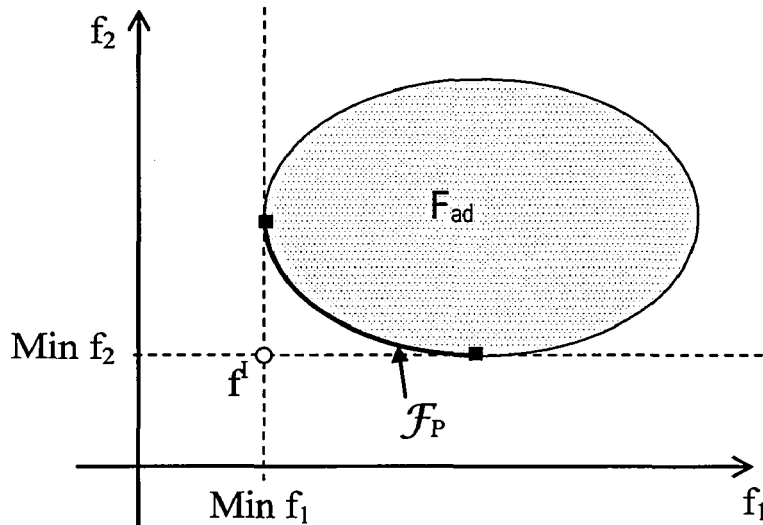


Figure 2-9 : Ensemble de Pareto.

L'ensemble des solutions n'a, a priori, aucune propriété de régularité. Ainsi, un problème très régulier, avec un domaine admissible convexe et des fonctions continues, peut générer un ensemble de Pareto discontinu. La Figure 2-10 illustre deux configurations possibles pouvant être obtenues pour l'ensemble \mathcal{F}_P .

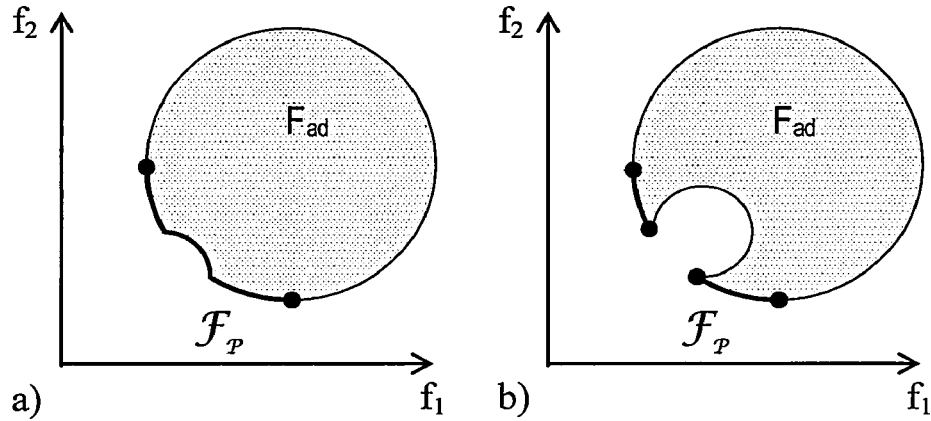


Figure 2-10: Illustration de différents ensembles de Pareto possibles.

La Figure 2-10 montre la différence entre un cas où une partie non-convexe de la frontière de F_{ad} appartient à F_p (Figure 2-10a) et le cas où une partie non-convexe de F_{ad} n'appartient pas à F_p (Figure 2-10b). Dans le deuxième cas, il faut remarquer que F_p est discontinu.

- **Fonction de préférence**

En général, la solution analytique n'existe pas, et la recherche de l'ensemble de Pareto complet n'est pas envisagée. Le concepteur se limite à la détermination d'une ou plusieurs configurations appartenant à cet ensemble de Pareto. Cette détermination d'une configuration non-dominée passe systématiquement par la résolution d'un problème d'optimisation à un objectif, dérivé du problème général. Pour ce faire, il est utile de passer par une fonction $\phi(f_1, \dots, f_{n_r})$, dite fonction de préférence, qui permet de choisir a priori une solution parmi toutes celles possibles.

Les paragraphes suivants présentent quelques fonctions de préférence classiques dont le lecteur pourra trouver les références ci-dessous.

2.6.3.2 Méthodes de combinaison linéaire des objectifs

- **Principe**

Cette méthode consiste à minimiser une combinaison linéaire des différents objectifs. C'est souvent la première méthode qui vient à l'esprit pour optimiser simultanément plusieurs objectifs ([ESC90], [LIN75] et [RAO84]). Les coefficients utilisés permettent de pondérer intuitivement les différents objectifs, de façon à en privilégier certains par rapport aux autres (Figure 2-11).

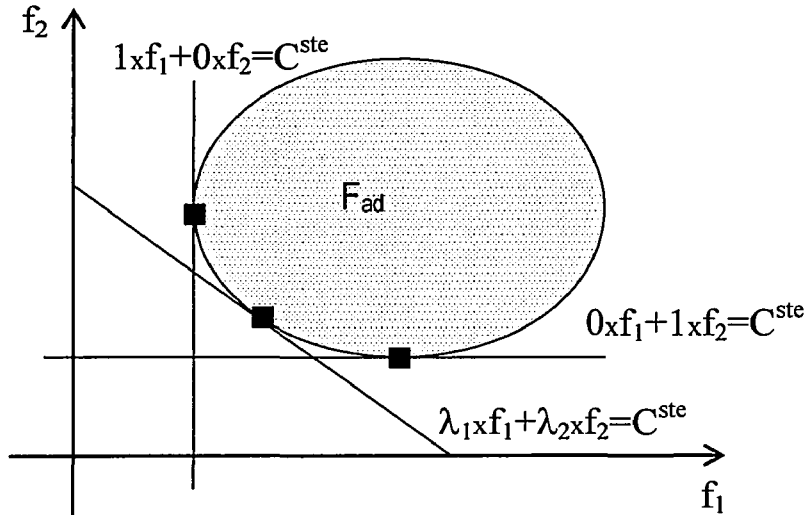


Figure 2-11: Minimisation d'une combinaison linéaire des objectifs.

- **Formulation**

Pour construire la nouvelle fonction mono-objectif, il faut se donner n_f coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n_f}) \in \nabla^{+n}$ qui permettent de construire la fonction objectif suivante :

$$\phi(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{n_f} \lambda_k f_k(\mathbf{q}) \quad \text{Eq. 2-54}$$

Le nouveau problème à résoudre s'écrit :

Minimiser	$\phi(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{n_f} \lambda_k f_k(\mathbf{q})$
sous	$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$
	$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \leq \mathbf{0}$
avec	$\underline{\mathbf{q}} \leq \mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}$

- **Ensemble de Pareto et combinaison linéaire**

Il s'avère qu'une répartition uniforme des coefficients λ n'aboutit pas à une répartition uniforme des solutions sur l'ensemble de Pareto et que les points ainsi générés sont concentrés dans une même zone. De plus, comme signalé dans [DAS97a] et [STA95], cette méthode ne peut pas produire de solution correspondant à des parties non-convexes de l'ensemble F_{ad} . Ce phénomène est illustré dans la Figure 2-12: aucun des points de l'arc compris entre \mathbf{f}' et \mathbf{f}'' ne sera atteint par la minimisation d'une combinaison linéaire de f_1 et f_2 .

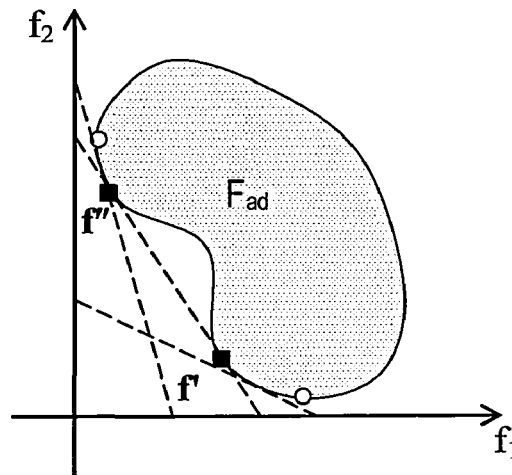


Figure 2-12: Mise en défaut de la méthode utilisant une combinaison linéaire des objectifs.

Ainsi, cette méthode présente l'avantage de permettre un passage simple d'un problème multi-objectif à un problème mono-objectif via l'utilisation de coefficients de pondérations dont l'interprétation est très facile. Par contre, elle s'avère peu efficace pour l'étude de problèmes non convexes.

2.6.3.3 Méthode des distances

- Principe

Cette méthode consiste à chercher la configuration admissible qui donne un vecteur objectif le plus proche possible de l'objectif idéal ([KOS82], [KOS87] et [RAO84]). La proximité entre un vecteur objectif donné et l'objectif idéal se mesure par l'intermédiaire d'une distance (Figure 2-13).

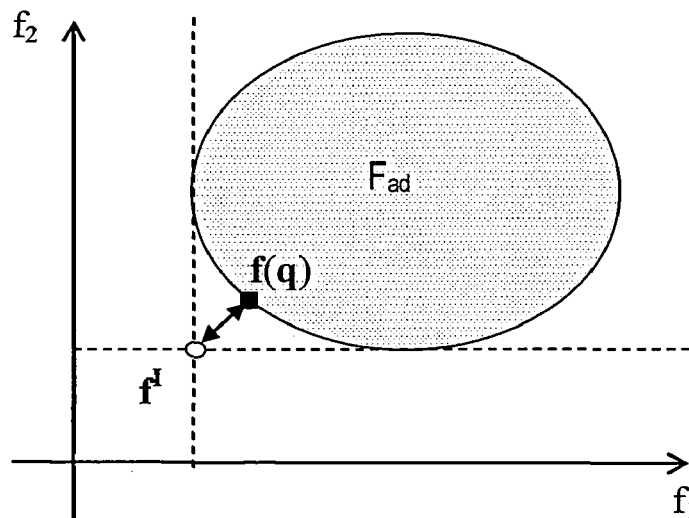


Figure 2-13: Principe de la méthode de distance.

• **Formulation**

Les distances les plus couramment utilisées sont les distances métriques de ∇^n :

$$\phi(\mathbf{q}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}^1\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{n_f} |f_k(\mathbf{q}) - \min(f_k)|^p \right\}^{1/p} \quad \text{avec } 1 \leq p < +\infty \quad \text{Eq. 2-55}$$

Pour éviter des problèmes numériques, il est préférable de donner une forme adimensionnelle à la fonction objectif, soit :

$$\phi(\mathbf{q}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n_f} \left| \frac{f_k(\mathbf{q}) - \min(f_k)}{\max(f_k) - \min(f_k)} \right|^p \right\}^{1/p} \quad \text{avec } 1 \leq p < +\infty \quad \text{Eq. 2-56}$$

Dans le cas de la norme infinie, la méthode porte le nom spécifique de méthode « min-max ». La fonction objectif est alors :

$$\phi(\mathbf{q}) = \max_{k=1 \dots n_f} \left| \frac{f_k(\mathbf{q}) - \min(f_k)}{\max(f_k) - \min(f_k)} \right| \quad \text{Eq. 2-57}$$

L'utilisation de ces différentes distances entraîne, en général, l'obtention de solutions différentes. La méthode des distances aboutit finalement, pour p un entier fixé, à la formulation suivante :

Minimiser	$\phi(\mathbf{q}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n_f} \left \frac{f_k(\mathbf{q}) - \min(f_k)}{\max(f_k) - \min(f_k)} \right ^p \right\}^{1/p}$
sous	$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$
	$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \leq \mathbf{0}$
avec	$\underline{\mathbf{q}} \leq \mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}$

Dans le cas de la méthode min-max, la formulation devient :

Minimiser	$\phi(\mathbf{q}) = \max_{k=1 \dots n_f} \left \frac{f_k(\mathbf{q}) - \min(f_k)}{\max(f_k) - \min(f_k)} \right $
sous	$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$
	$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \leq \mathbf{0}$
avec	$\underline{\mathbf{q}} \leq \mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}$

- **Méthode des distances et ensemble de Pareto**

Pour une distance donnée, il est possible de générer plusieurs points de l'ensemble de Pareto en pondérant les différents objectifs par des coefficients positifs (voir [ESC90] et [HER95]). Les fonctions objectif correspondantes sont alors de la forme :

$$\phi(\mathbf{q}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n_f} \lambda_k \left| \frac{f_k(\mathbf{q}) - f_k^*}{f_k^*} \right|^p \right\}^{1/p} \quad \text{avec } 1 \leq p < +\infty. \quad \text{Eq. 2-58}$$

Dans le cas d'une optimisation min-max, la fonction objectif devient :

$$\phi(\mathbf{q}) = \max_{k=1 \dots n_f} \lambda_k \left| \frac{f_k(\mathbf{q}) - f_k^*}{f_k^*} \right| \quad \text{Eq. 2-59}$$

La Figure 2-14 illustre les points obtenus pour différentes pondérations dans le cas de la norme infinie. La méthode permet de générer des points correspondants à des parties non-convexes de l'ensemble \mathcal{F}_P .

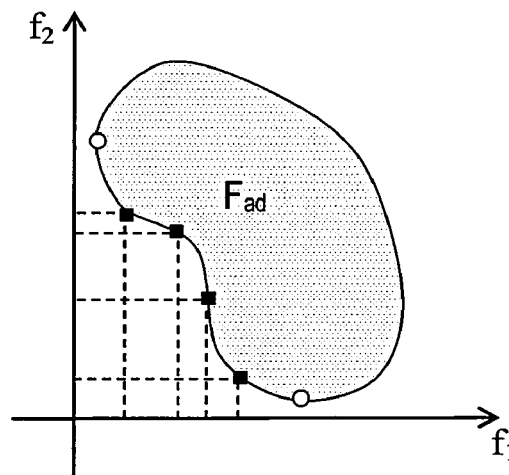


Figure 2-14: Génération de plusieurs solutions par la méthode des distances.

Elle présente cependant le même inconvénient que pour la méthode des combinaisons linéaires : l'interprétation des pondérations utilisées dans le but de générer l'ensemble de Pareto est facile, par contre la répartition des solutions sur le domaine peut ne pas être homogène [ESC90], [HER95].

2.6.3.4 Méthodes contraintes

• Principe

Cette méthode consiste à minimiser un seul des différents objectifs, en imposant les niveaux des autres objectifs ([GIE78], [LIN75] et [RAO84]). Ces niveaux sont imposés par le biais de restrictions. Selon que ces restrictions sont des égalités ou des inégalités, il est possible de concevoir deux méthodes différentes de principes très voisins. La Figure 2-15 illustre, dans le cas de deux objectifs, la minimisation de la fonction f_2 sous la restriction $f_1 \leq \lambda$.

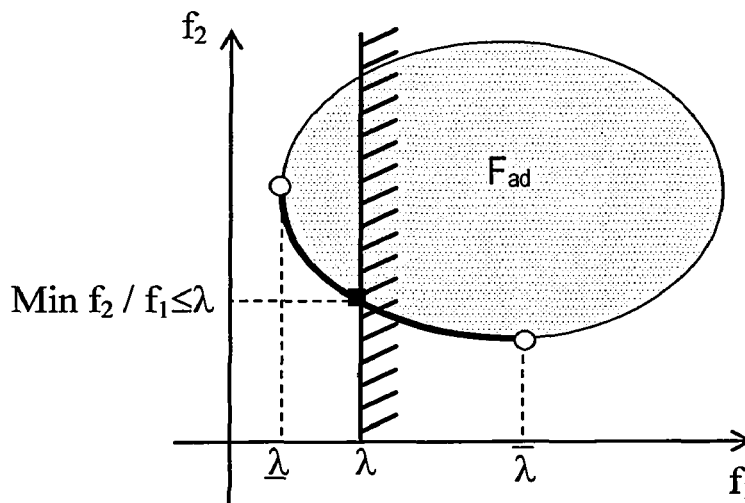


Figure 2-15: Minimisation de f_2 sous $f_1 \leq \lambda$.

• Formulation

La formulation des méthodes contraintes fait jouer un rôle particulier à l'une des fonctions objectif qui est minimisée pendant que les autres servent de restrictions ([LIN76a], [LIN76b]). Il est toujours possible de supposer que c'est la dernière fonction objectif qui doit être minimisée avec des restrictions sur les $(n_f - 1)$ autres.

Pour fixer ces restrictions, il est nécessaire de se donner un niveau pour chacun des $(n_f - 1)$ premiers objectifs : $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n_f-1})$. Le problème peut alors se poser en terme de restrictions d'égalité sur les objectifs :

Minimiser	$\phi(\mathbf{q}) = f_{n_f}(\mathbf{q})$
sous	$f_k(\mathbf{q}) = \lambda_k \quad k \in \{1, \dots, n_f - 1\}$
	$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$
	$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \leq \mathbf{0}$
avec	$\underline{\mathbf{q}} \leq \mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}$

ou encore en terme de restrictions d'inégalité sur les objectifs :

Minimiser	$\phi(\mathbf{q}) = f_{n_f}(\mathbf{q})$
sous	$f_k(\mathbf{q}) \leq \lambda_k \quad k \in \{1, \dots, n_f - 1\}$
	$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$
	$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \leq \mathbf{0}$
avec	$\underline{\mathbf{q}} \leq \mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}$

Il faut noter que, dans le cas général, les restrictions d'égalité sont très sévères, puisque chacune d'elles diminue d'une unité la dimension de l'ensemble admissible. Numériquement, les algorithmes seront en difficulté lors de la recherche d'un point admissible. La méthode utilisant des contraintes d'inégalité est donc préférée.

- **Méthodes contraintes et ensemble de Pareto**

En choisissant plusieurs jeux de niveaux de contrainte différents, il est possible de générer plusieurs solutions appartenant à l'ensemble de Pareto. Les niveaux à imposer pour chaque fonction ne sont pas forcément faciles à choisir. La solution la plus simple consiste à diviser la plage de valeurs prises par chaque fonction par le nombre d'intervalles voulus, ce qui permet de répartir uniformément les points dans les directions de ces fonctions. Néanmoins, cette méthode ne garantit pas l'obtention d'une répartition uniforme dans la direction de la fonction choisie comme fonction objectif.

2.6.3.5 Méthode « Normal Boundary Intersection » (NBI)

- **Principe**

La méthode dite « NBI » a été développée par Das et Dennis ([DAS97], [DAS98]). Elle suppose la connaissance préalable des configurations $(\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^{n_r})$ minimisant respectivement (f_1, \dots, f_{n_r}) . A chacune de ces configurations est associée son image par \mathbf{f} : $(\mathbf{f}^1 = \mathbf{f}(\mathbf{q}^1), \dots, \mathbf{f}^{n_r} = \mathbf{f}(\mathbf{q}^{n_r}))$.

Le principe de la méthode est de partir d'un point P de l'hyperplan contenant $(\mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^{n_r})$. La méthode génère ensuite un point G à l'intersection de la frontière de \mathcal{F}_{ad} et de la normale à cet hyperplan passant par le point P.

Sur la Figure 2-16, la méthode est illustrée pour un cas à deux objectifs. Les points \mathbf{f}^1 et \mathbf{f}^2 correspondent respectivement aux minima de f_1 et de f_2 .

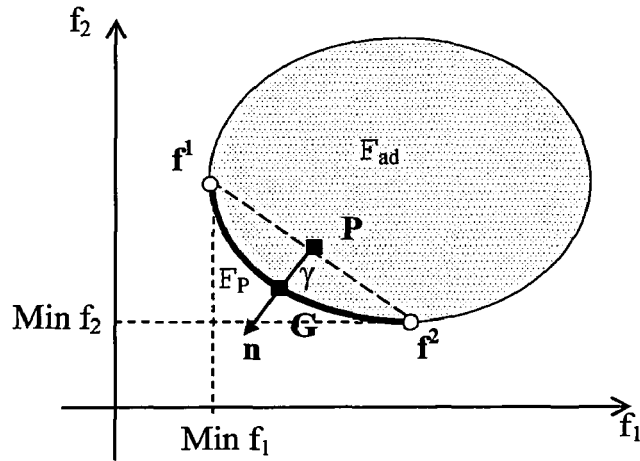


Figure 2-16: Principe de la méthode NBI pour deux objectifs.

En utilisant cette démarche avec plusieurs points de départ répartis sur l'enveloppe convexe de $\{f^1 = f(q^1), \dots, f^{n_f} = f(q^{n_f})\}$, il est possible de générer plusieurs solutions réparties sur \mathcal{F}_P .

- **Formulation**

Plus généralement, lorsque $n_f > 2$, le point de départ est pris sur l'enveloppe convexe des points $\{f^1 = f(q^1), \dots, f^{n_f} = f(q^{n_f})\}$, ce qui revient à dire que ce point est défini par $\sum_{k=1}^{n_f} \lambda_k f^k$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n_f}) \in R^+$. Le vecteur n est un vecteur unitaire normal à cette enveloppe convexe et dirigé vers l'origine.

La formulation du problème, associé à un jeu de coefficients de pondérations $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n_f}) \in R^+$ donné, est alors la suivante :

Maximiser	$\phi(q, \gamma) = \gamma$
sous	$f(q) - \sum_{k=1}^{n_f} \lambda_k f^k = \gamma n$
	$h(q) = 0$
	$g(q) \leq 0$
avec	$\underline{q} \leq q \leq \bar{q}$

Comme illustré Figure 2-17 pour $n_f > 2$, les points pris sur l'enveloppe convexe ne suffisent pas à générer la totalité de l'ensemble \mathcal{F}_P . Néanmoins, les parties de l'ensemble \mathcal{F}_P qui ne peuvent être atteintes correspondent à des zones extrémales pour au moins une des fonctions objectifs. La zone de compromis donnant simultanément des valeurs intéressantes pour toutes les fonctions est, quant à elle, potentiellement atteinte via la méthode NBI.

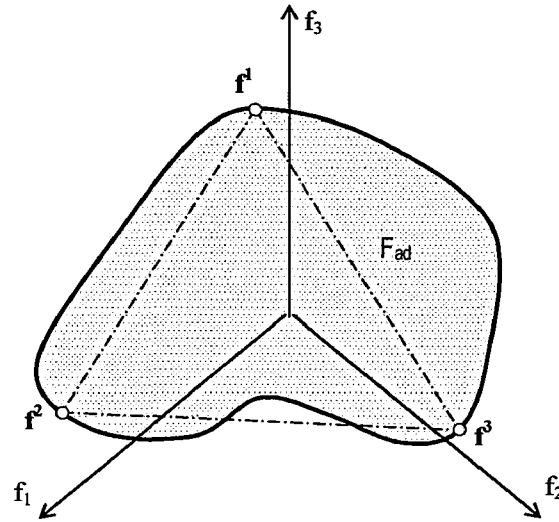


Figure 2-17: Enveloppe convexe des points f^1 , f^2 et f^3 .

Il faut remarquer que la méthode NBI utilise autant de restrictions d'égalité qu'il y a de fonctions objectif. Si le nombre de fonctions objectif est élevé, la simple génération d'un point admissible est délicate.

- **Méthodes NBI, NBI modifiée et ensemble de Pareto**

Plusieurs solutions peuvent être obtenues en faisant varier les pondérations $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n_f}) \in R^+$. Une répartition uniforme des pondérations conduit alors à une répartition relativement uniforme des points sur \mathcal{F}_p ([DAS97] et [DAS98]). En particulier, les points ne sont pas tous concentrés dans une même région.

La méthode NBI conduit à une répartition relativement uniforme des solutions et, de plus, cette répartition n'est pas modifiée par un changement d'échelle sur une des fonctions.

Cependant, [KRE01] montre que l'algorithme peut peiner à vérifier les restrictions et minimiser simultanément la fonction objectif associée aux sous-problèmes de la méthode NBI.

La méthode NBI génère en effet autant de restrictions d'égalité qu'il y a de fonctions objectif. Car si le problème initial ne comporte pas de contraintes d'égalité, la formulation issue de la méthode NBI pour ce même problème en possède. Ces restrictions posent alors des problèmes d'ordre numérique en réduisant sensiblement la taille des configurations admissibles.

Kreis [KRE01] propose une modification permettant de relaxer ces restrictions afin de faciliter la convergence de l'algorithme.

Maximiser	$\phi(\mathbf{q}, \gamma) = \gamma$
sous	$\mathbf{f}(\mathbf{q}) - \sum_{k=1}^{n_f} \lambda_k \mathbf{f}^k \leq \gamma \mathbf{m}$
	$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$
	$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \leq \mathbf{0}$
avec	$\underline{\mathbf{q}} \leq \mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}$

La Figure 2-18 illustre le principe de la méthode NBI modifiée proposée par [KRE01].

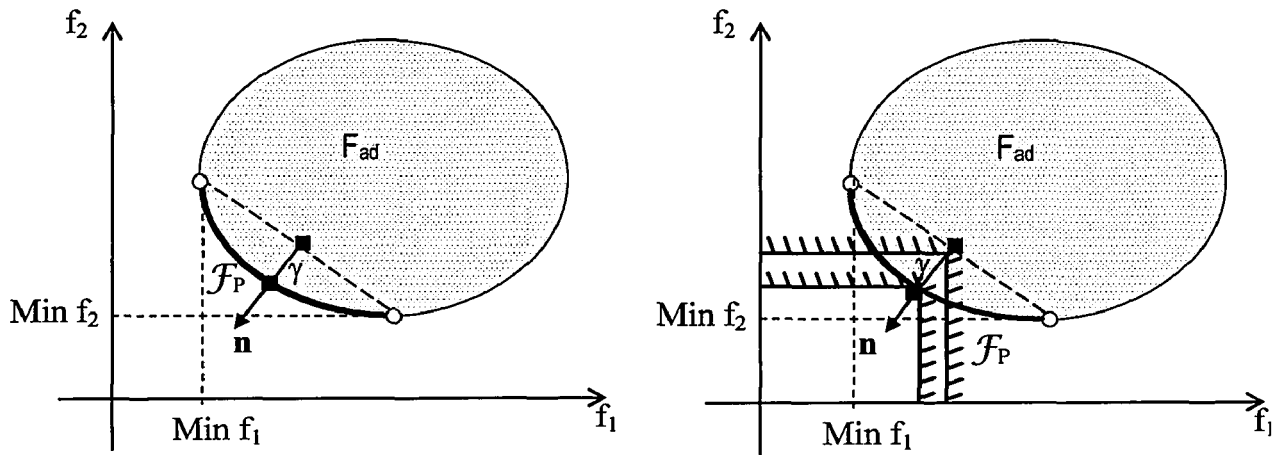


Figure 2-18: Illustration de la reformulation du NBI (à gauche algorithme initial avec contraintes d'égalité et à droite algorithme modifié avec des contraintes d'inégalité).

Cette nouvelle formulation présente ainsi moins de difficultés numériques que la formulation originale. La convergence s'en trouve facilitée pour des problèmes dont le nombre de restrictions à l'origine est importante. Cette formulation permet de retrouver les mêmes points que la formulation originale lorsque ceux-ci sont effectivement solutions du problème multi-objectifs. Dans le cas d'une solution non convexe, la solution diffère comme illustrée par la Figure 2-19

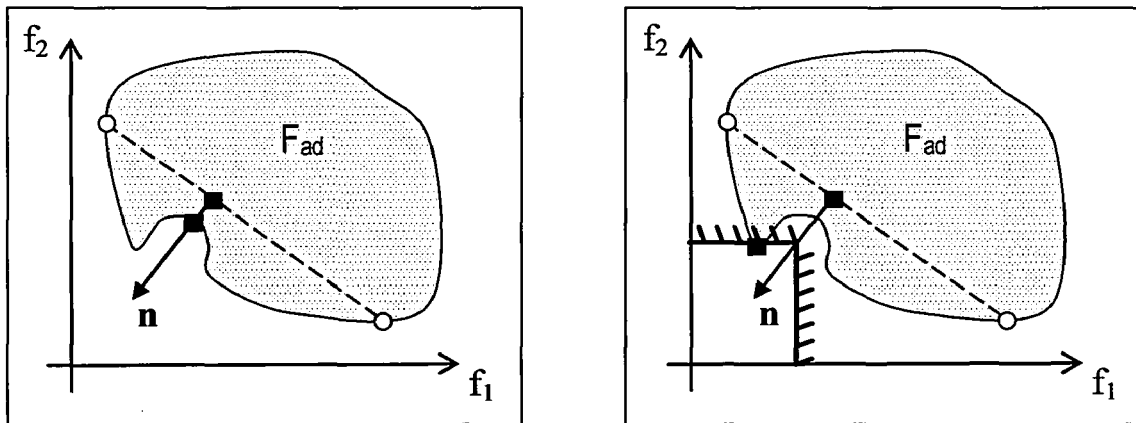


Figure 2-19: Exemple où les deux formulations ne donnent pas les mêmes solutions (à gauche algorithme initial et à droite algorithme modifié).

2.6.4 Conclusion sur les différentes méthodes d'optimisation

Plusieurs méthodes de détermination de solutions appartenant à l'ensemble de Pareto utilisant des algorithmes déterministes ont été décrites. Ces méthodes ont l'avantage de converger rapidement vers une solution et s'avèrent précises quant à la qualité de la solution obtenue. Dans le cadre d'une optimisation multi-objectif, la méthode dite NBI modifiée semble s'imposer. En effet, cette méthode transforme le problème multi-objectif en un ensemble de sous-problèmes mono-objectif basés sur une résolution de type BFGS, qui est reconnue comme robuste et fiable.

2.7 Conclusion

Cette partie a été consacrée, dans un premier temps, à la description des méthodes d'analyse de la robustesse des systèmes incertains par les méthodes non-déterministes.

Les méthodes probabilistes, restent les méthodes de références, notamment les méthodes de Monte-Carlo qui sont largement utilisées dans le contexte de l'ingénierie. Cependant, le principal inconvénient de ces méthodes reste le temps de calcul qui peut rapidement être prohibitif si le nombre de paramètres est important. De plus, ces méthodes ont pour base le calcul statistique pour lequel les paramètres sont décrits par des variables aléatoires définies par des densités de probabilité. Cette information peut être difficile à obtenir dans notre contexte. Les simulations de Monte-Carlo présentent l'avantage non négligeable de n'accorder aucune approximation dans l'évaluation des fonctions considérées, contrairement aux méthodes stochastiques. Elles seront donc, pour notre problématique, une méthode de validation des méthodes développées.

L'arithmétique des intervalles semble alors être une solution intéressante puisqu'elle ne nécessite par cette connaissance de la distribution de la valeur des paramètres. Cependant, le principal problème de cette méthode est la surestimation des résultats. Ceci est d'autant plus fâcheux que le processus dans lequel il est censé s'inscrire est un processus d'optimisation itératif, conduisant à une propagation de cette surestimation. Aussi, une alternative est l'utilisation de techniques avancées comme la réanalyse de système par des méthodes de perturbation et spécifiquement par le développement en série. L'avantage de ces méthodes est de s'affranchir d'un surcoût de calcul en faisant l'hypothèse que les perturbations sont suffisamment faibles. De plus elles reposent sur une approche de type sensibilité, et seront ré-exploitées lors de la phase d'optimisation.

Dans la deuxième partie, un recensement de diverses méthodes d'optimisation numérique multi-objectif a été réalisé. Au terme de ce recensement, il est apparu que, dans le cas des méthodes d'optimisation déterministe, la méthode NBI modifiée semble être celle qui présente le meilleur compromis en terme de rapidité de convergence et de précision.

Il apparaît alors clairement que deux voies d'intégration des imprécisions seront considérées par la suite, et ce, en adéquation avec le stade de conception décrit par la suite que l'on considérera. Le processus d'optimisation intégrant des variables imprécises sera alors appliqué en amont du processus de conception (a priori) alors que pourront être utilisées les simulations de Monte-Carlo lors des phases de validation des designs déjà existant afin de se prononcer sur la robustesse de ceux-ci (a posteriori).

Le chapitre suivant se propose de décrire le domaine d'application à savoir les suspensions moteurs. Il y sera exposé les différents éléments constitutifs ainsi que les sources d'imprécisions inhérentes à ce système.

CHAPITRE 3

Suspension du groupe moto-propulseur et variabilité des paramètres de conception

3 SUSPENSION DU GROUPE MOTO-PROPULSEUR ET VARIABILITE DES PARAMETRES DE CONCEPTION

3.1 Introduction

Cette partie est consacrée à la description des exigences à satisfaire par les supports du Groupe Moto-Propulseur (GMP), correspondant à l'ensemble moteur et boîte de vitesse. En effet, en tant qu'organe d'adaptation reliant le GMP à la caisse, la suspension du GMP est représentative d'un système mécanique soumis à des sources d'excitations diverses vis-à-vis desquelles les prestations requises déterminent le dimensionnement d'une telle architecture. C'est pourquoi, nous nous attacherons plus particulièrement à caractériser ces sources d'excitation, et décrire le fonctionnement de la suspension GMP, en évoquant les règles de conception métier.

La suspension GMP et son dimensionnement sont systématiquement évoqués du point de vue du concepteur en phase d'avant-projet c'est-à-dire que la conception, à ce stade de développement, a pour but de donner les grandes orientations de l'architecture dans un environnement relativement vague et mal défini (mauvaise connaissance des autres composants). L'utilisation d'hypothèses simplificatrices (conditions aux limites, efforts ou déplacements imposés) est donc préférée à une modélisation détaillée de l'environnement de la suspension GMP. La première partie ne constituera qu'une description suffisante de l'analyse fonctionnelle de la suspension du groupe moto-propulseur, un développement plus détaillé pourra être trouvé dans [KRE01]. Cette phase de dimensionnement fait intervenir en pratique un grand nombre de paramètres intervenant dans la conception de ce système. Cependant, selon le stade où se déroule l'étude, la connaissance précise de l'ensemble des paramètres peut s'avérer délicate. Aussi, la seconde partie sera consacrée au recensement des paramètres potentiellement imprécis.

3.2 Suspension du groupe moto-propulseur

3.2.1 Historique

Les fondements théoriques de la suspension élastique de véhicules automobiles ont été établis en 1922 par un français, le professeur Lemaire qui peut être considéré comme le créateur du moteur flottant [KRE01]. C'est avec l'apparition des habitacles fermés et des carrosseries métalliques que la nécessité d'améliorer le niveau sonore et de filtrer les excitations provenant du GMP est apparue. Ainsi, au début des années trente, le constructeur américain Chrysler mis le premier en application le moteur flottant. En France, les premières suspensions élastiques de GMP ont été réalisées sur les Citroën C4 et C6 en 1932. Désormais, la suspension GMP n'est plus seulement considérée comme un isolant vibratoire mais doit aussi répondre à de nouvelles exigences tels que le confort routier ou la sécurité passive par une intégration dans les scénarii de crash.

3.2.2 Fonctions élémentaires de la suspension du GMP

Les principales fonctions attendues de la suspension GMP sont les suivantes :

- supporter le poids du GMP,
- limiter les débattements du GMP vis-à-vis de situations de vie, telles qu'un à-coup de couple, une mise en virage, une accélération, un freinage, un passage de ralentisseur, ... afin d'éviter tout contact du GMP avec son environnement et de garantir le confort de conduite,
- filtrer les sollicitations dynamiques du GMP dans différentes gammes de fréquences :
 - ralenti de 5 à 30 Hz correspondant à la situation de vie du véhicule à l'arrêt moteur tournant,
 - bourdonnement de 30 à 250 Hz correspondant au bruit susceptible d'apparaître lorsque le véhicule est en mouvement,
 - médium de 250 à 1000 Hz correspondant au bruit aigu pouvant apparaître lors du roulage.
- ne pas amplifier l'excitation route vue par la caisse au travers de la suspension du véhicule
- participer à la cinématique du GMP et au chargement de la structure au cours d'un choc.

Ces fonctions se révèlent bien souvent être contradictoires entre elles. Ainsi, la nécessité de filtrer l'excitation dynamique du GMP (raideur faible) tout en limitant ses grands débattements (raideur élevée) illustre bien ce caractère antagoniste. Une suspension GMP se juge donc avant tout par la qualité du compromis qu'elle réalise entre toutes ces fonctionnalités.

Le rôle ainsi défini de la suspension GMP est donc bien, en tant qu'organe d'adaptation placé à l'interface entre le GMP et la caisse, de limiter la transmission de ces excitations vers la caisse, et plus précisément, en ce qui concerne le confort, vers l'habitacle

par voie solide. [POU95] et [SWO84] proposent ainsi une description précise de ces sources.

La principale source d'excitation provient du GMP. Celui-ci, pour un véhicule à moteur thermique, constitue une source interne qui couvre une large bande de fréquences. Les vibrations engendrées par un moteur sont dues essentiellement aux forces d'explosion dues à la combustion du mélange air/carburant, ainsi qu'aux forces d'inertie dues aux pièces mobiles du moteur (bielles, pistons, vilebrequin, ...).

3.2.3 Vocabulaire et repère GMP

Il est d'usage dans l'industrie automobile de nommer les six degrés de liberté du GMP dans son repère de la façon suivante pour les trois mouvements de translation (Ballant, Tamis et Hachis) et pour les trois mouvements de rotation (Roulis, Galop et Lacet). Ces degrés de liberté sont représentés dans la Figure 3-1. En outre, le lecteur pourra se familiariser aux conventions du système suspension GMP en se référant à l'annexe B.

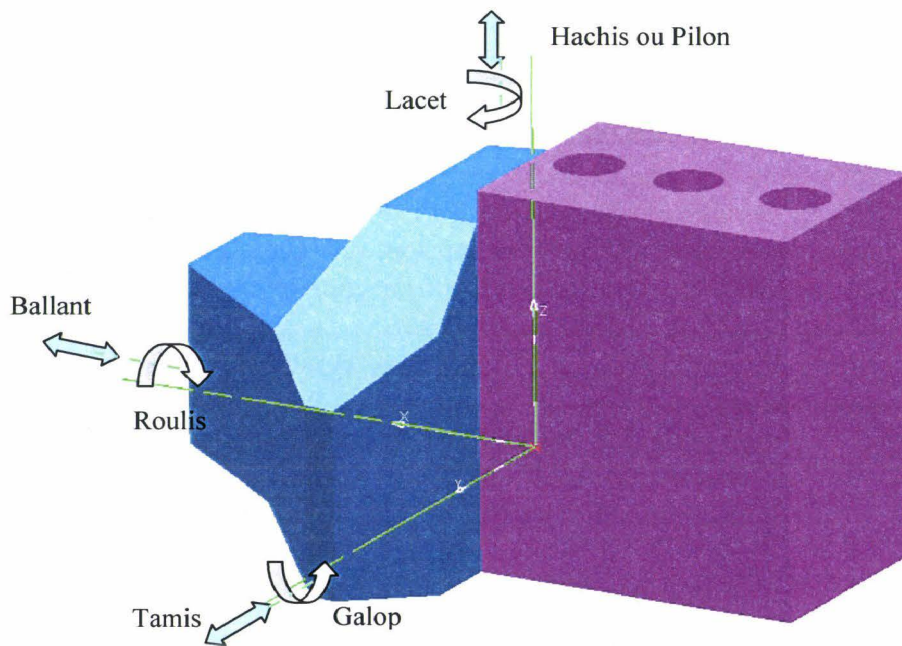


Figure 3-1 : Mouvement du GMP dans le repère GMP

Plusieurs types d'utilisation du véhicule existent, tels que le roulage, les phases de démarrage-arrêt moteur, véhicule arrêté moteur tournant au ralenti ou encore des phases de décollage plus ou moins marquées. Le décollage est une situation de vie du véhicule correspondant au passage d'une vitesse nulle à une vitesse quelconque. Le GMP est donc soumis à un couple quasi-statique et le véhicule à une accélération dans le sens du déplacement. Chacune de ces utilisations implique un type d'excitation GMP qu'il faudra filtrer ou limiter au mieux vis-à-vis de la caisse.

3.2.4 Sources d'excitation d'un véhicule

Un véhicule automobile est soumis à des sources d'excitations variées. Ces dernières peuvent être soit externe comme le profil routier ou les forces d'inertie (force centrifuge ...), soit internes comme le GMP ou les pièces en mouvement. La suspension GMP, quant à elle, est sollicitée par deux principales sources d'excitations. Le GMP génère d'une part des excitations d'amplitudes et de gamme de fréquences diverses selon le mode de fonctionnement considéré, et d'autre part, le roulage engendre des excitations provenant de la route, des freinages, des virages.

3.2.4.1 Excitations en régime stabilisé

En régime stabilisé, c'est-à-dire au ralenti ou en phase de roulage à vitesse constante, les excitations du GMP vont apparaître dans certaines gammes de fréquences liées au régime de rotation du moteur (tours vilebrequin par minute). Ces fréquences sont exprimées en multiples (harmoniques) de la fréquence de rotation (H_0) noté H_i .

Les forces dues aux masses en mouvement et les forces d'explosion vont générer une excitation dynamique qui est un couple de roulis. Les Figures 3-2 et 3-3 donnent l'allure de la fluctuation de couple pour des moteurs 4 et 3 cylindres en ligne, le couple statique utile étant la moyenne du couple dynamique.

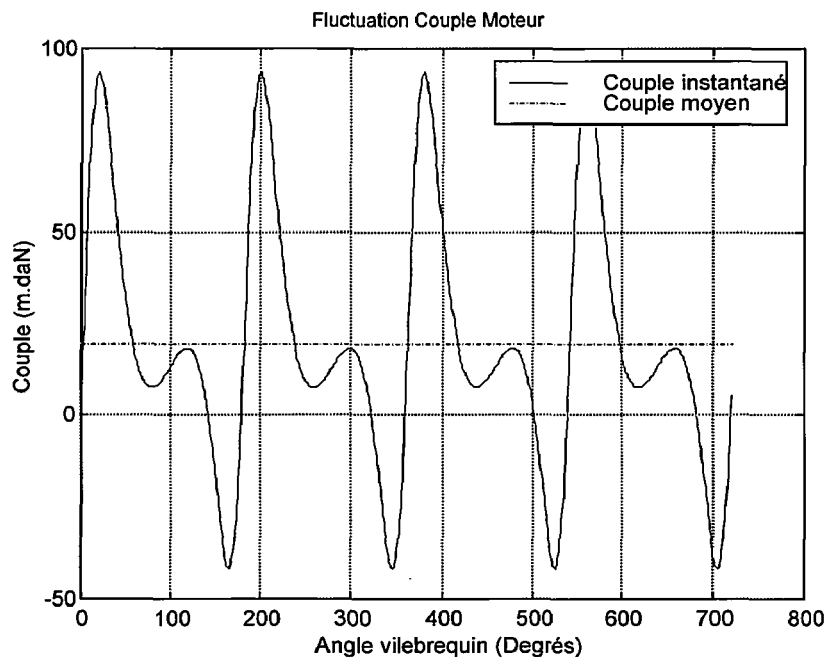


Figure 3-2 : Fluctuation du couple moteur pour un 4 cylindres en ligne.

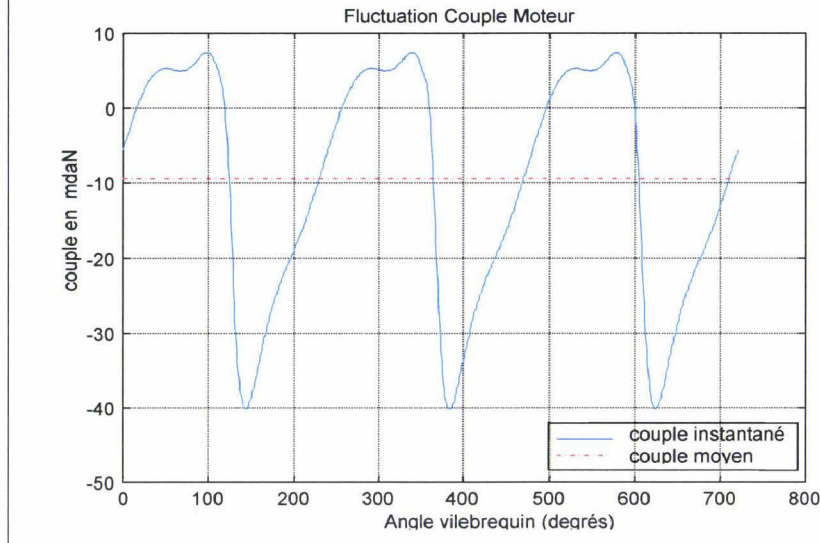


Figure 3-3 : Fluctuation du couple moteur pour un 3 cylindres en ligne.

Pour leur part, les inerties des pièces en mouvement vont également générer des efforts dynamiques et des couples dynamiques. L'ensemble de ces efforts et de ces couples sera exprimé par un torseur d'efforts dynamiques ramené au centre de gravité du GMP. D'une manière générale, les forces d'inertie deviennent prépondérantes au fur et à mesure que le régime augmente. Ce torseur bien entendu est différent pour chaque type de GMP (type de combustion, cycle, nombre de cylindres, architecture moteur,...).

Par exemple, l'harmonique fondamentale d'un moteur 4 cylindres 4 temps en ligne est le H2, qui génère une excitation en roulis due aux forces d'explosion et une excitation en hachis due aux masses en mouvement. Un 3 cylindres en ligne, quant à lui, génère une excitation en roulis liée à l'harmonique H1,5, une excitation en galop et lacet liée à l'harmonique H1, et une excitation en galop liée à l'harmonique H2. Les figures 3-4 et 3-5 montrent les variations des couples et des efforts dynamiques en fonction du régime de rotation pour les harmoniques principales des moteurs 3 et 4 cylindres.

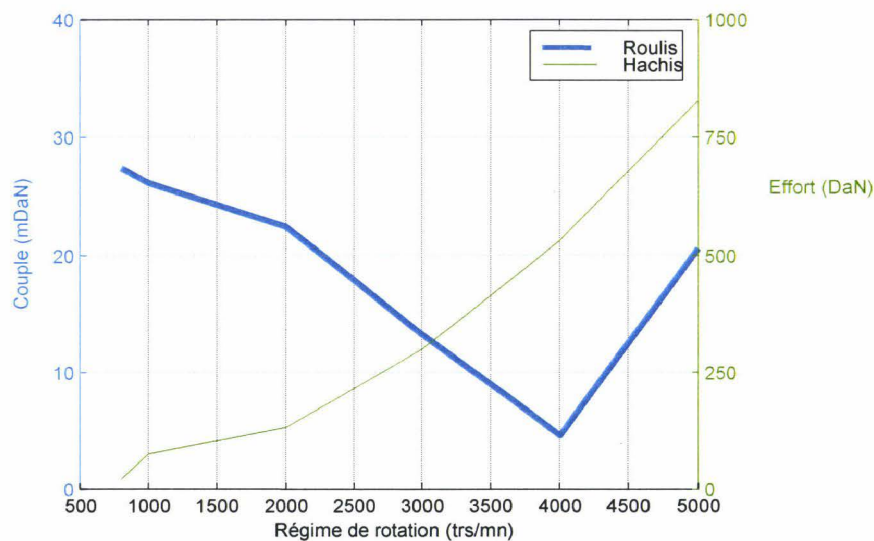


Figure 3-4 : Amplitude de l'harmonique 2 d'un 4 cylindres en ligne en fonction du régime moteur.

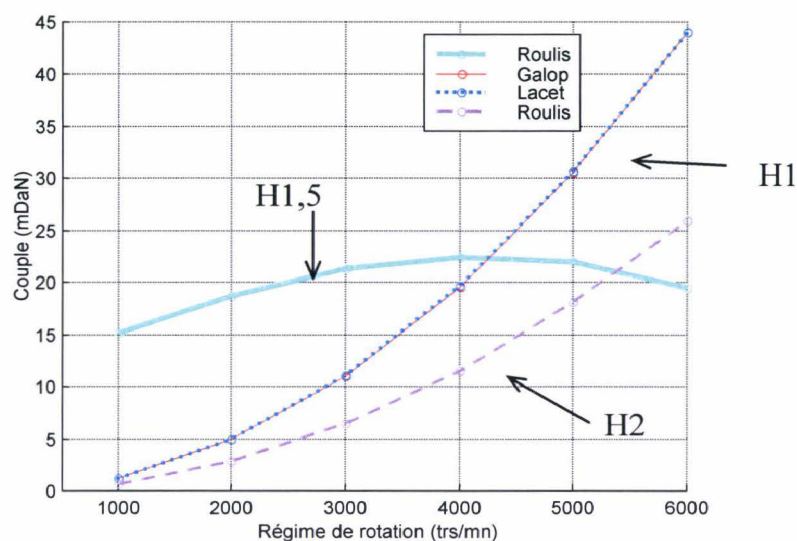


Figure 3-5 : Amplitude des harmoniques 1, 1,5 et 2 d'un 3 cylindres en ligne en fonction du régime moteur.

Enfin, un moteur ayant des problèmes d'allumage ou de combustion est susceptible de générer une excitation qui, pour un moteur 4 temps, sera l'ordre H0.5, soit la moitié de la fréquence de rotation du moteur. Ce phénomène se produit surtout au régime de ralenti. Cet harmonique H0.5 s'explique par le fait que, pour un moteur 4 temps, il se produit une explosion tous les deux tours pour chaque cylindre [SWO84].

3.2.4.2 Excitations transitoires

Les excitations, hors phases dites stabilisées, correspondent aux sollicitations que sont le démarrage-arrêt moteur et les à-coups de couple, plus ou moins marqués.

Les phases de démarrage-arrêt moteur sont caractérisées par le passage d'un régime de rotation du moteur nul à son régime de ralenti et inversement pour l'arrêt. Les modes de suspension du GMP se trouvant généralement entre 0-20 Hz, fréquences balayées par ce type d'excitation, il sera important de vérifier que la réponse du GMP à cette excitation ne génère pas trop de vibrations dans le véhicule.

Les à-coups de couple peuvent être caractérisés pour leur part, par des variations de couple utile aux transmissions, ce qui va générer un couple de réaction entraînant le débattement du GMP qu'il faudra alors limiter. Ces à-coups sont généralement dus à une action du conducteur. Ils apparaissent par exemple lors de la phase débrayage/embrayage ou lors de la phase d'embrayage plus ou moins violente lors du décollage du véhicule. Ces variations de couple ont lieu dans une gamme de fréquences relativement basse et ne sont pas entretenues.

3.2.4.3 Les excitations dues au roulage

L'excitation du GMP n'est pas directement générée par le profil routier, mais transite par la caisse via la suspension GMP. La masse du GMP n'étant pas négligeable devant celle de la caisse, il faudra veiller à ce que ses modes de suspension n'amplifient pas les excitations venant de la route. Dans le vocabulaire PSA, cette prestation liée à ce type de sollicitation est appelée trépidation.

La composante de l'excitation route est surtout verticale dans le cas d'un roulage sur une route en bon état. L'excitation liée au roulage sur des pavés ou lors de passage d'obstacles génère une composante verticale et une composante longitudinale. L'excitation route ou pavés pourra être considérée comme entretenue et l'excitation liée au passage d'obstacles pourra être considérée comme transitoire. Une des caractéristiques intrinsèques de ces excitations est que leur amplitude décroît au fur et à mesure que la fréquence augmente, tout au moins pour les excitations entretenues.

3.2.4.4 Récapitulatif

La Figure 3-6 résume les différents phénomènes et les différentes sources d'excitation décrite précédemment, ainsi que leurs plages de fréquences respectives.

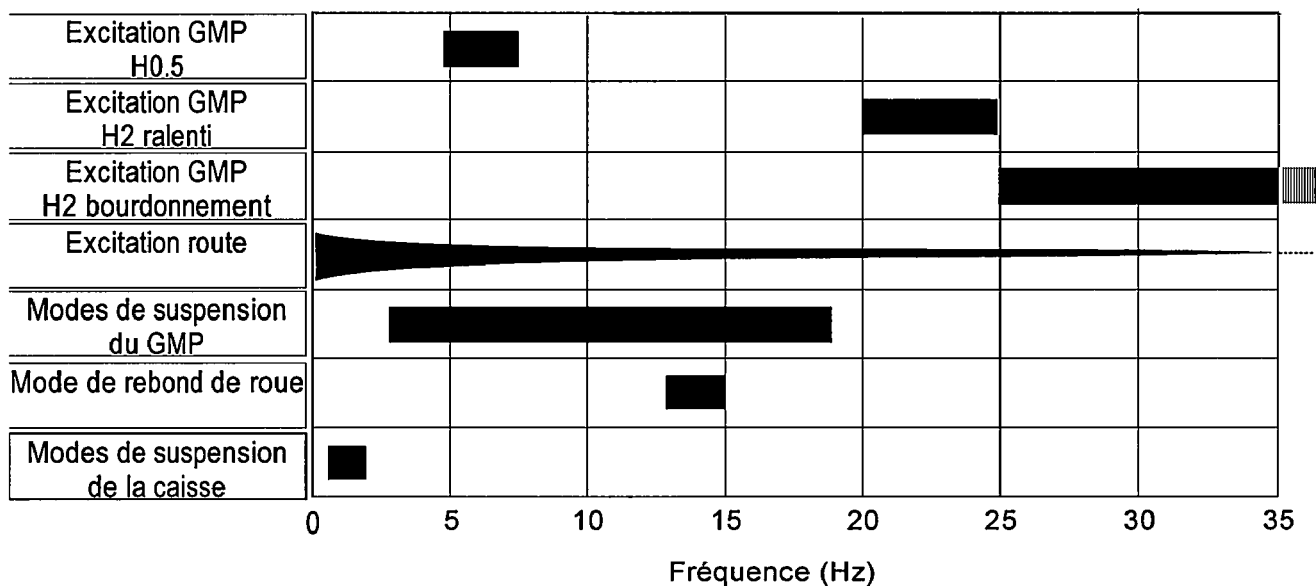


Figure 3-6: Récapitulatif des excitations et gammes de fréquences impliquées dans le fonctionnement de la suspension d'un GMP 4 cylindres en ligne 4 temps.

3.2.5 Cahier des charges fonctionnel d'une suspension GMP

La partie précédente a permis d'identifier les différentes excitations susceptibles de provoquer bruit et vibrations dans le véhicule. Le rôle de la suspension GMP sera principalement de limiter ces perturbations, qui peuvent être source d'inconfort pour le conducteur et les passagers.

3.2.5.1 Positionnement et maintien du GMP

La fonction initiale de la suspension GMP est de positionner le GMP dans le véhicule. Si le positionnement en $X_{véhicule}$ et $Y_{véhicule}$ du GMP est un problème purement géométrique réglé par une cotation adéquate ainsi que par un placement judicieux des différents éléments constituant la suspension GMP, le problème est différent pour le positionnement en $Z_{véhicule}$. Le poids du GMP en équilibre sur ses supports va provoquer une déflexion de ces derniers qu'il faudra essayer de minimiser. Cette minimisation occasionne une raideur relativement élevée.

3.2.5.2 Limitation des débattements du GMP

Une fonction importante de la suspension GMP est de limiter les débattements relatifs du GMP par rapport à la caisse. En effet, le GMP étant lié à la caisse par des supports élastiques, ces derniers autorisent le débattement relatif du GMP par rapport à la caisse lors des sollicitations telles que prise de virage du véhicule, accélération ou freinage du véhicule et à-coups de couple. De manière générale, ces sollicitations, qui sont des phénomènes soit statiques soit dynamiques à très basse fréquence (quelques Hertz), peuvent générer des déplacements relativement importants du GMP de l'ordre de 10 à 20mm. Les débattements à limiter lors des prises de virage et des phases accélération/freinage sont surtout des translations du GMP par rapport à la caisse. Quant aux débattements dus aux à-coups de couple, ils se traduisent, de manière générale, par une rotation du GMP autour d'un axe parallèle à l'axe de transmission (liaison entre les roues et la sortie de la boîte de vitesses).

Dans la pratique, limiter les débattements est relativement aisé. Il pourrait être en effet envisagé de fixer rigidement le GMP à la caisse. Cependant, en fonction des couples générés en sortie de boîte de vitesses, les efforts aux points de réaction qui en résultent se révèlent être importants et souvent très pénalisants dans la conception de la suspension moteur. Le concepteur s'attachera donc à maintenir les débattements du GMP dans une enveloppe prédéfinie, tout en s'assurant que les efforts dans les supports ne soient pas trop importants.

3.2.5.3 Caractérisation du problème de l'excitation GMP très basse fréquence (TBF- 0 à 20 Hz)

Dans ce domaine fréquentiel, le problème est essentiellement d'ordre vibratoire. Pour ceci, une hypothèse forte à ce niveau d'étude est faite : le GMP et la caisse sont considérés comme rigides. Si pour le GMP, cette hypothèse se révèle être satisfaisante, les premiers modes de déformation d'un GMP apparaissant vers 200 Hz, pour la caisse, par contre, elle s'avère moins rigoureuse, les premiers modes pouvant en effet apparaître dès 20 Hz. Cette hypothèse est retenue car dans cette phase de conception très en avance de phase, peu de données définitives sont disponibles sur la caisse.

Calage en fréquence des modes de suspension du GMP

Afin de permettre le filtrage de l'excitation dynamique provenant du GMP, la raideur des supports élastiques doit être relativement faible, exigence entrant en contradiction avec la limitation des grands débattements du GMP. Aussi, cette introduction de supports souples entre le GMP et la caisse entraîne l'apparition des six modes de suspension GMP lesquels influencent de manière prépondérante le confort acoustique et vibratoire d'un véhicule et, de ce fait, le dimensionnement des suspensions GMP.

Dans la phase de dimensionnement des suspensions GMP, deux modes sont à prendre en compte avec attention :

- le mode de roulis GMP qui joue un rôle prépondérant dans la réponse vibratoire du GMP à une excitation en couple de roulis,
- le mode de hachis intervenant dans la réponse de l'ensemble GMP/caisse à une excitation provenant du sol.

Ainsi, dans les problèmes d'isolation vibratoire, lorsque l'excitation se trouve dans une plage de fréquences bien définie, la stratégie de calage des modes consiste à avoir des fréquences propres inférieures à la plus basse fréquence d'excitation divisée par $\sqrt{2}$ (Ce ratio correspond à la fréquence pour laquelle la transmissibilité est supérieure à 1). Comme l'illustre la Figure 3-7, l'excitation se trouve alors dans une zone de fréquences où la réponse du mode est plus faible que sa réponse statique.

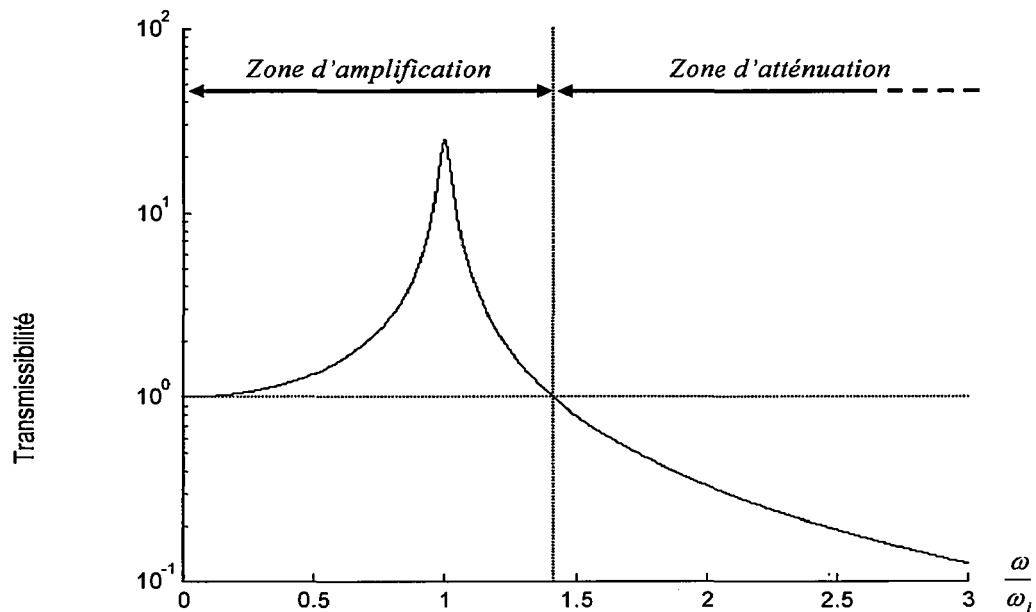


Figure 3-7 : Transmissibilité en fonction du ratio ω/ω_i

Par exemple, pour le cas d'un moteur 4 cylindres 4 temps, la plus basse fréquence excitée par l'harmonique 2 est 25 Hz en plaçant le régime de ralenti à 750 tours par minute. Les modes de suspension seront donc généralement placés en dessous de 17,7 Hz. Outre cette harmonique, les instabilités de combustion génèrent des excitations dans la zone de fréquence allant de 5 à 7,5 Hz. Ces fréquences étant assez basses, il est difficile de placer les modes du GMP sous cette excitation d'autant plus que des modes de suspension du véhicule existent aussi dans cette zone. La Figure 3-8 propose un exemple de calage des modes de suspension d'un GMP dans la plage 0-20 Hz.

Le lecteur pourra trouver une justification de cette stratégie via des modèles comportementaux simplifiés dans [KRE01].

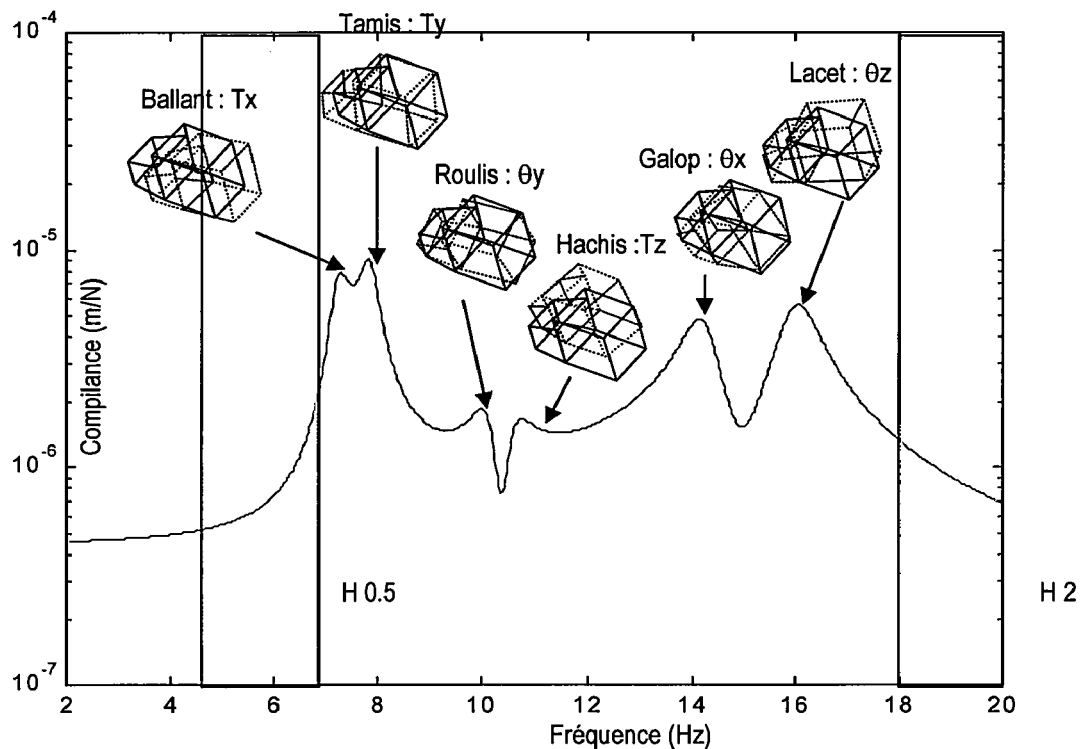


Figure 3-8 : Exemple de placement en fréquence des modes de suspension d'un GMP

3.2.5.4 Caractérisation du problème de l'excitation GMP lié aux moyennes fréquences (20-200 Hz)

Dans cette gamme de fréquences, les problèmes seront d'ordre vibratoire et acoustique. Une des hypothèses de la partie précédente était de considérer la caisse comme étant rigide jusqu'à 20Hz. Dans des plages de fréquences plus élevées, cette hypothèse n'est plus valable, et il devient beaucoup plus difficile pour le concepteur de remonter aux vibrations ou aux bruits dans le véhicule par des calculs relativement simples. En effet, pour calculer ces bruits et vibrations, il faut avoir connaissance de certaines caractéristiques de la caisse comme par exemple les transferts acoustiques ou vibratoires des points d'accrochage du GMP sur la caisse. Si dans la pratique la mesure des transferts se fait aisément, il est rarement possible d'en disposer au début de l'étude d'un projet.

Pour résoudre ce problème, il est d'usage de raisonner en efforts de blocage aux points d'accrochage du GMP sur la caisse. Un effort de blocage est le produit du déplacement imposé par le GMP en un point par la raideur dynamique du support élastique en ce même point. Ces efforts de blocage sont définis à partir d'une estimation des fonctions de transfert de la caisse.

Dans cette gamme de fréquences, le modèle utilisé est celui d'un GMP "suspendu" sur un bâti rigide. Ce modèle permettra de calculer des efforts de blocage, qui eux permettront de remonter aux bruits et vibrations dans le véhicule [DIO95].

Les équations régissant le comportement du GMP "suspendu" peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$(-\omega^2 M_G + K_G)X_G = T_G \quad \text{Eq. 3-1}$$

- avec X_G : le vecteur déplacement du CdG du GMP,
 K_G : la raideur équivalente ramenée au CdG du GMP,
 M_G : la matrice de masse exprimée au CdG du GMP,
 T_G : le torseur d'excitation du GMP exprimé au CdG du GMP,
 ω : la fréquence considérée.

Dans la gamme de fréquences étudiée, c'est à dire 20-200Hz, les modes de suspensions du GMP sont passés et le terme $-\omega^2 M_G$ peut être considéré comme prépondérant devant le terme K_G . Le comportement du GMP est alors approché par l'équation suivante :

$$-\omega^2 M_G \cdot X_G = T_G \quad \text{Eq. 3-2}$$

Les déplacements X_G du GMP sont alors indépendants de la matrice de raideur équivalente de la suspension GMP, et donc de la suspension GMP elle-même. Il est alors facile de calculer les déplacements du GMP au centre de gravité et d'en déduire le déplacement de n'importe quel point du GMP. Il est important de noter que ces déplacements sont intrinsèques au GMP et ne dépendent que de ses caractéristiques inertielles et de son excitation.

L'équation 3-2 permet donc de calculer le déplacement imposé par le torseur d'effort dynamique en tout point du GMP, notamment aux points d'accrochage du GMP sur ces éléments filtrants. L'effort de blocage est déterminé par la formule suivante :

$$F_i = K_d \cdot X_i \quad \text{Eq. 3-3}$$

- avec F_i : effort en un point du GMP dans une direction donnée,
 K_d : raideur dynamique du support dans la direction i ,
 X_i : déplacement d'un point du GMP dans la direction i .

Le but étant d'avoir un effort F_i minimum sur toute la gamme de fréquence étudiée, le concepteur pourra donc diminuer ces efforts soit en définissant une raideur dynamique K_d faible, soit en plaçant les supports élastiques en des points peu vibrants du GMP.

3.2.5.5 Caractérisation du problème lié aux excitations route

Cette partie ne présente qu'un aspect simplifié du problème lié à l'excitation route, et donne des indications pour le placement en fréquence du mode de hachis GMP.

L'excitation route qui sollicite la caisse via la suspension du véhicule, est essentiellement verticale. C'est pourquoi le placement en fréquence du mode de hachis est très important, car de ce placement et de son traitement va fortement dépendre le confort vibratoire en roulage du véhicule. Le rapport de masses entre la caisse et le moteur étant

d'ordre 3 à 4, la réponse de la caisse à l'excitation route sera fortement perturbée par les mouvements du GMP.

D'une manière très simplifiée le système peut se ramener à la modélisation suivante :

- F : Excitation route
- M_1 : Masse caisse
- M_2 : Masse GMP

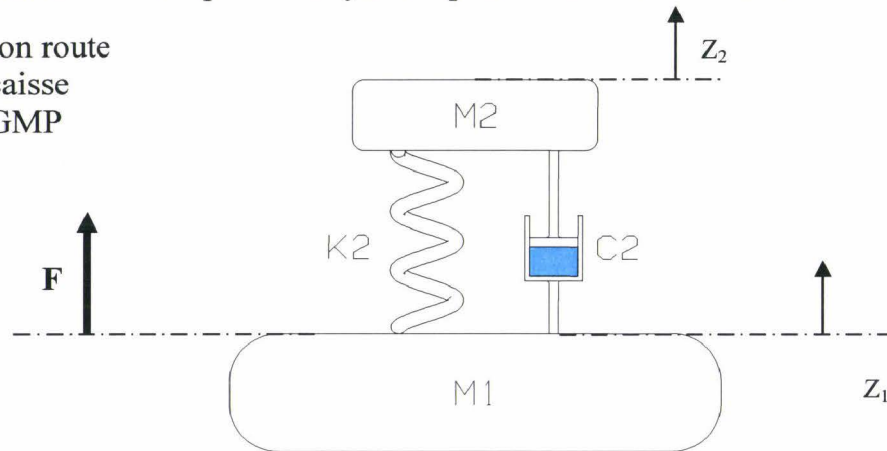
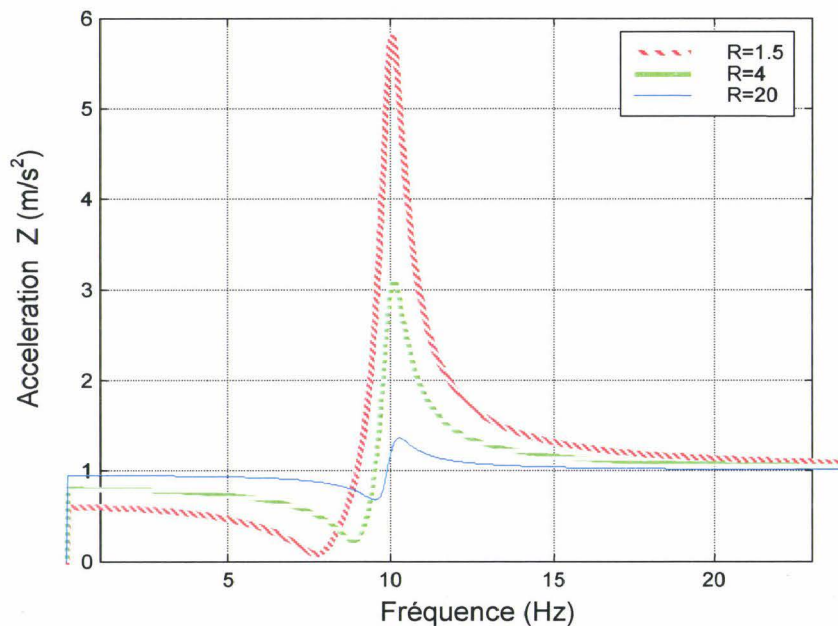


Figure 3-9 : Schématisation du modèle lié à l'excitation route.

La Figure 3-10 donne l'évolution de l'accélération de la masse M_1 , pour une fréquence donnée du mode de hachis, en fonction du rapport entre les masses M_1 et M_2 .



$$R = \frac{M_1}{M_2}$$

Figure 3-10 : Evolution de la réponse de la caisse à une excitation route verticale en fonction de la fréquence et pour différents rapports de masses.

Pour le concepteur, il est nécessaire de caler ce mode de hachis pour satisfaire plusieurs exigences :

- éviter les plages de fréquences qui correspondent aux excitations route connues,
- se placer suffisamment loin des excitations verticales du GMP (quand elles existent dans cette direction),

- éviter de caler ce mode près de certaines résonances d'autres pièces ou d'autres systèmes suspendus (exemple du rebond de roue).

Le critère de conception pour cette excitation est la minimisation des accélérations caisse. Pour cela, il est nécessaire, soit d'amortir fortement le déplacement du GMP, soit d'augmenter la raideur dans la direction Z de façon à éloigner le mode de hachis des excitations route. Par contre, ces deux solutions génèrent des inconvénients non négligeables : trop d'amortissement aura pour effet d'augmenter la raideur dynamique en même temps que la fréquence et sera nuisible au filtrage des excitations moteur. Augmenter la raideur verticale aura la même répercussion sur le filtrage des excitations moteur avec en plus des risques de couplage du mode de hachis, dont la fréquence sera augmentée. Pour traiter ce problème, la solution permettant d'amortir fortement le mode de hachis est généralement retenue.

3.2.5.6 Architectures de suspension GMP

Dans la pratique, une suspension GMP est réalisée via l'utilisation de plusieurs supports élastiques disposés selon une architecture prédéfinie. Cette architecture constitue souvent un compromis entre les zones d'accrochage possible sur le châssis, les zones d'accrochage sur le GMP et les zones les plus adaptées au filtrage des vibrations GMP.

Le choix d'une architecture aboutit bien souvent à attribuer des rôles différents aux supports élastiques (élément porteur, élément de reprise de couple, etc...). Ces différenciations ont conduit à la recherche de technologies adaptées à chacune de ces fonctions.

3.2.5.7 Implantation des GMP

Il convient de décrire les implantations usuelles du GMP dans un véhicule, dites longitudinale ou transversale (figures 2-10 et 2-11).

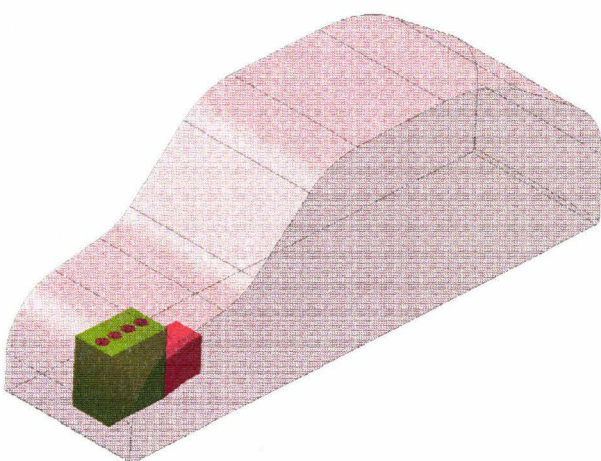


Figure 3-11 : Implantation longitudinale.

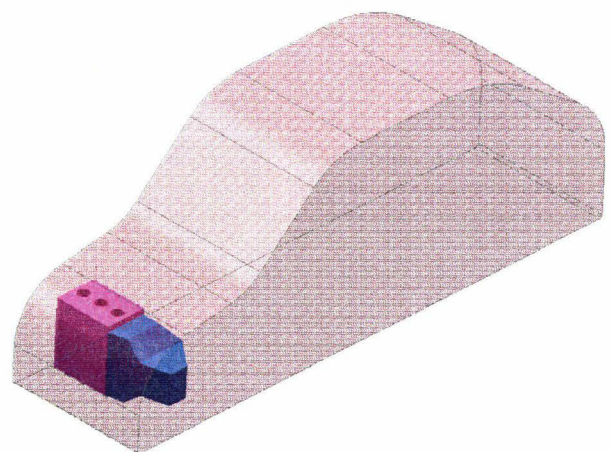


Figure 3-12 : Implantation transversale.

Dans le cas des travaux réalisés ici, seules les implantations transversales des GMP à l'avant seront évoquées. En effet, l'ensemble des motorisations implantées dans les véhicules du groupe PSA est doté d'une telle architecture.

3.2.5.8 Architectures

Il existe deux grandes familles d'architecture de suspension GMP : le type posé et le type pendulé illustrés par les deux figures ci-dessous.

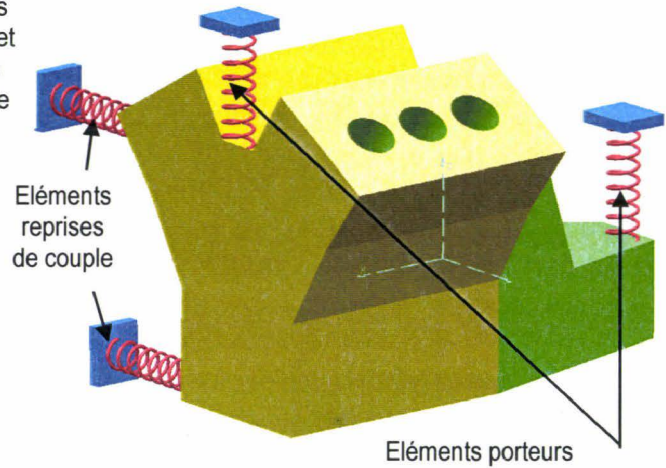
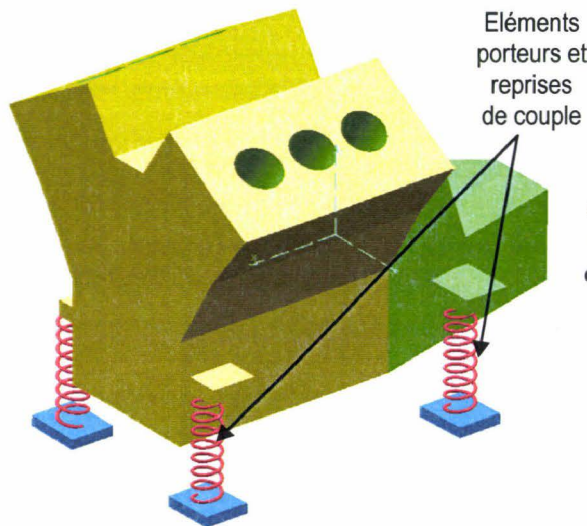


Figure 3-13 : Architecture de type posée

Figure 3-14 : Architecture de type pendulée

Sur chacun des deux types d'architecture, de nombreuses variantes existent liées essentiellement au positionnement des différents éléments filtrants. Le lecteur trouvera dans [KRE01] l'intérêt des divers positionnements en fonction du type de filtration potentielle.

Les figures 3-15 et 3-16 donnent une représentation plus réaliste d'une architecture de type pendulé. Ce type de suspension permet une bonne filtration des excitations des moteurs Diesel par un bon découplage des fonctions porteuses et reprises de couple.

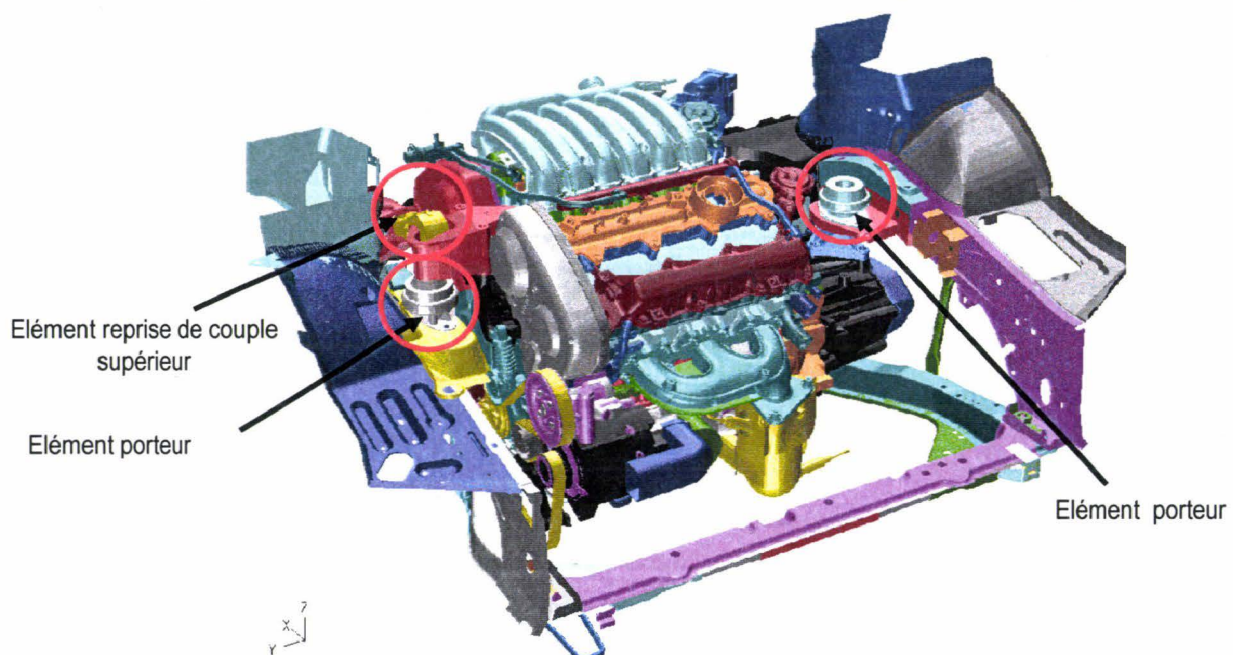


Figure 3-15 : Réalisation d'une suspension GMP de type pendulée, vue de l'avant du véhicule.

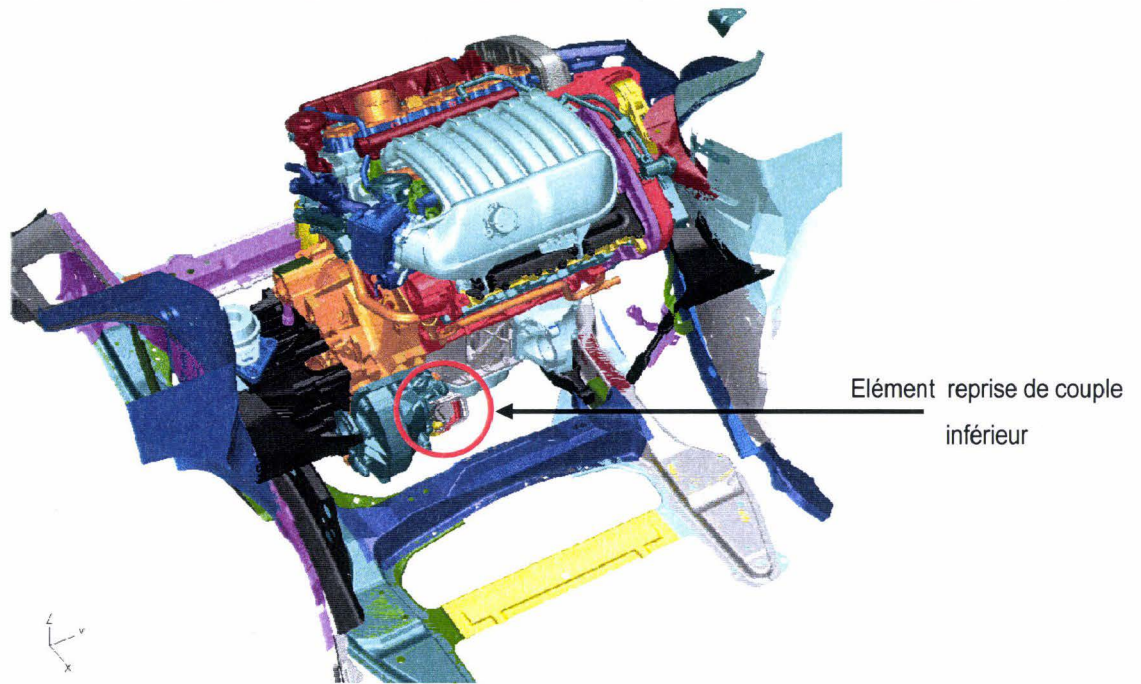


Figure 3-16 : Réalisation d'une suspension GMP de type pendulé, vue de l'arrière du véhicule.

3.2.6 Réalisation technique d'une suspension GMP

Cette partie, non exhaustive, se propose de présenter la manière dont sont réalisés les différents constituants d'une suspension GMP.

3.2.6.1 *Éléments métalliques et élastomères*

Les éléments métalliques permettent de réaliser la liaison entre les éléments filtrants, généralement implantés sur la caisse, et le GMP. Le plus souvent, ils sont réalisés en alliage d'aluminium et doivent répondre à des exigences de tenue en endurance, de résistance à des efforts exceptionnels ou encore respecter une certaine raideur.

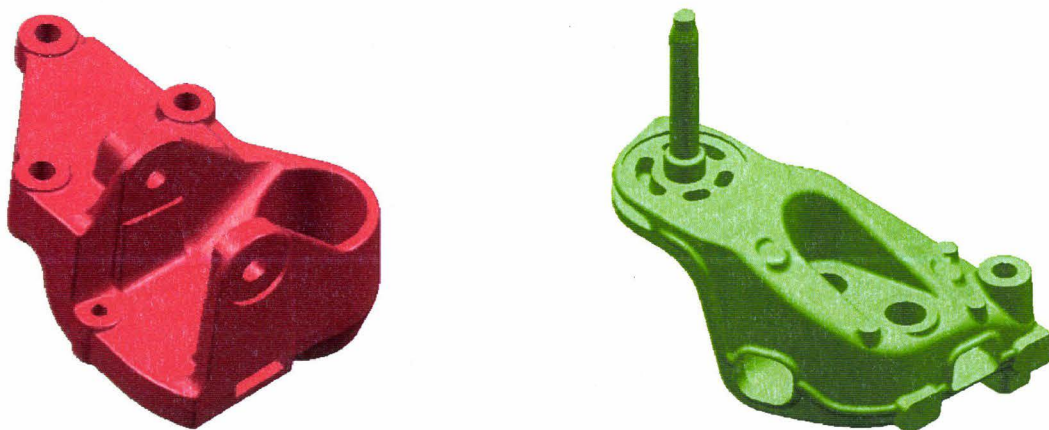


Figure 3-17 : Éléments aux interfaces moteur/caisse et boîte de vitesse/caisse

Les éléments élastomères sont les parties filtrantes qui permettent la réalisation fonctionnelle, décrite dans les parties précédentes, de la suspension GMP. Généralement, ces éléments ou supports élastiques moteur sont réalisés en élastomère à base de caoutchouc naturel.

3.2.6.2 Les supports élastomères

Les principales caractéristiques des pièces en élastomère sont leur élasticité et leur aptitude à se déformer dans toutes les directions. Sous des sollicitations dynamiques de petite amplitude (généralement moins de 1mm), cette élasticité est caractérisée en fonction de la fréquence dans les conditions suivantes :

- l'échantillon est soumis à un déplacement $X = \hat{X} \sin(\omega t)$, Eq. 3-4

- l'effort transmis au bâti est de la forme $F = \hat{F} \sin(\omega t + \varphi)$. Eq. 3-5

La raideur dynamique est alors définie par :

$$K_{dyn} = |K_{dyn}| e^{j\varphi} \quad \text{Eq. 3-6}$$

avec

$$|K_{dyn}| = \frac{\hat{F}}{\hat{X}} \quad \text{Eq. 3-7}$$

Il est essentiel de noter les propriétés suivantes :

- rigidification des pièces en élastomère lorsque la fréquence de sollicitation augmente,
- augmentation de l'amortissement avec la fréquence,
- chute de la raideur avec l'amplitude de la sollicitation.

La Figure 3-18 propose un exemple de courbes de raideurs dynamiques et de phases associées pour une pièce élastomère dans une direction donnée.

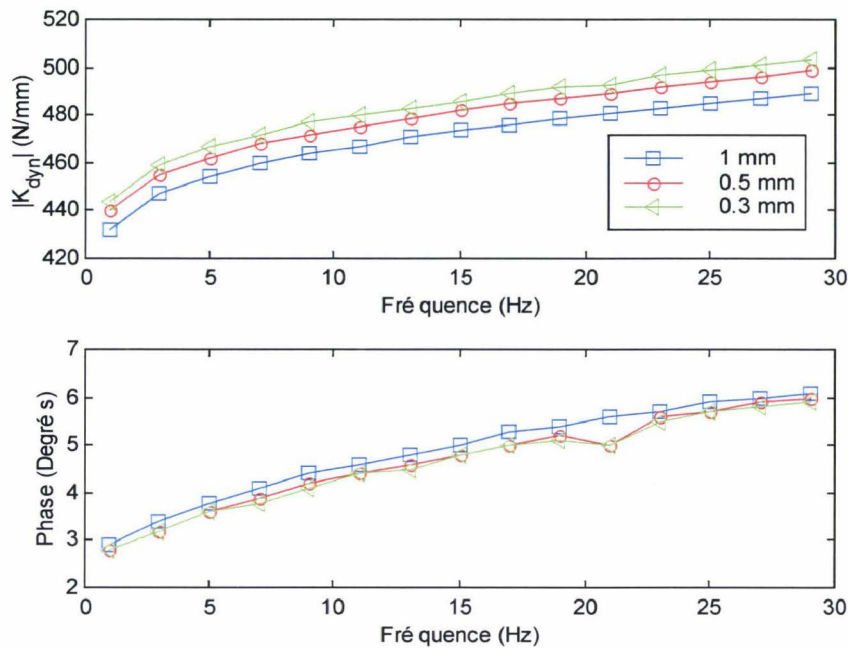


Figure 3-18 : Amplitude et phase mesurées d'un support élastomère pour des excitations d'amplitude 0.3, 0.5 et 1 mm..

La rigidification des pièces élastomères est à considérer avec attention dans le dimensionnement d'une suspension GMP. En effet, la raideur d'une pièce donnée peut être multipliée par 1,5 entre 0 et 5 Hz. Ensuite, elle continue de croître mais dans un rapport moindre. Ce phénomène est pénalisant dans le cas d'un filtrage d'excitation dynamique dans la mesure où le concepteur cherche plutôt une raideur statique élevée pour une raideur dynamique faible. Il est aussi intéressant de noter la faible dépendance de l'amortissement du caoutchouc avec la fréquence.

3.2.6.3 Les supports hydroélastiques

Pour le traitement de l'excitation route, un amortissement important des supports dans la direction verticale est souhaité pour atténuer le mode de hachis. L'élastomère seul ne permettant pas d'arriver à des niveaux d'amortissement suffisant, des dispositifs visqueux sont ajoutés, s'accompagnant d'une dégradation du filtrage des excitations GMP. La technologie intégrée dans les supports hydroélastiques garantit un fort amortissement dans une plage de fréquences limitée.

Le principe de base d'une suspension hydroélastique est la mise en résonance d'une masse de fluide entre deux cavités, qui dissipe ainsi une partie de l'énergie vibratoire. Par ce biais, on ajoute à une suspension moteur traditionnelle une capacité complémentaire à absorber de l'énergie.

La Figure 3-19 montre une vue éclatée d'un support hydroélastique. Le fonctionnement du support fait appel à trois fonctions clés :

- les effets hydrauliques du conduit,
- la rigidité et l'amortissement de la structure de l'enveloppe en caoutchouc,
- l'effet de gonflement des chambres.

Sous les sollicitations du moteur, la partie conique en caoutchouc se déforme. Le volume de la chambre constitué par le cône et la partition change, et crée un mouvement de

pompage, forçant le fluide à circuler d'une cavité à l'autre via l'orifice dans la partition. En passant à travers le serpentin que constitue cet orifice, le fluide transfère une partie de l'énergie qu'il vient d'acquérir soit par effet d'inertie de la masse du fluide déplacée, soit par frottement visqueux le long des parois de la partition.

Simultanément au déplacement imposé à une des extrémités de la cale, par suite de variation de pression dans la chambre, on observe un gonflement des parois élastiques de la chambre, ce qui compense une partie du changement de volume. La colonne de liquide dans le circuit donne naissance à une force d'amortissement asservie à la fréquence, qui est provoquée essentiellement par l'inertie du liquide, mais aussi par les pertes d'écoulement et la rigidité du gonflement des parois de la chambre. On peut remarquer que l'on obtient des variations de pression uniquement dans une seule chambre. La seconde, possédant une membrane lâche, se trouve ainsi soumise à la pression ambiante. C'est donc uniquement la chambre avec la partie en caoutchouc qui génère un effort.

Le lecteur pourra trouver une description plus détaillée du mode de fonctionnement et du dimensionnement d'un tel support dans [BER94], [SET91] mais surtout dans [DIO95].

- 1) Armature métallique fixée sur le GMP.
- 2) Corps de la cale réalisé en élastomère. Il assure la rigidité statique du support et permet de porter le GMP.
- 3) Cavité étanche délimitée par le cône élastomère porteur 2 et la paroi 4. Cette cavité remplie d'un fluide est essentiellement composée d'antigel et d'eau.
- 4) Paroi séparant les deux cavités.
- 5) Orifice qui permet le passage du fluide de la cavité 3 à la cavité 6.
- 6) Cavité étanche délimitée par la paroi 4 et la membrane 7.
- 7) Membrane élastique.
- 8) Armature métallique fixée à la caisse, assure la protection de la membrane 7 et limite son expansion

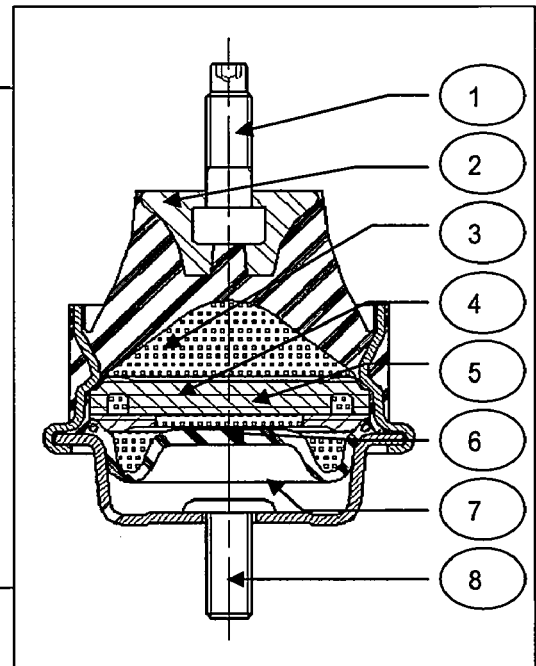


Figure 3-19 : Eclaté d'un support hydroélastique.

La Figure 3-20 donne l'allure de l'amortissement et de la raideur pour ce même support.

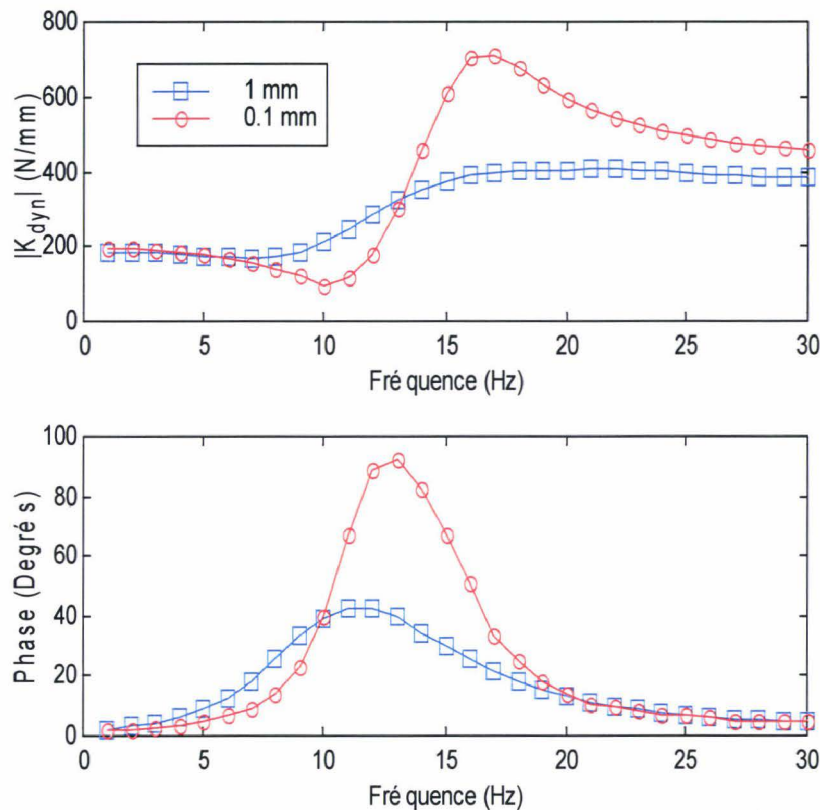


Figure 3-20 : Caractéristique d'un support hydroélastique en fonction de l'amplitude et de la fréquence pour deux excitations d'amplitude 1 et 0,1 mm.

3.2.6.4 Les limiteurs de débattement

Comme leur nom l'indique, ces pièces ont pour rôle d'éviter que le GMP ne sorte d'une enveloppe de débattement fixée dans le cahier des charges de la suspension GMP. Elles permettent donc d'éviter les contacts entre le GMP et son environnement, qui se traduiraient par des bruits perturbants et même éventuellement par une dégradation des zones en contact.

En général, il est très important de soigner leur acoustique pour éviter de fatiguer les occupants du véhicule sur la durée. L'acoustique des roulages en première, deuxième ou marche arrière est moins soignée, car ces phases ne sont généralement que transitoires. Par ailleurs, les niveaux de couple statique pour ces phases sont élevés et il devient alors important de limiter les déplacements du GMP sous couple.

Limiter les débattements demanderait une raideur élevée de ces éléments, qui a contrario dégraderait fortement les prestations acoustiques et vibratoires. Ainsi, une faible raideur est nécessaire pour les phases de fonctionnement stabilisé, qui peuvent durer dans le temps tels que le roulage en troisième, quatrième ou cinquième. Il faut donc trouver un compromis permettant de concilier les deux aspects.

Dans la pratique, on utilise un élément de reprise de couple dont le comportement est représenté sur la Figure 3-21.

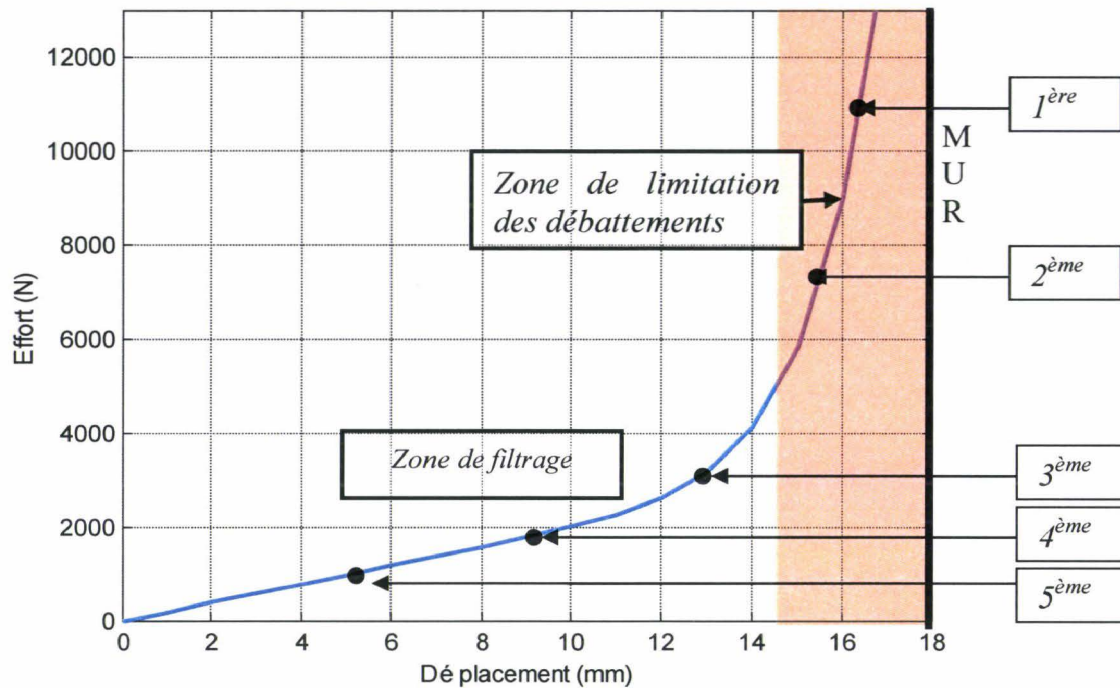


Figure 3-21 : Exemple de courbe Effort-Déplacement pour des éléments de reprise de couple.

Techniquement, les éléments de reprise de couple seront généralement caractérisés par une courbe effort-déplacement présentant une pente faible autour des points de fonctionnement correspondant à des couples statiques faibles ou nuls (ralenti, troisième, quatrième ou cinquième). A partir d'un certain niveau de déplacement, ces supports entrent en butée et leur raideur statique augmente fortement, jusqu'à un « mur » de très forte pente (Figure 3-21).

Technologiquement, l'obtention de telles courbes de comportement passe par l'intégration de butées de débattements (Figure 3-22)

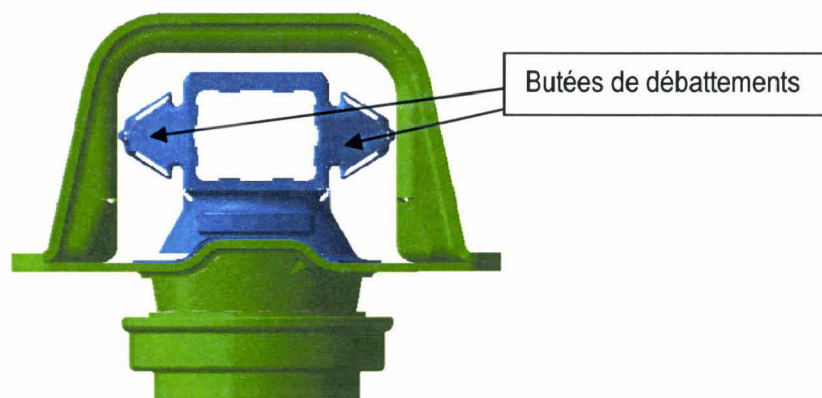


Figure 3-22 : Cale porteuse avec butées de débattement intégrées.

3.3 Variabilité des paramètres de conception d'une suspension GMP

Comme il a été décrit précédemment, la connaissance précise des organes permettant le dimensionnement d'une suspension GMP peut s'avérer complexe dans la mesure où certains paramètres ne peuvent être connus systématiquement de manière sûre. En effet, la détermination d'une suspension GMP, en terme de caractérisation, peut intervenir à différents stades de la conception d'un véhicule. Ainsi, le dimensionnement en avant-projet est caractérisé par une grande liberté sur les paramètres, mais aussi par un manque d'informations sur les autres composants du véhicule. A contrario, en phase de validation, l'ensemble des organes est connu et la méconnaissance des données n'intervient plus qu'en termes de dispersion par rapport à une valeur de référence. Les variations peuvent être également imputées aux évolutions susceptibles d'intervenir au cours de la vie d'un projet, comme par exemple la modification d'une cote pour des raisons d'implantation. Ces variations peuvent être associées à des modifications conséquentes des valeurs des paramètres.

Dans le cadre particulier de la suspension moteur, il est d'usage d'avoir à faire à des ordres de grandeur plus qu'à des valeurs extrêmement précises. Pour ce qui est des éléments élastomères, ces inconnues sont en règle générale données par les fournisseurs de pièces, lesquels doivent se prononcer sur les caractéristiques des pièces qu'ils produisent. La plupart des valeurs qui pourront être lues ci-dessous ont pour origine soit des propositions de fournisseurs, soit des notes fournies par ceux-ci. Un document majeur permettant de se prononcer sur ces imprécisions est [TRE03].

3.3.1 Paramètres dimensionnant une suspension GMP, imprécisions et motivation

Préalablement au recensement des paramètres imprécis, il s'avère nécessaire de décrire succinctement les éléments principaux intervenant dans le dimensionnement d'une suspension moteur. En effet, la suspension d'un GMP en phase d'avant-projet est définie par la combinaison de trois caractéristiques dimensionnantes.

Dans notre modèle, le GMP est décrit comme un corps rigide défini par sa masse, son centre de gravité et sa matrice d'inertie. La caisse est définie par le châssis et l'ensemble des éléments autres que le GMP, elle est caractérisée par une masse et un centre de gravité. Les éléments de la suspension GMP se définissent par les coordonnées de leur centre élastique et des fixations sur la caisse et sur le GMP, les raideurs des éléments dans leurs trois directions et les coefficients d'amortissement.

Cependant, dans les phases de conception actuelle, surtout en phase d'avant projet, les imprécisions concernant les paramètres influant sur les performances fonctionnelles de la suspension ne sont pas prises en compte. Ces imprécisions peuvent provenir de différentes sources telles que les procédés de fabrication, les conditions de montage ou encore l'évolution de paramètres au cours d'un projet (remotorisation par exemple).

Cette partie a pour but de décrire, de manière non exhaustive, différentes sources d'imprécisions sur les données et paramètres pouvant impacter le dimensionnement précis d'une suspension GMP et ainsi motiver la recherche d'un outil de dimensionnement robuste.

3.3.2 Variabilités sur les caractéristiques des élastomères et process de fabrication

Comme décrit dans les paragraphes précédents, les pièces élastomères représentent les éléments constitutifs principaux d'une suspension moteur. Ils doivent assurer les prestations inhérentes à une suspension GMP, c'est pourquoi un soin tout particulier doit être apporté à leur caractérisation mais aussi à leur fabrication. En effet, de la qualité de la production de ces éléments dépend la qualité de la prestation. [TRE03] propose au lecteur un descriptif relativement détaillé du mode de fabrication des éléments élastomères et par extension des suspensions moteurs. Les différentes étapes de conception de ces éléments y sont expliquées.

La principale source d'imprécision inhérente à la fabrication des élastomères est liée à l'élément de base les constituant à savoir le caoutchouc ainsi qu'aux transformations qu'il subit afin de devenir un produit fini « industriellement » utilisable. Ces transformations doivent lui permettre d'acquérir les caractéristiques attendues. Elles se décomposent selon deux étapes principales, le « mélangeage » consistant à malaxer le caoutchouc dans le but d'y introduire différents éléments (noir de carbone, plastifiant, oxyde de zinc, soufre...) et la « mise en forme ».

En outre, les caractéristiques des pièces obtenues peuvent être sujettes à des variations non négligeables, liées au process de moulage. Ces variations sont donc le fait d'imprécisions liées soit au mélange, soit à la pièce elle-même. Les variations dues au mélange peuvent être inhérentes soit à des imprécisions sur le dosage des matières premières, soit au process de fabrication lui-même. Les variabilités relatives aux pièces incluent, quant à elles, les imprécisions sur les mélanges et celles liées au process de fabrication. L'ensemble de ces perturbations est estimé à une imprécision moyenne sur la raideur statique de l'ordre de $\pm 10\%$ [TRE03].

3.3.3 Variabilités sur les caractéristiques des élastomères et comportement mécanique

Les deux principales propriétés des éléments élastomères sont l'hyper-élasticité caractérisée par l'acceptation de grandes déformations de manière réversible et la quasi-incompressibilité. Les deux phénomènes inhérents à ces propriétés et susceptibles d'intervenir sur les caractéristiques des élastomères sont le fluage et la relaxation. Ils sont liés au fait qu'il existe une composante visqueuse dans les élastomères. Le comportement de l'élastomère est alors modifié lorsqu'il est sollicité de manière continue. Le *fluage* est caractérisé par l'accommodation de l'élastomère à un effort imposé sur une durée. Ainsi, si on soumet un élastomère à un niveau de contrainte constant pendant un temps suffisamment long, le déplacement résultant augmente. Ce phénomène n'est pas systématique et n'apparaît que pour un niveau de contrainte suffisamment élevé. La *relaxation*, à l'instar du fluage, est un phénomène physique lié à la visco-élasticité du matériau. Si un déplacement est imposé pendant un temps assez long à l'élastomère, celui-ci voit l'effort résultant de ce déplacement diminué. Enfin, les caractéristiques peuvent être modifiées par le simple vieillissement (chimique ou physique) des pièces. L'imprécision inhérente à ce phénomène est mesurée à des valeurs allant de 10 à 15 % [TRE03].

3.3.4 Géométrie et dispersions

Une suspension GMP, comme il a été décrit précédemment, est définie par un ensemble d'items dimensionnant. Nous nous sommes attachés, dans les paragraphes précédents, à décrire les diverses sources d'imprécisions liées aux caractéristiques des élastomères. La modélisation d'un tel système implique également la définition de diverses données géométriques, que sont les positions des éléments de la suspension.

- Évolution des données géométriques

L'ordre de grandeur des imprécisions sur ces items peut varier de façon sensible selon leurs origines. En effet, la définition de la géométrie, telle qu'elle a été décrite précédemment, intervient tout au long de la conception du véhicule mais il est possible de discerner deux grands moments de la vie du projet : l'*avance de phase* durant laquelle les caractéristiques, définissant les différents éléments constitutifs du véhicule, sont en phase de détermination et où rien n'est figé et la *phase de validation* pour laquelle l'ensemble des caractéristiques sont définies. Aussi, selon le moment où se situe l'étude, l'ordre de grandeur des imprécisions peut être très différent.

- Evolution de l'emplacement au cours du projet

Comme il a été décrit précédemment, les items dimensionnant sont susceptibles d'évoluer de manière significative au cours du projet, principalement en avance de phase. En effet, les schémas de conception actuels sont définis selon divers stades de validation des projets selon lesquels les définitions des éléments peuvent évoluer.

Il apparaît alors qu'à ces différents stades correspondent des spécifications techniques propres. A chaque spécification correspondent des définitions de grandeurs physiques ou géométriques susceptibles d'évoluer au cours de la vie du projet.

L'ordre de grandeur de l'évolution des valeurs des données est alors susceptible d'être relativement important. Concrètement, pour une position de cale, il est possible d'envisager un scénario au cours duquel l'interférence de la cale avec d'autres organes ait pour conséquence une modification de celle-ci. Par exemple, une modification topologique de quelques millimètres n'est pas rare.

De même, lors de la création d'un nouveau véhicule, il peut s'avérer très intéressant en termes de choix d'architecture de réaliser un « portage » d'une solution existante sur une nouvelle architecture. De ce fait, la variabilité sera non seulement liée aux imprécisions mais également aux modifications de l'architecture et des éléments définissant l'environnement de la suspension.

Enfin, les variations peuvent être dues aux évolutions susceptibles d'intervenir au cours de la vie d'un projet, comme par exemple la modification d'une cote géométrique pour des raisons d'implantation. Ces imperfections peuvent être associées à des modifications conséquentes des valeurs des paramètres.

- **Imprécisions sur les mesures**

Le concepteur, dans sa phase de dimensionnement, se doit d'intégrer un certain nombre d'éléments issus de mesures physiques. Ainsi, si on considère le cas d'une suspension moteur, pour dimensionner ce système, il est nécessaire de connaître la valeur de la masse du GMP ou de la caisse et leurs inerties respectives. Or ces données sont issues de mesures sur banc et sont donc susceptibles, d'être imprécises. Le principal facteur d'imprécision ne réside pas tant dans la mesure elle-même que dans les éléments mesurés. En effet, si on prend le cas d'un GMP, il est classique de mesurer l'ensemble boîte de vitesse-moteur. Cependant, le GMP, en phase d'utilisation, se voit complété d'un ensemble d'éléments supplémentaires, que sont, entre autres, les durits dont la masse peut ne pas être négligeable. De plus, lorsque celui-ci est implanté dans un véhicule, des fluides circulent et sont animés au sein même du moteur, pouvant également perturber son comportement. Il est estimé que l'ordre de grandeur des imprécisions sur la masse du GMP ou de la caisse est de $\pm 10\%$ [VIB04]. Il devient alors prépondérant pour le concepteur d'anticiper les perturbations sur les prestations du système issues de ces imprécisions.

3.3.5 Conclusion sur les variabilités

A l'issue de cette partie, une identification succincte des paramètres intervenant dans le dimensionnement d'une suspension GMP a été réalisée. Un grand intérêt a été porté à la description des élastomères, de leur mode de fabrication, à leur caractérisation et aux diverses sources d'imprécisions inhérentes à ces données. Par la suite, un éclairage a été fait sur les stades de conception d'un projet véhicule au cours desquels des évolutions géométriques et physiques peuvent intervenir pour les supports GMP mais aussi pour les éléments intervenant sur le comportement de ceux-ci. On pourra notamment citer la masse du GMP, sujette à modification lors de l'évolution du projet, et pouvant influencer de manière significative la qualité de l'architecture de la suspension GMP. L'étape suivante, décrite dans le chapitre 4, consistera à intégrer ces imprécisions dans le processus d'optimisation robuste d'une suspension GMP.

3.4 Conclusion

Cette partie a été consacrée, dans un premier temps, à la description des différentes sources d'excitations impactant le fonctionnement d'une suspension GMP, de quelques règles de dimensionnement et des architectures existantes pour ce système.

A l'issue de cette première partie, le caractère antagoniste des diverses prestations assurant la qualité d'une suspension a été mis à jour. De ce fait, il devient nécessaire pour le concepteur de prendre simultanément en compte l'ensemble de ces prestations.

Par la suite, il a été décrit plus précisément les items dimensionnant d'une suspension moteur et plus particulièrement les cales moteurs, via la présentation des élastomères. Les principales sources d'imperfections sur les paramètres ont été exposées.

Ainsi, il est clairement apparu que la conception d'un tel système, en plus de l'aspect antagoniste des prestations qu'il doit assurer, est sujette à des imprécisions qu'il est nécessaire de considérer dans la phase de dimensionnement.

Aussi, il semble évident que le développement d'un outil de conception permettant d'évaluer non seulement le compromis de ces prestations mais aussi l'impact de la variabilité des paramètres sur la qualité de ces prestations apparaît nécessaire.

Enfin, le développement d'un tel outil aura pour intérêt de se prononcer sur le choix des paramètres prépondérants pour lesquels il sera nécessaire de diminuer leurs imprécisions. De plus, il permettra de définir la plage de variation pouvant être tolérée pour ces paramètres.

CHAPITRE 4

Formulation d'un problème d'optimisation robuste adapté au cas de la suspension GMP

4 FORMULATION D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION ROBUSTE ADAPTE AU CAS DE LA SUSPENSION GMP

4.1 Introduction

La notion de robustesse est largement usitée dans de nombreux domaines et sa signification peut différer de manière notoire selon le cas d'application pour lequel elle est employée. En effet, dans les systèmes mécaniques, la robustesse désigne en règle générale la faculté que possède un matériau à résister à des chargements et des contraintes. Dans le cas qui nous intéresse, l'analogie peut être faite en mettant en parallèle le matériau et notre système ainsi que les chargements et les imprécisions. Le principe de robustesse de conception d'une suspension GMP réside dans la stabilité en termes de prestations du système vis-à-vis d'imprécisions sur les données d'entrée.

La littérature offre bon nombre d'exemples de dimensionnement de suspension GMP ([BER83], [FLA89]...). Kreis [KRE01] réalise une synthèse des prestations à assurer par une suspension GMP et propose une méthode de dimensionnement de ce système via des procédés d'optimisation multi-objectifs. Ces travaux ont permis de mettre à jour une méthodologie efficace de conception mais ont également fait apparaître une des limites de l'utilisation des algorithmes d'optimisation. En effet, les solutions optimales obtenues par cette méthode peuvent rapidement perdre leur efficacité si les paramètres sont dégradés par rapport à leur valeur nominale.

Cette limite justifie alors la recherche d'une méthode permettant à la fois d'améliorer la performance en termes de prestations et d'intégrer la notion de perturbations afin de rendre cette solution plus stable et en adéquation avec le stade de développement du véhicule.

4.2 Motivation

Sur le plan industriel, la recherche d'une telle méthodologie se justifie par le fait qu'un constructeur souhaite mettre sur le marché des véhicules dont le niveau de prestations dans une gamme définie soit sensiblement le même pour l'ensemble des véhicules produits. En effet, un même client, s'il est amené à essayer un véhicule, souhaitera retrouver les mêmes caractéristiques dans le cas où il décide d'acquérir le modèle dont il a préalablement réalisé l'essai. Cependant, considérant l'ensemble des imprécisions inhérentes à la réalisation de ce véhicule, une grande disparité sur l'ensemble du parc automobile peut exister.

La méthodologie développée devra donc aider le concepteur dans le choix d'une solution technologique parmi un panel de solutions différentes. Ainsi, celui-ci, à prestations équivalentes, choisira les plus stables par rapport aux variations prises en compte.

Par exemple, dans le cas décrit ci-dessous (Figure 4-1), le concepteur, dans le cadre de la recherche d'un design robuste d'une fonction $f(q)$, aura tendance à choisir la solution

caractérisée par le point q_2^* , moins performant au nominal mais plus stable sur la plage de variation considérée.

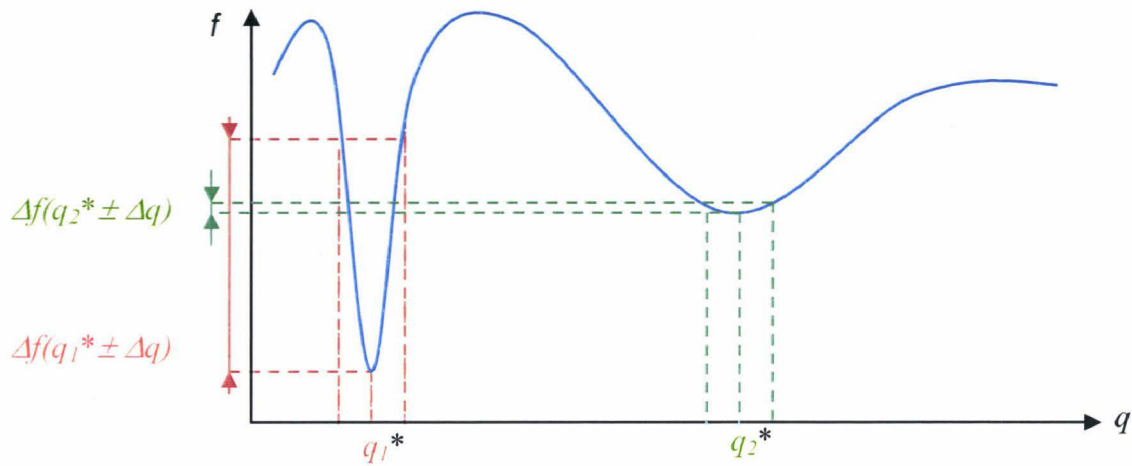


Figure 4-1: Exemple du compromis entre performance et robustesse.

4.3 Robustesse et stade de développement

Avant d'entrer dans la formulation proprement dite d'un problème de dimensionnement robuste d'une suspension GMP, il est important de faire un état des lieux de l'analyse de la robustesse en avant-projet. En effet, au terme d'une étude sur le mode de conception d'une automobile, il s'avère que cette analyse de robustesse peut intervenir à deux stades différents du développement impliquant deux voies d'études.

4.3.1 Analyse a posteriori

Le principe dans le cas présent est en fait de créer une « image » de la robustesse d'un design existant. Les méthodes faisant état de ce type d'analyse sont assez simples. La plus connue et sans doute la plus efficace, dans un contexte industriel, est la méthode des simulations de Monte-Carlo qui offre, moyennant un nombre de calculs non négligeables, une caractérisation représentative du système étudié. L'avantage indéniable de la méthode standard est que chaque calcul effectué est exact et, a fortiori, n'est pas biaisé par une approximation. Du point de vue industriel, ce mode d'analyse n'est pas à occulter car il arrive fréquemment que lors du développement d'un nouveau véhicule, le « portage » d'un système préexistant soit décidé. Il est alors nécessaire de s'assurer que les prestations soient pérennisées. Un bilan des perturbations inhérentes à ce portage doit être réalisé afin d'analyser l'impact des éventuelles modifications sur la qualité du système étudié. Cette méthode constituant un moyen fiable de validation de la robustesse d'une solution technique, elle permettra de nous prononcer sur la pertinence des résultats obtenus lors des développements décrits ci-dessous.

Il est à noter également que l'utilisation de méthodes stochastiques nécessite une description de l'ensemble des paramètres imprécis par un jeu de variables aléatoires définies par les moments aux différents ordres (moyennes, écart-types ...). Suivant le stade

d'évolution du projet, ces informations ne sont pas nécessairement disponibles, les distributions des variables aléatoires associées pourront alors considérées uniformes.

4.3.2 Analyse a priori

Cette analyse intervient dès l'avance de phase. C'est elle qui constitue l'apport inhérent au travail décrit par la suite. Le concepteur va chercher à intégrer directement les imprécisions sur les paramètres dimensionnants de sorte que le design de suspension auquel aboutiront ses calculs sera robuste. La littérature offre quelques ouvrages décrivant des optimisations robustes utilisant les différentes méthodes citées dans le premier chapitre. [WOL00] propose une application de la méthode des intervalles aux problèmes d'optimisation contrainte et non contrainte. Qiu et Mac-Williams ([MCW99], [QIU98]) proposent le terme d'anti-optimisation dont le principe est de trouver un intervalle, dont la valeur correspondant à la plus mauvaise des prestations, vérifie quand même un cahier des charges prédéfini. [DAR98] propose une méthode dont la prise en compte de la robustesse réside dans l'optimisation du couple moyenne/écart-type. [DAS97] réalise, quant à lui, une optimisation robuste via la méthode NBI en considérant un système décrit par des paramètres imprécis par la méthode SORM.

Dans notre cas, le principe retenu sera d'intégrer en début de conception les variations sur les éléments d'une suspension GMP, décrites dans le chapitre précédent. Le design obtenu devra être peu sensible à une variation de sa valeur nominale et d'aboutir à une homogénéisation des prestations de l'ensemble des véhicules produits.

4.4 Modélisations

La détermination de modèles permettant la simulation des différents cas de fonctionnement intervenant dans le dimensionnement des suspensions GMP en avant-projet nécessite une formulation numérique de problème. Il est proposé dans cette partie de décrire les modèles de supports élastiques ainsi que les calculs effectués en statique et dynamique.

4.4.1 Caractéristiques mécaniques des supports

La modélisation, telle que nous souhaitons la réaliser, est une approche de type optimisation. Aussi, ces caractéristiques doivent être prises en compte sous la forme de modèles paramétrés, où les paramètres pourront constituer par la suite des variables d'optimisation.

La conception de suspensions GMP en phase d'avant-projet a pour but la recherche d'une architecture performante et de caractéristiques mécaniques des supports élastiques adaptés afin d'aboutir à un cahier des charges permettant le dimensionnement à proprement parlé des pièces en élastomères. Ce cahier des charges permettra alors la réalisation technique des pièces d'adaptation.

Les modèles doivent donc permettre de rendre compte des caractéristiques mécaniques des éléments considérés comme des ressorts équivalents. Un grand soin sera apporté à la modélisation précise des deux items essentiels des éléments élastomères à savoir les courbes effort-déplacement quasi-statique et raideur dynamique en fonction de la fréquence.

4.4.2 Courbe effort-déplacement

Le but de cette partie est de définir une modélisation paramétrée des courbes effort-déplacement quasi-statique en fonction des grandeurs physiques issues des éléments de suspension GMP. Le modèle souhaité doit :

- être représentatif des courbes existantes, issues de mesures physiques,
- permettre de générer simplement des courbes satisfaisant un cahier des charges des supports élastiques selon les critères métier.
- être déterminé par un nombre de paramètres suffisamment restreint, évitant la génération d'un problème d'optimisation de taille importante,
- de réduire les temps de calculs en phase d'avant-projet pour améliorer la réactivité,
- permettre de retrouver une solution physiquement acceptable après modification des paramètres.

De façon générale, les courbes effort-déplacement classiques de suspensions de GMP actuelles présentent les caractéristiques suivantes :

- strictement croissantes,
- linéaires autour de l'origine,
- saturant plus ou moins vite en-dehors de leur domaine linéaire pour assurer un mur de raideur à partir d'un certain niveau de déformation.

En ce qui concerne le cahier des charges des supports élastiques en statique, les principaux points permettant la détermination de la courbe effort-déplacement du support sont les suivants :

- la raideur de la courbe à l'origine est spécifiée de façon précise, car elle conditionne le comportement dynamique du GMP sous faible charge (découplage et ralenti),
- le niveau de déformation correspondant au débattement maximum du GMP est également spécifié de façon précise, ainsi que le niveau d'effort correspondant,
- les niveaux de raideurs maximales sont donnés pour les points de la courbe qui correspondent aux points de fonctionnement en troisième, quatrième et cinquième vitesses.

Physiquement, les saturations des courbes effort-déplacement sont réalisées par des butées en caoutchouc. La forme géométrique de ces butées conditionne directement la forme de la saturation sur la courbe. Par conséquent, presque toutes les lois de saturation respectant les observations précédentes sont possibles.

Suite à ces différentes remarques, la forme générale suivante est proposée, pour représenter l'ensemble des courbes effort-déplacement des supports élastiques :

$$F(X) = K_0 X + (F_0 - K_0 X_0) \left(\frac{X}{X_0} \right)^\alpha \quad \text{Eq. 4-1}$$

où X est le déplacement des éléments de suspension du GMP pour une direction donnée.

En chaque point de cette courbe effort-déplacement, la raideur statique est définie par :

$$\frac{dF}{dX}(X) = K_0 + \alpha \left(\frac{F_0}{X_0} - K_0 \right) \left(\frac{X}{X_0} \right)^{\alpha-1} \quad \text{Eq. 4-2}$$

La courbe effort-déplacement ainsi construite dépend de quatre paramètres qui s'interprètent de la façon suivante :

- K_0 , raideur à l'origine de la courbe,
- (X_0, F_0) , un point de la courbe, correspondant généralement au point de débattement maximum,
- α , exposant permettant de définir le rayon de courbure de la courbe, pour obtenir une saturation progressive ou brutale.

La Figure 4-2 illustre les courbes de comportement obtenues pour différentes valeurs du paramètre α .

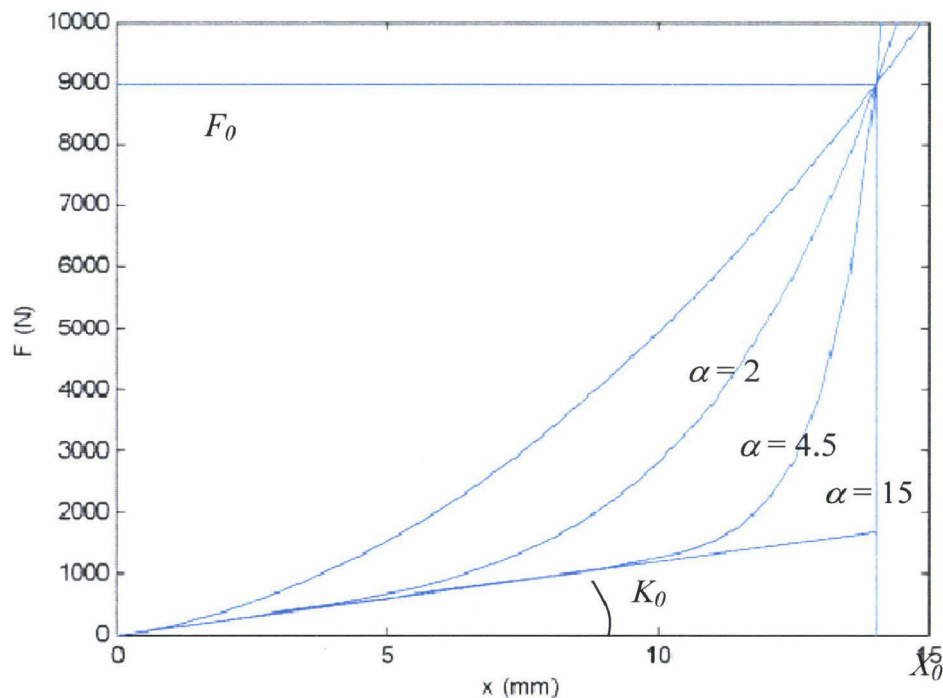


Figure 4-2: Courbes effort-déplacement d'un support élastique obtenues pour différentes valeurs du paramètre α .

Ce mode de représentation permet de générer un large panel de courbes. Le modèle analytique présenté permet ainsi de prendre en compte l'ensemble des cas de fonctionnement. La Figure 4-3 illustre par exemple une bonne corrélation entre un modèle analytique et un modèle expérimental [KRE01].

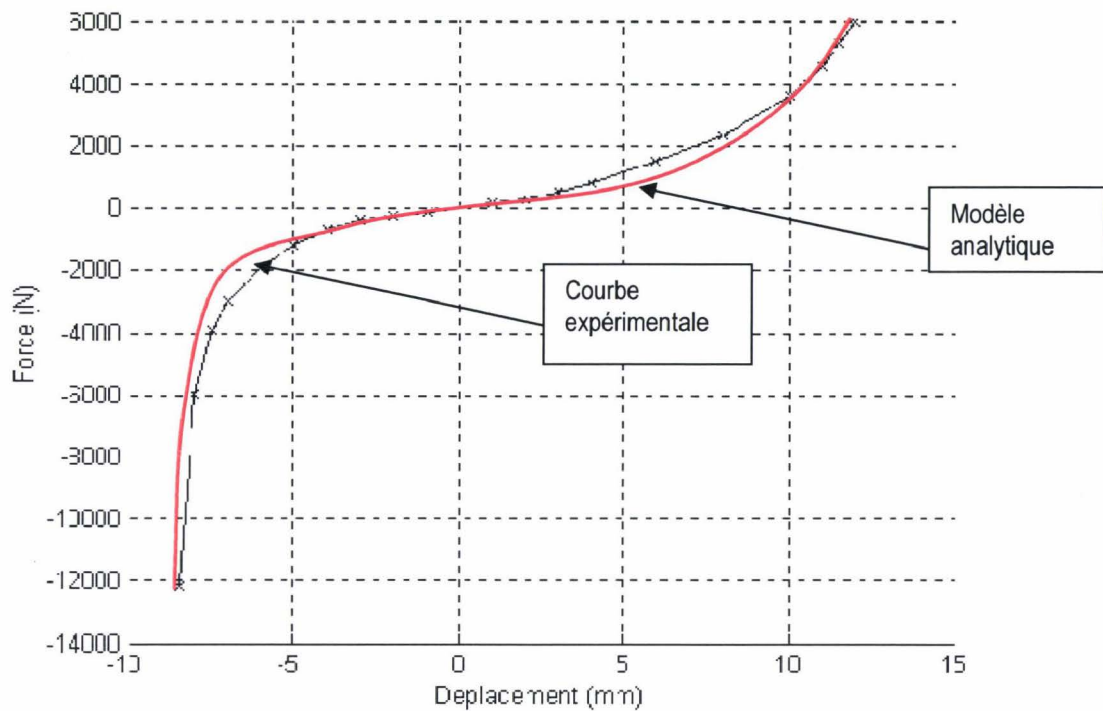


Figure 4-3: Comparaison analytique/expérimentale d'une courbe effort-déplacement.

4.4.3 Raideurs dynamiques des supports élastomères

La formulation des raideurs dynamiques des supports s'effectue par des nombres complexes dépendant de la fréquence.

$$K_{dyn} = |K_{dyn}| e^{j\varphi} \quad \text{Eq. 4-3}$$

La caractéristique principale de ces raideurs réside dans l'augmentation du module en fonction de la fréquence ainsi qu'un amortissement du matériau traduit par une partie imaginaire non nulle. La nécessité de considérer ces deux propriétés des élastomères apparaît donc nécessaire dans la définition d'un modèle représentatif. Par la suite, seuls la rigidification des pièces en élastomères et l'amortissement de ces pièces seront considérés. Il sera fait abstraction d'autres phénomènes, tels que la modification de la raideur dynamique en fonction de l'amplitude des sollicitations. Cette hypothèse est justifiée par le fait que ces caractéristiques sont moins dimensionnantes et que leur intégration nécessiterait la connaissance d'informations non disponibles en phase d'avant-projet.

Kreis [KRE01] présente deux grands types de modélisations : les modèles de Maxwell et les dérivées non-entières.

- Modèle de Maxwell généralisé

Le principe de ce modèle rhéologique repose sur l'association en parallèle d'un ressort et d'une ou plusieurs cellules de Maxwell composées d'un ressort et d'un amortisseur en série. Le premier ressort donne la raideur statique de l'élément tandis que les cellules permettent la prise en compte de la rigidification et de l'amortissement.

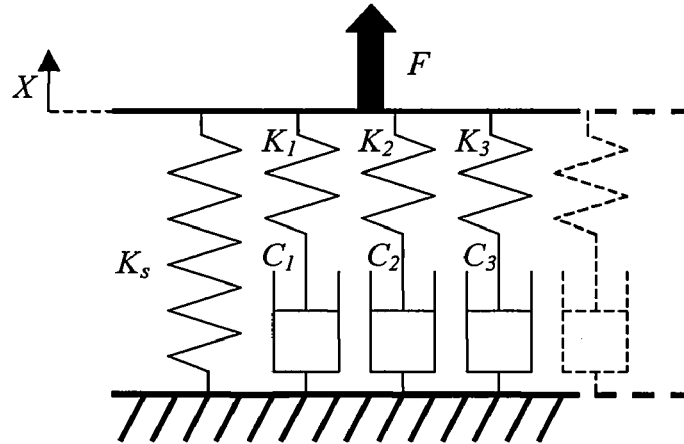


Figure 4-4: Modèle de Maxwell généralisé.

Dans [DIO95], il est estimé que trois cellules de Maxwell permettent de représenter correctement les pièces en élastomères dans la gamme de fréquence 0-200 Hz.

A ce modèle est donc associée la raideur dynamique suivante :

$$K_{dyn}(\omega) = K_s + \sum_i \frac{jK_i C_i \omega}{K_i + jC_i \omega} \quad \text{Eq. 4-4}$$

Le paramètre K_s correspond à la raideur statique alors que les autres paramètres K_i et C_i n'ont pas de signification physique, ce qui implique qu'ils soient déterminés par identification numérique. Aussi, pour une raideur dynamique dans une direction donnée, sept paramètres doivent être identifiés. En outre, un autre inconvénient de ce modèle est qu'il n'est valable que sur une gamme de fréquences prédéfinie.

- Dérivées non-entières ([DIO95], [LEG98]).

La raideur dynamique des supports élastomères est de la forme :

$$K_{dyn}(\omega) = K_s \left[1 + \left(i \frac{\omega}{\omega_\beta} \right)^\beta \right] \quad \text{Eq. 4-5}$$

De même que pour le modèle de Maxwell généralisé, K_s correspond à la raideur statique de l'élément alors que les deux autres paramètres ω_β et β n'ont pas d'interprétation physique directe. L'avantage de cette modélisation est que deux paramètres suffisent à sa détermination et qu'elle reste valable sur une gamme de fréquence plus importante.

Les deux modèles, présentés ci-dessus, sont représentatifs du comportement dynamique des éléments élastomères. Cependant, le modèle des dérivées non-entières apparaît plus approprié dans un contexte d'optimisation, car il est défini par un nombre de paramètres plus restreint et pour une plage de fréquence élargie.

4.4.4 Raideurs dynamiques des supports hydroélastiques

Comme il a été décrit dans la partie précédente, les supports hydroélastiques ont été développés pour apporter un niveau d'amortissement important sur une plage de fréquences réduite, généralement voisine de la fréquence du mode de hachis. De par la technologie utilisée, le fort niveau d'amortissement recherché s'accompagne d'une rigidification importante une fois passée la zone maximale d'amortissement. On se propose de décrire de manière rapide la modélisation mécanique et le paramétrage des supports. Le lecteur pourra trouver de nombreux ouvrages relatifs à leur description dans la littérature ([BER84], [COR84], [DIO95] et [KRE01]).

La Figure 4-5 illustre le modèle hydraulique de support hydroélastique que l'on peut trouver dans [DIO95].

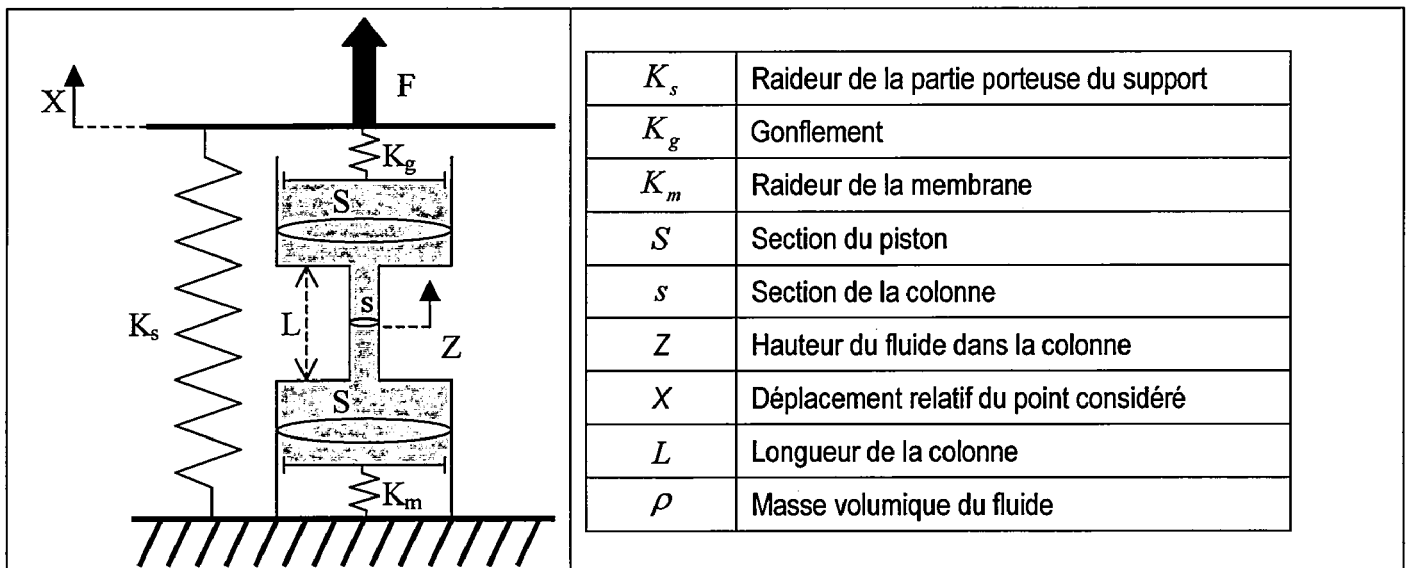


Figure 4-5 : Modélisation du support hydroélastique.

En considérant le terme $M = \rho s L$ comme la masse du fluide en mouvement dans la colonne et C l'amortissement équivalent permettant de prendre en compte l'énergie dissipée dans le système hydraulique, l'équation différentielle suivante nous permet de caractériser le comportement dynamique de la masse de fluide contenue dans la colonne :

$$M\ddot{Z} + C\dot{Z} + \left(\frac{s}{S}\right)^2 (K_m + K_g)Z - K_g \frac{s}{S} X = 0 \quad \text{Eq. 4-6}$$

et l'effort F exercé par le support est donné par :

$$F = K_s X + K_g \left(X - \frac{s}{S} Z \right) \quad \text{Eq. 4-7}$$

Les paramètres décrivant ce modèle sont des paramètres physiques qui ne sont pas adaptés à la conception en phase d'avant projet dans la mesure où ils requièrent la connaissance précise des caractéristiques organiques du support hydroélastique. Aussi, en considérant les hypothèses que le lecteur pourra trouver dans [KRE01], il est possible de se ramener au modèle mécanique suivant.

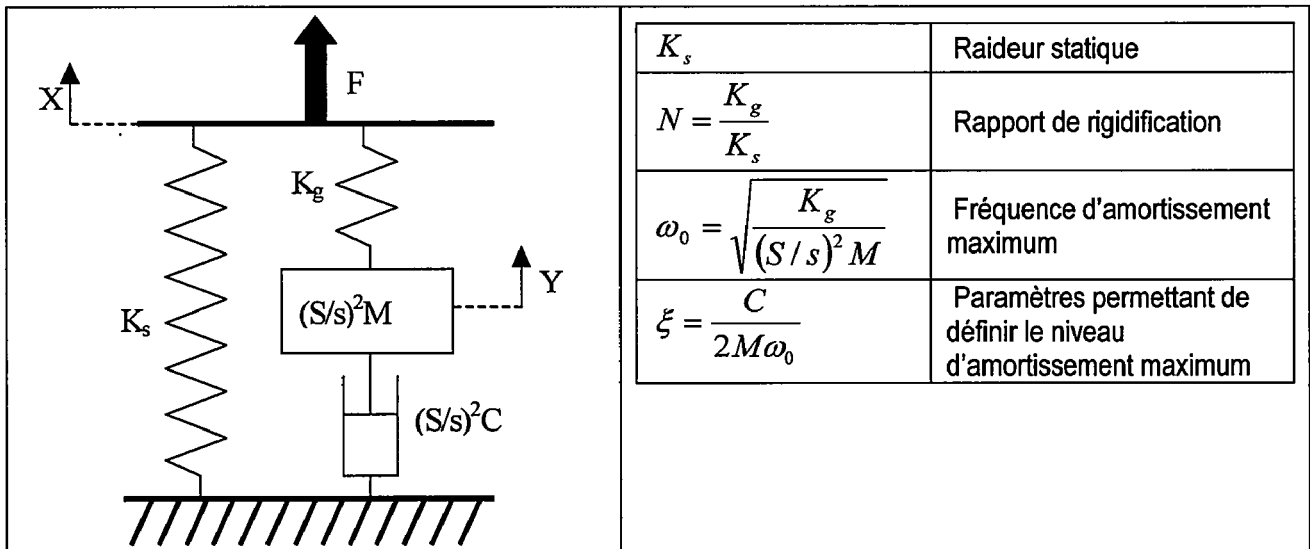


Figure 4-6 : Modèle de support hydroélastique.

Ce modèle est décrit par des paramètres fonctionnels plus adaptés à la conception en phase d'avant-projet.

La raideur dynamique en fonction de la fréquence obtenue pour ce modèle est alors :

$$K_{dyn} = K_s \left[1 + N - \frac{N}{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2j\xi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 1} \right] \quad \text{Eq. 4-8}$$

Ce modèle est adapté aux pré-dimensionnements de supports hydroélastiques. Il permet de trouver les principales caractéristiques nécessaires aux premiers dimensionnements d'un support, répondant à un cahier des charges fourni par le concepteur de la suspension GMP complète.

4.5 Calculs statiques et dynamiques

4.5.1 Calculs statiques

Les cas de fonctionnement du GMP suspendu nécessitent le calcul de l'équilibre statique du GMP soumis à un chargement extérieur et au torseur exercé par les supports élastiques.

Des hypothèses ont été faites dans le but de réduire et d'accélérer les calculs. Elles se résument principalement au fait que le GMP est considéré comme rigide, que le champ de déplacement du GMP est linéarisé (hypothèse des petits déplacements) et que l'équilibre statique est calculé en configuration non-déformée. La particularité de la réalisation du calcul de l'équilibre statique du GMP réside dans les non-linéarités introduites par les courbes effort-déplacement des supports.

La phase de calcul statique est préliminaire et indispensable à la réalisation des calculs dynamiques. Elle consiste essentiellement en l'application d'un chargement correspondant au cas de fonctionnement considéré et permet de déterminer notamment les raideurs des cales aux divers points de fonctionnement et leurs écrasements correspondant aux conditions initiales du calcul dynamique.

4.5.2 Calculs dynamiques

La plage de fréquence concernée par les problèmes liés aux calculs dynamiques correspond à la bande 2-200 Hz. L'hypothèse du GMP considéré comme un corps rigide peut se justifier par le fait que les premiers modes de déformations sont situés au delà de cette plage. En outre la caisse est modélisée par des corps rigides pour les calculs de phénomènes très basses fréquences (moins de 20 Hz).

L'ensemble des calculs dynamiques de réponses à l'excitation GMP en régime stabilisé s'effectue dans le domaine fréquentiel. Ainsi, pour une fréquence donnée, le système décrivant la dynamique du GMP suspendu est :

$$\left[K^D(\omega) - \omega^2 M \right] X = T(\omega) \quad \text{Eq. 4-9}$$

Comme il a été décrit au chapitre précédent, le nombre de degrés de liberté peut-être de six dans le cas du GMP suspendu seul et de douze dans le cas du couplage GMP/caisse.

En outre, la matrice $K^D(\omega)$ est une matrice complexe dépendant de la fréquence et prenant en compte la raideur et l'amortissement des supports, ainsi que la variation de la fréquence.

4.6 Formulation d'un problème d'optimisation robuste : méthodologie

A partir des modèles permettant la simulation numérique des différents cas de fonctionnement inhérents à la conception d'une suspension GMP, le développement d'une méthodologie permettant de réaliser une optimisation robuste est effectué. Cependant, contrairement à un procédé d'optimisation classique, il est nécessaire de considérer les différents paramètres comme des variables d'optimisation et/ou imprécises.

4.6.1 Variables d'optimisation et variables imprécises

Le modèle de suspension GMP est décrit par un ensemble de paramètres dimensionnant qui sont potentiellement des variables d'optimisation. Les paramètres définis dans le chapitre précédent, sont ceux nécessaires à la description des supports élastiques :

- les coordonnées des points d'implantation géométrique du support,
- les angles associés à ces points d'implantation,
- les paramètres définissant les courbes effort-déplacement statiques dans ses trois directions principales du support,
- les paramètres définissant la raideur dynamique pour les supports hydroélastiques.

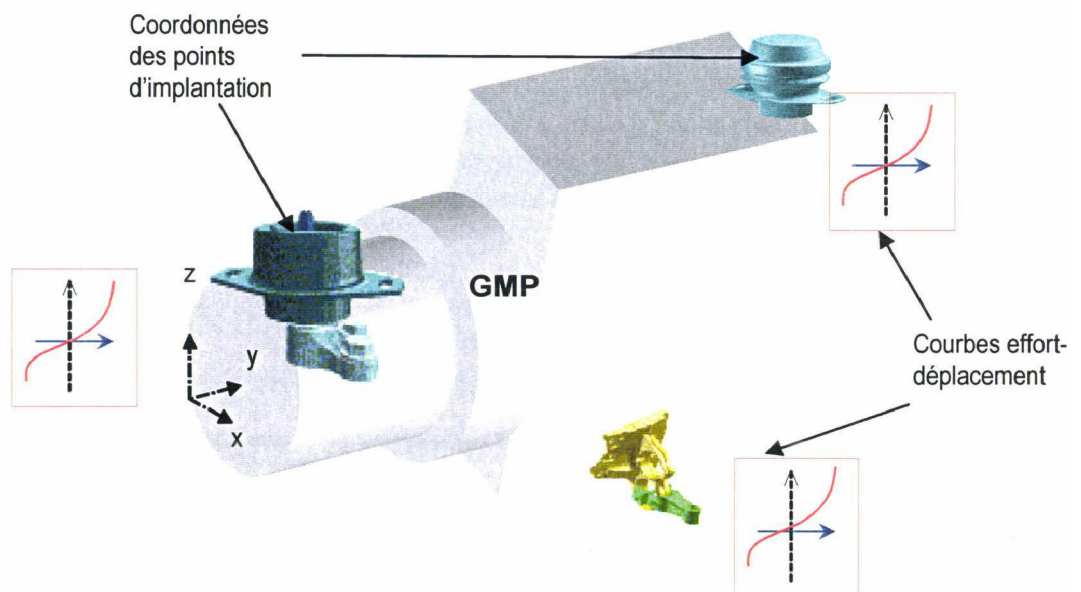


Figure 4-7: Paramètres d'optimisation.

Des paramètres tels que les raideurs dynamiques des supports en élastomère ne sont pas considérés comme des variables d'optimisation. En effet, la rigidification et l'amortissement des supports élastiques sont pris en compte dans le but d'un dimensionnement réaliste de pièces en élastomère. Aussi, l'ensemble des supports non-hydrauliques est supposé avoir le même gain dynamique et le même amortissement en fonction de la fréquence.

D'autres paramètres, tels que les masses et inerties du GMP et de la caisse, sont aussi des paramètres dimensionnant la suspension GMP. Cependant, dans le contexte de la conception d'une suspension moteur, il apparaît évident qu'il n'est pas possible de considérer ces éléments comme des variables d'optimisation, elles constituent donc des données d'entrée imposées.

Aussi, dans le cadre d'une optimisation robuste, il est nécessaire de tenir compte de ces paramètres qui sont susceptibles, au même titre que les variables d'optimisation, d'être imprécis.

Ainsi, lors du processus d'optimisation, trois types de variables devront être considérés :

- les variables d'optimisation non sujettes à des perturbations,
- les variables d'optimisation imprécises,
- les variables imprécises ne devant pas être optimisées.

4.6.2 Fonctions objectif

Dans le cas qui nous intéresse, les fonctions objectif devront être représentatives de chaque cas de fonctionnement de la suspension GMP. Pour rappel, les fonctions objectifs seront au nombre de trois, elles seront associées au fonctionnement en très basse fréquence, au ralenti et au bourdonnement. Le critère de qualité associé devra caractériser à la fois la performance et la robustesse.

Aussi, avant de poursuivre le développement de la méthodologie, il est nécessaire de définir clairement les différents termes utilisés :

- la fonction « coût Nominal » : fonction qualifiant le niveau de la prestation étudiée (plus la valeur de cette fonction est petite, meilleure est la prestation), la fonction « coût Nominal » sera notée N ,
- la fonction « Instabilité » : variation de la fonction inhérente aux imprécisions paramétriques, cette fonction instabilité sera notée I ,
- la fonction « Compromis » : fonction qualifiant le compromis entre la fonction « coût Nominal » et la fonction « Instabilité » de la prestation étudiée, la fonction « Compromis » sera notée C .

L'intérêt de définir une fonction « Compromis » réside dans le fait que dans le cadre d'une optimisation multi-objectif, il est nécessaire de faire en sorte que le nombre de fonctions à minimiser soit le plus faible possible afin de pouvoir maîtriser les solutions obtenues. Cette méthode a pour avantage de ne pas ajouter de fonction supplémentaire et permet donc de garder la même maîtrise des solutions qu'une optimisation de la performance classique. En effet, le processus d'optimisation aurait pu être envisagé comme la minimisation de trois fonctions objectif dédiées à la performance ainsi que trois fonctions inhérentes aux imprécisions relatives.

4.6.2.1 Fonction objectif « Compromis » C

Le paragraphe ci-dessous propose la méthodologie développée dans le but d'intégrer la robustesse dans la recherche d'une solution performante.

Considérons le problème d'optimisation non-contraint suivant :

Soit f une fonction de p variables différentiable deux fois de $R^p \rightarrow R$.

Soit q un vecteur tel que $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix}$.

Le problème d'optimisation multiparamètre classique peut alors s'écrire :

$$\min f(q) \quad \text{Eq. 4-10}$$

Considérons maintenant le vecteur q^* , vecteur optimal du problème. Dans le cas de notre recherche d'un optimal robuste, le concepteur cherche un design qui conserve au maximum une efficacité « quasi identique » au voisinage de la solution retenue.

Aussi, au lieu de poser le problème comme un problème d'optimisation non-contraint comme ci-dessus, il est reformulé comme un problème min-max:

$$\min_q \max_{\varepsilon \in \delta} f(q + \varepsilon)$$

où la variation ε est définie dans un espace δ tel que :

$$\delta = \{ \varepsilon : \varepsilon \in \nabla^N, -\delta_i \leq \varepsilon_i \leq \delta_i, i = 1, 2, \dots, p \}.$$

Le problème n'étant pas monotone, il ne peut être résolu par une méthode classique de type quasi-Newton. Il apparaît donc nécessaire de le reformuler de manière plus « exploitable ». Le problème peut être formulé comme suit [DAS97] :

$$\min_q C(q) = \min_q \int_{\delta} f(q + \varepsilon) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-11}$$

Dans cette formulation, C représente une mesure de l'instabilité de la fonction f au voisinage de q . Bien que cette formulation ne soit pas équivalente à la formulation min-max, elle a également pour but la prise en compte de l'évolution de f au voisinage de q .

Il est à noter que, dans le cas où la répartition des dispersions est connue (gaussienne, linéaire..), cette dernière expression peut être étendue à une formulation probabiliste. En effet, C représente l'espérance mathématique de $f(q + \varepsilon)$, notée $E(q + \varepsilon)$, dans le cas où la répartition de ε n'est pas uniforme sur δ .

Le problème généralisé est alors formulé comme suit :

$$\min_q C(q) = \min_q \int_{\delta} f(q + \varepsilon) \eta(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-12}$$

où $\eta(\varepsilon)$ est la fonction de densité de probabilité multidimensionnelle de ε sur le domaine $\int_{\delta} \eta(\varepsilon) d\varepsilon = 1$

En phase d'avant projet, il semble légitime d'estimer que la répartition des variations sur les paramètres soit uniforme. Cependant, selon le stade de développement considéré, la connaissance de la répartition de ces variations peut être décrite de manière plus précise, ce qui pourrait modifier les solutions obtenues.

4.6.2.2 Illustration

Dans le cas d'une optimisation de suspension moteur classique, une attention toute particulière est apportée à la fonction découplage très basses fréquences (situation de vie décrite au paragraphe 4.6.4). Le calcul de cette fonction consiste en la sommation des accélérations mesurées en un point confort sur une gamme de fréquence définie. En considérant l'exemple ci-dessous (Figure 4-8), cette sommation correspond alors à l'aire ABCD. En considérant une variation sur un paramètre q_i pouvant varier de $\pm\delta_i$, la fonction objectif compromis C est alors représentée par le volume limité sous les enveloppes ABFE et AIJB.

L'optimisation robuste consistera donc à minimiser ce volume. Dans le cas où n paramètres sont imprécis, il s'agira de minimiser un hypervolume de dimension n .

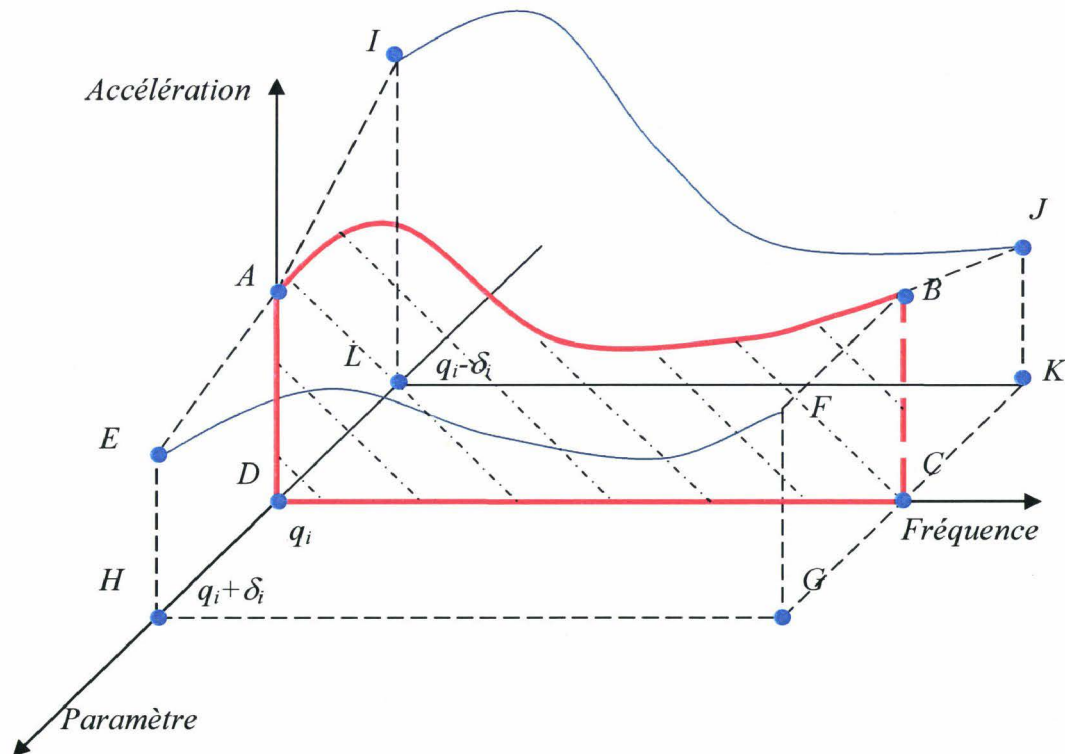


Figure 4-8 : Illustration de l'hypervolume (dimension 2).



4.6.2.3 Evaluation de l'intégrale multiple

La recherche de la solution robuste, telle qu'elle est exprimée ci-dessus (Eq. 4.12), passe par l'évaluation d'une intégrale multiple définie sur l'hypervolume. Etant donnée la complexité des fonctions, il semble difficile de les obtenir analytiquement. La démarche consiste alors à s'en affranchir en utilisant un développement en série.

Dans le type de problème traité, l'ordre de grandeurs des variations considérées est suffisamment faible et la fonction f peut ainsi être approximée par le développement en série de Taylor au second ordre d'une fonction f :

$$f(q + \varepsilon) \approx f(q) + \varepsilon \cdot \nabla_q f(q)^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T \nabla_q^2 f(q) \varepsilon \quad \text{Eq. 4-13}$$

L'intégrale sur l'hypervolume s'écrit :

$$\int_{\delta} f(q + \varepsilon) d\varepsilon \approx \int_{\delta} \left(f(q) + \nabla_q f(q)^T \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^T \nabla_q^2 f(q) \varepsilon \right) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-14}$$

Soient γ_i , la $i^{\text{ème}}$ composante de $\nabla_q f(q)$, le gradient de f et h_{ij} , le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne du Hessian $\nabla_q^2 f(q)$:

$$\int_{\delta} \nabla_q f(q)^T \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon = \int_{\delta} \sum_{i=1}^N \gamma_i \varepsilon_i d\varepsilon = \sum_{i=1}^N \gamma_i \int_{\delta} \varepsilon_i d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-15}$$

et

$$\int_{\delta} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^T \cdot \nabla_q^2 f(q) \cdot \varepsilon \right) d\varepsilon = \int_{\delta} \left(\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j h_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cdot h_{ii} \right) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-16}$$

L'avantage de ces développements est qu'ils peuvent s'appliquer quelque soit le type de distribution associée aux paramètres (uniforme ou non).

Dans le cas où les distributions associées aux paramètres sont connues, il est possible de considérer le problème via une approche probabiliste. Ainsi, en introduisant μ le vecteur des espérances mathématiques des incertitudes, la somme faisant référence au gradient peut s'écrire [DAS97b] :

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i \int_{\delta} \varepsilon_i \eta(\varepsilon) d(\varepsilon) = \nabla_q f(q)^T \cdot \mu \quad \text{Eq. 4-17}$$

et

$$\int_{\delta} \left(\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j h_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_i^2 \cdot h_{ii} \right) \eta(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} h_{ij} \cdot (\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j + \mu_i \mu_j) + \frac{1}{2} H_{ii} (\sigma_i^2 \sigma_j^2) \quad \text{Eq. 4-18}$$

où ρ_{ij} est le coefficient de corrélation entre ε_i et ε_j , et σ_i la déviation standard de ε_i

Il est important de noter que l'évaluation de l'intégrale nécessite le calcul des dérivées des fonctions pour l'ensemble des paramètres considérés. L'avantage non négligeable de cette manière de prendre en compte les imprécisions est que ce calcul de dérivées est commun à la phase de calcul des sensibilités pour l'optimisation. Le temps de calcul supplémentaire ne s'en trouve donc que très peu augmenté.

A titre d'illustration simple de la méthode, nous proposons une application à la fonction non-linéaire mono-paramètre suivante :

$$f(q) = \frac{1}{q} + 2.5\sqrt{q} \text{ définie pour } q \in]0;4]$$

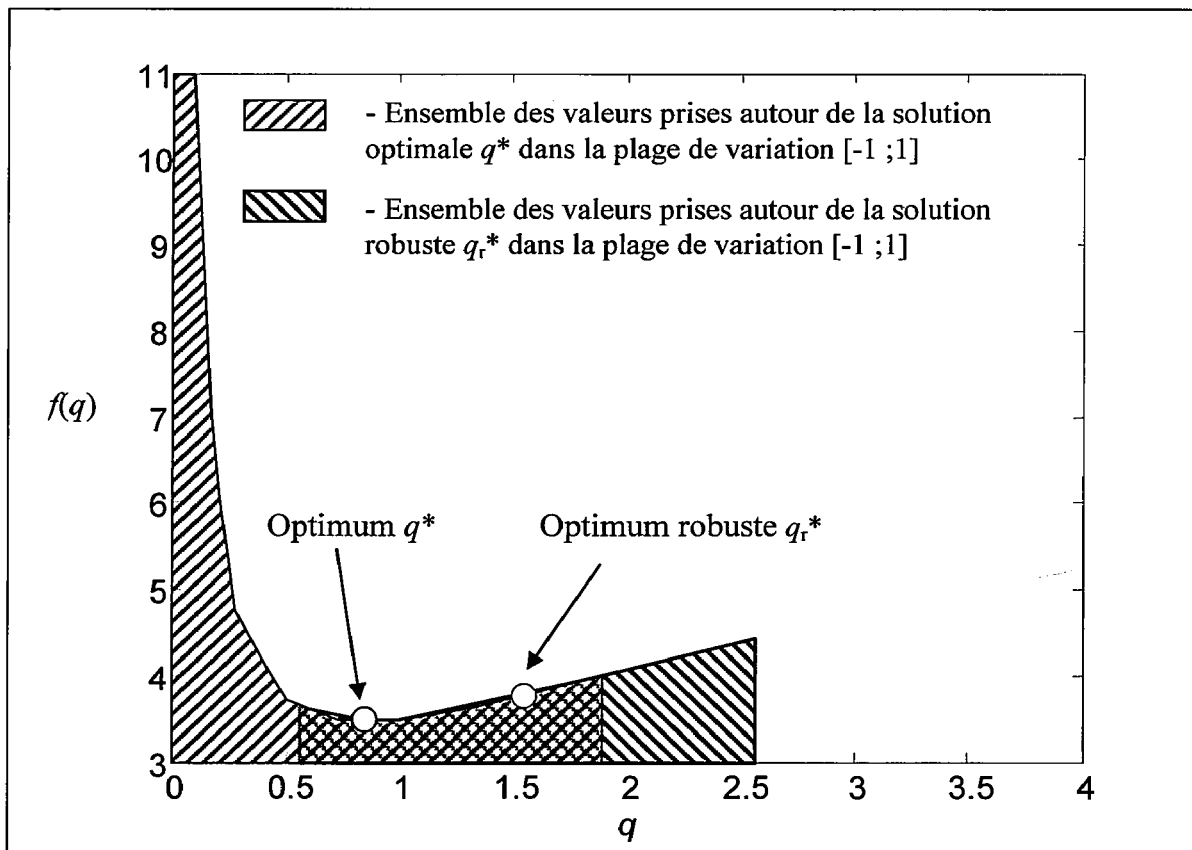


Figure 4-9: Application de la méthode à une fonction non-linéaire mono-paramètre.

L'optimisation simple de la fonction $\min_q f(q)$ sur l'intervalle $]0;4]$ donne pour solution le point $q^* = 0,86177$ pour une valeur de la fonction égale à 3,4812.

$$L'optimisation de la fonction $C(q) = \int_{\delta} f(q + \varepsilon) d\varepsilon$,$$

en vérifiant $(q + \varepsilon) \in]0;4]$ et pour différentes valeurs de variation donne les résultats suivants :

Optimisation	Valeur de la solution q^*	$f(q^*)$
Standard	0,8617	3,481
Robuste avec $\varepsilon \in [-0,4;+0,4]$	0,9738	3,498
Robuste avec $\varepsilon \in [0,8;0,8]$	1,1365	3,545
Robuste avec $\varepsilon \in [-1;+1]$	1,6196	3,799

Tableau 4-1: Valeurs des fonctions aux points optimisés.

Il apparaît donc que la solution issue de l'optimisation robuste dégrade la valeur de la solution optimale et donc sa performance. Par contre, c'est une solution proche de l'optimum qui offre une stabilité de la fonction sur la plage de variation du paramètre. En effet, si on considère une variation du paramètre q compris dans la plage $[-1;1]$, la valeur maximale prise par la fonction f dans le cas d'une optimisation robuste reste toujours inférieure à 5 alors que dans le cas d'une optimisation classique, elle dépasse largement cette valeur.

4.6.2.4 Evaluation de l'instabilité

Alors que dans une optimisation classique on s'attache à minimiser une fonction afin d'améliorer la performance, dans une optimisation robuste, le but est d'améliorer le compromis performance/robustesse.

Ainsi, en considérant la formulation de la fonction objectif « Compromis » C , il est possible d'avoir une estimation de l'instabilité I :

$$I(q) = \int_{\delta} (f(q + \varepsilon) - f(q)) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-19}$$

En utilisant les développements précédent, I peut être estimée comme suit :

$$I(q) \approx \int_{\delta} \left(\varepsilon \nabla_q f(q)^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T \nabla_q^2 f(q)^T \varepsilon \right) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-20}$$

Cet estimateur de l'instabilité sera utilisé par la suite afin de valider le concept de compromis entre la performance et la robustesse. Cependant, il apparaît d'ores et déjà évident que si l'on ne se réfère qu'à cet estimateur afin de prendre en compte la robustesse pour un développement en série au premier ordre, la solution obtenue sera celle pour laquelle $\nabla_q f(q) = 0$. La solution issue d'une telle optimisation assure donc la stabilité de la fonction au voisinage de l'optimum mais n'assure en aucun cas sa performance.

En reprenant l'exemple simple précédent relatif à l'application de l'optimisation robuste à la fonction non-linéaire mono-paramètre suivante :

$$f(q) = \frac{1}{q} + 2.5\sqrt{q} \text{ définie pour } q \in]0;4[$$

et en calculant les dispersions associées, les résultats suivants sont obtenus :

Amplitude des imprécisions	Instabilité $I(q^*)$	
	Optimisation Classique	Optimisation Robuste
$\varepsilon \in [-0,4;+0,4]$	0,26	0,216
$\varepsilon \in [-0,8;+0,8]$	3,762	0,426
$\varepsilon \in [-1;+1]$	996,131	0,846

Tableau 4-2: Instabilités associées aux plages de variations.

Comme il a été vu précédemment, la solution issue de l'optimisation robuste dégrade la valeur de la solution optimale mais reste proche de l'optimum. Les résultats du Tableau 4-2 montre clairement qu'une optimisation de la fonction « Compromis » C minimise l'instabilité vis-à-vis des imprécisions traitées. Ainsi, si l'imprécision est relativement faible, la solution est proche de l'optimal, lorsque l'imprécision augmente, la solution s'éloigne de l'optimum mais la stabilité est alors plus marquée.

4.6.3 Optimisation robuste : compromis entre la performance et la robustesse

En considérant une fonction f à optimiser, le critère robuste s'écrit comme suit :

$$C(q) = \int_{\delta} (f(q) + \varepsilon \cdot \nabla_q f(q)^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T \nabla_q^2 f(q)^T \varepsilon) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-21}$$

où δ est le domaine de définition des variations paramétriques étudiées :

La fonction coût nominal N peut alors s'écrire :

$$N(q) = \int_{\delta} (f(q)) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-22}$$

et la fonction instabilité I peut s'écrire :

$$I(q) = \int_{\delta} (\varepsilon \cdot \nabla_q f(q)^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T \nabla_q^2 f(q)^T \varepsilon) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-23}$$

Une solution robuste et performante consiste donc à trouver le compromis entre ces deux notions. La fonction compromis C peut donc s'exprimer par :

$$C(q) = N(q) + I(q) \quad \text{Eq. 4-24}$$

Le poids affecté à chaque composante de la fonction « Compromis » C est ici identique. Cette pondération pourra être modulée en fonction des exigences du concepteur.

En réalisant la projection sur le plan (Accélération, Fréquence) de l'hypervolume il est possible d'illustrer l'écriture de la fonction Compromis C comme la somme décrite dans l'équation ci-dessus (Eq. 4-24). Ainsi, la méthode décrite ci-dessus a pour objectif de minimiser les deux entités que sont la fonction « Coût Nominal » N représenté par l'aire ABCD et la fonction Instabilité I décrite par l'aire IJKL (Figure 4-10).

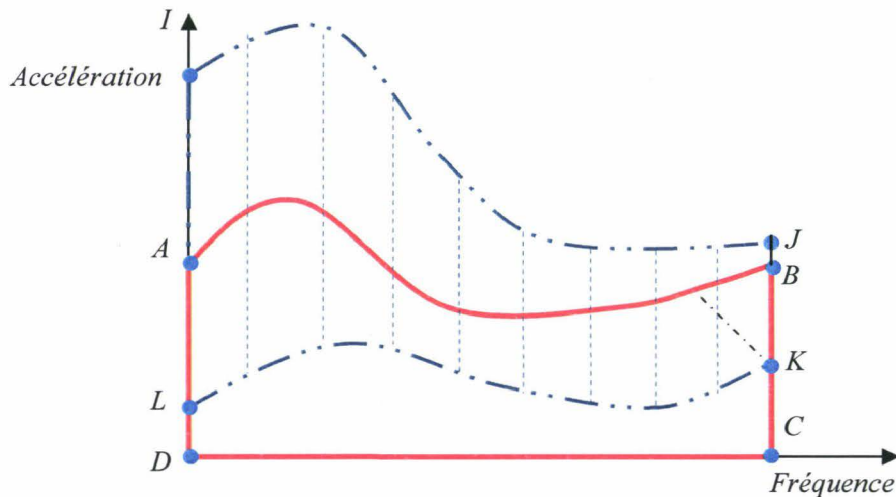


Figure 4-10 : Projection de l'hypervolume.

Le paragraphe suivant se propose d'appliquer les formulations décrites précédemment à la suspension GMP.

4.6.4 Fonctions objectifs liées à la problématique suspension GMP

Le paragraphe précédent a eu pour but la mise en place d'une méthode permettant de définir une fonction objectif robuste issue d'une fonction générale f à minimiser dans le cadre d'une optimisation d'une suspension GMP. A chaque domaine de fonctionnement, il est nécessaire d'associer une fonction objectif, dont les modélisations ont été établies par Kreis [KRE01].

4.6.4.1 Fonction objectif à très basse fréquence (TBF)

Dans le cas de notre problématique, seul le cas d'un moteur 4 cylindres est étudié. Pour ce type de moteur, les instabilités de combustion constituent la seule excitation très basse fréquence au ralenti, générant une excitation en roulis correspondant à l'harmonique 0.5 du régime moteur. Cette excitation est de nature stochastique et elle correspond à la plage de fréquences 5-7,5 Hz pour un régime de ralenti placé entre 600 et 900 tr/min.

Ainsi, la principale source d'inconfort liée à cette excitation est caractérisée par des remontées vibratoires dans la caisse pouvant être appréciées via le calcul d'accélération de

caisses à des points caractéristiques appelés points confort. Ceux-ci sont des zones de la caisse où la gêne, ressentie par le conducteur ou les passagers, peut être particulièrement importante. Le point haut du volant ou les points de fixations des sièges sur la caisse sont les points confort les plus usités. L'excitation liée aux TBF n'est pas facile à caractériser car elle est de nature stochastique ou transitoire. Ces phénomènes sont donc généralement pris en compte grâce aux fonctions de transfert.

La fonction objectif proposée est construite en sommant les carrés des modules des accélérations de caisse obtenues avec une excitation en couple. La sommation se fait sur les fréquences, sur les différents points de mesure B_i et dans les trois directions :

$$f_1(q) = \sum_i \int_{\Omega_{TBF}} \omega^4 \left(|x_{B_i}^D|^2 + |y_{B_i}^D|^2 + |z_{B_i}^D|^2 \right) d\omega \quad \text{Eq. 4-25}$$

où $x_{B_i}^D$, $y_{B_i}^D$ et $z_{B_i}^D$ représentent les déplacements dynamiques du point de mesure caisse B_i , ω la fréquence et Ω_{TBF} la plage des très basses fréquences de 1 à 20 Hz.

Pour s'assurer qu'aucun mode de suspension ne se trouve dans la zone 5-7,5 Hz, nous nous appuyons sur les travaux de [BER83] qui propose de pénaliser cette zone en appliquant au couple un coefficient multiplicateur. Cette méthode permet d'assurer un bon découplage sur toute la plage de fréquences et de sévérer la plage 5-7,5 Hz (Figure 4-11).

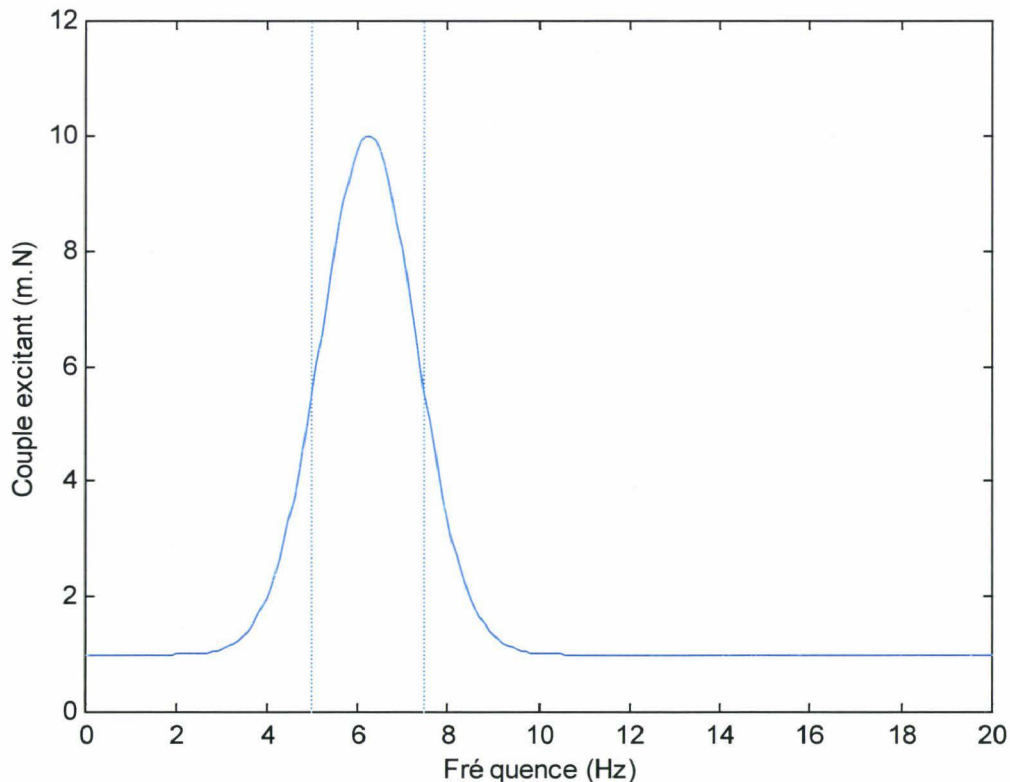


Figure 4-11 : Couple excitant utilisé en basse fréquence permettant de pénaliser la gamme de fréquences 5-7,5 Hz.

A cette formulation de la fonction objectif liée à la performance peut alors être associée une fonction robustesse permettant d'intégrer les imprécisions sur les paramètres. En utilisant les développements réalisés dans le paragraphe 4.6.2, la fonction objectif « compromis » C_1 associée à cette fonction TBF, que l'on cherchera à minimiser lors du processus d'optimisation, s'écrira donc :

$$C_1(q) = \int_{\delta} \left(f_1(q) + \varepsilon \cdot \nabla_q f_1(q)^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T \nabla^2_q f_1(q)^T \varepsilon \right) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-26}$$

où δ représente le domaine d'imprécision.

4.6.4.2 Fonction objectif au ralenti

Les phénomènes liés au ralenti sont inhérents au fonctionnement du moteur lorsque le véhicule est à l'arrêt, moteur tournant. Cette excitation se traduit à la fois par des vibrations et des niveaux sonores dans le véhicule.

La gamme de fréquences considérée dans ce cas est la gamme 20-30 Hz correspondant, dans le cas d'un moteur 4 cylindres en ligne 4 temps, à l'excitation de l'harmonique 2 du régime moteur pour un ralenti entre 600 et 900 tr/mn. Pour d'autres architectures moteur, la fréquence du ralenti diffère selon la ou les harmoniques en jeu. La formulation de l'excitation GMP est analytique et peut se calculer à partir des données moteur.

Dans cette gamme de fréquences, les principaux paramètres caractérisant la suspension GMP sont les niveaux vibratoires et acoustiques dans la caisse. Pour avoir accès à ces grandeurs physiques, deux méthodes sont envisageables :

- soit les transferts vibro-acoustiques et les impédances de caisse sont accessibles pour tous les points d'ancrage des supports ;
- soit de telles données ne sont pas disponibles. Dans ce cas, il sera envisageable de travailler sur les efforts de blocage exercés aux interfaces entre le GMP et la caisse.

Ainsi, exprimée en efforts de blocage, la fonction correspondant au comportement du GMP au ralenti est la suivante :

$$f_2(q) = \sum_i \int_{\Omega_{ral}} \left(|F_{ix}^D|^2 + |F_{iy}^D|^2 + |F_{iz}^D|^2 \right) d\omega \quad \text{Eq. 4-27}$$

où F_{ix}^D , F_{iy}^D et F_{iz}^D sont les efforts dynamiques exercés par le support élastique i sur la caisse respectivement dans les trois directions x , y et z et fonction des variables q . Ω_{ral} représente la plage de fréquence caractéristique du ralenti .

De manière analogue à f_1 , une fonction « compromis » C_2 permettant d'intégrer les imprécisions sur les paramètres peut maintenant être définie à partir de cette formulation de la

fonction objectif liée à la performance. En se basant sur les développements réalisés dans le paragraphe 4.6.2, la fonction objectif compromis associée s'écrit donc :

$$C_2(q) = \int_{\delta} \left(f_2(q) + \varepsilon \cdot \nabla_q f_2(q)^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T \nabla^2_q f_2(q)^T \varepsilon \right) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-28}$$

où δ représente le domaine d'imprécision.

4.6.4.3 Fonction objectif en bourdonnement

La physique et les modèles issus des phénomènes liés au bourdonnement sont sensiblement proches de ceux liés au ralenti. La différence entre ces deux types de sollicitations est essentiellement la plage de fréquence considérée. Pour le cas du bourdonnement, c'est la plage 30-200 Hz qui est considérée. La principale prestation impactée par une telle problématique est, comme dans le cas du ralenti, l'acoustique du véhicule. Cependant, le cas de fonctionnement étudié cette fois-ci n'est plus le ralenti mais le régime stabilisé. De ce fait, le conducteur n'est pas sensible aux mêmes phénomènes.

De même, l'excitation générée par le bourdonnement n'est pas seulement un couple de roulis mais aussi, avec l'augmentation de la fréquence, les efforts générés par des masses en mouvement dans les cylindres. De plus le cas de chargement inhérent au type de roulage, c'est-à-dire au rapport engagé, doit être considéré. Ainsi les cas de fonctionnement retenus seront la troisième, la quatrième ou la cinquième, rapports qui sont susceptibles d'être engagés de façon non transitoire. Dans la pratique, le cas de la troisième est le seul étudié. Ce cas est le plus sollicitant puisque la raideur statique dans les supports est la plus élevée [SWO84].

La fonction objectif en bourdonnement s'écrit donc formellement de la même façon que celle du ralenti, en n'oubliant pas que le calcul dynamique se fait autour d'un point d'équilibre statique différent :

$$f_3(q) = \sum_i \int_{\Omega_{bou}} \left(|F_{ix}^D|^2 + |F_{iy}^D|^2 + |F_{iz}^D|^2 \right) d\omega \quad \text{Eq. 4-29}$$

Une fonction « compromis » C_3 est associée à la fonction objectif performance et permet d'intégrer les imprécisions sur les paramètres. Ω_{bou} représente la plage de fréquence caractéristique du bourdonnement. Elle s'écrit :

$$C_3(q) = \int_{\delta} \left(f_3(q) + \varepsilon \cdot \nabla_q f_3(q)^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T \nabla^2_q f_3(q)^T \varepsilon \right) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-30}$$

où δ représente le domaine d'imprécision.

4.6.5 Fonctions contraintes et robustesse

La principale contrainte liée au dimensionnement d'une suspension GMP est de s'assurer que les débattements de ce dernier ne sortent pas d'une enveloppe définie par le cahier des charges. Les cas de chargements les plus contraignants sont les couples de première et de marche arrière [SWO84].

Dans le cadre d'une optimisation déterministe classique, les contraintes ne sont pas imprécises et s'écrivent simplement :

$$\underline{X}_G \leq X_G^S \leq \overline{X}_G \quad \text{Eq. 4-31}$$

où X_G^S est le vecteur des degrés de liberté du GMP en statique, et \underline{X}_G , \overline{X}_G , sont, respectivement, les bornes inférieures et supérieures du cahier des charges en débattement pour le GMP.

Cependant, dans le cas d'une optimisation robuste, le calcul permettant d'accéder à la valeur de ces débattements est lui aussi fonction des variables du problème pouvant, quant à elles, être imprécises.

Aussi, le problème des contraintes devient lui-même un problème d'optimisation à part entière, puisqu'il s'agit cette fois-ci de s'assurer que la plus grande des valeurs prises par les débattements du GMP dans les plages de variation associées aux paramètres de la suspension reste dans l'intervalle de tolérance, défini par le cahier des charges.

Il peut donc s'écrire :

$$\max_{\delta} (X_G^S(q + \varepsilon)) \leq \overline{X}_G \quad \text{Eq. 4-32}$$

et

$$\underline{X}_G \leq \min_{\delta} (X_G^S(q + \varepsilon)) \quad \text{Eq. 4-33}$$

avec $\varepsilon \in [q - \delta; q + \delta]$

L'estimation des débattements, déjà coûteuse en temps CPU, intervient dans le calcul de ces optimisations.

L'application d'un développement en série de Taylor à l'ordre deux de la fonction contrainte permet de rendre envisageable ce calcul. En effet, au voisinage du point de fonctionnement considéré, la formulation suivante peut être écrite :

$$X_G^S(q + \varepsilon) \approx X_G^S(q) + \varepsilon \cdot \nabla_q X_G^S(q)^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T \cdot \nabla_q^2 X_G^S(q) \cdot \varepsilon \quad \text{Eq. 4-34}$$

De ce fait, le problème d'optimisation se ramène à un problème d'optimisation quadratique consistant en :

$$\underline{\Delta X_G^S} = \min_{\varepsilon} (X_G^S(q + \varepsilon) - X_G^S(q)) \approx \min_{\varepsilon} \left(\varepsilon \cdot \nabla_q X_G^S(q)^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T \cdot \nabla^2_q X_G^S(q) \cdot \varepsilon \right) \quad \text{Eq. 4-35}$$

et

$$\overline{\Delta X_G^S} = \max_{\varepsilon} (X_G^S(q + \varepsilon) - X_G^S(q)) \approx \max_{\varepsilon} \left(\varepsilon \cdot \nabla_q X_G^S(q)^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T \cdot \nabla^2_q X_G^S(q) \cdot \varepsilon \right), \quad \text{Eq. 4-36}$$

avec $\underline{\Delta X_G^S}$ et $\overline{\Delta X_G^S}$ les valeurs minimales et maximales des variations des valeurs des débattements dans l'espace d'imprécisions considéré.

Cette écriture est moins gourmande en terme de temps de calculs puisqu'elle ne nécessite qu'une seule évaluation de la fonction débattement.

4.6.6 Ecriture de l'algorithme complet

Le problème d'optimisation robuste complet s'écrit alors :

$$\text{Minimiser les fonctions objectif compromis : } C(q) = \begin{bmatrix} C_1(q) \\ C_2(q) \\ \vdots \\ C_n(q) \end{bmatrix} \in R^n,$$

avec C_i compromis entre la fonction « Coût Nominal » N_i et « Instabilité » I_i ,
sous les contraintes de débattements : X_G^S devant vérifier les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \min(X_G^S(q)) \geq \underline{X_G^S} \\ \overline{X_G^S} \leq \max(X_G^S(q)) \end{cases}$$

avec les p variables de conception : $q \in R^p$ / $q \in [\underline{q}, \overline{q}]$,

sujettes à des imprécisions ε telles que : $|q_i + \varepsilon_i| \leq \delta_i, i = 1, 2, \dots, p$.

4.6.7 Adimensionnalisation des variables d'optimisation, fonctions objectifs et contraintes

La technique d'adimensionnalisation permet de prendre en compte le fait que toutes les variables du système n'ont pas forcément ni la même dimension (raideurs, côtes géométriques, angles...), ni le même ordre de grandeur et de faire en sorte qu'il n'y ait pas de problème d'ordre numérique lié à ces variables dans le processus d'optimisation.

4.6.7.1 Variable d'optimisation

A une variable q_k telle que $\underline{q}_k \leq q_k \leq \overline{q}_k$, on associe une variable adimensionnelle :

$$q_{kad} = \frac{q_k - \underline{q}_k}{\overline{q}_k - \underline{q}_k}$$

telle que $0 \leq q_{kad} \leq 1$

Cette adimensionnalisation s'applique à l'ensemble des paramètres.

4.6.7.2 Contraintes et fonctions objectif

De même que dans le cas des variables d'optimisation, il s'avère intéressant d'adimensionnaliser les fonctions objectif et les contraintes. Cette démarche permet à la fois de s'affranchir d'ordres de grandeur trop différents mais également de pouvoir les comparer qualitativement.

Ainsi les débattements GMP seront désormais bornés de la façon suivante, en effectuant une division par les bornes réelles :

$$\frac{X_G}{X_G^S} \leq 1 \quad \text{Eq. 4-37}$$

et

$$\frac{X_G}{X_G^S} \geq 1 \quad \text{Eq. 4-38}$$

Les fonctions objectif, quant à elles, peuvent être adimensionnalisées par une valeur de référence correspondant par exemple à une configuration connue.

Ainsi, les nouvelles fonctions objectif peuvent être écrites comme suit :

$$\tilde{f}_k(q) = \frac{f_k(q)}{f_{k0}} \quad \text{Eq. 4-39}$$

où f_{k0} est la valeur de la fonction objectif de référence correspondant ici à la valeur nominale.

4.6.8 Synopsis de l'enchaînement des calculs dans le processus d'optimisation

Les différentes étapes d'une optimisation robuste sont décrites dans la figure ci-dessous :

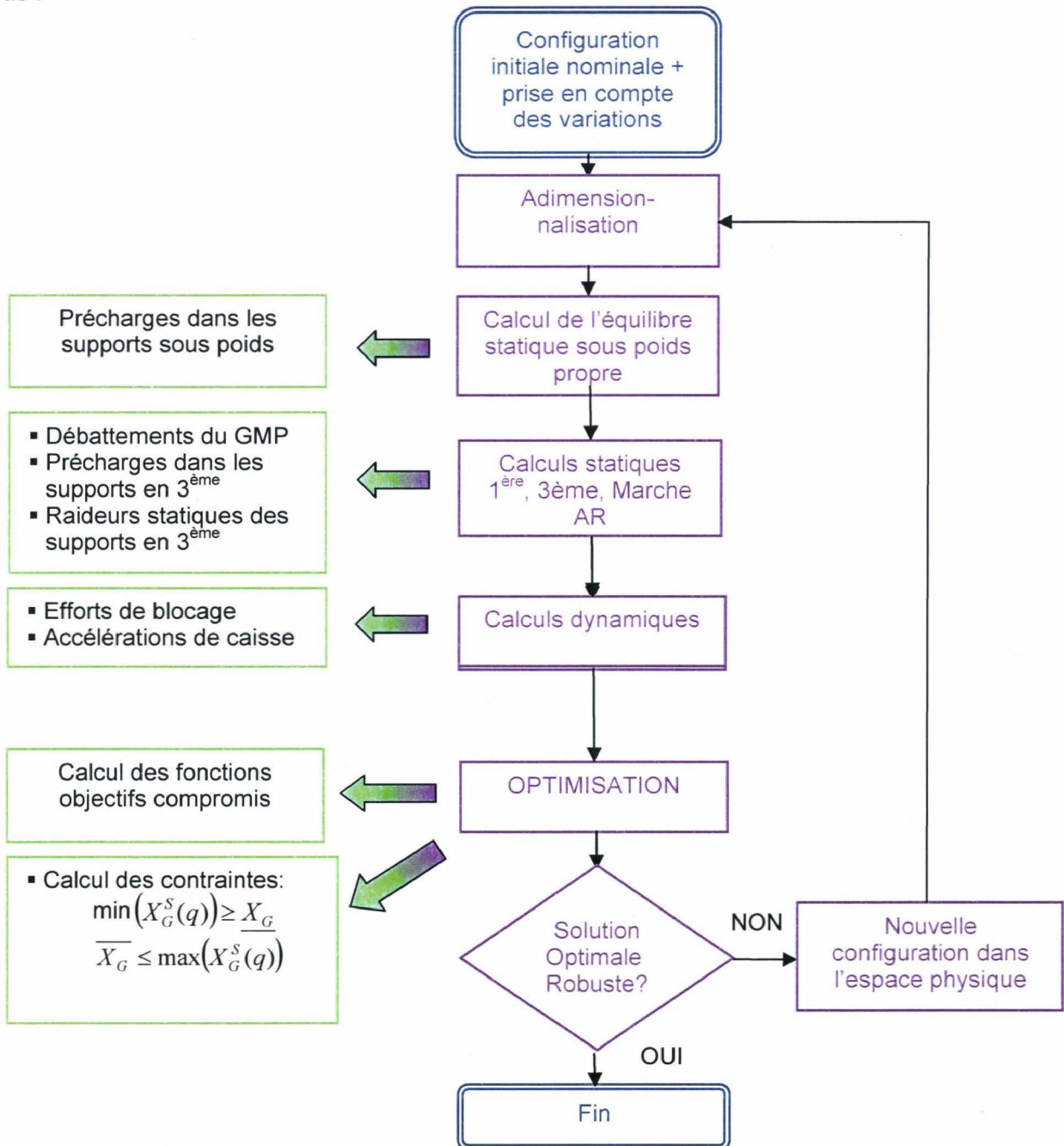


Figure 4-12 : Synopsis du processus d'optimisation.

4.6.9 Enchaînement des calculs selon le stade de développement

Comme il a été décrit dans la partie 3.3, la prise en compte de la robustesse sera effectuée de manière différente selon le stade de développement. Le synoptique ci-dessous propose de décrire la prise en compte des imperfections dans l'architecture de suspension GMP selon la situation considérée. En phase d'avant-projet, le processus d'optimisation robuste a priori sera mis en place via le déroulement d'une optimisation robuste utilisant la méthode NBI (cf. paragraphe 1.6.1). Dans le cas d'une architecture existante, l'analyse de la robustesse sera réalisée via les méthodes de Monte-Carlo (cf. paragraphe 1.2).

Dans notre cas d'étude, nous nous intéresserons essentiellement au processus d'optimisation en avance de phase et utiliserons la méthode de Monte-Carlo comme outil de validation des solutions obtenues. La mise en place complète du développement est illustrée par un exemple simple de suspension GMP.

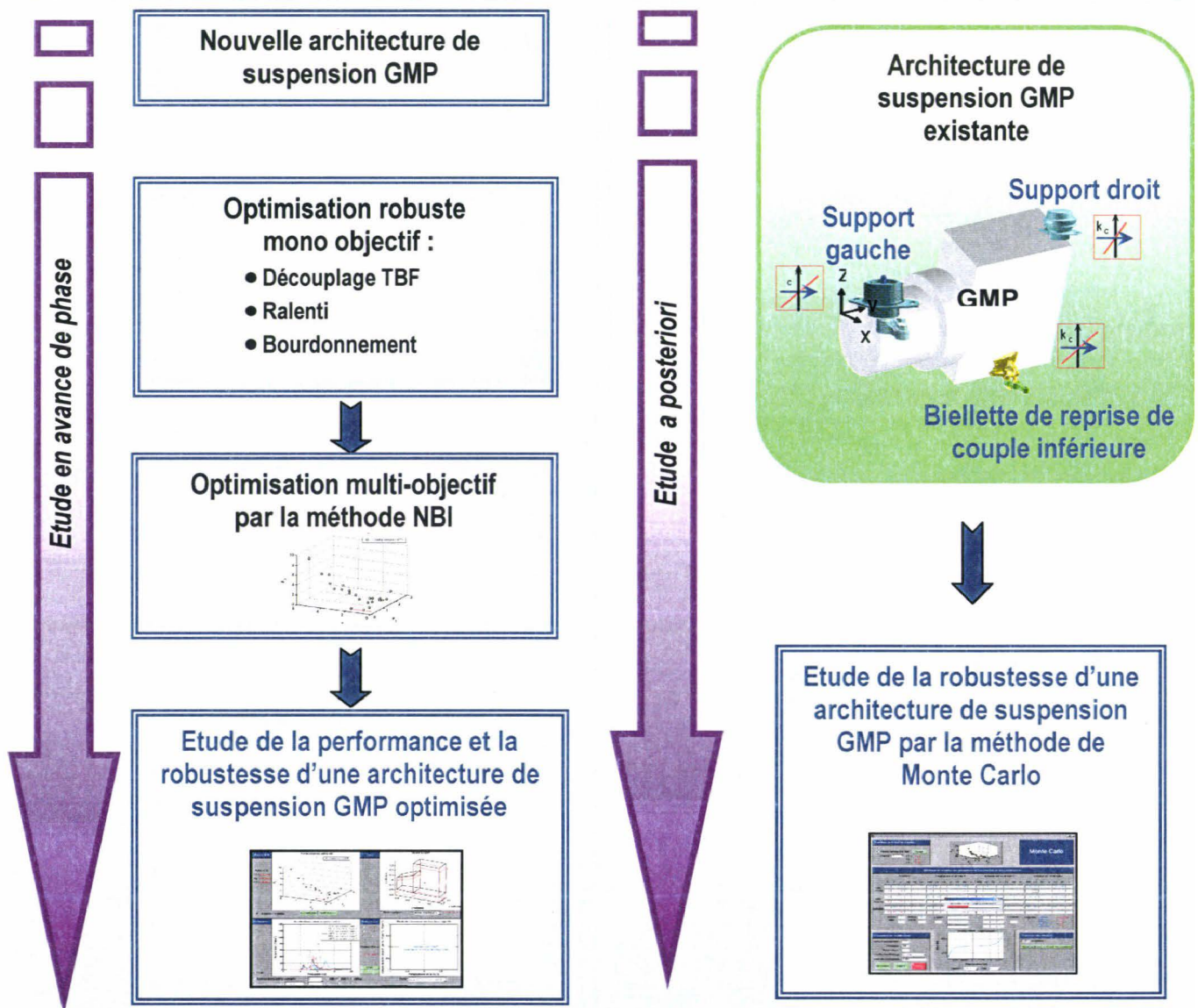


Figure 4-13: Enchaînement des calculs selon le stade de développement.

4.7 Application à l'optimisation d'une suspension GMP à un cas d'étude simple

Cette partie a pour but d'appliquer et de valider l'optimisation robuste d'une seule fonction avec un nombre limité de paramètres. L'objectif de cette partie est de motiver le développement d'une fonction robuste et de critiquer les résultats obtenus après la phase d'optimisation robuste.

4.7.1 Description de l'exemple d'application

La fonction à laquelle nous ferons référence pour la mise en application de notre étude sera la fonction « très basse fréquence » (TBF) (cf. partie 3.6.4.1) correspondant à la gamme 2-20Hz. Dans cette gamme de fréquence, les modes de suspension moteur couplent fortement le GMP et la caisse. Afin de pouvoir analyser de manière simple les résultats, nous considérerons plus spécifiquement la plage 8-10 Hz (que l'on nommera Ω_{roul}) dans laquelle se trouve en règle générale le mode de roulis. Ce mode est prépondérant dans la phase de démarrage-arrêt du moteur et ne doit pas être couplé au mode de hachis (excitation verticale).

Les paramètres utilisés sont au nombre de quatre, à savoir deux positions et deux raideurs. Ces quatre paramètres influent sur le placement en fréquence des deux modes de roulis et de hachis [DEM90]. Le Tableau 4-3 ci-dessous récapitule la valeur nominale, les contraintes de bornes considérées ainsi que les imprécisions relatives aux paramètres définies dans le chapitre 2.

Paramètres	Valeur nominale	Borne Sup	Borne Inf	Imprécisions
X cale droite	-0,1995 (m)	-0,01	-0,3	$\pm 0,008$ m
X cale gauche	-0,1037 (m)	-0,01	-0,3	$\pm 0,008$ m
$K0_z$ cale droite	$13,3 \cdot 10^4$ (N/mm)	$30 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	± 15 %
$K0_x$ biellette	$13,3 \cdot 10^4$ (N/mm)	$30 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	± 15 %

Tableau 4-3: Définition des valeurs d'entrée de l'exemple d'application.

La Figure 4-14 représente les accélérations au point confort considéré. Il s'agit ici d'un point représentatif du plancher conducteur. La fonction Nominale telle qu'elle est décrite dans le paragraphe 4.6.4 représente l'aire sous la courbe. L'aire grisée correspond quant à elle à la plage de fréquences Ω_{roul} .

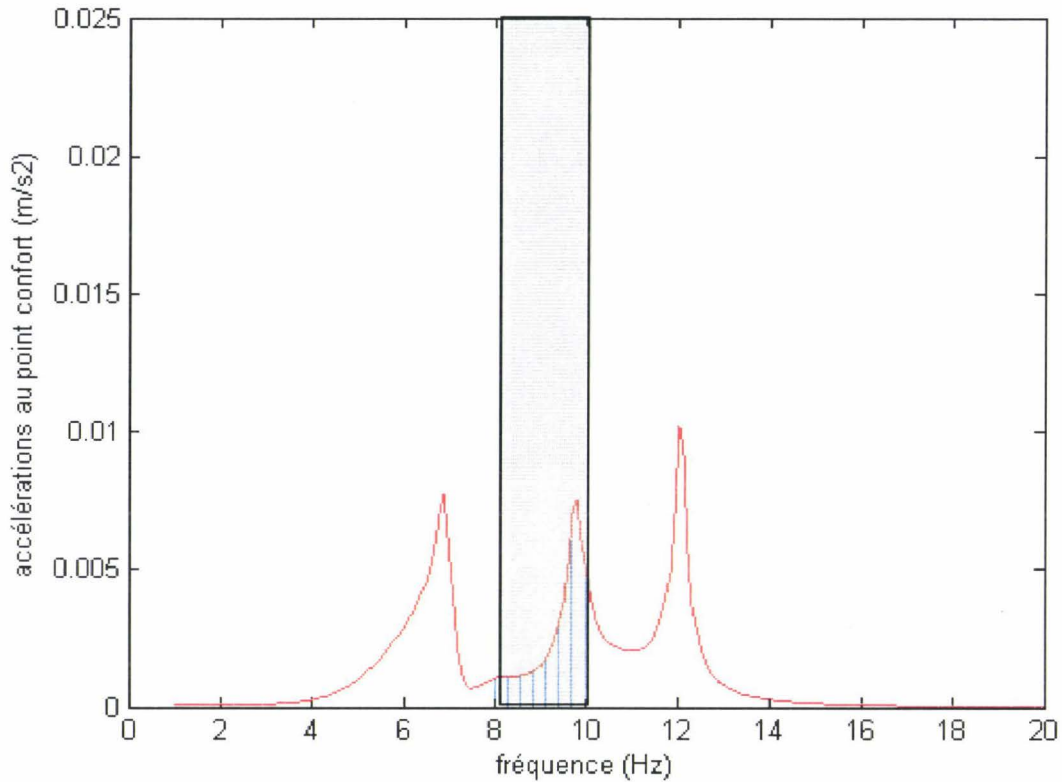


Figure 4-14 : Valeur des accélérations au point plancher conducteur sur la plage 1 – 20 Hz

La fonction Nominale est construite en sommant les carrés des modules des accélérations de caisse obtenues avec une excitation en couple. La sommation se fait sur les fréquences, sur le point de mesure considéré et selon la direction verticale Z. L'objectif de cette étude est d'analyser le placement des modes dans la zone de fréquence définie :

$$N(q) = \int_{\Omega_{roul}} \omega^4 |Z^2| d\omega \quad \text{Eq. 4-40}$$

où ω est la fréquence d'excitation et Ω_{roul} plage de variation de cette fréquence telle que $\omega \in \Omega_{roul}([8;10](Hz))$.

La fonction compromis C telle qu'elle sera écrite sera donc :

$$C(N(q)) = \int_{\delta} \left(N(q) + \varepsilon \cdot \nabla_q N(q)^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T \nabla^2_q N(q)^T \varepsilon \right) d\varepsilon \quad \text{Eq. 4-41}$$

où q est le vecteur des quatre variables prises en compte, ε le vecteur des imprécisions et δ le domaine d'imprécision.

4.7.2 Compromis entre la performance et la robustesse

Comme il a été décrit dans le paragraphe 3.6.3, la fonction « compromis » peut être écrite comme la somme d'une fonction « coût nominal » N et d'une fonction « Instabilité » I . Le but de l'analyse ci-dessous est de valider la démarche en réalisant des optimisations successives mono-objectif utilisant l'hypervolume et en confrontant les résultats issus de ces calculs aux optimisations multi-objectif (utilisant la méthode NBI) des fonctions « Coût Nominal » et « Instabilité ».

4.7.2.1 Analyse du critère compromis par la méthode NBI

La démarche mise en place dans ce paragraphe a pour objet la détermination d'un ensemble de Pareto relatif à la combinaison des deux fonctions (coût nominal et instabilité) et le positionnement de la solution issue de l'optimisation du critère robuste dans ce Pareto.

La méthode utilisée pour la réalisation d'une telle optimisation est la méthode NBI. Comme nous l'avons précédemment présenté, l'avantage de cette méthode est que la répartition des points solutions est homogène sur l'ensemble de Pareto [DAS97]. Les paramètres d'optimisation considérés sont ceux cités dans le paragraphe 4.7.1 (deux raideurs et deux positions).

La Figure 4-15 représente l'ensemble de Pareto associé à l'objectif très basses fréquences. Les points sont issus de l'optimisation NBI, l'étoile correspond à la solution issue de l'optimisation du critère robuste. Cette dernière se trouve dans la zone convexe, elle est donc bien représentative d'un compromis entre les deux fonctions considérées.

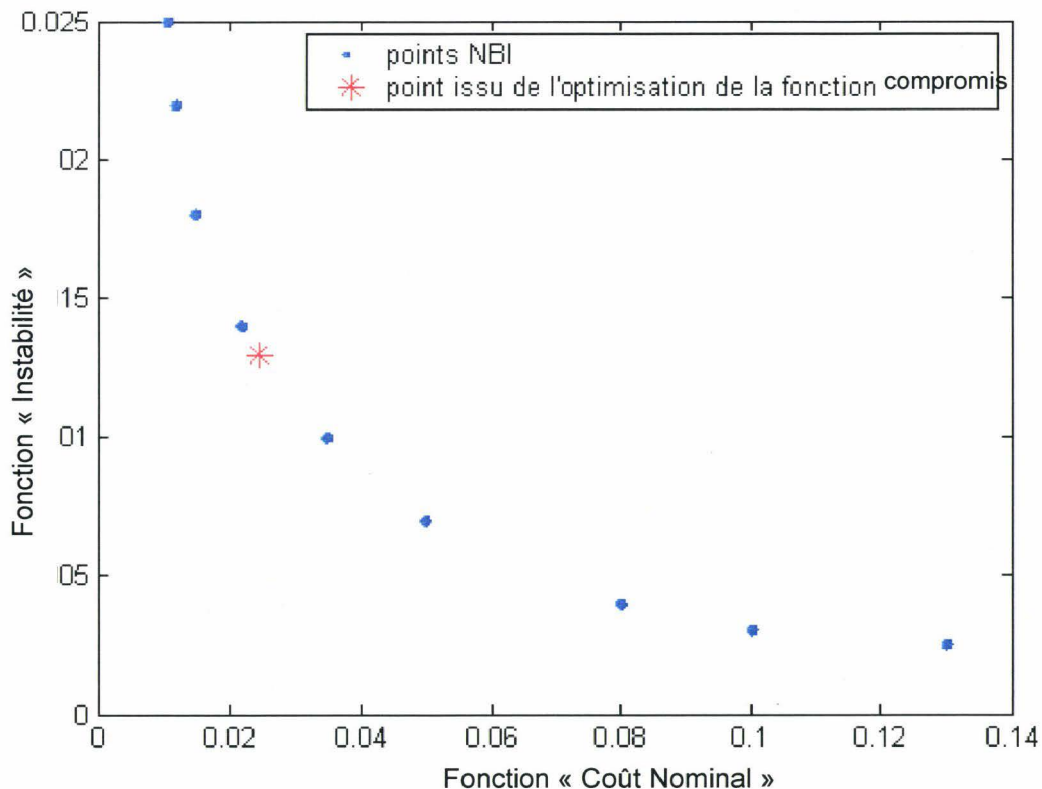


Figure 4-15 : Pareto Nominal-Instabilité associé à l'objectif très basses fréquences pour le cas d'étude proposé.

4.7.2.2 Analyse de la solution issue de l'optimisation de la fonction robustesse

L'objet de ce paragraphe est d'analyser la solution issue de l'optimisation de la fonction robustesse et de la positionner par rapport à une optimisation classique. Pour ce faire, nous allons étudier la stabilité de la fonction à la variation des paramètres d'entrée dans le cas de la configuration initiale. Cette stabilité sera ensuite comparée à celle de la configuration issue d'une optimisation de la performance classique et enfin à celle de la solution issue de l'optimisation de la fonction robustesse.

- **Configuration initiale :**

Les paramètres ont pour valeurs respectives :

Paramètres	Valeurs nominales	Variations
X cale droite	-0,1995 (m)	$\pm 0,008$
X cale gauche	-0,1037 (m)	$\pm 0,008$
K_{Oz} cale droite	$13,3 \cdot 10^4$ (N/mm)	$\pm 15\%$
K_{Ox} biellette	$13,3 \cdot 10^4$ (N/mm)	$\pm 15\%$

Tableau 4-4: Valeurs des paramètres pour la configuration initiale et les variations associées.

La sensibilité de la fonction à la variation de la raideur de la biellette, par exemple, est décrite par la Figure 4-16.

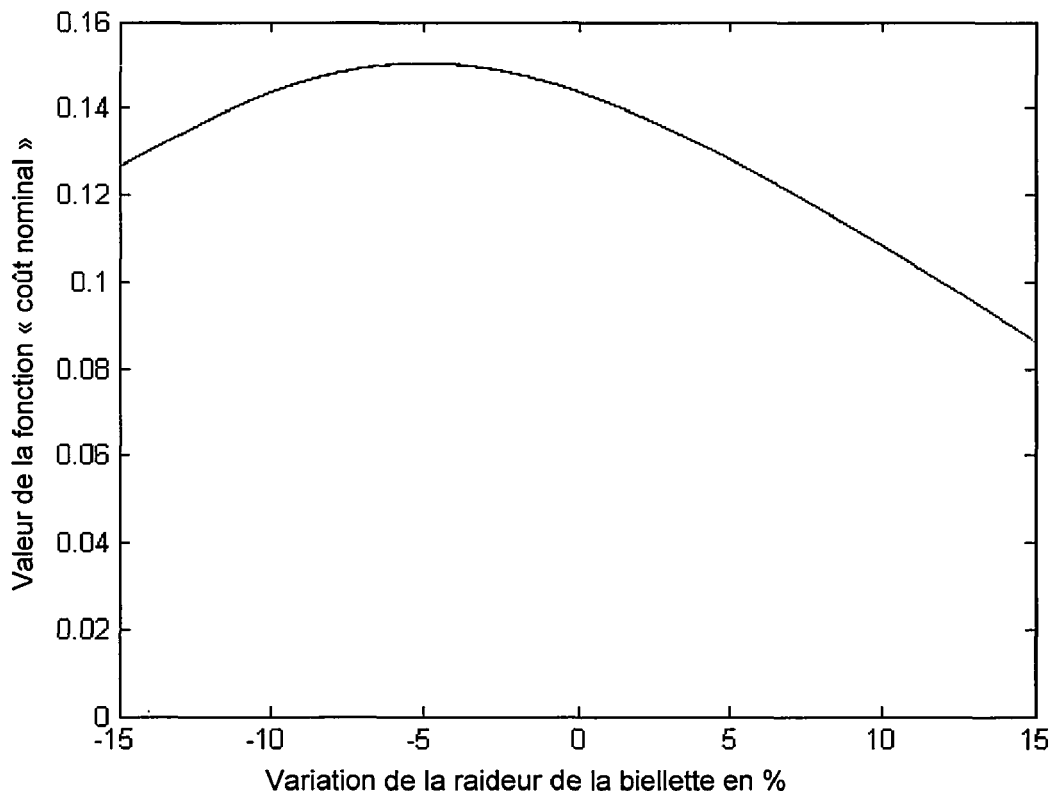


Figure 4-16 : Variation de la fonction « Coût Nominal » en fonction de la valeur de la raideur de la biellette dans la configuration initiale.

Le tableau ci-dessous récapitule les extrema de la fonction « Coût Nominal » dans la configuration initiale.

Paramètres	$\min_{\varepsilon \in \delta} f(q + \varepsilon)$	$\max_{\varepsilon \in \delta} f(q + \varepsilon)$	Amplitude de variation maximale de $f(q + \varepsilon)$
KO_x biellette	$8,78 \cdot 10^{-2}$	$15,01 \cdot 10^{-2}$	$6,23 \cdot 10^{-2}$
KO_z cale droite	$10,51 \cdot 10^{-2}$	$16,17 \cdot 10^{-2}$	$5,66 \cdot 10^{-2}$
X cale gauche	$12,38 \cdot 10^{-2}$	$15,67 \cdot 10^{-2}$	$3,29 \cdot 10^{-2}$
X cale droite	$13,09 \cdot 10^{-2}$	$18,03 \cdot 10^{-2}$	$4,94 \cdot 10^{-2}$

Tableau 4-5: Valeurs prises par la fonction pour la plage de variation du paramètre considéré.

Dans le tableau ci-dessous et dans les suivants, les écarts permettront de juger de l'instabilité de la fonction en fonction des paramètres. Ainsi, plus l'écart sera faible, plus la fonction sera stable.

Ces valeurs serviront de référence dans les analyses des solutions des configurations optimisées

- **Solution issue de l'optimisation de la fonction « Coût Nominal » N seule :**

Dans le cas d'une telle optimisation, les paramètres prennent les valeurs optimales suivantes :

Paramètres	Valeurs
KO_z cale droite	$11,3 \cdot 10^4$ (N/mm)
KO_x biellette	$10,9 \cdot 10^4$ (N/mm)
X cale droite	-0,179 (m)
X cale gauche	-0,112 (m)

Tableau 4-6: Valeurs des paramètres obtenues après optimisation de la fonction « Coût Nominal » seule.

La Figure 4-17 décrit la stabilité de la solution issue de l'optimisation de la performance seule pour une variation de la raideur de la biellette.

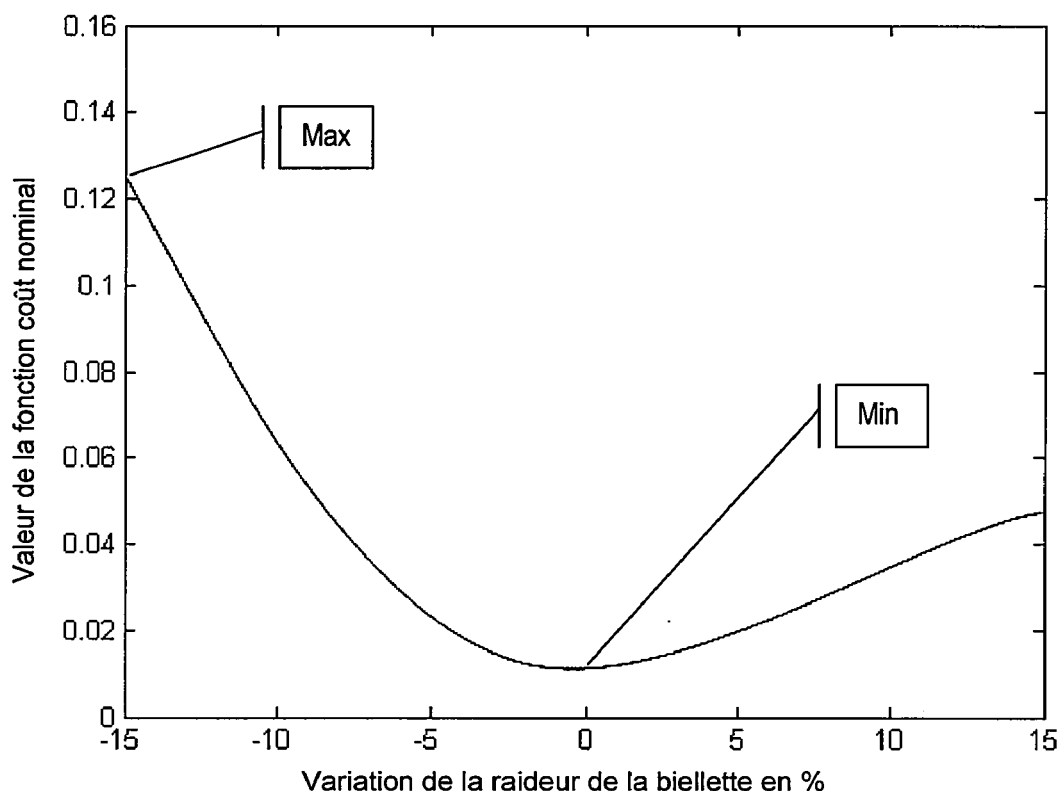


Figure 4-17 : Variation de la fonction « Coût Nominal » en fonction de la valeur de la raideur de la biellette dans le cas de l'optimisation de la performance seule.

Le tableau ci-dessous récapitule les extrema de la fonction « Coût Nominal » dans le cas de l'optimisation de la performance seule.

Paramètres	$\min_{\varepsilon \in \delta} f(q^* + \varepsilon)$	$\max_{\varepsilon \in \delta} f(q^* + \varepsilon)$	Amplitude de variation maximale de $f(q^* + \varepsilon)$	Amplitude de variation maximale pour la configuration initiale
$K0_x$ biellette	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$12,32 \cdot 10^{-2}$	$11,25 \cdot 10^{-2}$	$6,23 \cdot 10^{-2}$
$K0_z$ cale droite	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$9,15 \cdot 10^{-2}$	$8,08 \cdot 10^{-2}$	$5,66 \cdot 10^{-2}$
X cale gauche	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$8,34 \cdot 10^{-2}$	$7,27 \cdot 10^{-2}$	$3,29 \cdot 10^{-2}$
X cale droite	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$12,02 \cdot 10^{-2}$	$10,95 \cdot 10^{-2}$	$4,94 \cdot 10^{-2}$

Tableau 4-7: Valeurs prises par la fonction pour la plage de variation du paramètre considéré dans le cas de l'optimisation de la fonction « Coût Nominal » seule.

La solution issue de cette optimisation permet de baisser de manière sensible le niveau de la fonction, par contre elle est sensible à une variation paramétrique et la robustesse de la fonction, qui peut être caractérisée par l'écart entre la valeur minimale prise et la valeur maximale, est moins importante que pour la solution initiale.

La stabilité aux paramètres est illustrée par la Figure 4-18. Dans la plage de fréquence 8-10 Hz, aucun mode de suspension ne répond.

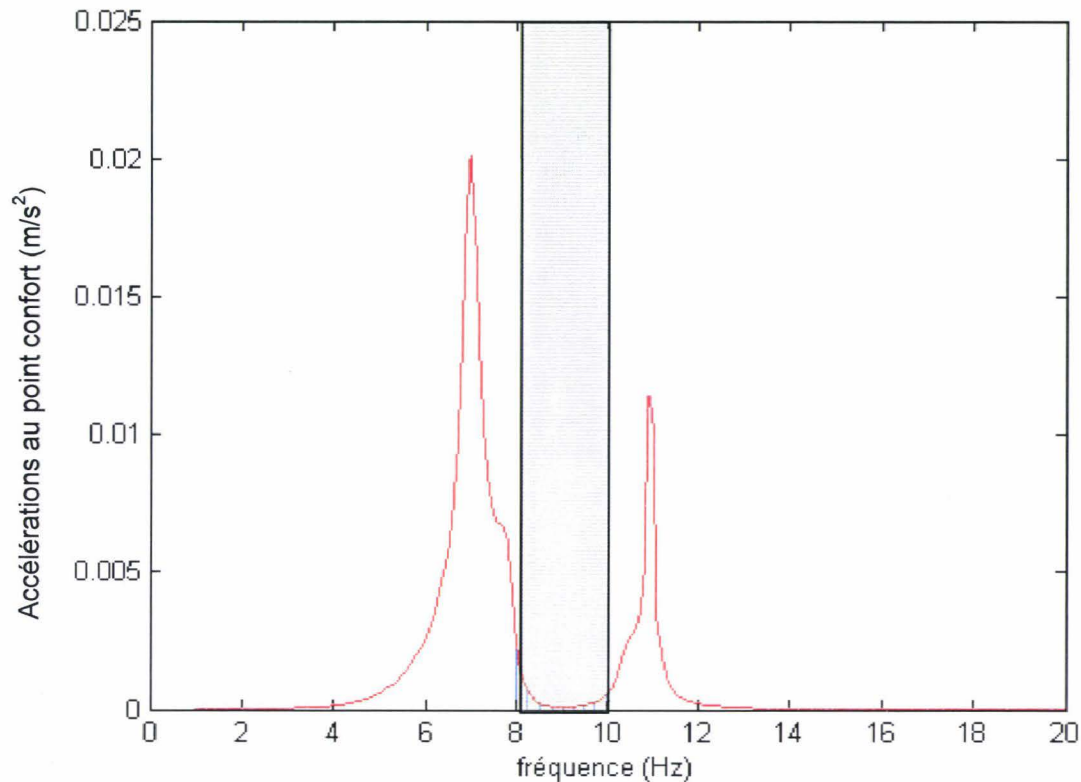


Figure 4-18 : Accélérations au point confort de la solution issue de l'optimisation de la performance seule (fonction « Coût Nominal » N).

- **Solution issue de l'optimisation de la fonction « compromis » :**

Dans le cas d'une telle optimisation, les paramètres optimaux prennent les valeurs suivantes :

Paramètres	Valeurs
$K0_z$ cale droite	$21,32 \cdot 10^4$ (N/mm)
$K0_x$ biellette	$18,35 \cdot 10^4$ ((N/mm)
X cale droite	-0,148 (m)
X cale gauche	-0,132 (m)

Tableau 4-8: Valeurs des paramètres obtenues après optimisation de la fonction « Compromis ».

La Figure 4-19 décrit la stabilité de la solution issue de l'optimisation de la fonction compromis seule pour une variation de la raideur de la biellette.

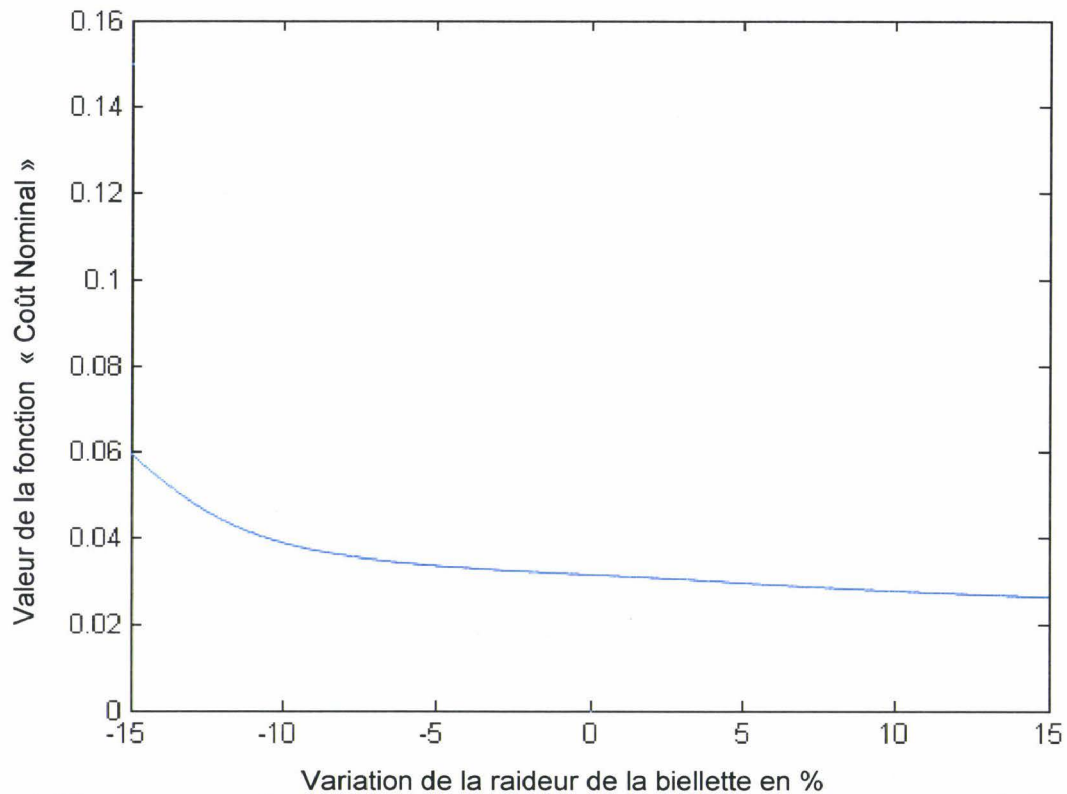


Figure 4-19 : Variation de la fonction « Coût Nominal » en fonction de la valeur de la raideur de la biellette dans le cas de l'optimisation de la fonction « Compromis ».

Le tableau ci-dessous récapitule les extrema de la fonction « Coût Nominal » dans le cas de l'optimisation de la fonction « Compromis ».

Paramètres	$\min_{\varepsilon \in \delta} f(q^* + \varepsilon)$	$\max_{\varepsilon \in \delta} f(q^* + \varepsilon)$	Amplitude de variation maximale de $f(q^* + \varepsilon)$	Amplitude de variation maximale pour la configuration initiale
$K0_x$ biellette	$2,81 \cdot 10^{-2}$	$5,98 \cdot 10^{-2}$	$3,17 \cdot 10^{-2}$	$6,23 \cdot 10^{-2}$
$K0_z$ cale droite	$1,52 \cdot 10^{-2}$	$4,83 \cdot 10^{-2}$	$3,31 \cdot 10^{-2}$	$5,66 \cdot 10^{-2}$
X cale gauche	$3,01 \cdot 10^{-2}$	$3,77 \cdot 10^{-2}$	$0,76 \cdot 10^{-2}$	$3,29 \cdot 10^{-2}$
X cale droite	$0,92 \cdot 10^{-2}$	$5,94 \cdot 10^{-2}$	$5,02 \cdot 10^{-2}$	$4,94 \cdot 10^{-2}$

Tableau 4-9: Valeurs prises par la fonction pour la plage de variation du paramètre considéré dans le cas de l'optimisation de la fonction « Compromis ».

Même si la solution optimale est meilleure que pour la configuration initiale, il apparaît cependant que cette solution est dégradée par rapport au cas de l'optimisation de la performance seule. Cependant, le design obtenu est plus robuste vis-à-vis de l'imprécision considérée sur l'ensemble des paramètres. Enfin, en comparant la configuration initiale et la configuration optimisée robuste, la robustesse est améliorée pour trois paramètres sur quatre, à savoir $K0_x$ biellette, $K0_z$ cale droite et X cale gauche.

Figure 4-20 montre que la plage de fréquence considérée est la plus « éloignée » des modes de suspension pouvant répondre.

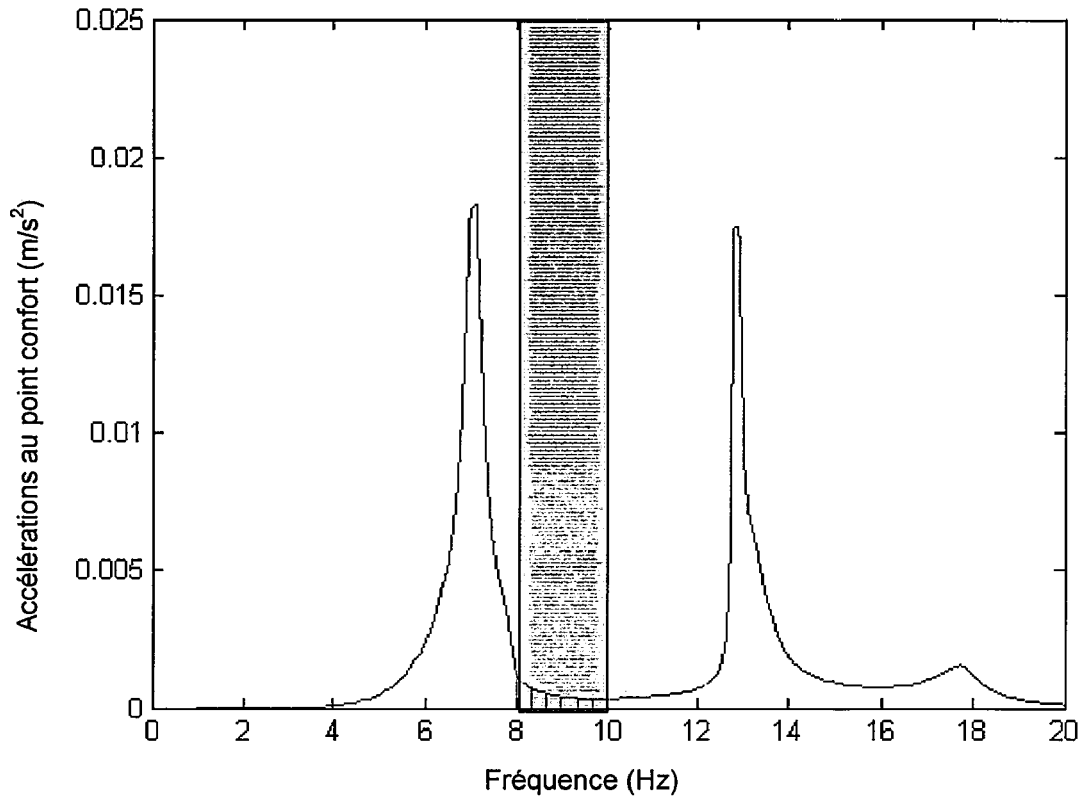


Figure 4-20 : Accélérations au point confort de la solution issue de l'optimisation de la fonction « Compromis ».

De manière fonctionnelle, l'augmentation des raideurs des cales tend à déplacer le mode de roulis vers des fréquences plus élevées, le sortant ainsi de la plage de fréquence considérée, augmentant ainsi la robustesse de la zone.

4.7.3 Optimisation robuste : compromis entre la performance et la robustesse

A l'issue des paragraphes précédents, il apparaît que la minimisation de la fonction « Compromis » tend à améliorer à la fois la performance et la robustesse de la fonction étudiée. Cependant, dans le processus de conception classique, le concepteur peut être amené à faire des choix et s'orienter vers un design plus robuste que performant ou inversement. Aussi, une perspective intéressante est l'introduction de coefficients de pondération dans la fonction « compromis » C afin d'orienter l'optimisation vers une solution, privilégiant soit la performance soit une faible instabilité. La fonction compromis peut alors se réécrire comme une combinaison linéaire de la fonction « coût nominal » N et de la fonction « Instabilité » I .

$$C_{(\lambda_1, \lambda_2)}(f(q)) = \lambda_1 N(f(q)) + \lambda_2 I(f(q)) \quad \text{Eq. 4-42}$$

avec $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ et $0 \leq \lambda_1 \leq 1$ et $0 \leq \lambda_2 \leq 1$.

• **Optimisation privilégiant la stabilité**

En reprenant l'exemple précédent et en considérant les pondérations suivantes (dans le but de privilégier la robustesse) $\lambda_1 = 0,2$ et $\lambda_2 = 0,8$, les résultats suivants sont obtenus :

Paramètres	Valeurs optimisées
KO_z cale droite	$27,72 \cdot 10^4$ (N/mm)
KO_x biellette	$25,11 \cdot 10^4$ ((N/mm)
X cale droite	-0,176 (m)
X cale gauche	-0,145 (m)

Tableau 4-10: Valeurs des paramètres obtenues après optimisation de la fonction « Compromis » pondérée $C_{(0,2;0,8)}$.

La Figure 4-21 décrit la stabilité de la solution issue de l'optimisation de la pondération de la fonction robustesse par les coefficients donnés ci-dessus pour une variation de la raideur de la biellette.

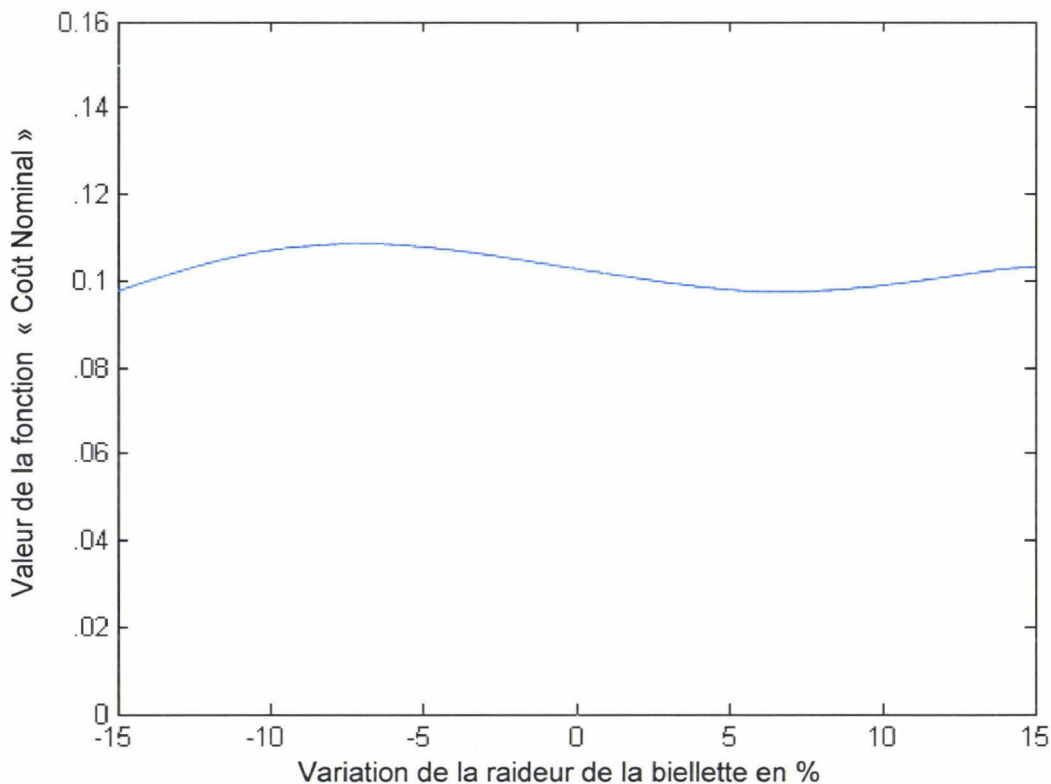


Figure 4-21 : Variation de la fonction « Coût Nominal » en fonction de la valeur de la raideur de la biellette dans le cas d'une optimisation avec pondération de la fonction « Compromis » $C_{(0,2;0,8)}$.

Le tableau ci-dessous récapitule les extrema de la fonction « Coût Nominal » dans le cas de l'optimisation de la fonction « Compromis » $C_{(0,2;0,8)}$.

Paramètres	$\min_{\varepsilon \in \delta} f(q^* + \varepsilon)$	$\max_{\varepsilon \in \delta} f(q^* + \varepsilon)$	Amplitude de variation maximale de $f(q^* + \varepsilon)$	Amplitude de variation maximale pour la configuration initiale
$K0_x$ biellette	$9,78 \cdot 10^{-2}$	$10,76 \cdot 10^{-2}$	$0,98 \cdot 10^{-2}$	$6,23 \cdot 10^{-2}$
$K0_z$ cale droite	$8,91 \cdot 10^{-2}$	$11,52 \cdot 10^{-2}$	$2,61 \cdot 10^{-2}$	$5,66 \cdot 10^{-2}$
X cale gauche	$10,02 \cdot 10^{-2}$	$10,95 \cdot 10^{-2}$	$0,93 \cdot 10^{-2}$	$3,29 \cdot 10^{-2}$
X cale droite	$9,05 \cdot 10^{-2}$	$10,87 \cdot 10^{-2}$	$1,82 \cdot 10^{-2}$	$4,94 \cdot 10^{-2}$

Tableau 4-11: Valeurs prises par la fonction pour la plage de variation du paramètre considéré dans le cas de l'optimisation de la fonction « Compromis » pondérée $C_{(0,2;0,8)}$.

La solution générée par cette optimisation dégrade la performance mais rend très robuste la solution. Comme on peut le voir sur la Figure 4-22, la bande de fréquence considérée (8-10 Hz) se situe loin des modes de suspension. Une variation d'un des paramètres n'impacte pas de manière significative ce placement en fréquence.

Comme précédemment, l'augmentation des raideurs des cales tend à déplacer le mode de roulis vers des fréquences plus élevées, le sortant ainsi de la plage de fréquence considérée et augmentant fortement la robustesse de la zone. Par contre, de tels niveaux de raideurs deviendraient incompatibles avec les autres prestations de la suspension GMP (ralenti et bourdonnement).

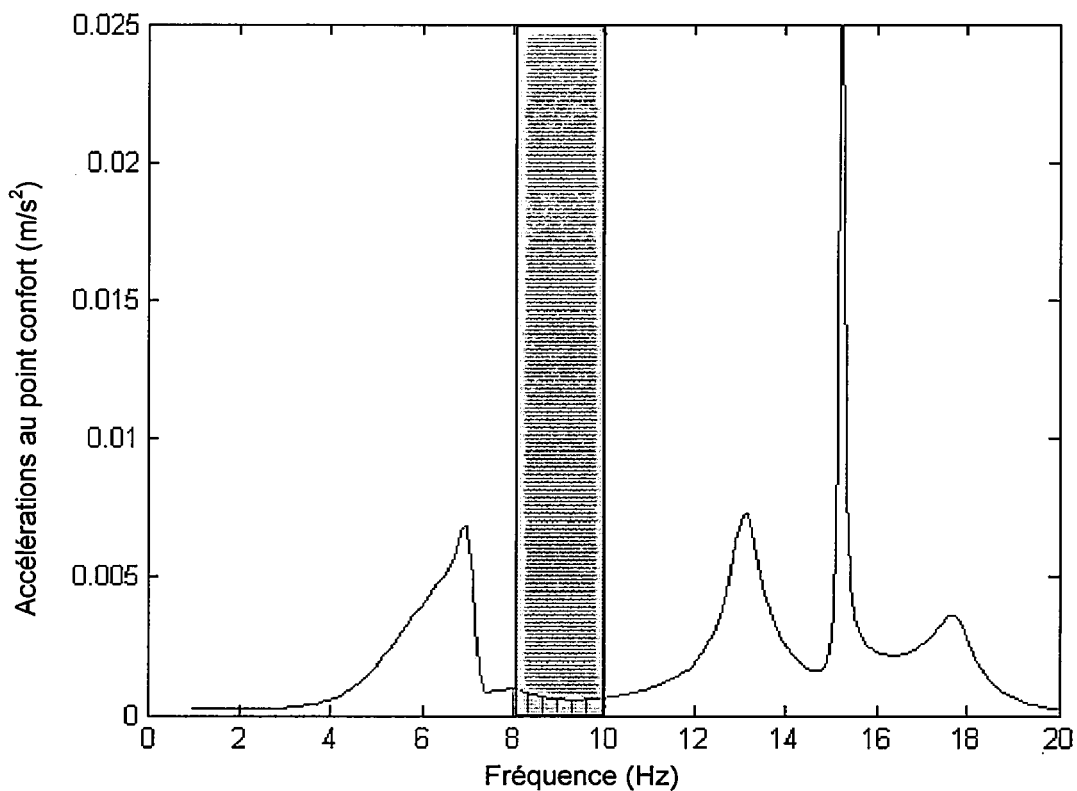


Figure 4-22 : Accélérations au point confort de la solution issue de l'optimisation de la pondération de la fonction « Compromis » $C_{(0,2;0,8)}$.

• **Optimisation robuste visant à privilégier la performance**

De même en privilégiant la performance, avec les coefficients de pondération suivants $\lambda_1 = 0.8$ et $\lambda_2 = 0.2$, les résultats obtenus sont :

Paramètres	Valeurs
KO_z cale droite	$14,37 \cdot 10^4$ (N/mm)
KO_x biellette	$12,39 \cdot 10^4$ ((N/mm)
X cale droite	-0,152 (m)
X cale gauche	-0,135 (m)

Tableau 4-12: Valeurs des paramètres obtenues après optimisation de la fonction « Compromis » pondérée $C_{(0,8;0,2)}$.

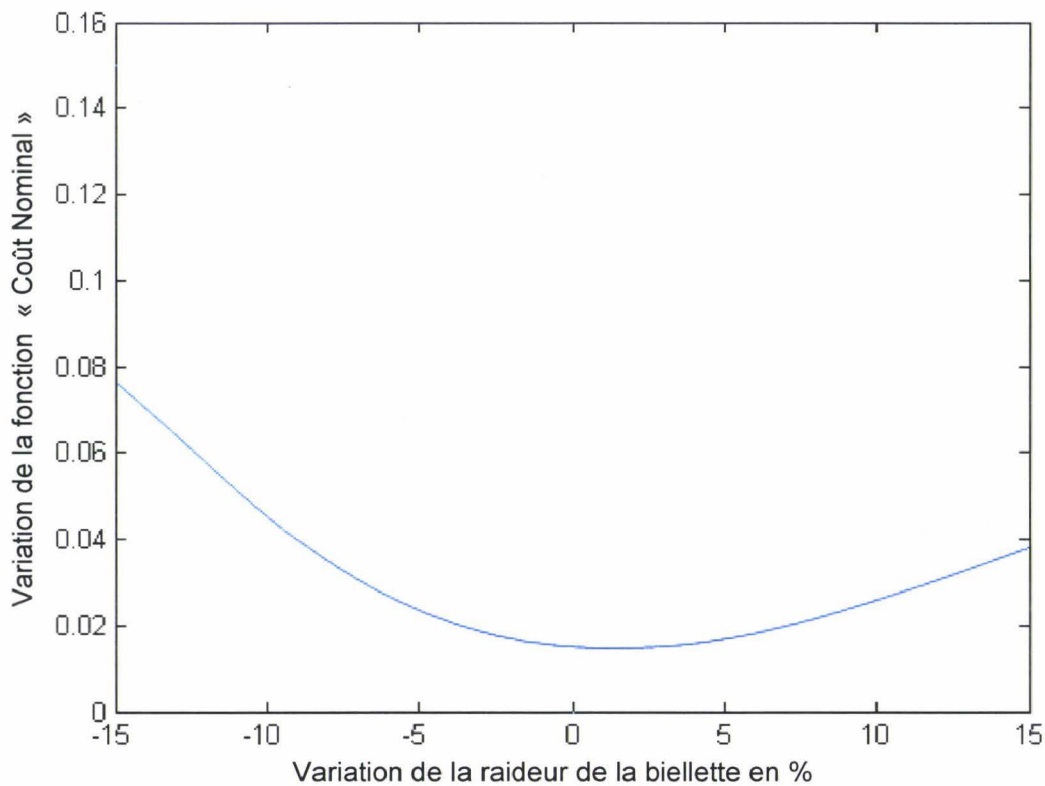


Figure 4-23 : Variation de la fonction « Coût Nominal » en fonction de la valeur de la raideur de la biellette dans le cas d'une optimisation avec pondération de la fonction « compromis » $C_{(0,8;0,2)}$.

Le tableau ci-dessous récapitule les extrema de la fonction « Coût Nominal » dans le cas de l'optimisation de la fonction « Compromis » $C_{(0,8;0,2)}$.

Paramètres	$\min_{\varepsilon \in \delta} f(q^* + \varepsilon)$	$\max_{\varepsilon \in \delta} f(q^* + \varepsilon)$	Amplitude de variation maximale de $f(q^* + \varepsilon)$	Amplitude de variation maximale pour la configuration initiale
$K0_x$ biellette	$1,51 \cdot 10^{-2}$	$7,81 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-2}$	$6,23 \cdot 10^{-2}$
$K0_z$ cale droite	$1,55 \cdot 10^{-2}$	$9,52 \cdot 10^{-2}$	$7,97 \cdot 10^{-2}$	$5,66 \cdot 10^{-2}$
X cale gauche	$1,37 \cdot 10^{-2}$	$5,09 \cdot 10^{-2}$	$3,72 \cdot 10^{-2}$	$3,29 \cdot 10^{-2}$
X cale droite	$1,24 \cdot 10^{-2}$	$8,75 \cdot 10^{-2}$	$7,51 \cdot 10^{-2}$	$4,94 \cdot 10^{-2}$

Tableau 4-13: Valeurs prises par la fonction pour la plage de variation du paramètre considéré dans le cas de l'optimisation de la fonction « Compromis » pondérée $C_{(0,8;0,2)}$.

La solution obtenue est bien une solution intermédiaire, plus performante que la solution issue de l'optimisation de la fonction robustesse seule mais si on fait référence à l'écart, elle est moins robuste.

La Figure 4-24 décrit la stabilité de la solution issue de l'optimisation de la pondération de la fonction robustesse par les coefficients donnés ci-dessus.

Cette figure montre que le design obtenu tend à « écarter » les modes de suspension supérieurs à 10 Hz dans des domaines de fréquence supérieures à 11 Hz offrant ainsi une stabilité de la réponse du système dans la zone 8-10 Hz.

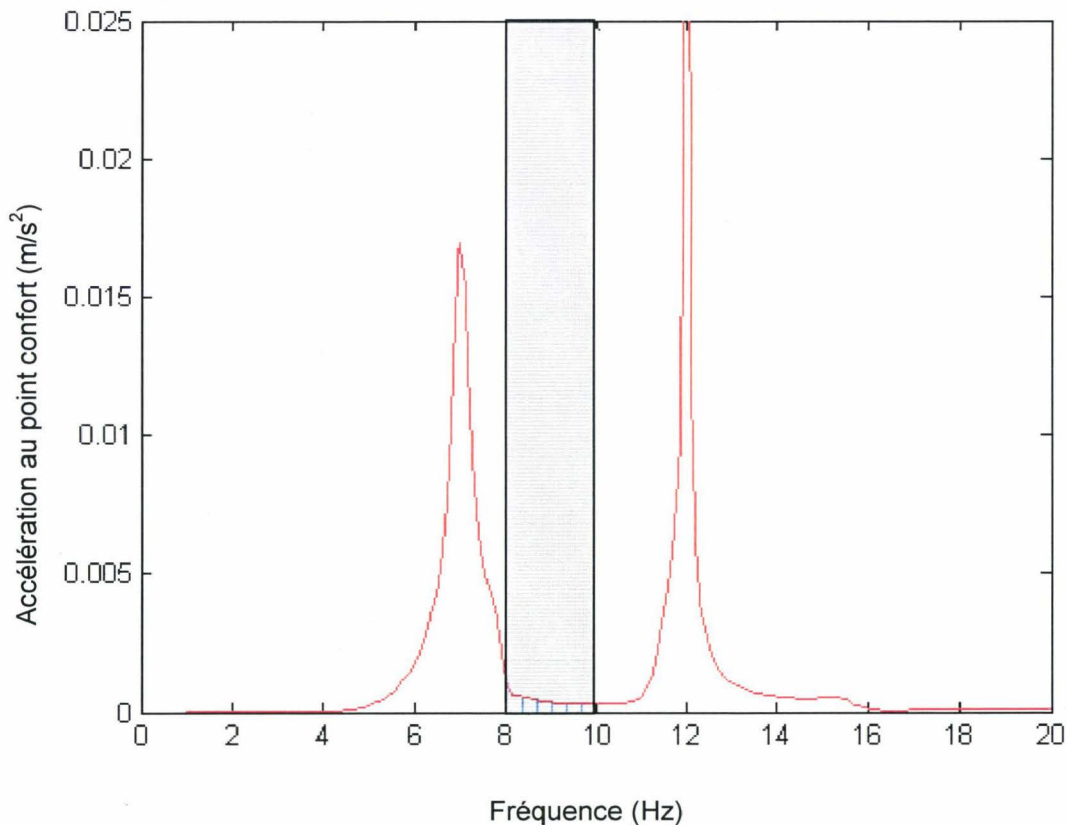


Figure 4-24 : Accélération au point confort de la solution issue de l'optimisation de la pondération de la fonction « Compromis » $C_{(0,8;0,2)}$.

• **Récapitulatif de l'étude**

Le Tableau 4-14 se propose de récapituler les valeurs caractéristiques de l'étude réalisée pour les différents paramètres et quelques valeurs de pondération.

Type d'optimisation	Paramètres	Ecart			
		$K0_x$ biellette	$K0_z$ cale droite	X cale gauche	X cale droite
Configuration initiale		6,23 10 ⁻²	5,66 10 ⁻²	3,29 10 ⁻²	4,94 10 ⁻²
Performance seule N ($\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$)		11,25 10 ⁻²	8,08 10 ⁻²	7,27 10 ⁻²	10,95 10 ⁻²
Fonction compromis C ($\lambda_1 = 0,5$ et $\lambda_2 = 0,5$)		3,17 10 ⁻²	3,31 10 ⁻²	0,76 10 ⁻²	5,02 10 ⁻²
Fonction compromis C ($\lambda_1 = 0,2$ et $\lambda_2 = 0,8$)		0,98 10 ⁻²	2,61 10 ⁻²	0,93 10 ⁻²	1,82 10 ⁻²
Fonction compromis C ($\lambda_1 = 0,8$ et $\lambda_2 = 0,2$)		6,3 10 ⁻²	7,97 10 ⁻²	3,72 10 ⁻²	7,51 10 ⁻²

Tableau 4-14: Récapitulatif de l'étude.

Ces valeurs montrent les orientations prises lors de l'utilisation de la fonction compromis dans le processus d'optimisation. Les pondérations permettent en outre d'orienter les solutions dans le sens de la performance ou de la robustesse. Globalement, pour l'ensemble des paramètres, les résultats obtenus sont en cohérence avec les attentes. Si on s'attache plus particulièrement à l'étude de la fonction compromis « classique » à savoir pour les valeurs de pondération $\lambda_1 = 0,5$ et $\lambda_2 = 0,5$, il apparaît que les performances sont systématiquement améliorées et que pour trois paramètres sur quatre, la robustesse est sensiblement améliorée (cellules grisées dans le tableau). Pour le paramètre n'améliorant pas la robustesse (à savoir la position en X de la cale droite), la performance est sensiblement améliorée et l'écart associé est peu différent de la configuration initiale.

Figure 4-25 ci-dessous retranscrit les solutions issues des études précédentes dans le Pareto Nominal-Instabilité et permet de montrer la cohérence des résultats en terme de compromis.

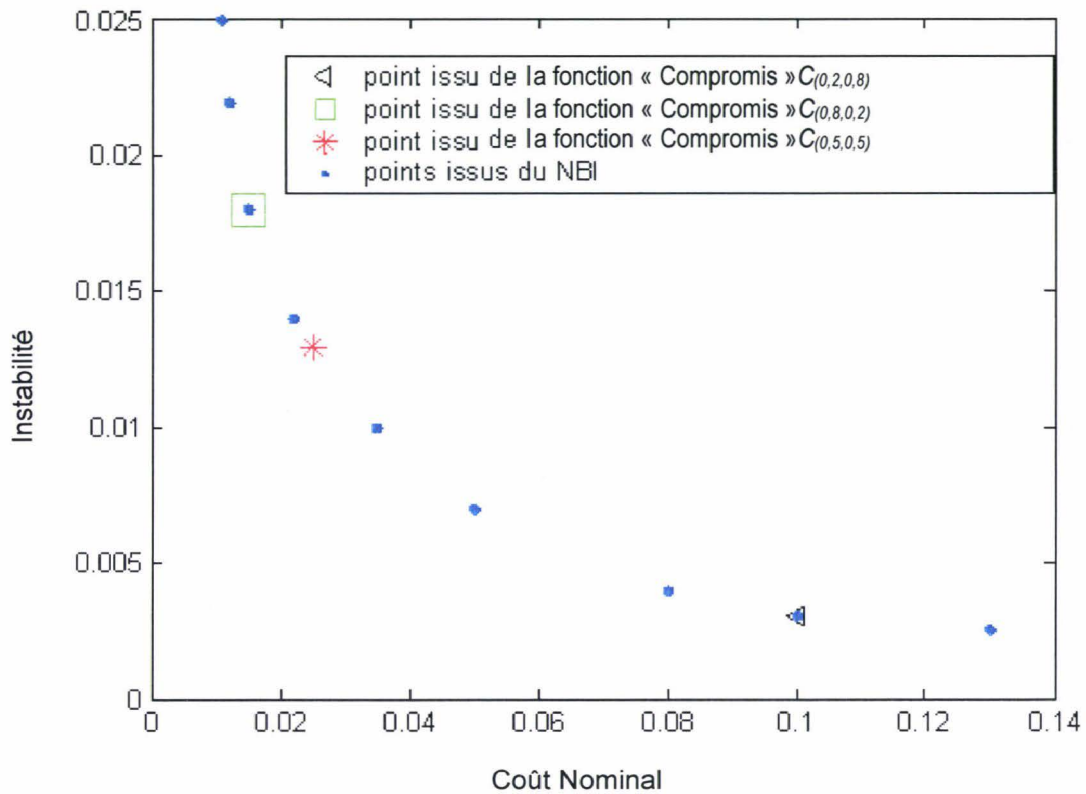


Figure 4-25 : Intégration des solutions issues de l'étude dans le Pareto Coût Nominal-Instabilité.

Vu le placement de ces solutions, la solution issue de l'optimisation de la fonction « Compromis » C correspond bien à un compromis entre une solution favorisant la performance et une solution réduisant l'instabilité. Le placement des deux autres points issus d'une optimisation pondérée en vue de l'orientation d'une amélioration soit de la performance, soit de la robustesse permet de montrer que les tendances sont en adéquation avec les attentes.

4.8 Conclusion

A l'issue de ce chapitre, une méthodologie de dimensionnement robuste d'une suspension GMP a été proposée. Les différents cas de fonctionnement de la suspension ont été considérés et pour chacun de ces cas, un modèle a été réalisé. Chacun des modèles constitue une représentation numérique des prestations inhérentes à une suspension GMP.

L'ensemble des routines a été développé sous le logiciel Matlab. Ces routines s'intègrent parfaitement dans un processus de dimensionnement fonctionnel d'une suspension GMP puisqu'elles sont renseignées principalement par des données physiques, c'est-à-dire représentatives des paramètres réels utilisés dans la description classique d'une suspension.

En outre, les imprécisions sur les paramètres de conception ont été intégrées dans le calcul des fonctions à optimiser via l'élaboration de fonctions robuste dédiées. Cette formulation permet ainsi de renseigner directement le cahier des charges fonctionnel de la suspension en garantissant que les prestations seront assurées dans une plage d'imprécisions des paramètres définis.

La partie suivante se propose d'intégrer la notion de robustesse dans un processus d'optimisation multi-objectif utilisant la méthode NBI appliqué au cas d'une suspension GMP via l'utilisation des fonctions développées précédemment. La mise en place du développement sera appliquée dans le chapitre 4 sur un exemple complet de suspension GMP.

CHAPITRE 5

*Application à l'optimisation robuste d'une
suspension GMP pendulée*

5 APPLICATION A L'OPTIMISATION ROBUSTE D'UNE SUSPENSION GMP PENDULEE

5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, une formulation adaptée au problème de l'optimisation robuste d'une suspension GMP en avant-projet a été proposée. Le choix des variables, des fonctions objectif et des restrictions énoncées dans cette formulation doit permettre au concepteur de se prononcer sur les variables définissant une architecture de suspension moteur adaptée.

L'objectif de ce chapitre est de mettre en œuvre cette formulation ainsi que la stratégie d'optimisation multiobjectif associée sur un exemple concret de dimensionnement fonctionnel d'une suspension GMP en avant-projet.

Etant donnée la difficulté à d'obtenir une référence expérimentale en phase d'avant-projet, la démarche présentée dans la suite sera purement numérique. L'exemple choisi ici est une suspension de type pendulaire pour laquelle les critères métiers déjà connus doivent permettre d'évaluer la pertinence des configurations obtenues.

Un soin tout particulier sera apporté à l'analyse de la qualité des solutions sur le plan de la robustesse. Pour cela, les outils d'analyse mis en place permettront d'évaluer la qualité de la solution en termes de performance puis de robustesse.

5.2 Description de l'application

Cette partie a pour objectif la description de l'exemple sur lequel la méthodologie va être appliquée.

5.2.1 Véhicule et motorisation retenue pour l'étude

Le choix du véhicule sur lequel sera réalisée l'application est un véhicule produit en série dans le groupe PSA Peugeot Citroën. Ce choix présente plusieurs avantages :

- l'architecture de cette suspension est bien connue et a fait l'objet de nombreuses validations, notamment expérimentales,
- la définition série peut servir de point de départ au processus d'optimisation,
- les règles métiers ayant servies à la validation de cette architecture sont connues et peuvent servir de référence quant à la qualification des solutions issues de l'optimisation.

Le véhicule choisi est une Citroën C3 avec un moteur 4 cylindres essence d'une cylindrée de 1.4 L (véhicule A8, moteur TU3JP, boîte BE4). Comme l'ensemble des véhicules du groupe PSA Peugeot Citroën, il s'agit d'une suspension à architecture pendulaire. Ce véhicule est représentatif d'un groupe de dimensions équivalentes défini sous le terme générique de PFA (Plateforme A).

La suspension GMP montée en série est jugée bonne vis-à-vis des critères métiers statiques et vibro-acoustiques. Elle constituera donc une référence quant aux niveaux à atteindre ou à améliorer en termes de prestations.

Pour ce véhicule, les organes d'adaptation et leurs implantations sont illustrés sur la Figure 5-26.

Ainsi, la suspension GMP de notre cas d'étude est constituée :

- d'une cale droite hydraulique ayant pour fonction principale de reprendre le poids du GMP et les excitations verticales mais aussi une partie du couple statique,
- d'une cale gauche élastique reprenant le poids et les excitations verticales et une partie du couple statique,
- d'une biellette inférieure reprenant le couple.

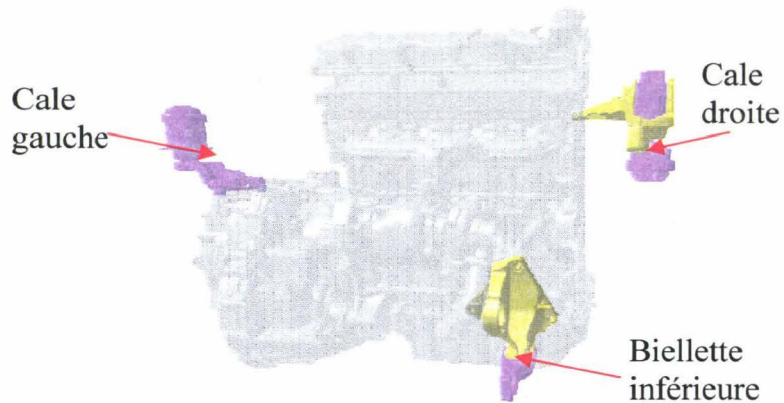


Figure 5-26 : Suspension GMP montée sur la configuration série.

5.2.2 Variables du problème

Dans le cadre de notre problématique, et comme nous l'avons défini au chapitre 2, les variables du problème peuvent être des variables d'optimisation et/ou des variables imprécises. Toutes les variables d'optimisation seront considérées comme imprécises. L'ensemble de ces variables est décrit dans les paragraphes suivants.

5.2.2.1 Variables d'optimisation

Les seules variables d'optimisation de notre étude sont celles décrivant les supports GMP.

Type de variable	Description	Nombre
<i>Pour un support moteur</i>		
Positionnement	Positionnement géométrique dans le repère véhicule	3
	Positions angulaires (Euler)	3
Raideur	3 courbes <i>Effort-Déplacement</i> (1 courbe pour chaque direction)	3x7
		27 variables / support
Paramètres hydrauliques	Rapport de rigidification Fréquence d'amortissement maximum Paramètres permettant de définir le niveau d'amortissement maximum	3
<i>Pour une architecture classique (3 supports dont 1 hydro)</i>		84 variables

Tableau 5-1 : Variables d'optimisation pour les supports GMP.

A ces variables d'optimisation doivent être ajoutées celles considérées comme imprécises ou non maîtrisées mais ne pouvant faire l'objet d'une optimisation.

5.2.2.2 Variables imprécises

D'autres variables intervenant dans la constitution du modèle telles que la masse du GMP et de la caisse ainsi que leurs matrices d'inertie respectives constituent des paramètres imprécis à considérer dans notre problématique. Elles sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Type de variable	Description	Nombre
<i>Pour le GMP</i>		
Positionnement	Positionnement géométrique dans le repère véhicule	3
	Positions angulaires (Euler)	3
Masse	Masse du GMP	1
Matrice d'inertie	Moments et produits d'inertie du GMP	9
<i>Pour la caisse</i>		
Positionnement	Positionnement géométrique dans le repère véhicule	3
	Positions angulaires (Euler)	3
Masse	Masse de la caisse	1
Matrice d'inertie	Moments et produits d'inertie de la caisse	9
Total :		32 variables

Tableau 5-2 : Variables imprécises pour le GMP et la caisse.

5.2.2.3 Nombre maximal de variables

A l'issue du recensement des variables potentielles du problème, il apparaît que leur nombre est extrêmement important. C'est pourquoi un soin tout particulier va être apporté à la réduction du nombre de paramètres considérés ainsi qu'à la détermination de leur plage de variation, soit en se basant sur les caractéristiques intrinsèques d'une architecture pendulaire, soit en effectuant une analyse de sensibilité.

5.2.2.4 Minimisation du nombre de paramètres liée aux caractéristiques d'une architecture pendulaire.

Afin de limiter le nombre de paramètres, il s'agit de poser certaines hypothèses simplificatrices pour limiter le nombre de paramètres. Cependant, pour rester suffisamment général et ne pas se limiter à une optimisation locale autour de la configuration série, il faut prendre en compte les considérations suivantes.

Tout d'abord, pour éviter des configurations singulières vis-à-vis des chargements statiques, il est judicieux de ne pas laisser complètement libre l'orientation de la biellette et de l'obliger à garder une inclinaison proche de l'horizontale. Cette caractérisation permet une première réduction du nombre de paramètres et de leurs plages de variation (notamment pour les paramètres angulaires).

Ensuite, ce nombre peut encore être réduit soit par des considérations de symétrie, soit en fonction du rôle assigné à tel ou tel support :

- les caractéristiques des supports dans la direction y véhicule sont fixées car cette direction fonctionne relativement indépendamment des autres,
- les caractéristiques des cales porteuses dans la direction z (y compris les caractéristiques hydrauliques) sont fixées car elles concernent essentiellement l'excitation provenant de la route et sont supposées avoir été dimensionnées en conséquence.

5.2.2.5 Analyse de sensibilité paramétrique du modèle

Dans la démarche de simplification paramétrique du modèle, outre les considérations architecturales, une analyse de la sensibilité du modèle à la variation de l'ensemble des paramètres peut être réalisée. En effet, il semble intéressant de voir s'il est possible de s'affranchir de la prise en compte de certains paramètres ayant peu d'influence sur le modèle, tant comme paramètres imprécis que comme paramètres d'optimisation.

La démarche consiste à calculer les sensibilités paramétriques par différences finies. L'analyse de sensibilité est effectuée sur les fonctions objectif et contraintes. Elle est présentée dans les tableaux ci-dessous en valeur absolue.

Pour rappel, le problème traité comporte trois fonctions objectif dont on cherchera à optimiser la performance et à améliorer la robustesse ainsi que des restrictions ou contraintes associées au cahier des charges. La première fonction correspondant aux très basses fréquences (TBF), la seconde au ralenti et la troisième au bourdonnement (cf. paragraphe 3.6.4). Les restrictions ont pour objet la limitation des débattements du GMP sous les couples de première et de marche arrière. En outre, afin de diminuer les temps de calcul, le nombre de cas de charges pris en compte est limité au minimum. Ainsi, le bourdonnement ne sera calculé qu'en troisième et les calculs statiques ne se font que sous couple de première et marche arrière.

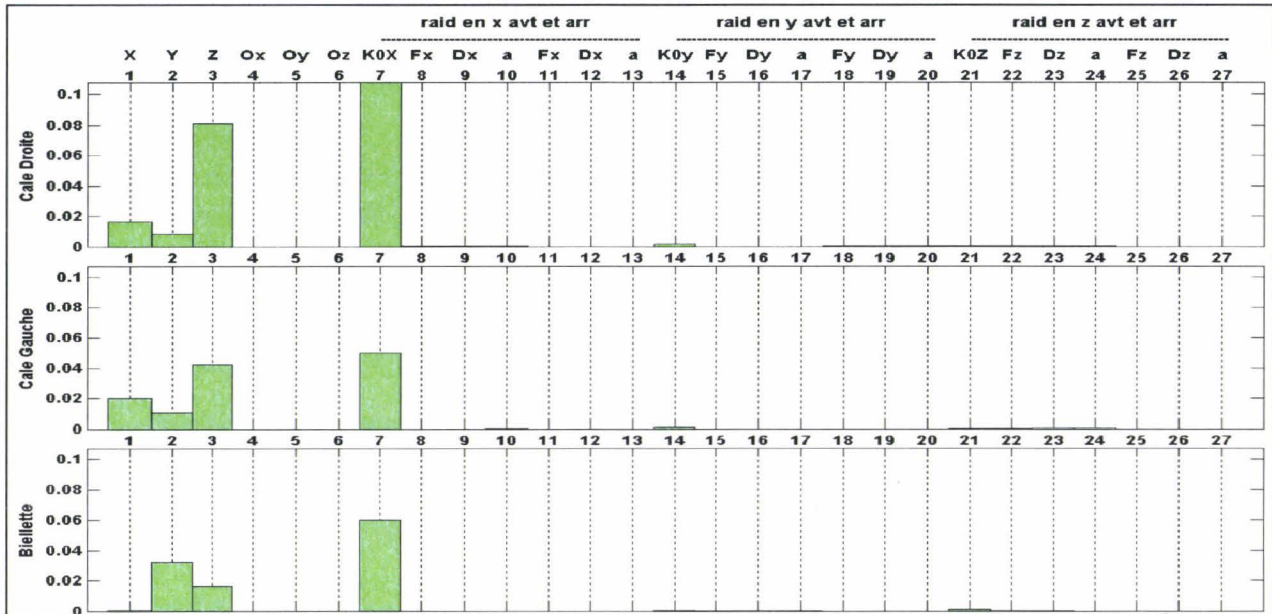


Tableau 5-3 : Analyse de sensibilité de la fonction F_1 (TBF) pour les paramètres de suspension GMP.

La fonction F_1 , associée aux très basses fréquences, montre pour les 3 supports une sensibilité marquée à la variation des raideurs suivant la direction X ainsi qu'aux variables de positionnement géométrique (X , Y et Z).

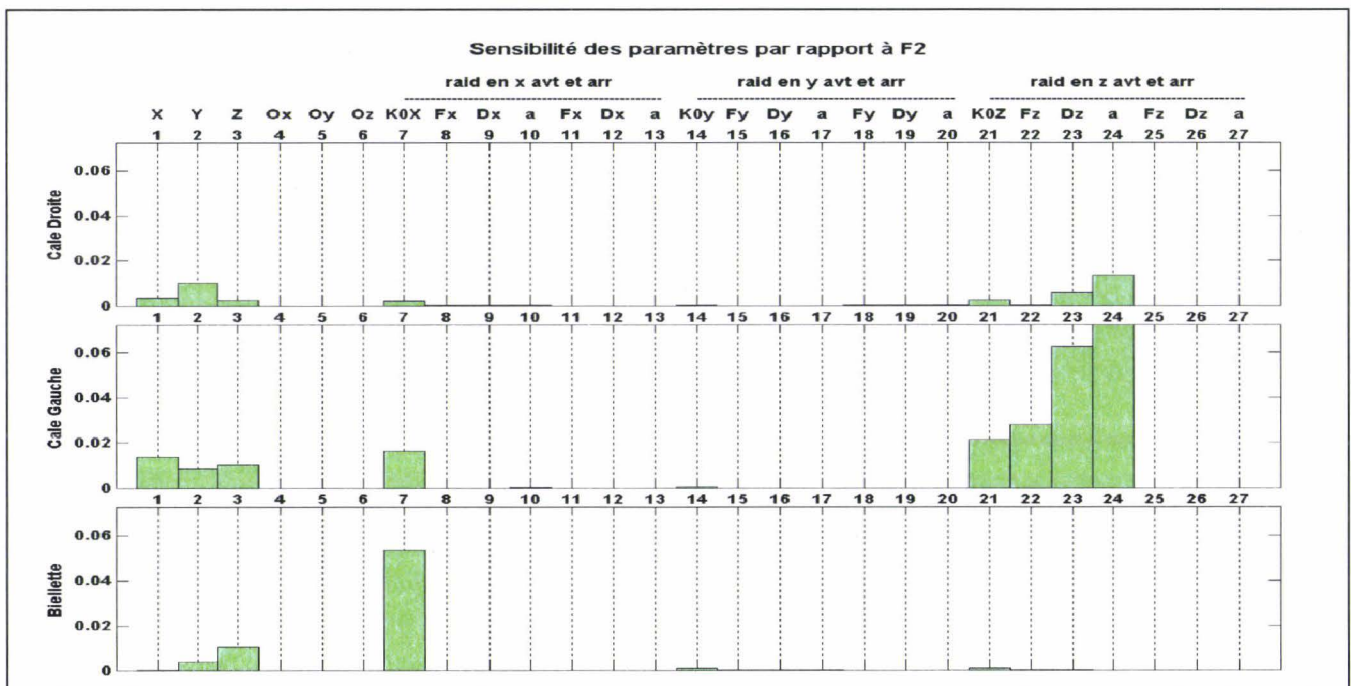


Tableau 5-4 : Analyse de sensibilité de la fonction F_2 (ralenti) pour les paramètres de suspension GMP.

La fonction F_2 , associée au ralenti, est sensible aux variables intervenant sur les courbes effort déplacement dans la direction Z des cales porteuses (droite et gauche), aux variables de positionnement géométrique ainsi qu'aux variables de raideur de la biellette.

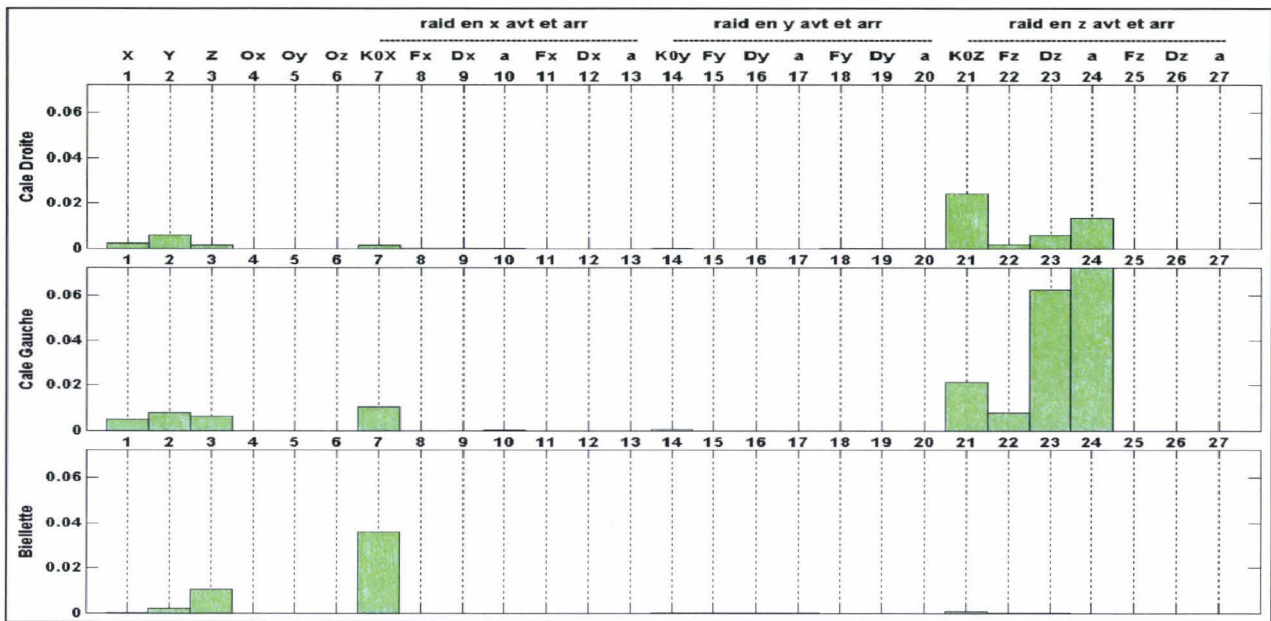


Tableau 5-5 : Analyse de sensibilité de la fonction F_3 (bourdonnement) pour les paramètres de suspension GMP.

Globalement, la F_3 , associée au bourdonnement, est sensible aux mêmes variables que la fonction F_2 à savoir les variables intervenant sur les courbes effort déplacement dans la direction Z des cales porteuses (droite et gauche), aux variables de positionnement géométrique ainsi qu'aux variables de raideur de la biellette.

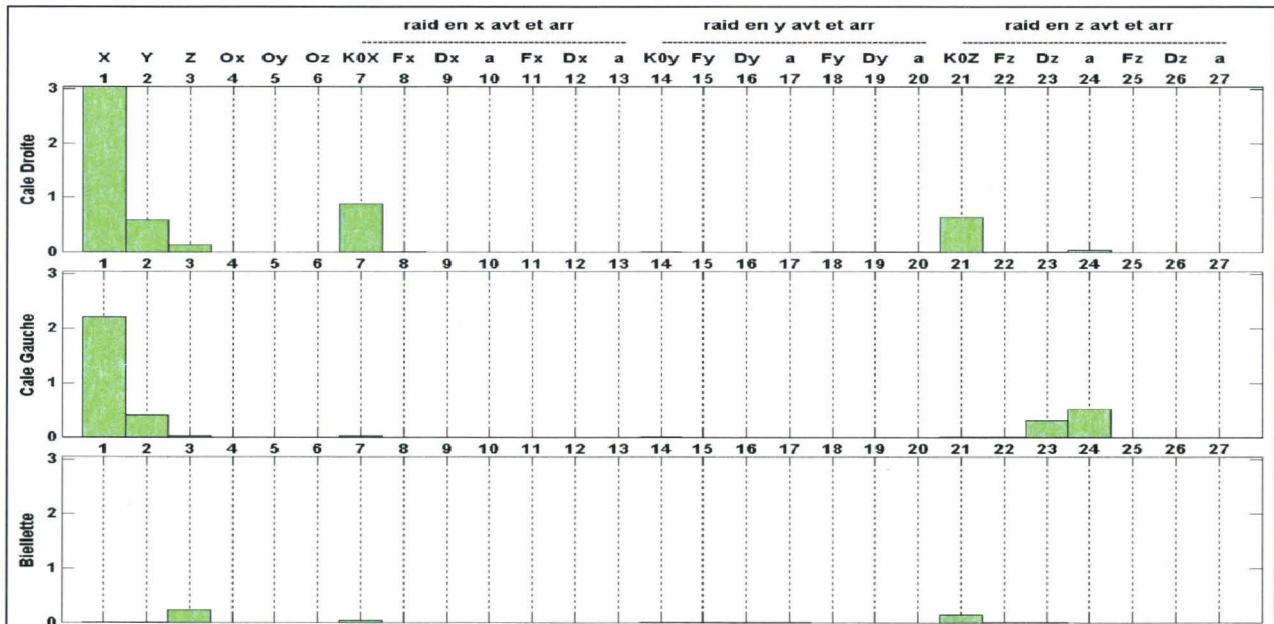


Tableau 5-6 : Analyse de sensibilité de la contrainte de débattement statique sous poids pour les paramètres de suspension GMP.

Les débattements statiques sont les plus sensibles à une perturbation des variables de positionnement géométrique pour les cales porteuses. Ces débattements sont quasiment insensibles aux variables relatives à la biellette.

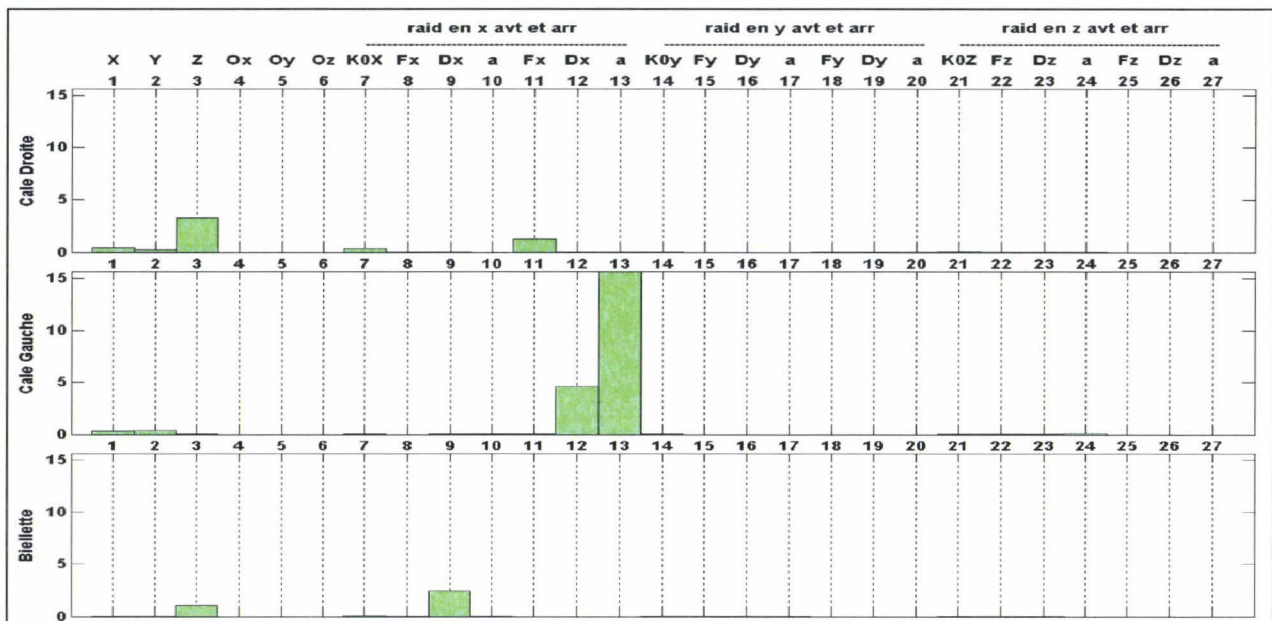


Tableau 5-7 : Analyse de sensibilité de la contrainte de débattement statique sous couple de première pour les paramètres de suspension GMP.

Les débattements en 1^{ère} sont peu sensibles à une perturbation des variables de positionnement des cales porteuses. Ils sont par contre très sensibles à une perturbation du rayon de courbure de la courbe effort-déplacement suivant X de la cale gauche.

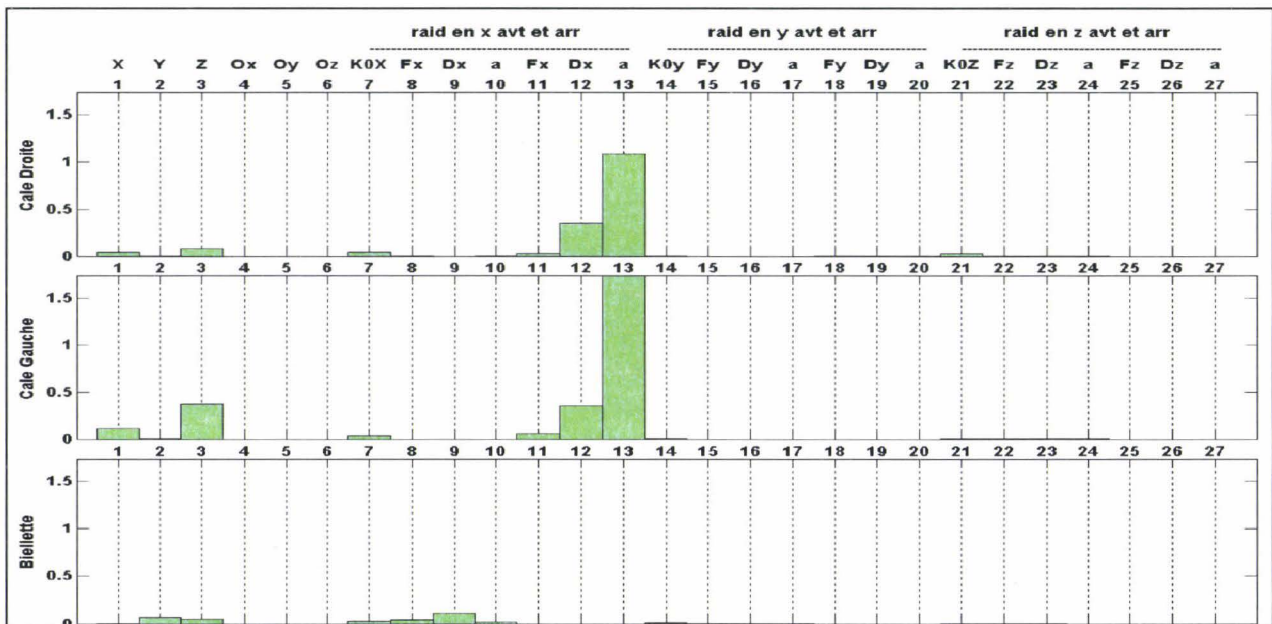


Tableau 5-8 : Analyse de sensibilité de la contrainte de débattement statique sous couple de troisième pour les paramètres de suspension GMP.

Les débattements en 3^{ème} sont peu sensibles à une perturbation des variables de positionnement des cales porteuses. On constate que ces débattements sont nettement plus sensibles à une perturbation du rayon de courbure de la courbe effort-déplacement suivant X des cales porteuses.

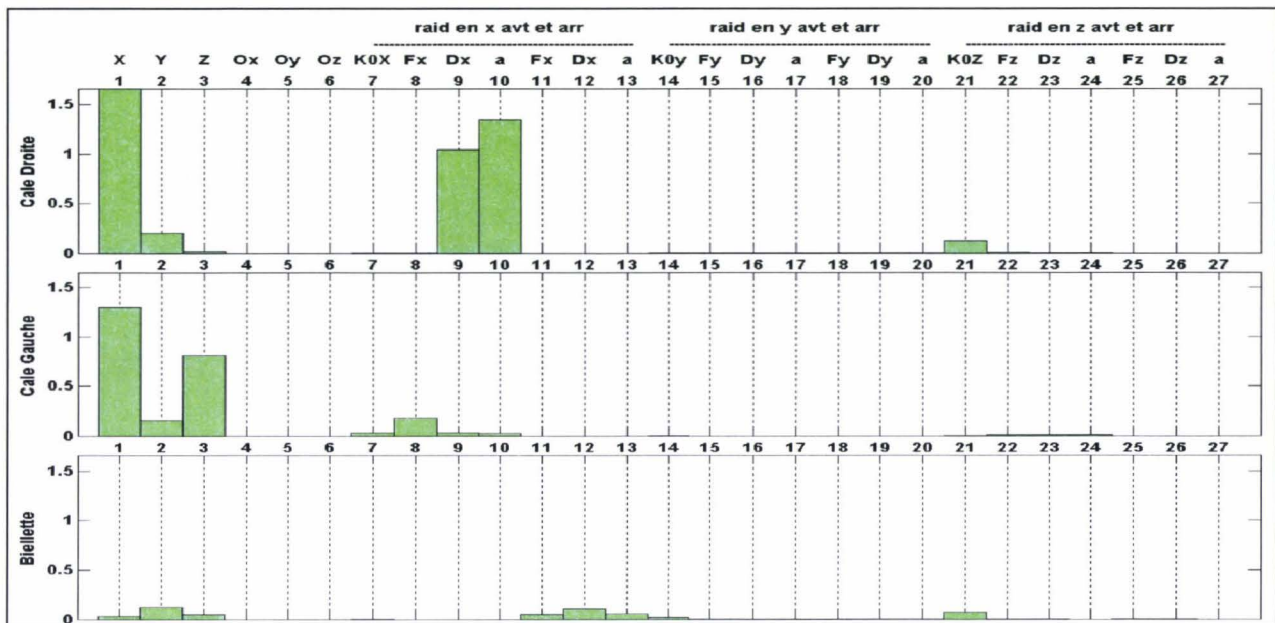


Tableau 5-9 : Analyse de sensibilité de la contrainte de débattement statique en marche arrière pour les paramètres de suspension GMP.

Les débattements en marche arrière sont sensibles pour les cales porteuses à une perturbation des variables de positionnement et rayon de courbure des courbes effort-déplacement suivant X .

Synthèse :

La fonction F_1 est très sensible à une perturbation des paramètres de positionnement des supports ainsi qu'aux raideurs suivant X . En effet, l'excitation GMP majeure imposée dans la gamme de fréquences relative associée à la fonction F_1 est une excitation en couple de roulis. Ainsi, d'un point de vue fonctionnel, il est nécessaire de reprendre ce couple et ce via les raideurs en X des cales et de la biellette. Les fonctions F_2 et F_3 sont sensibles aux paramètres de raideur suivant Z (courbe effort-déplacement) des cales gauche et droite ainsi qu'aux paramètres de positionnement. L'excitation principale pour ces deux fonctions a une composante essentiellement verticale. Il apparaît donc essentiel que la raideur en Z soit judicieusement choisie d'où une sensibilité accrue pour les raideurs verticales. Pour le concepteur, il est essentiel que le positionnement des cales se trouve sur des points peu vibrants, c'est-à-dire dans le cas d'une architecture de suspension GMP, proche de l'ANR d'où l'influence d'une modification du positionnement géométrique des cales.

Les débattements statiques sous couples, quant à eux, sont évidemment sensibles aux paramètres des courbes effort-déplacement puisqu'ils sont inhérents à un point de fonctionnement de ces courbes. Cette analyse de sensibilité permet de se rendre compte que des paramètres tels que la raideur en X de la cale droite a une influence sur l'ensemble des fonctions objectif. Les paramètres retenus et considérés comme les plus pertinents sont présentés au paragraphe suivant. Il faut cependant noter que cette analyse n'est représentative que de la définition série.

5.2.2.6 Paramètres retenus

Le Tableau 5-10 récapitule les variables du problème d'optimisation pour une suspension GMP. A chaque variable, une valeur nominale et deux bornes (supérieures et inférieure) sont associées. Les valeurs nominales de chacune des variables retenues correspondent aux valeurs inscrites par le concepteur de l'architecture de la suspension GMP étudiée dans son cahier des charges, dans notre cas, il s'agit de la C3 TU3JP BE4. Les bornes associées correspondent quant à elle à l'espace de conception possible pour réaliser une telle architecture. Ainsi, par exemple, en phase d'avant projet, pour un rayon de courbure, il est possible de définir une enveloppe de débattement pour décrire la courbe effort-déplacement d'une cale dans une direction.

Paramètres	Désignation	Valeur nominale	Borne inférieure	Borne supérieure
Coordonnée x cale droite en repère véhicule en mètres :	$X_{\text{cale droite}}$	-0,1995	-0,2395	-0,0595
Coordonnée z cale droite en repère véhicule en mètres :	$Z_{\text{cale droite}}$	0,4374	0,25	0,65
Raideur autour de l'origine de la courbe effort-déplacement de la cale droite en x en N/m :	$K_{0x \text{ cale droite}}$	$7,33 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$20 \cdot 10^4$
Courbure de la courbe effort-déplacement de la cale droite dans la direction x (>0) :	$\alpha_{(x>0) \text{ cale droite}}$	8,5	2	20
Débattement maximum de la cale droite dans la direction x (>0) en mètres :	$D_{(x>0) \text{ cale droite}}$	$20 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$
Courbure de la courbe effort-déplacement de la cale droite dans la direction x (<0) :	$\alpha_{(x<0) \text{ cale droite}}$	7	3	15
Débattement maximum de la cale droite dans la direction x (<0) en mètres :	$D_{(x<0) \text{ cale droite}}$	$15 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-3}$	$20 \cdot 10^{-3}$
Coordonnée x cale gauche en repère véhicule en mètres :	$X_{\text{cale gauche}}$	-0,1037	-0,2	-0,05
Coordonnée z cale gauche en repère véhicule en mètres :	$Z_{\text{cale gauche}}$	0,318	0,18	0,45
Raideur autour de l'origine de la courbe effort-déplacement de la cale gauche en x en N/m :	$K_{0x \text{ cale gauche}}$	$13,7 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$30 \cdot 10^4$
Courbure de la courbe effort-déplacement de la cale gauche dans la direction x>0 :	$\alpha_{(x>0) \text{ cale gauche}}$	9,5	4	15
Débattement maximum de la cale gauche dans la direction x>0 en mètres :	$D_{(x>0) \text{ cale gauche}}$	$12 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$20 \cdot 10^{-3}$
Courbure de la courbe effort-déplacement de la cale gauche dans la direction x<0 :	$\alpha_{(x<0) \text{ cale gauche}}$	6	3	15
Débattement maximum de la cale gauche dans la direction x<0 en mètres :	$D_{(x<0) \text{ cale gauche}}$	$10 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$18 \cdot 10^{-3}$
Coordonnée x biellette inférieure en repère véhicule en mètres :	$X_{\text{biellette inf}}$	0,028	0,01	0,05
Coordonnée y biellette inférieure en repère véhicule en mètres :	$Y_{\text{biellette inf}}$	-0,065	-0,4	0,4
Coordonnée z biellette inférieure en repère véhicule en mètres :	$Z_{\text{biellette inf}}$	-0,036	-0,2	0,2

Raideur autour de l'origine de la courbe effort-déplacement de la biellette inférieure en N/m :	K_{0x} biellette inf	$13,3 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$30 \cdot 10^4$
Courbure de la courbe effort-déplacement de la biellette inférieure dans la direction $x < 0$:	$\alpha_{(x < 0)}$ biellette inf	14	5	17
Débattement maximum de la biellette inférieure dans la direction $x < 0$ en mètres :	$D_{(x < 0)}$ biellette inf	$11 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$15 \cdot 10^{-3}$

Tableau 5-10 : Variables d'optimisation retenues et bornes de l'intervalle de variation associé.

Dans le cas qui nous concerne, un niveau d'imprécision est associé à chaque paramètre (Tableau 5-11). Outre les paramètres d'optimisation, deux paramètres imprécis n'intervenant pas en tant que paramètres d'optimisation ont été retenus à savoir la masse GMP et la masse de la caisse.

Variables	Niveau d'imprécision
Raideur statique des supports	+/- 15% de la raideur nominale
Positions des centres élastiques des supports dans le repère véhicule	+/- 10 mm
Rayon de courbure	+/- 2
Débattement maximum des cales	+/- 3 mm
Masse GMP	+/- 10 %
Masse caisse	

Tableau 5-11 : Imprécisions associées aux variables.

Le problème d'optimisation obtenu compte finalement un total de 20 variables d'optimisation, tous considérées comme imprécises.

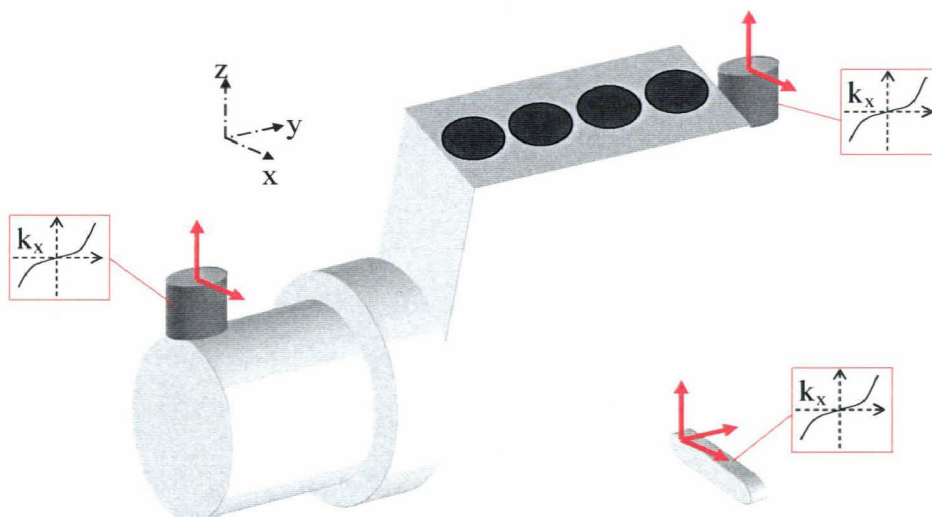


Figure 5-27 : Illustration de variables retenues pour l'optimisation d'une suspension pendulaire.

5.2.3 Analyse de la performance d'une suspension GMP

Le propos de ce paragraphe consiste en la présentation des éléments graphiques et statistiques qui nous permettront de juger de la performance mais aussi de la robustesse d'un design issu d'une optimisation. Dans le but d'illustrer ces éléments, la configuration du véhicule considéré dit « série » (cf paragraphe 4.2.1) sera décrite. Ainsi, la Figure 5-3 illustre cette configuration « série », ou plutôt sa représentation avec les variables des modèles utilisés pour décrire une suspension GMP (cf. chapitre 3). Le dessin de l'implantation montre les deux cales disposées à proximité et au-dessus de l'Axe Naturel de Roulis et la biellette de reprise de couple disposée coté boîte. Le mode de roulis y est également illustré. Pour cette configuration, il est couplé avec le mode de ballant, il n'est donc pas extrêmement pur. Il est situé à la fréquence de 10,8 Hz, c'est à dire entre l'excitation H0,5 et l'excitation H2 ralenti. Enfin, les courbes d'accélération de caisse en très basses fréquences sous excitation GMP en roulis permettent de juger du niveau de découplage des modes.

Cette configuration, considérée comme bonne en terme de prestation, n'est bien sur pas optimum vis-à-vis des critères numériques de performance décrits dans le chapitre 3. En effet, lors de la conception d'un véhicule, de nombreux compromis doivent être fait, tant en termes d'implantation des éléments de suspension moteur qu'en terme de faisabilité de ces éléments. Un fournisseur de pièces élastomères, par exemple, ne peut pas toujours être en mesure de satisfaire exactement les contraintes du cahier des charges

Aussi, pour faciliter l'analyse des designs issues d'une optimisation, chaque configuration sera illustrée par les quatre schémas ou courbes suivants (Figure 5-28):

- implantation géométrique des différents supports,
- courbes d'accélération en un point confort de la caisse pour une excitation en couple de roulis GMP de 10 daN.m sur la plage de fréquence 2-20 Hz,
- déformée du mode de roulis GMP,
- courbe effort-déplacement de la reprise de couple inférieure.

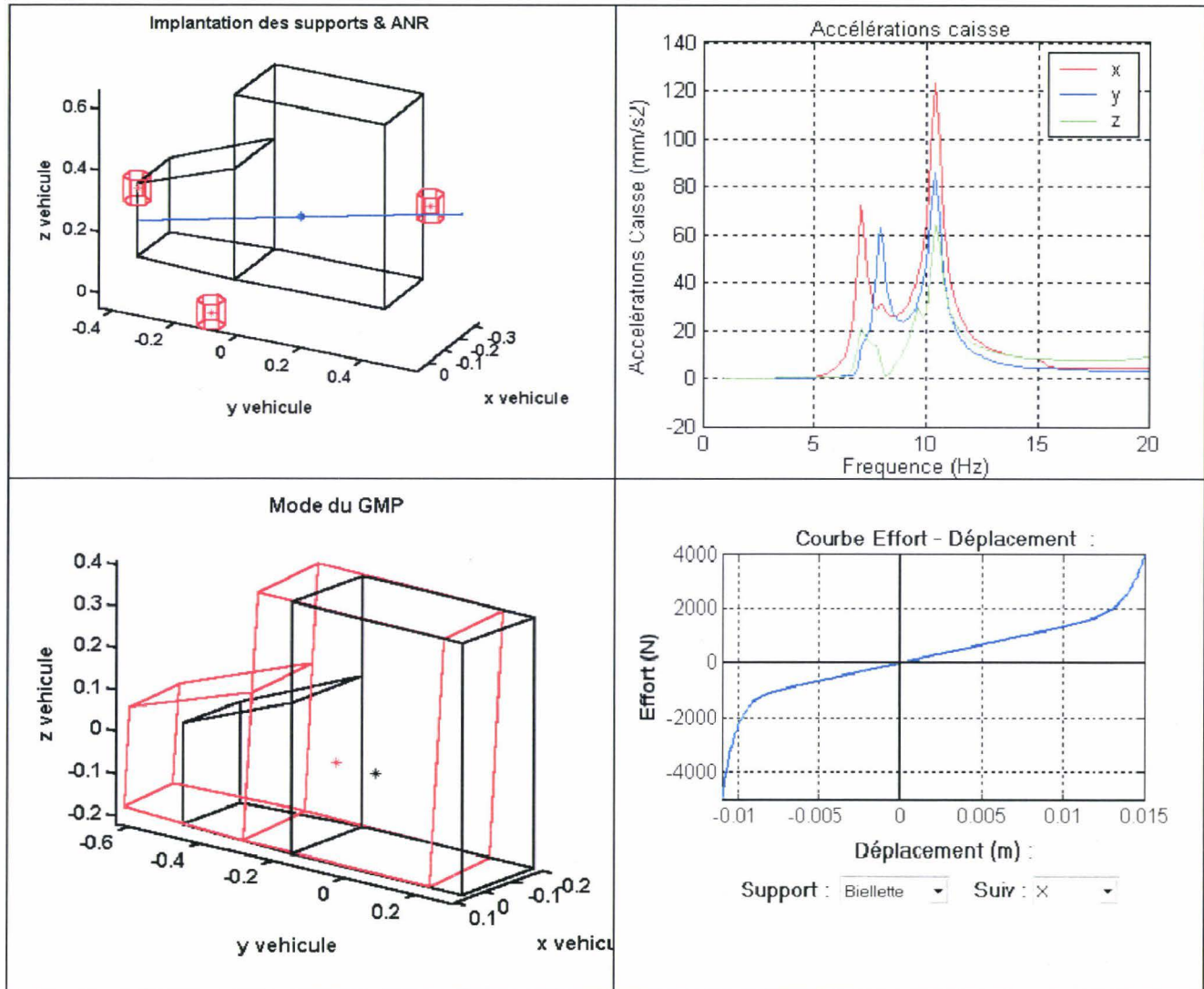


Figure 5-3 : Description de la configuration initiale.

5.2.4 Analyse de la robustesse

Outre les différentes analyses réalisées précédemment, il est nécessaire de se prononcer sur la robustesse des solutions telle qu'elle a été décrite précédemment. Pour cela, un outil d'analyse statistique des solutions basé sur la méthode de Monte-Carlo a été développé.

Une architecture robuste doit en effet permettre d'obtenir des prestations quasi identiques lorsque sont prises en compte les imperfections de conception. Il faut donc évaluer les conséquences de celles-ci sur les prestations véhicules (Très Basses fréquences (F_1), Ralenti (F_2) et Bourdonnement (F_3)) dans le but de les minimiser. L'outil a donc notamment pour objet d'évaluer et de quantifier la robustesse a posteriori d'une architecture de suspension GMP issue d'une optimisation robuste et de la comparer à l'architecture de référence. A partir de tirages de Monte Carlo appliqués aux paramètres de l'architecture de suspension GMP, considérés un échantillonnage des valeurs des fonctions objectif inhérente à la performance (fonction « Coût Nominal » N : cf. chapitre3) et les restrictions dans l'espace d'imprécision considéré vont être récupérées.

Ainsi, il sera alors possible d'accéder aux résultats suivants :

- les distributions des débattements statiques suivant chaque direction pour chaque support sous les différentes sollicitations (1^{ère}, 3^{ème}, marche arrière et sous poids),
- les distributions du positionnement des fonctions objectifs sur les diagrammes de Pareto avec leurs caractéristiques statistiques : moyenne, écart-type.

Cet outil permet ainsi de se prononcer sur le gain à la fois en termes de performance et de robustesse des solutions obtenues.

La Figure 5-4 montre la répartition des débattements du centre de gravité du GMP en première et permet ainsi de se prononcer sur le respect ou non des contraintes liées aux critères métiers. Les variables d'entrée de cet outil sont les variables d'optimisation ainsi que les variables imprécises retenues après l'analyse de sensibilité précédente (cf. paragraphe 5.2.2.6). Ces variables sont définies par une valeur centrée (valeur nominale) et un écart-type permettant d'exprimer les dispersions sur ces variables. Un tirage aléatoire d'un nombre d'échantillons défini (5000) dans l'espace d'imprécision est alors réalisé.

Dans cette figure, μ fait référence à la moyenne des débattements considérés. Par exemple pour la direction X (1^{er} tableau en haut à gauche), la moyenne des débattements est de 2,08 millimètres. L'écart-type associé, défini par σ , représente la dispersion des débattements. Ainsi, dans l'espace d'imprécision considéré, 99 % des valeurs prises par les débattements se trouveront dans l'intervalle défini par $[\mu - 3.\sigma, \mu + 3.\sigma]$. Il apparaît alors qu'en considérant les répartitions des débattements ci-dessus, la configuration série, dans l'espace d'imprécision considéré, respecte d'ores et déjà le cahier des charges. En effet, pour une telle architecture, les débattements en translation (colonne de gauche) doivent être inférieurs à 10 mm. Pour un couple de première, c'est essentiellement la direction X qui est sollicitée. Dans le cas présent, la valeur maximale prise par le débattement considéré est de 3,26 mm (2,08 + 3 x 0,39). De même, l'application d'un couple entraîne principalement une rotation autour de l'axe Y du GMP. Pour l'architecture série, la valeur maximale prise par cette rotation est de 3,54 + 3 x 0,08 = 3,79 degrés. Le cahier des charges indique que l'enveloppe de débattement doit être inférieure à 4 degrés, l'architecture vérifie donc cette contrainte.

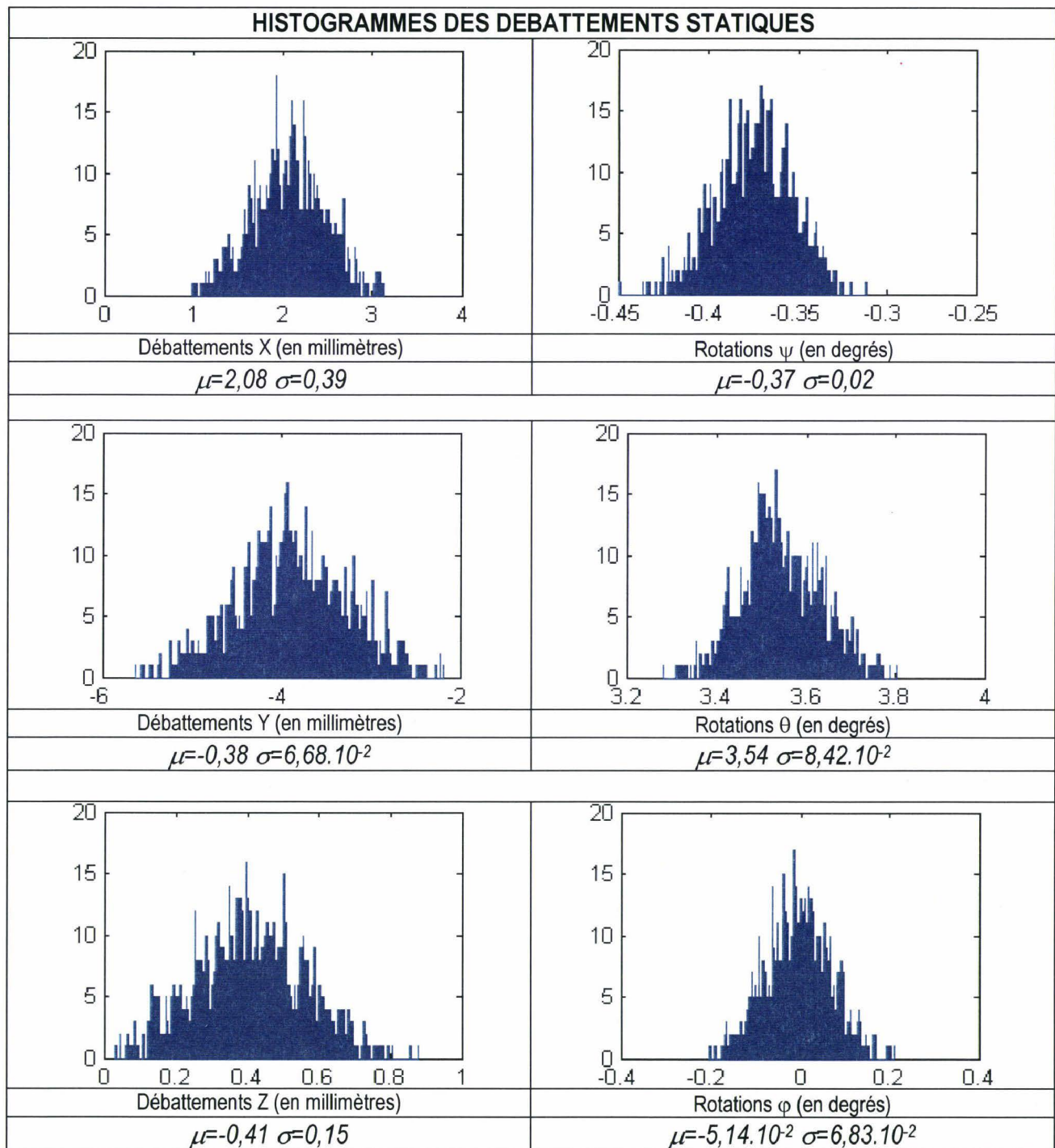
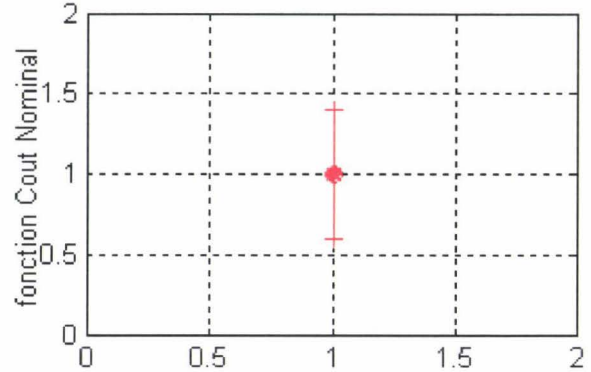
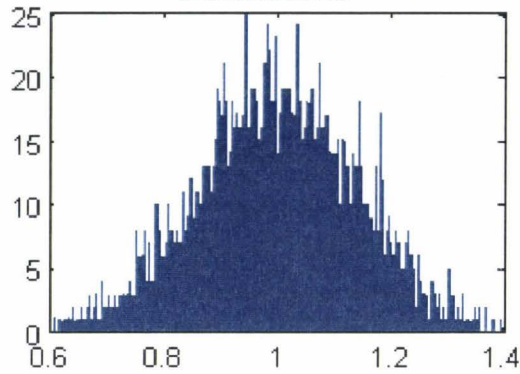


Figure 5-4 : Distributions des débattements statiques sous couple de première.

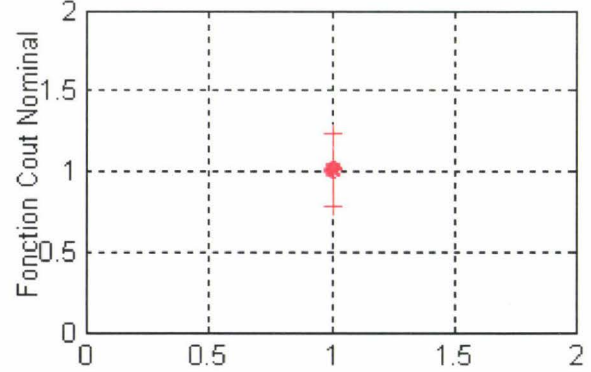
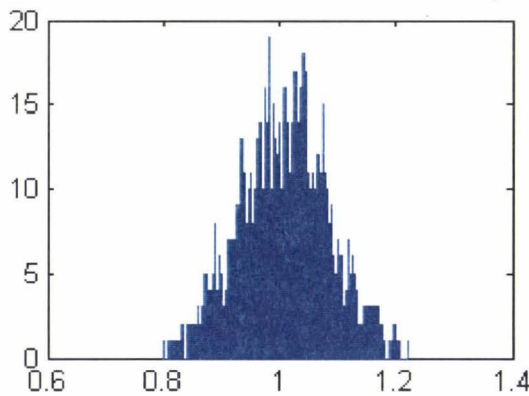
La Figure 5-5 montre les histogrammes des fonctions « Coût Nominal » N dans l'espace de conception considéré ainsi que la moyenne et l'écart type prise par celles-ci.

HISTOGRAMMES DES FONCTIONS « COUT NOMINAL N »

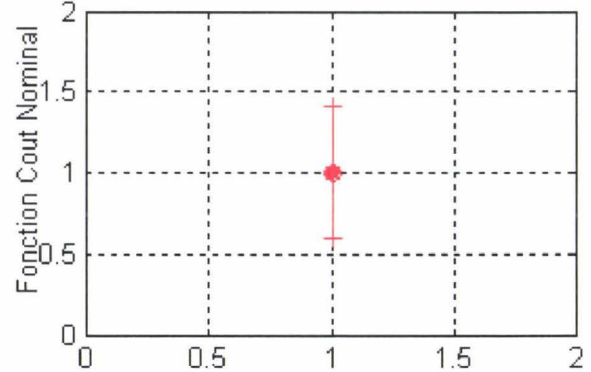
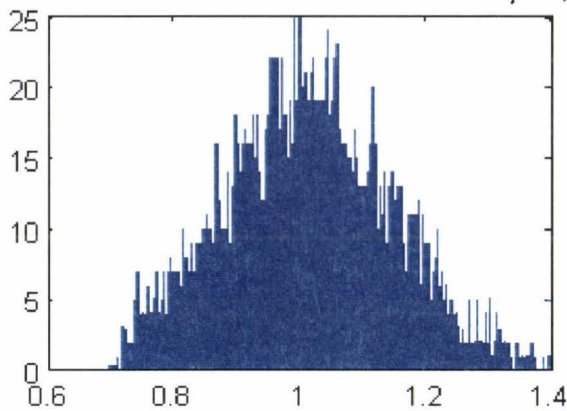
REPRESENTATION DE LA MOYENNE ET DE L'ECART TYPE



F1 TBF
 $\mu=1,001 \sigma=0,133$



F2 ralenti
 $\mu=1,014 \sigma=0,076$



F3 bourdonnement
 $\mu=1,003 \sigma=0,136$

Figure 5-5 : Répartitions des fonctions objectif et données statistiques.

Les figures dans la deuxième colonne permettent d'avoir une représentation simple de la moyenne des fonctions ainsi que des valeurs maximales et minimales prises par celles-ci. Cette représentation nous aidera plus loin dans le choix des solutions issues d'une optimisation multi-objectif.

5.3 Optimisations multi-objectif d'une suspension GMP

5.3.1 Détermination de la configuration de référence

Des stratégies d'optimisation multi-objectifs d'une suspension GMP existant d'ores et déjà dans la littérature [KRE01], le choix du design de référence se portera alors sur la configuration issue d'une optimisation de la performance seule ne faisant pas intervenir le concept de robustesse. L'intérêt du choix d'une telle référence est de montrer les apports et les orientations inhérentes à l'intégration des imprécisions dans le processus d'optimisation d'une suspension GMP. A contrario, ce choix reste délicat dans le sens où l'optimum peut être un extremum local difficile à faire évoluer. Par contre, chaque solution obtenue via la stratégie d'optimisation robuste pourra être comparée à la configuration de référence (optimisée au sens de la performance uniquement) mais aussi à la configuration « série ».

Les paragraphes ci-dessous se proposent de décrire la mise en place complète du processus d'optimisation via la détermination de la solution de référence.

5.3.2 Optimisations de chaque objectif

Dans son principe (voir chapitre 2), la méthode NBI nécessite le calcul des minima sous restrictions de chacune des fonctions objectif prise séparément. Cette partie présente les optimisations mono-objectif des fonctions « Coût Nominal » considérées notées N .

5.3.2.1 *Optimisation de l'objectif associé aux très basses fréquences*

Dimensionnement métier

Les modes de suspension du GMP, modes dans lesquels interviennent le GMP et la caisse se trouvent dans cette gamme de fréquence (2-20 Hz). Or cette gamme de fréquence est excitée, essentiellement en roulis, par le GMP dans deux cas de fonctionnement suivants :

- les démarrages et arrêts du moteur, pendant lesquels l'excitation en couple de roulis balayent toute la plage de fréquence,
- les instabilités de combustion au ralenti qui génèrent une excitation aléatoire en couple de roulis entre 5 et 7,5 Hz,

Généralement, les deux solutions mises en œuvre chez les constructeurs automobiles pour traiter ces deux excitations [POU95], [SOL97] et [BER83] sont :

- limiter les couplages entre degrés de liberté provenant de la matrice de raideur, et plus particulièrement avoir un mode de roulis pur,
- éviter d'avoir des modes, et en particulier le mode de roulis, dans la plage de fréquence 5-7,5 Hz.

Résultats

L'optimisation est réalisée en utilisant un algorithme de type SQP. A l'issue de cette optimisation de la fonction objectif relative à la première prestation (très basses fréquences), la valeur de la fonction « Coût Nominal » est de 0,029. Cette valeur montre donc une amélioration de la fonction considérée, la valeur référence adimensionnalisée était à 1).

La configuration correspondant à cette optimisation est illustrée par la Figure 5-6.

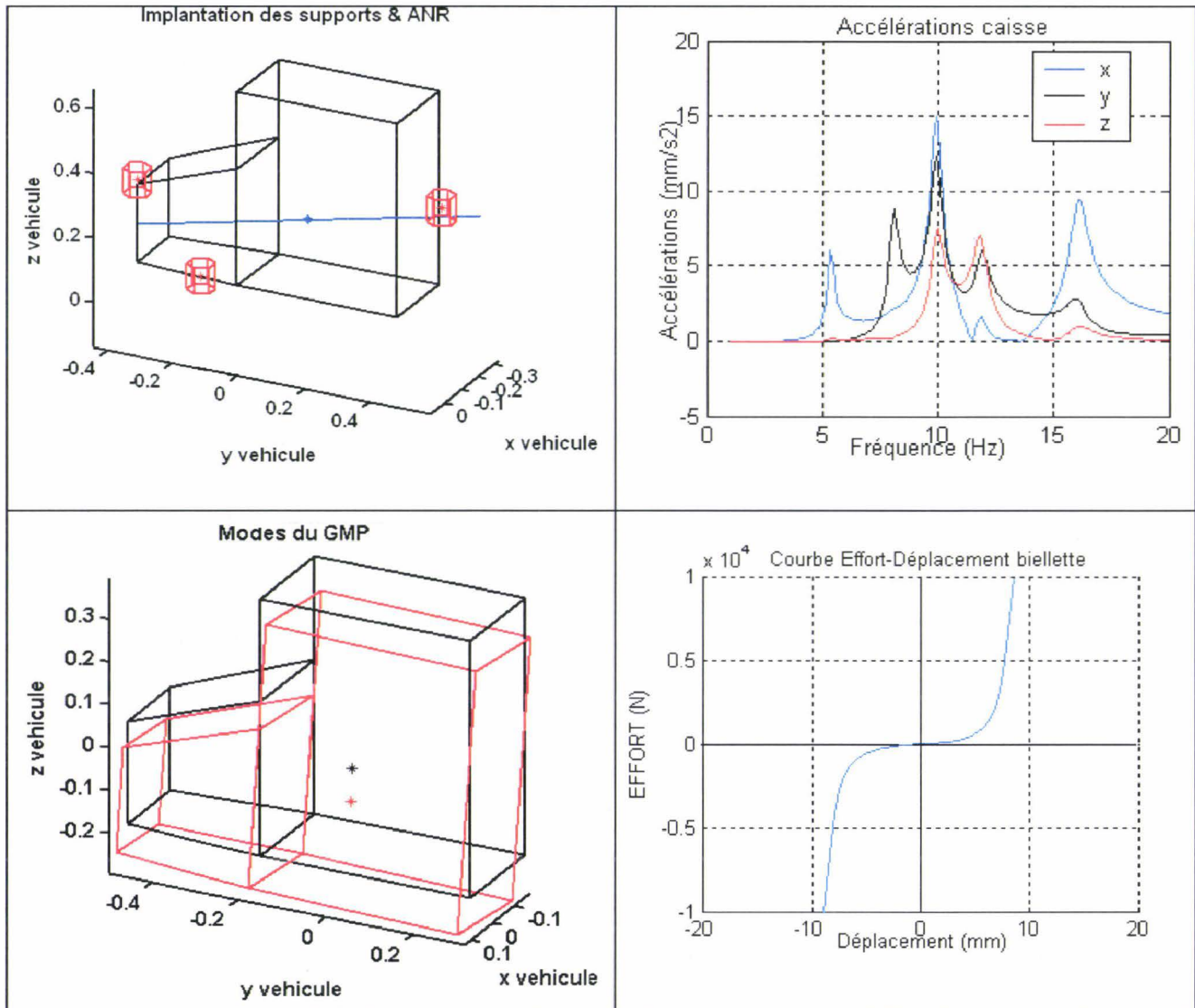


Figure 5-6 : Illustration de la configuration issue de l'optimisation de l'objectif associé aux TBF.

Cette configuration vérifie la plupart des critères métiers traditionnellement utilisés pour traiter l'excitation aux très basses fréquences :

- un seul mode de la suspension GMP (mode de tamis) se trouve dans la plage 5-7,5 Hz mais n'engendre pas des niveaux suffisants pour être rédhibitoire (ce mode est bien découplé du mode de roulis),
- les modes de suspension sont relativement bien découplés,

- le mode de roulis se trouve à 9,9 Hz.

Cependant, de forts niveaux d'effort sous couple statique sont générés dans la biellette de reprise de couple du fait du faible entraxe entre les reprises de couples. De tels niveaux d'efforts posent des problèmes quant à la réalisation physique des pièces de suspension GMP correspondantes.

Enfin, cette configuration donne pour les fonctions « Coût Nominal » des deux autres prestations considérées N_2 (ralenti) et N_3 (bourdonnement) les valeurs respectives de 4,572 et 8,743.

5.3.2.2 Optimisation de l'objectif associé au ralenti

Dimensionnement métier

Dans le cas d'un moteur 4 cylindres en ligne 4 temps, l'excitation moteur au ralenti est essentiellement un couple de roulis. Il existe également une composante de pilon et de galop moteur. Cette excitation se situe entre 25 et 30 Hz, selon le réglage du régime de ralenti.

Afin de traiter cette excitation, le concepteur essaie de placer le mode de roulis GMP le plus bas en fréquence possible pour bénéficier d'un bon filtrage. En règle générale, tous les modes sont placés à des fréquences inférieures à 17,7 Hz. (cf. Chapitre 3 § 3.2.5.4).

L'excitation se situant alors au-delà de la plus grande fréquence propre, le GMP se comporte comme un solide libre et son comportement est indépendant de la façon dont il est suspendu. Son mouvement est alors essentiellement une rotation autour de l'ANR, qui n'est définie qu'à partir de la matrice de raideur du GMP et de la direction du couple excitant.

Le mouvement du GMP entraîne une excitation de la caisse au niveau des supports élastiques. Pour limiter les efforts transmis vers la caisse au niveau des supports élastiques, les deux stratégies suivantes sont utilisées :

- le GMP imposant son déplacement, les supports sont placés en des points peu vibrants du GMP,
- la raideur des supports est prise faible, ce qui permet également d'avoir des modes à basses fréquences.

Résultats

L'optimisation de la fonction relative à la prestation ralenti donne pour la fonction « Coût Nominal » N_2 la valeur 0,282. Les valeurs des deux autres fonctions associées sont respectivement pour N_1 et N_3 les valeurs suivantes 0,893 et 6,782.

Le gain pour la fonction N_2 de la solution optimisée vis-à-vis de la solution initiale est de l'ordre de 70 %.

La configuration correspondant à cette optimisation est illustrée par la Figure 5-7.

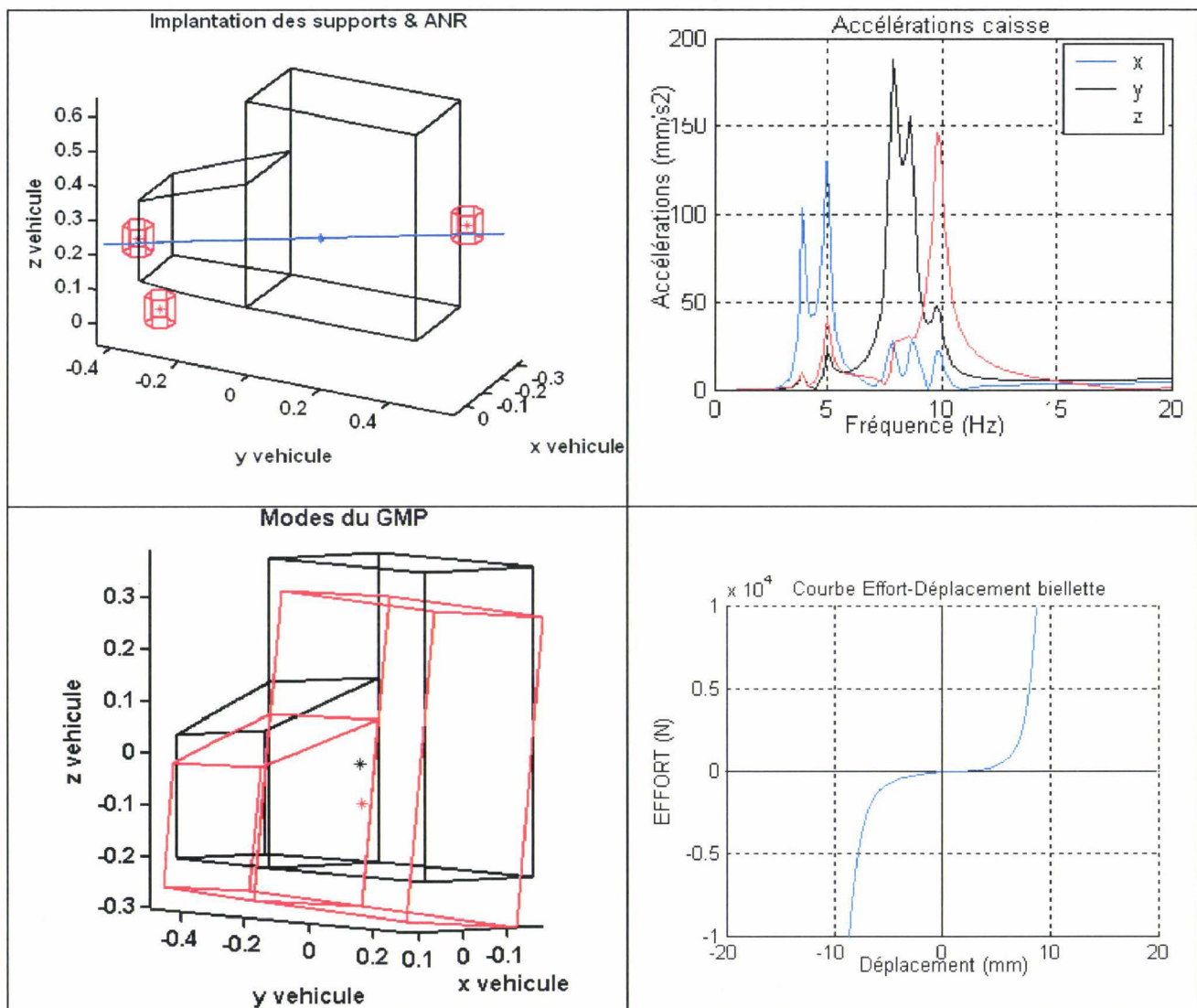


Figure 5-7 : Illustration de la configuration issue de l'optimisation de l'objectif associé au ralenti.

Cette configuration vérifie les critères métiers suivants :

- le mode de roulis est relativement pur et placé bas en fréquence (3,9 Hz),
- les cales porteuses sont placées légèrement au-dessus de l'ANR,
- les raideurs des courbes effort-déplacement des supports sont très faibles autour du zéro.

Le problème majeur d'une telle configuration réside dans le placement en fréquence des modes et principalement du mode de roulis pour lequel des couplages seraient possibles avec des phénomènes basses fréquences, tels que les modes de la chaîne de traction ou encore les modes de suspensions.

Il apparaît que la solution obtenue optimise également la première fonction objectif. Le fait que cette configuration soit mauvaise vis-à-vis du bourdonnement s'explique par le fait que les raideurs des supports augmentent très rapidement pour un faible déplacement impliquant un fonctionnement en troisième sur une raideur élevée.

5.3.2.3 Optimisation de l'objectif associé au bourdonnement

Dimensionnement métier

La plage de fréquences considérée ici est la plage allant de 30 à 200 Hz. Dans cette plage, les modes de suspension n'interviennent plus puisqu'ils sont normalement situés en dessous de 20 Hz. C'est le GMP qui impose son mouvement aux supports élastiques comme dans la gamme de fréquence du ralenti.

Dans le cas d'un moteur 4 cylindres en ligne 4 temps, ce mouvement est globalement un mouvement de rotation autour de l'ANR pour les fréquences proches de 30 Hz. Pour les fréquences plus élevées, ce mouvement devient essentiellement une translation dans la direction des fûts du moteur. La trajectoire adoptée par l'ensemble des points du GMP devient alors verticale avec une amplitude moins élevée pour la zone située coté boîte de vitesses.

Le calcul de la réponse dynamique du GMP en bourdonnement se fait autour de la position d'équilibre statique sous le couple statique correspondant au rapport engagé. Dans cette étude, les calculs de bourdonnement sont effectués en troisième car ce cas de fonctionnement est supposé être le plus pénalisant.

Aussi, afin d'améliorer le bourdonnement, puisque c'est le GMP qui impose son déplacement dans la gamme de fréquences considérée, un des moyens de baisser le niveau des efforts dynamiques transmis à la caisse est de diminuer la raideur des supports. Cependant, dans le cas des supports de reprise de couples, leur raideur doit rester suffisamment élevée pour limiter le débattement du GMP.

Résultats

A l'issue de l'optimisation, la valeur de la fonction « Coût Nominal » N_3 est de 0,411. Les deux fonctions N_1 et N_2 prennent respectivement pour valeurs 1,262 et 0,831.

La configuration correspondant à cette optimisation est illustrée par la Figure 5-8.

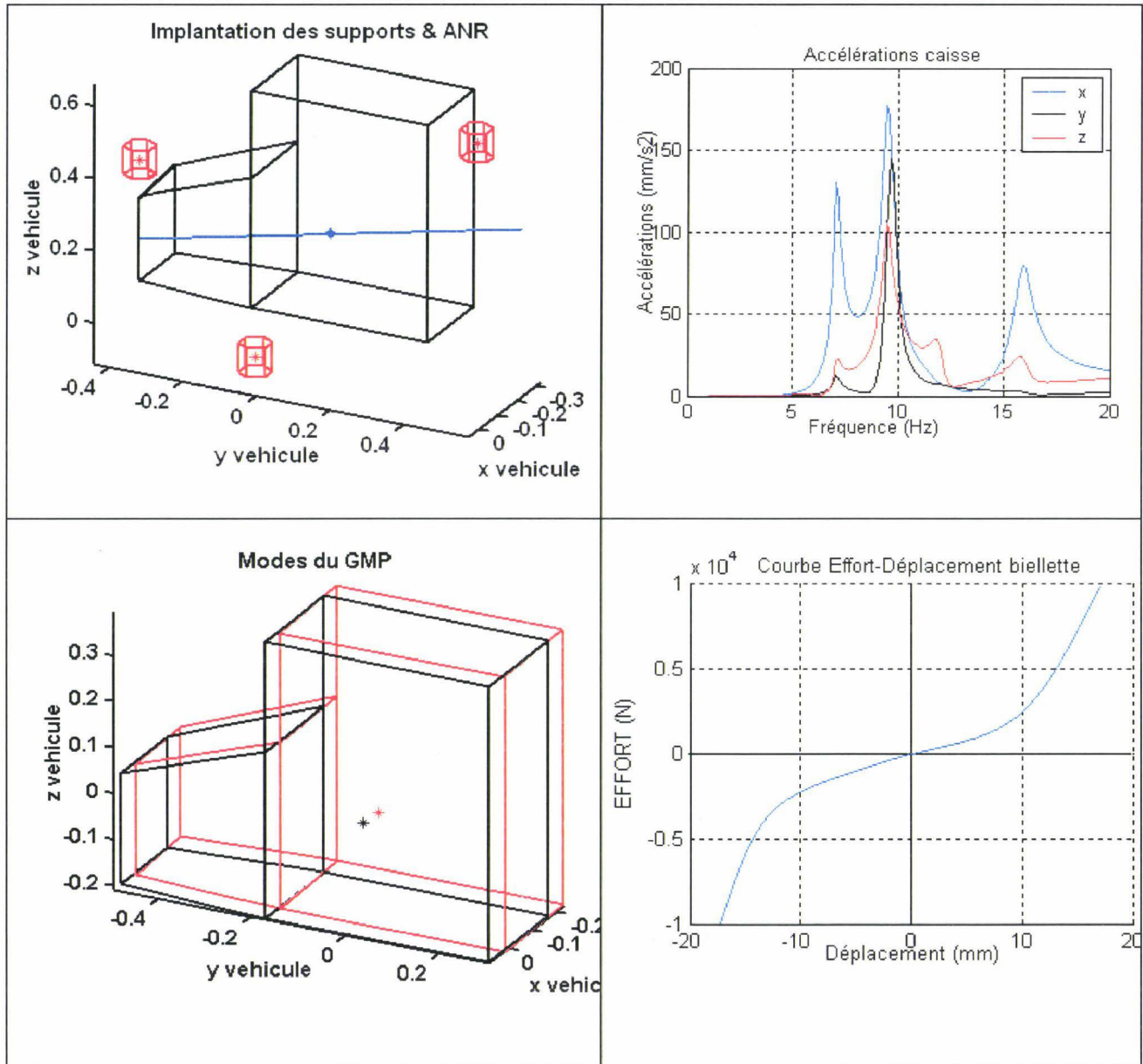


Figure 5-8 : Illustration de la configuration issue de l'optimisation de l'objectif associé au bourdonnement.

Cette configuration vérifie les principaux critères métiers associés au traitement du bourdonnement :

- l'entraxe entre la reprise de couple est le GMP est très grand et les efforts statiques sont bien répartis sur les différents supports élastiques,
- la reprise de couple se trouve en position plus centrale par rapport au CDG,
- le mode de roulis est à 9,7 Hz,
- les courbes effort-déplacement des supports sont linéaires sur une amplitude importante afin d'avoir des niveaux de raideur faibles en bourdonnement,
- les cales porteuses sont à la verticale de l'ANR pour que l'excitation dynamique en roulis ne sollicite pas les raideurs verticales de ces supports.

Le principal problème pour la réalisation pratique de cette configuration réside dans l'éloignement des différents supports élastiques vis-à-vis du GMP qui nécessiterait des pièces

métalliques de grandes tailles pour assurer la liaison entre le GMP et les supports élastiques. La tenue de ces pièces aux cas de charges exceptionnels tels que des démarrages violents serait problématique. Par ailleurs, l'élançement de ces pièces pourrait entraîner une rigidité faible et des modes de déformation placés éventuellement dans la gamme du bourdonnement.

5.3.3 Optimisation multiobjectif classique de la performance : détermination de la configuration de référence

5.3.3.1 Démarche

A l'issue des travaux menés sur chacun des objectifs séparément, trois configurations optimales en termes de performance ont été dimensionnées. A partir de ces trois configurations, il est envisageable de procéder à une première optimisation multiobjectif avec la méthode NBI et ce dans le but de déterminer la configuration de référence. Avant d'exposer les résultats obtenus, il faut rappeler que la méthode NBI repose sur la génération de plusieurs sous-problèmes dont la résolution conduit à des solutions potentielles du problème multiobjectif ([DAS98]). Pour cette résolution, l'algorithme utilisé est un algorithme déterministe de type SQP dont la solution dépend du point de départ choisi. Chaque sous-problème est résolu avec comme point de départ la solution du sous-problème le plus proche déjà traité.

5.3.3.2 Optimisation via la méthode NBI

La mise en place de la méthode NBI a permis, lors de cette étude, de récupérer 25 points compromis, c'est-à-dire autant d'architectures optimisées de suspension GMP PFA. Cependant, et comme il est visible sur le diagramme de Pareto ci-dessous (Figure 5-9), toutes les solutions n'améliorent pas de manière simultanée l'ensemble des fonctions considérées. Seules quelques unes d'entre elles possèdent cette propriété. Ce sont ces solutions auxquelles s'intéressera en priorité le concepteur.

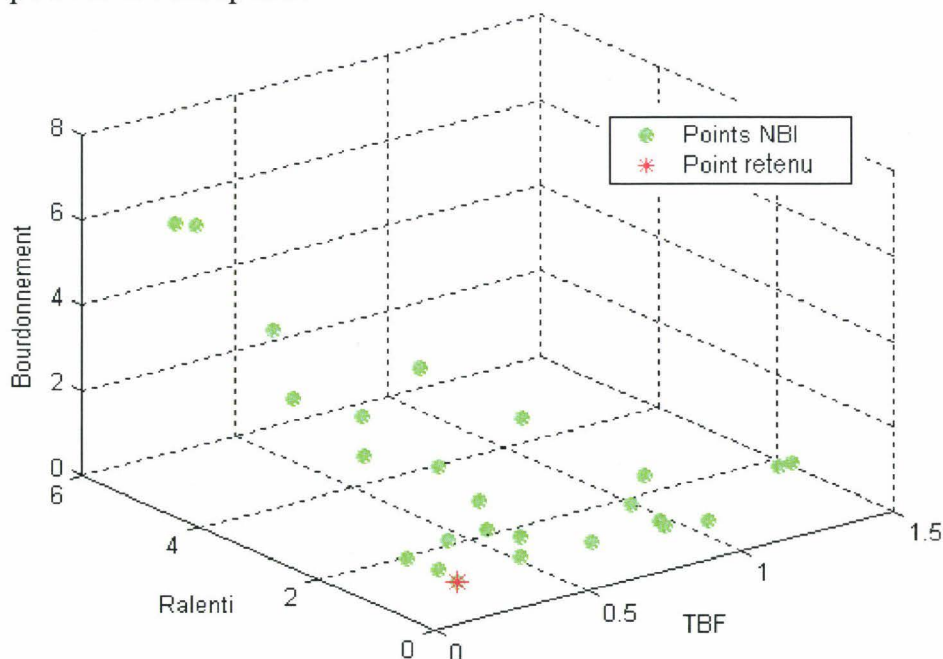


Figure 5-9 : Diagramme de Pareto obtenu par la méthode NBI pour trois objectifs et placement du point retenu pour la configuration de référence.

Le point décrit par l'astérisque sur le diagramme de Pareto (Figure 5-9) correspond à la configuration retenue comme configuration de référence. Pour rappel, cette configuration de référence correspond à une solution optimisée en terme de performance (c'est-à-dire que la fonction « Coût Nominal » seule a été optimisée pour chacune des prestations). Le choix d'une telle configuration a pour objectif de se prononcer sur les apports de la prise en compte des imprécisions dans le processus d'optimisation.

Le point considéré est tel que chacune des prestations considérées a été améliorée c'est-à-dire que chaque fonction objectif a une valeur inférieure à l'unité, respectivement 0,180, 0,562 et 0,473 pour N_1 , N_2 et N_3 .

La configuration présente les caractéristiques suivantes :

- la cale droite est placée sur l'ANR, et la cale gauche à la verticale de cet ANR, pour ne pas être sollicitée par l'excitation GMP en roulis,
- la biellette de reprise de couple est placée au centre du GMP avec un grand entraxe, pour limiter les niveaux d'effort sous couple statique,
- le mode de roulis est placé à 10,2 Hz, c'est à dire entre les plages balayées par les harmoniques 0,5 et 2 de l'excitation GMP,
- la courbe effort-déplacement de la reprise de couple présente une partie très linéaire afin d'avoir un faible niveau de raideur jusqu'en troisième.

L'architecture correspondant à ce point solution est illustrée par la Figure 5-10.

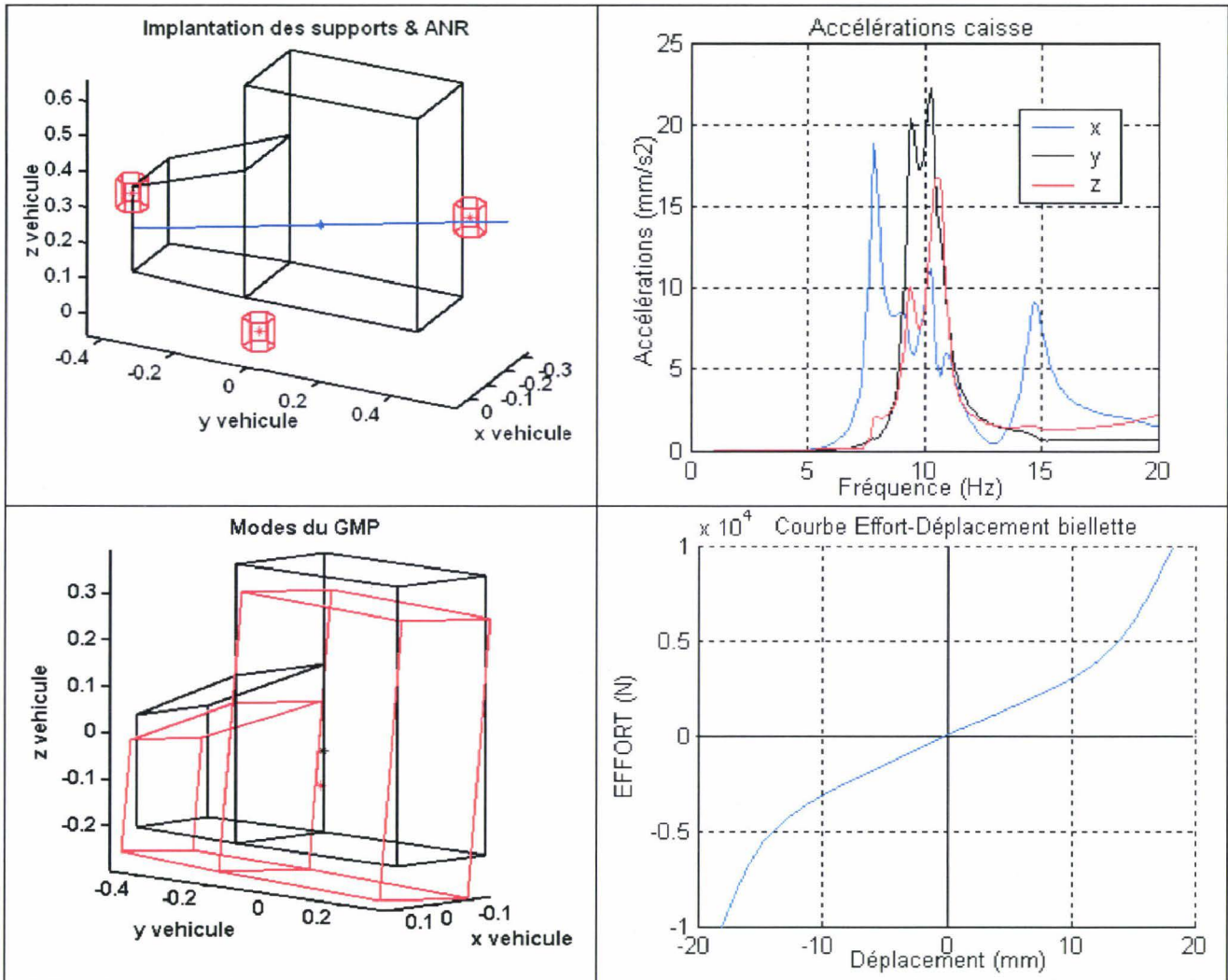


Figure 5-10 : Caractéristiques de la solution relative à la configuration de référence.

L'architecture obtenue est intéressante sur le plan de la performance et paraît être envisageable sur le plan de la réalisation physique. Cette configuration est d'ailleurs relativement proche de la configuration série.

Afin de se prononcer sur l'apport de la méthode en termes de robustesse, une simulation de Monte-Carlo a été lancée en considérant les imprécisions sur les paramètres afin d'analyser la distribution des fonctions relatives à la performance ainsi que la distribution des contraintes dans l'espace de conception considéré.

Les résultats issus de cette étude sont illustrés par les figures et tableau ci-dessous :

- la Figure 5-11 expose la répartition des contraintes dans les plages d'imprécision considérées pour les paramètres de conception ; il permet de se prononcer sur le respect ou non du cahier des charges en termes de débattements,
- la Figure 5-12 et le Tableau 5-12 offrent une illustration graphique de la distribution de ces fonctions associée à la moyenne et aux écart-types des valeurs des fonctions « Coût Nominal » permettant de se prononcer sur la performance et la robustesse de la solution obtenue.

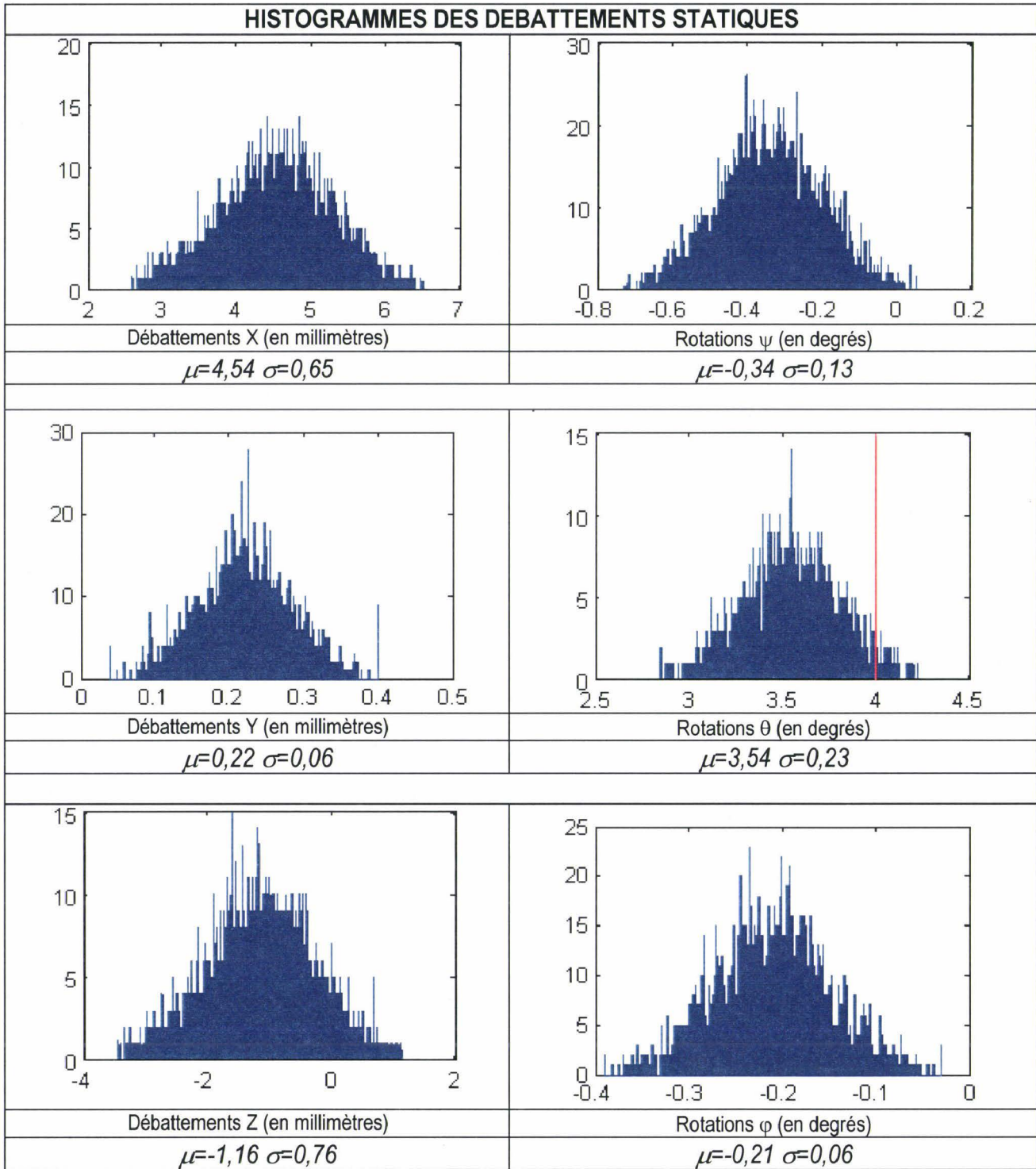


Figure 5-11 : Distribution des débattements statiques sous couple pour la configuration de référence.

La ligne verticale rouge dans la distribution des rotations θ autour de l'axe Y représente la limite définie par le cahier des charges fonctionnel d'une suspension GMP. Il apparaît ici que, pour la configuration de référence, il existe des designs ne respectant pas ce cahier des charges (4,3 %).

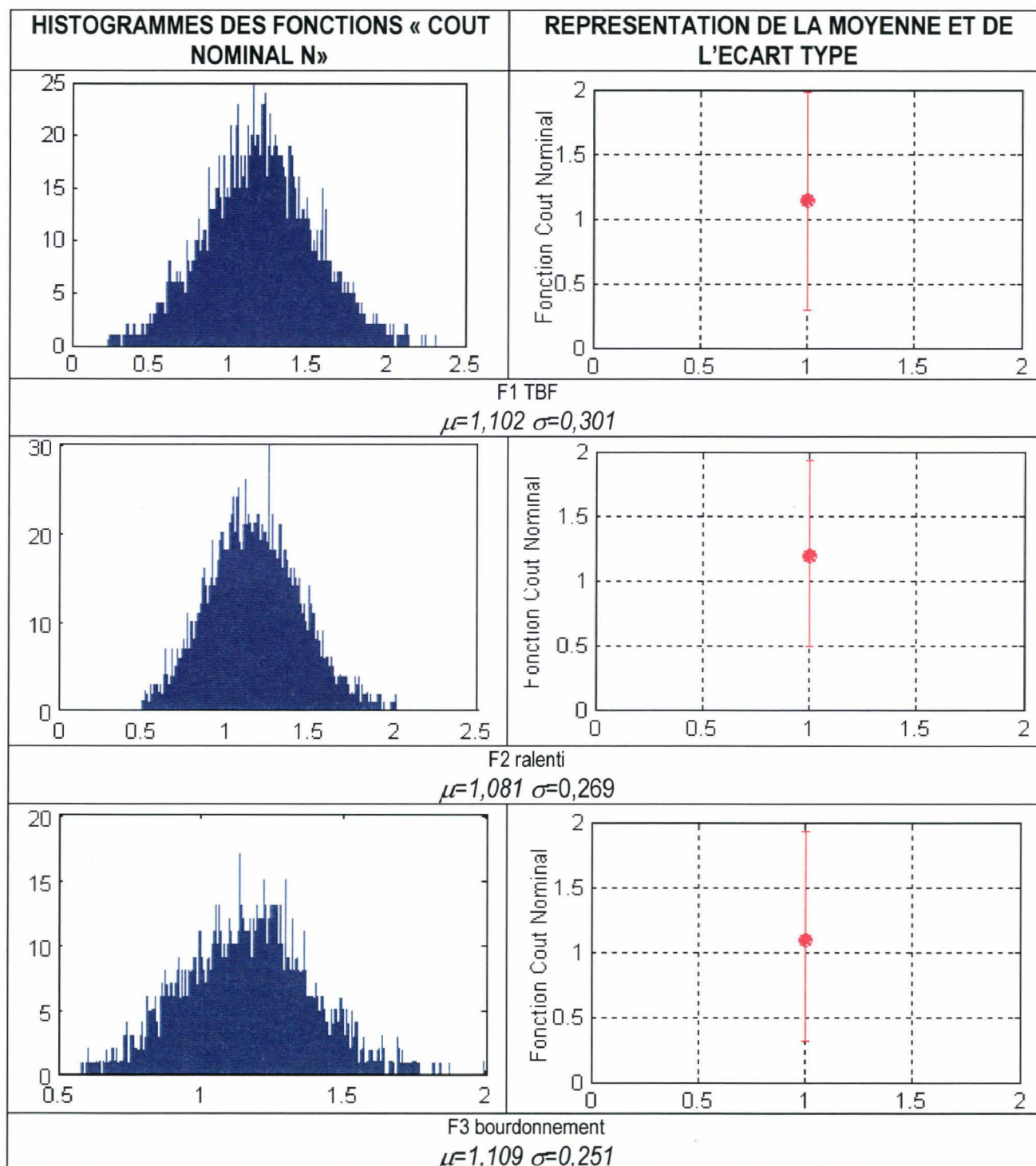


Figure 5-12 : Analyse de la robustesse de la solution relative à la configuration de référence.

Il est important de considérer le fait que les valeurs des fonctions sont adimensionnalisées, expliquant ainsi le fait que les moyennes sont proches de 1, 1 étant la valeur de la configuration optimisée nominale. Le tableau 5-12 est une synthèse des données statistiques des répartitions des fonctions « Coût Nominal » associées aux trois prestations considérées. Cela nous permettra, par la suite, de le confronter aux autres configurations issues des optimisations. Toutes les données issues des différents calculs seront adimensionnalisées, et ce, par rapport à cette configuration référence.

Fonctions « coût nominal »	Moyenne	Ecart-type
	Configuration Référence	
N ₁ (TBF)	1,102	0,301
N ₂ (Ralenti)	1,081	0,269
N ₃ (Bourdonnement)	1,109	0,251

Tableau 5-12 : Analyse statistique de la configuration de référence.

Le paragraphe ci-dessous présente la mise en place d'une optimisation multi-objectif robuste. La fonction objectif ainsi optimisée ne sera plus la fonction « Coût Nominal » seule mais la fonction « Compromis » dans son intégralité c'est-à-dire en ajoutant à N la fonction « Instabilité » I .

5.3.4 Optimisation multi-objectif robuste

A l'issue des travaux menés précédemment, la démarche d'optimisation robuste d'une suspension GMP décrite dans le chapitre 3 peut alors être mise en place. Pour rappel, les fonctions objectifs robustes sont écrites comme suit :

$$C(q) = N(q) + I(q),$$

où C est la fonction « Compromis », N la fonction « Coût Nominal », I est la fonction « Instabilité » et q le vecteur des paramètres. La fonction C sera adimensionnée par la configuration de référence calculée dans le paragraphe précédent.

Comme précédemment, il est nécessaire au préalable de réaliser trois optimisations mono-objectif de chacune des fonctions « Compromis » relatives aux trois prestations considérées pour pouvoir réaliser une optimisation via la méthode NBI.

A l'issue de ces trois optimisations sont obtenus les jeux de valeurs suivants répertoriés dans le tableau ci-dessous :

Optimisation mono-objectif de :	C ₁	C ₂	C ₃
Evaluation du Compromis robuste TBF C ₁ :	0,507	3,784	8,506
Evaluation du Compromis robuste ralenti C ₂ :	1,426	0,631	1,356
Evaluation du Compromis robuste bourdonnement C ₃ :	2,432	1,156	0,672

Tableau 5-13 : Valeur des fonctions « Compromis » robustes associés aux optimisations mono-objectif.

On peut d'ores et déjà noter que des fonctions C_r prennent des valeurs inférieures à l'unité, c'est-à-dire qu'elles améliorent la configuration de référence en termes de robustesse. La fonction de référence étant déjà optimisée en terme de performance, cela signifie que c'est l'optimisation supplémentaire de la fonction Instabilité qui a permis d'aboutir à cette amélioration.

5.3.4.1 Optimisation robuste via la méthode NBI

La mise en place de la méthode NBI a permis, lors de cette étude, de récupérer 25 points compromis, c'est-à-dire autant d'architectures optimisées robustes de suspension GMP. Ces 25 configurations sont décrites sur le diagramme de Pareto (Figure 5-13) ci-dessous.

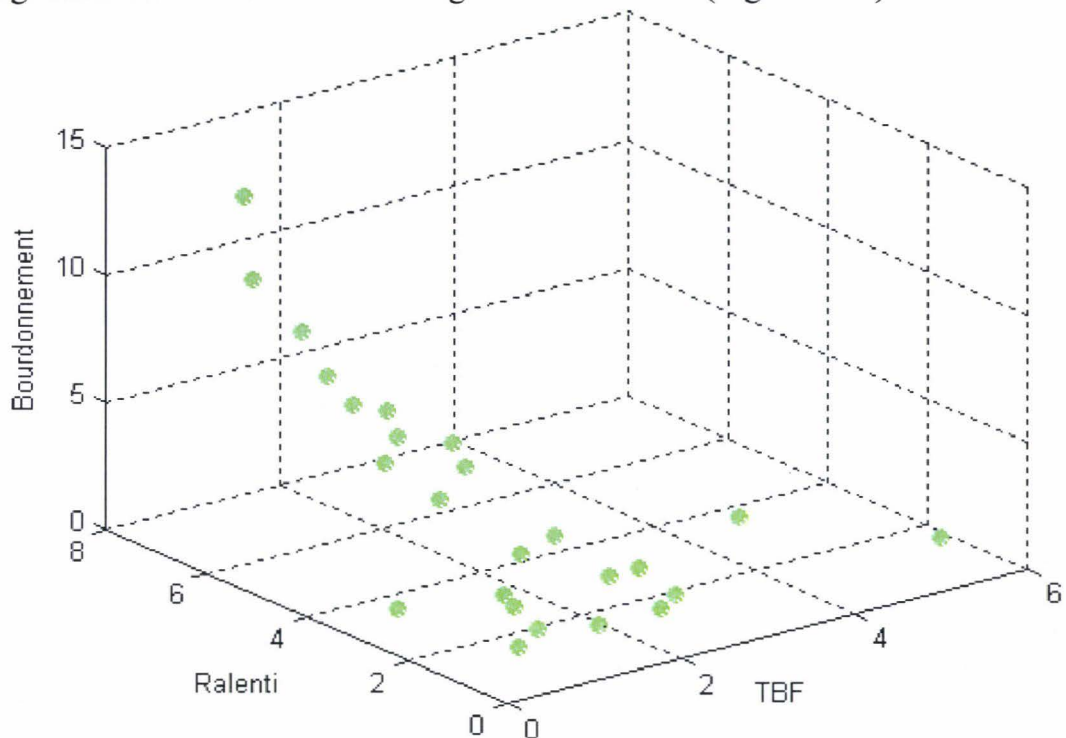


Figure 5-13 : Diagramme de Pareto issue de l'optimisation robuste.

Afin d'aider le concepteur dans le choix d'une solution, chaque architecture a été caractérisée sur la Figure 5-14 par les valeurs des fonctions « Coût Nominal » et « Instabilité » associées (ramenées à l'écart-type) (bleu=TBF, rouge=ralenti, noir, bourdonnement).

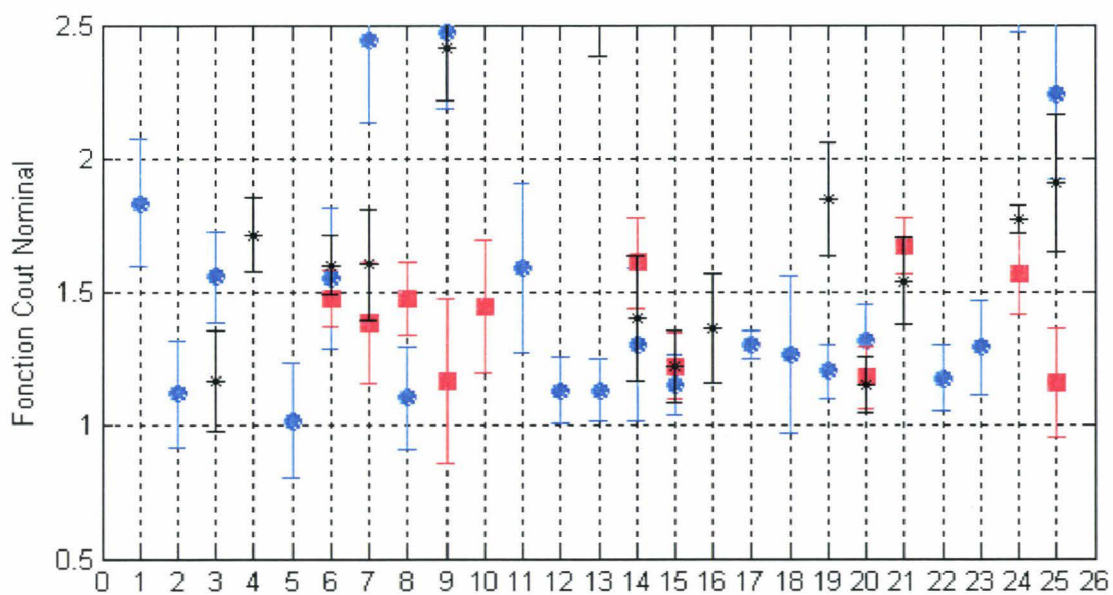


Figure 5-14 : Moyennes et écarts-types des fonctions « Coût Nominal » issue de l'optimisation robuste.

Les ronds bleus représentent les moyennes et écart-types des fonctions associées à la prestation TBF, les astérisques noirs au ralenti et les carrés rouges au bourdonnement. La Figure 5-14 permet au concepteur d'avoir une image de la performance et de la robustesse des solutions issues de l'optimisation précédemment réalisée. Afin d'effectuer son choix, il peut considérer les valeurs moyennes prises par les trois fonctions (placement des points) ainsi que les écart-types associés. Le 15^{ème} point, dont les fonctions « Compromis » associées C_1 , C_2 et C_3 prennent respectivement les valeurs 0,602, 0,703 et 0,911, minimise au mieux simultanément les moyennes et les écarts-type. Cette architecture correspond au point marqué par l'astérisque rouge sur le diagramme de Pareto ci-dessous.

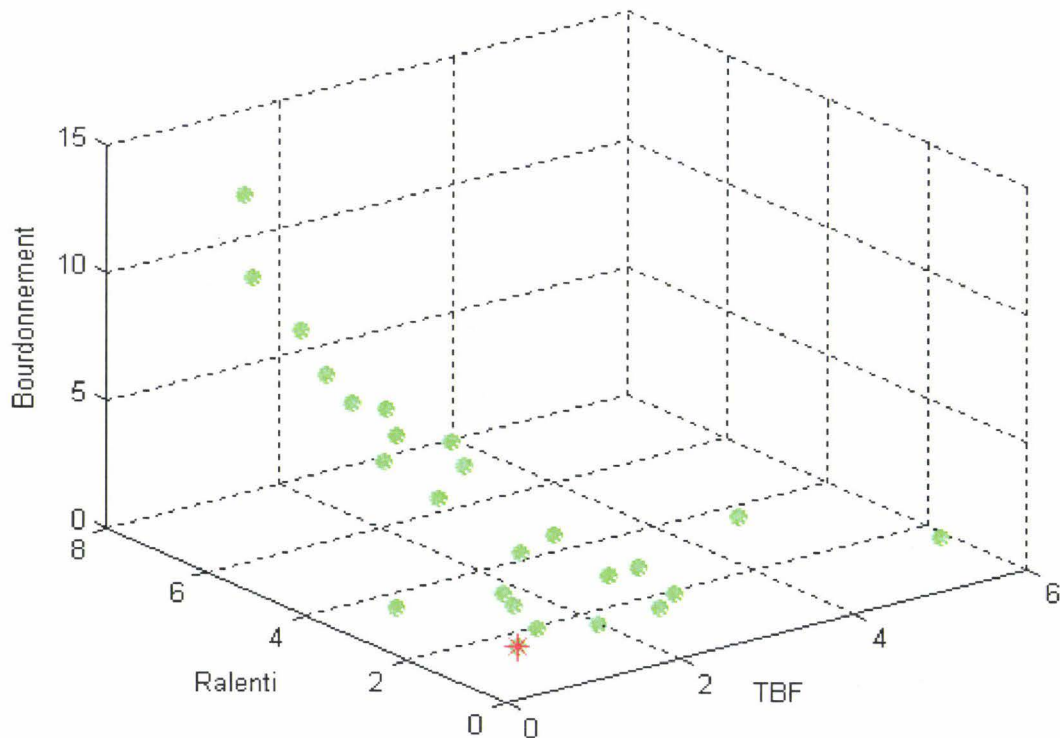


Figure 5-15 : Placement de la configuration robuste sur le diagramme de Pareto.

La configuration présente les caractéristiques fonctionnelles suivantes :

- la cale droite est placée sur l'ANR, et la cale gauche à la verticale de celui-ci, pour ne pas être sollicitée par l'excitation GMP en roulis,
- la bielle de reprise de couple est placée au centre du GMP avec un grand entraxe, pour limiter les niveaux d'effort sous couple statique,
- le mode de roulis est placé à 11,5 Hz, c'est à dire entre les plages balayées par les harmoniques 0,5 et 2 de l'excitation GMP,
- un niveau d'accélérations raisonnable.

L'architecture correspondant à ce point solution est illustrée par la Figure 5-16.

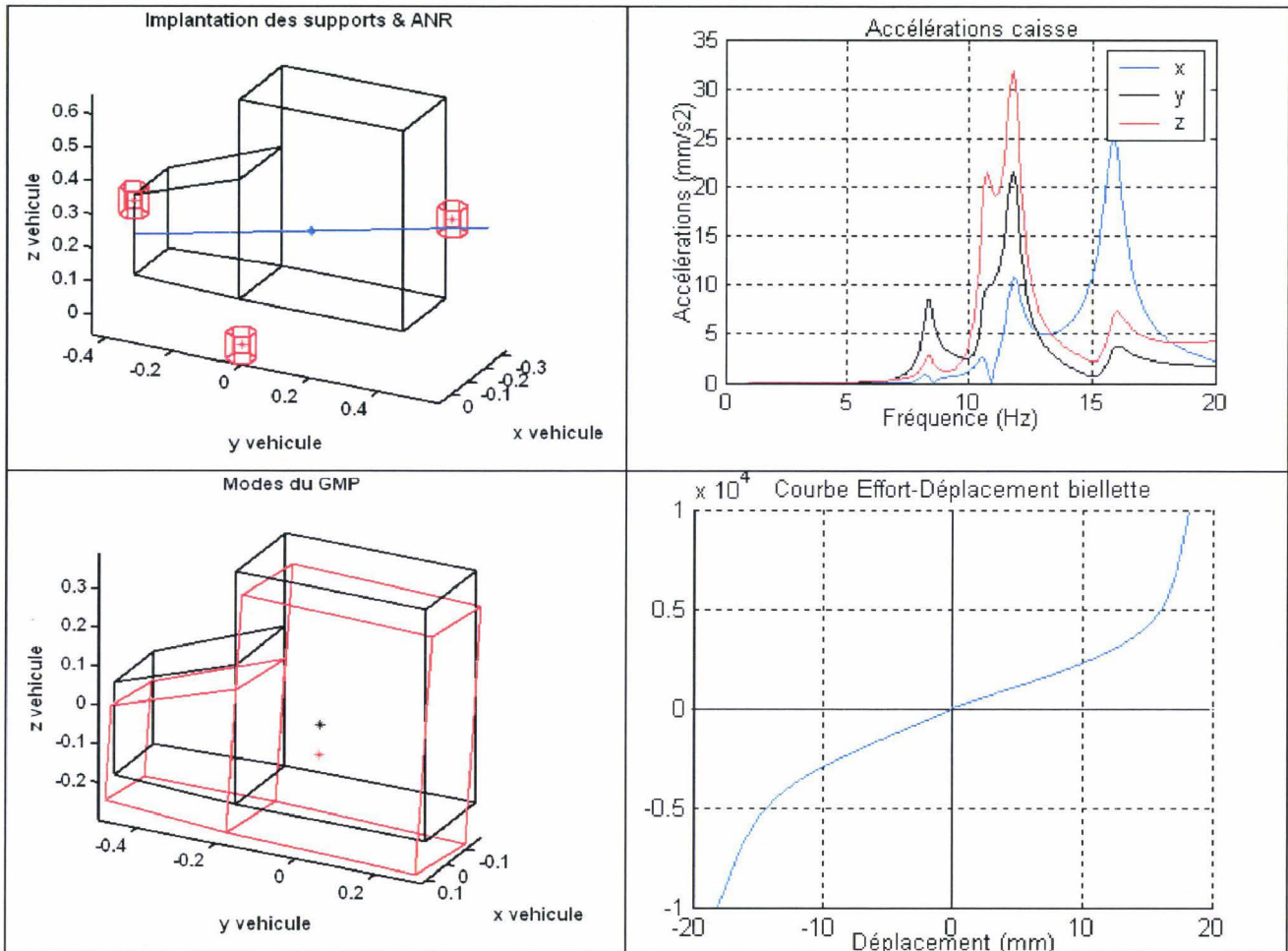


Figure 5-16 : Caractéristiques de la solution relative à la configuration robuste.

L'architecture obtenue est intéressante sur le plan de la performance et est physiquement réalisable. Cette configuration est d'ailleurs relativement proche de la configuration référence. Elle ne consiste finalement qu'en un réglage du jeu des paramètres afin de satisfaire au critère de robustesse.

Comme précédemment, dans le but de se prononcer sur l'apport de la méthode en terme de robustesse, une simulation de Monte-Carlo a été lancée en considérant les imprécisions sur les paramètres afin d'analyser *a posteriori* la distribution des fonctions relatives à la performance et aux contraintes dans le champ de conception imprécis considéré. La Figure 5-17 expose la répartition des contraintes et permet de se prononcer sur le respect ou non du cahier des charges en termes de débattements. La Figure 5-18 et le Tableau 5-14 offrent une illustration graphique de la distribution de ces fonctions dans l'espace d'imprécision considéré associé à la moyenne et aux écart-types des valeurs des fonctions « Coût Nominal ».

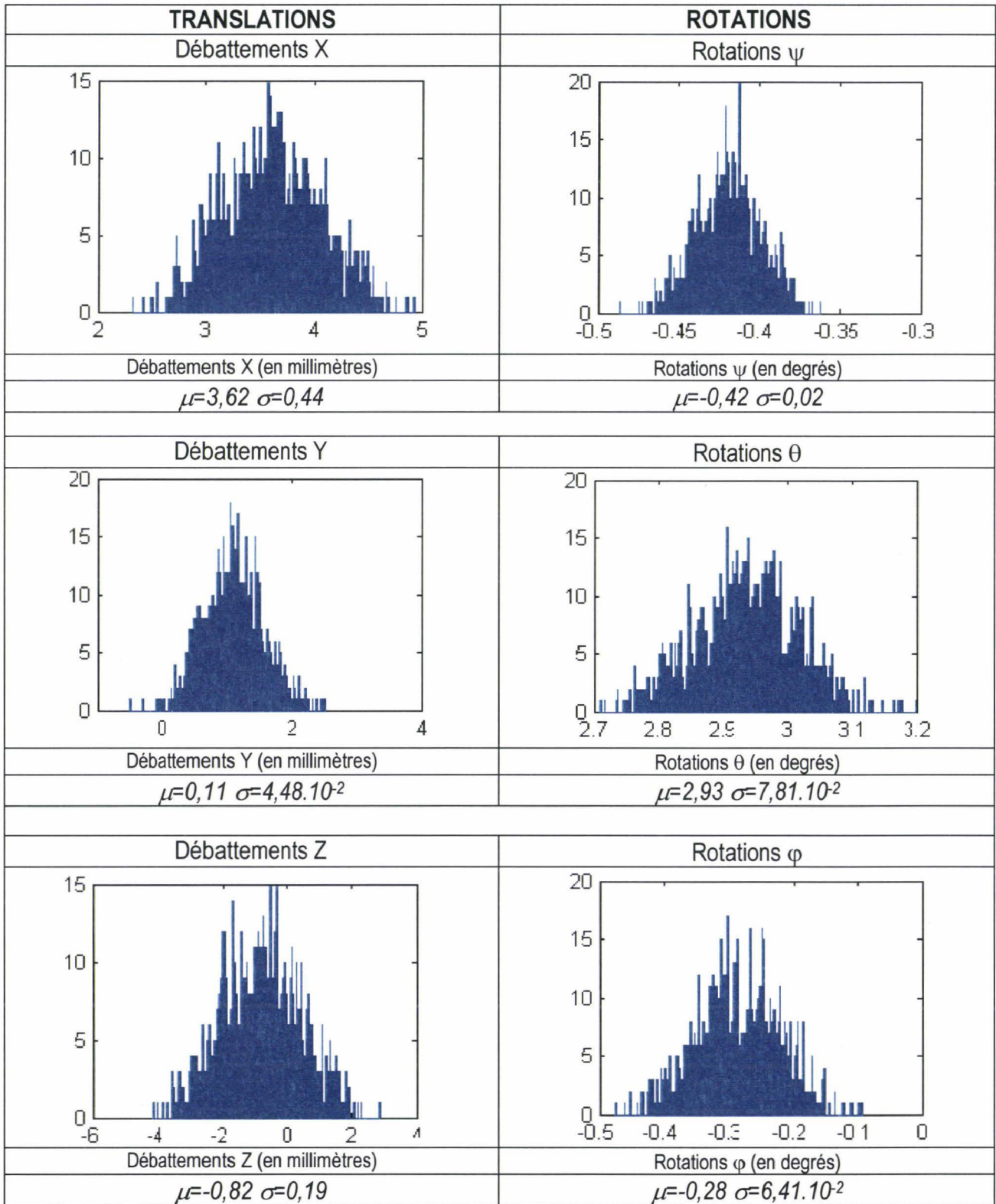
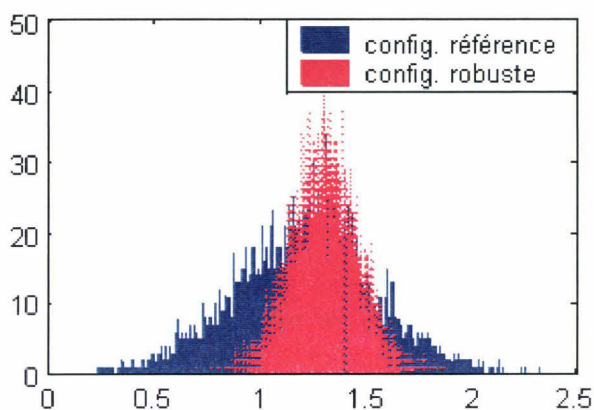
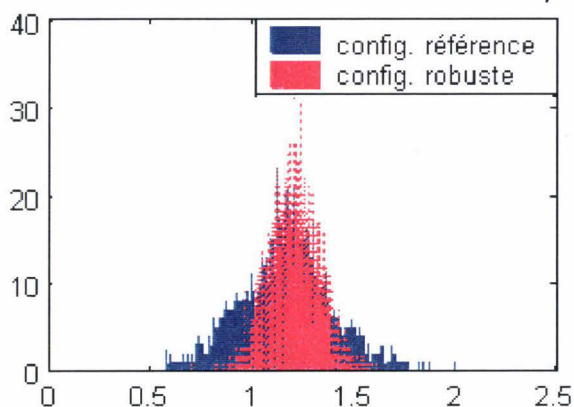


Figure 5-17 : Distribution des débattements statiques sous couple pour la configuration robuste.

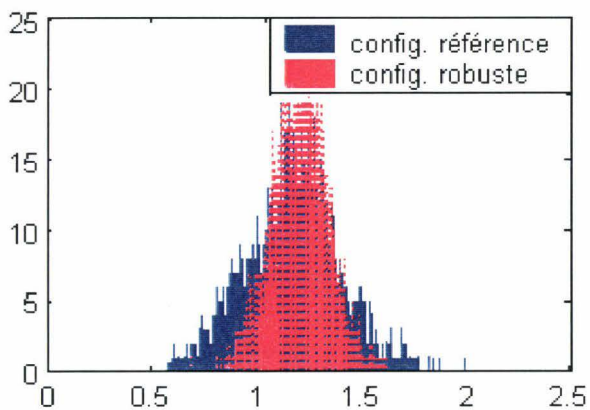
HISTOGRAMMES DES FONCTIONS « COUT NOMINAL N »



TBF: $\mu=1,211 \sigma=0,174$



Ralenti: $\mu=1,195 \sigma=0,186$



Bourdonnement: $\mu=1,303 \sigma=0,162$

REPRESENTATION DE LA MOYENNE ET DE L'ECART TYPE

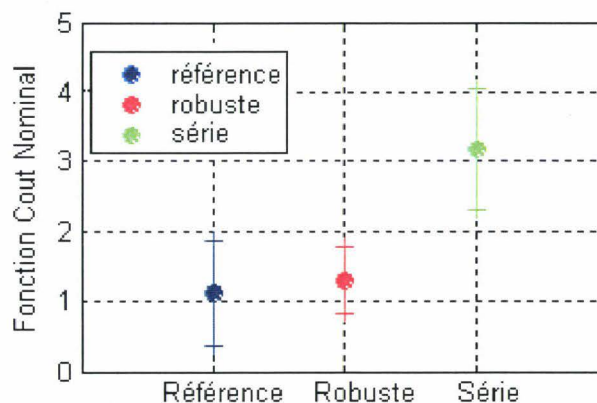
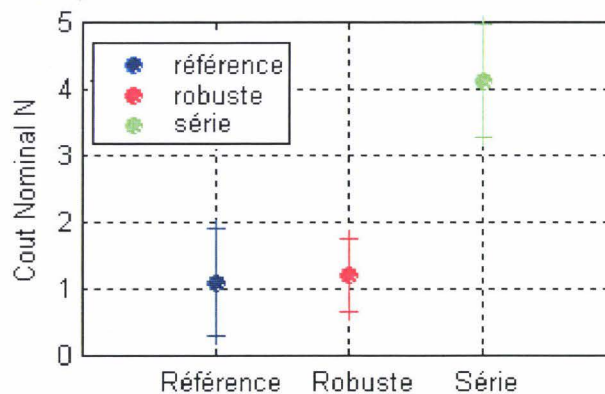
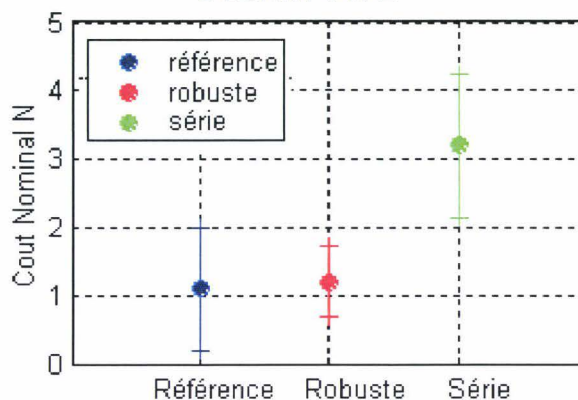


Figure 5-18 : Analyse de la robustesse de la solution relative à la configuration robuste.

Fonctions « Coût Nominal »	Moyenne		Ecart-type	
	Optimisation performance	Optimisation Robuste	Optimisation performance	Optimisation. Robuste
N ₁ (TBF)	1,102	1,211	0,301	0,174
N ₂ (Ralenti)	1,081	1,195	0,269	0,186
N ₃ (Bour)	1,109	1,303	0,251	0,162

Tableau 5-14 : Analyse statistique de la configuration robuste.

La moyenne des trois fonctions «Coût Nominal » issues des simulations de Monte-Carlo (Tableau 5-14) montre que la solution obtenue est moins performante. Ceci vient du

fait que notre fonction de référence est issue d'une optimisation de la performance seule. Par contre les écarts-types montrent une amélioration significative de la robustesse.

Comme il a été précédemment décrit, l'architecture de suspension GMP est relativement proche de la configuration référence, principalement en terme d'implantation des éléments porteurs. La modification essentielle consiste en un léger déplacement de la biellette de reprise de couple dont la position reste toutefois centrée. Ce centrage a pour résultante une limitation des efforts sous couple statique. Ainsi, alors que la configuration de référence ne vérifiait pas le cahier des charges en termes de rotation θ autour de l'axe Y, l'architecture robuste respecte cette contrainte.

L'architecture ainsi obtenue finalement ne consiste qu'en un réglage robuste de la configuration référence. Les valeurs des différents paramètres ne sont alors que modifiées dans le voisinage de la configuration initiale afin de satisfaire aux critères de robustesse.

5.3.4.2 Prédicibilité de la moyenne et de l'écart-type par calcul de la robustesse

Si on considère maintenant la fonction « Compromis » comme la somme de la fonction « Coût Nominal » (représentative de la performance) et « Instabilité » (représentative de la dispersion), il apparaît intéressant de les confronter avec les moyennes et écarts-types issus des simulations de Monte-Carlo, calculés a posteriori.

Fonctions « Coût Nominal »	Moyennes calculé par		Ecart-type calculé par	
	Simulations de Monte-Carlo	Optimisation Robuste	Simulations de Monte-Carlo	Optimisation. Robuste
N ₁ (TBF)	1,211	1,189	0,174	0,210
N ₂ (Ralenti)	1,195	1,172	0,186	0,243
N ₃ (Bourdonnement)	1,303	1,287	0,162	0,171

Tableau 5-15 : Confrontation des modes de calculs de la moyenne et de l'écart-type.

Les valeurs ainsi obtenues montrent une bonne tendance dans la prédictibilité de la moyenne et de l'écart-type qui semble correcte. Les écarts entre les deux modes de calculs peuvent s'expliquer à la fois par le nombre d'échantillonnages choisi pour les simulations de Monte-Carlo mais aussi par le mode de calcul de la fonction « Instabilité », qui n'est représentative que si la fonction « Coût Nominal » associée reste monotone.

5.3.4.3 Modification des fonctions objectifs

Comme il a été montré dans le chapitre 4, il est possible d'orienter les solutions issues des optimisations robustes via l'utilisation de coefficients de pondération. Ainsi, le concepteur, dans le processus d'optimisation peut chercher à obtenir soit une solution orientée vers la robustesse, soit vers une solution orientée vers la performance.

Pour cela, une modification de la fonction C , compromis entre la performance et la dispersion, peut être envisagée afin d'aller en ce sens. Ainsi la fonction modifiée peut être écrite comme suit :

$$C_{\lambda_1, \lambda_2}(q) = \lambda_1 N(q) + \lambda_2 I(q)$$

Le paragraphe ci-dessous se propose de décrire deux configurations, une orientée vers la robustesse, l'autre vers la performance.

Configuration favorisant la robustesse : ($\lambda_1=0,2$ et $\lambda_2=0,8$)

Comme précédemment, la méthode NBI nécessite le calcul des minima sous restrictions de chacune des fonctions objectifs prise séparément. Les fonctions considérées dans le cas de notre étude sont les fonctions « Compromis » modifiées. Les minima calculés pour chacune des trois fonctions sont répertoriés dans le *Tableau 5-16*.

Optimisation mono-objectif de :	C_1	C_2	C_3
Evaluation du Compromis robuste TBF C_1 :	0,673	5,494	7,608
Evaluation du Compromis robuste ralenti C_2 :	1,113	0,452	4,307
Evaluation du Compromis robuste bourdonnement C_3 :	4,387	2,476	0,782

Tableau 5-16 : Valeur des fonctions "compromis modifiées" associées aux optimisations mono-objectif.

A l'issu du calcul de ces minima, l'optimisation multiobjectif via la méthode NBI est réalisée. La Figure 5-19 présente l'ensemble de Pareto issu de cette optimisation.

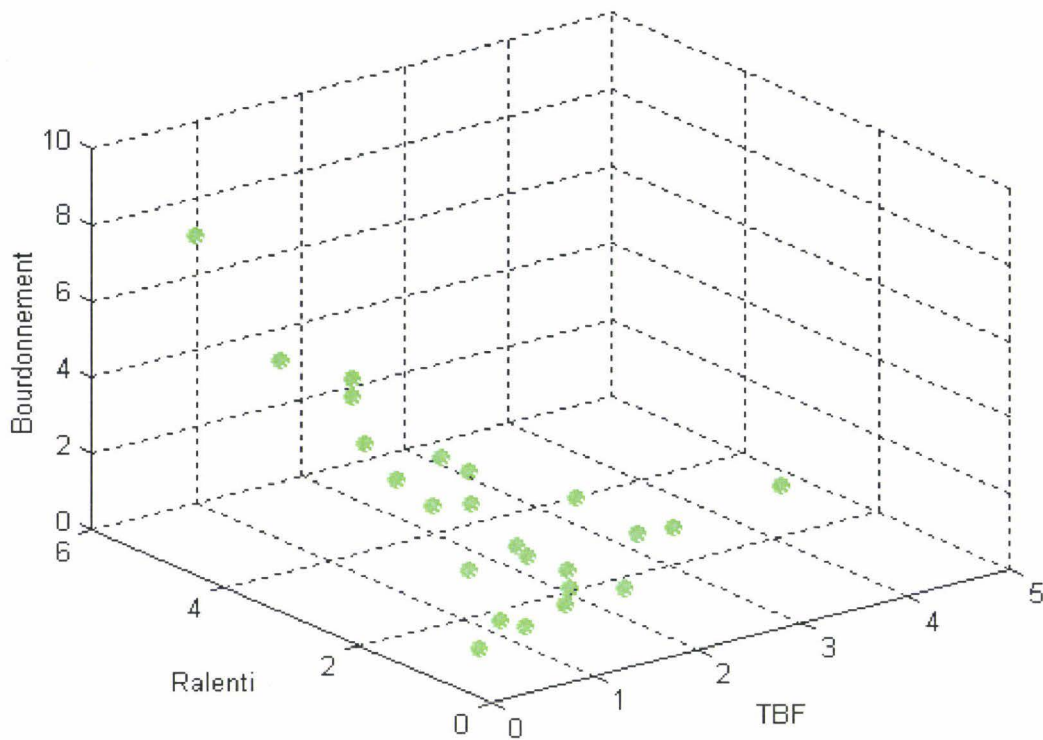


Figure 5-19 : Diagramme de Pareto obtenu par la méthode NBI pour trois objectifs compromis modifiés afin d'obtenir une configuration robuste.

Comme précédemment, afin d'aider le concepteur dans le choix d'une solution, chaque architecture a été caractérisée sur la Figure 5-20 par les valeurs des fonctions « Coût Nominal » et « Instabilité » associées (ramenées à l'écart-type). Les ronds bleus représentent les moyennes et écart-types des fonctions associées à la prestation TBF, les astérisques noirs au ralenti et les carrés rouges au bourdonnement.

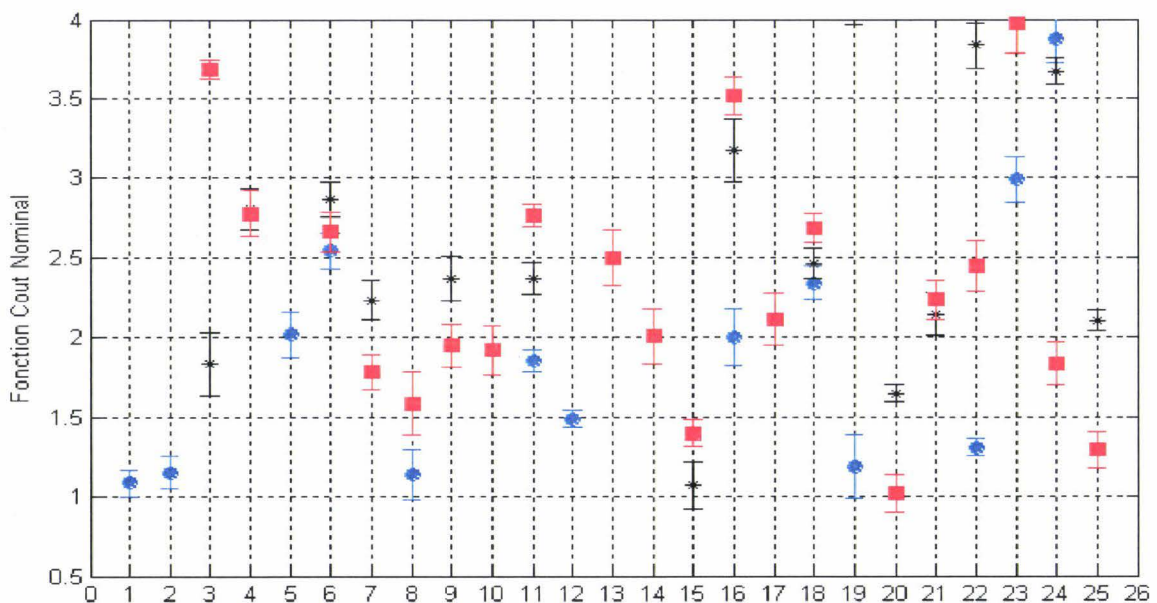


Figure 5-20 : Moyennes et écarts-types des fonctions « Coût Nominal » issue de l'optimisation compromis modifiée favorisant la robustesse.

Le 11^{ème} point, dont les fonctions « Compromis » modifiées C_1 , C_2 et C_3 prennent respectivement pour valeurs 0,3935, 0,8058 et 0,5777, correspond à l'architecture minimisant au mieux simultanément la robustesse et la performance.

La Figure 5-21 montre le placement sur le diagramme de Pareto de la configuration étudiée par la suite.

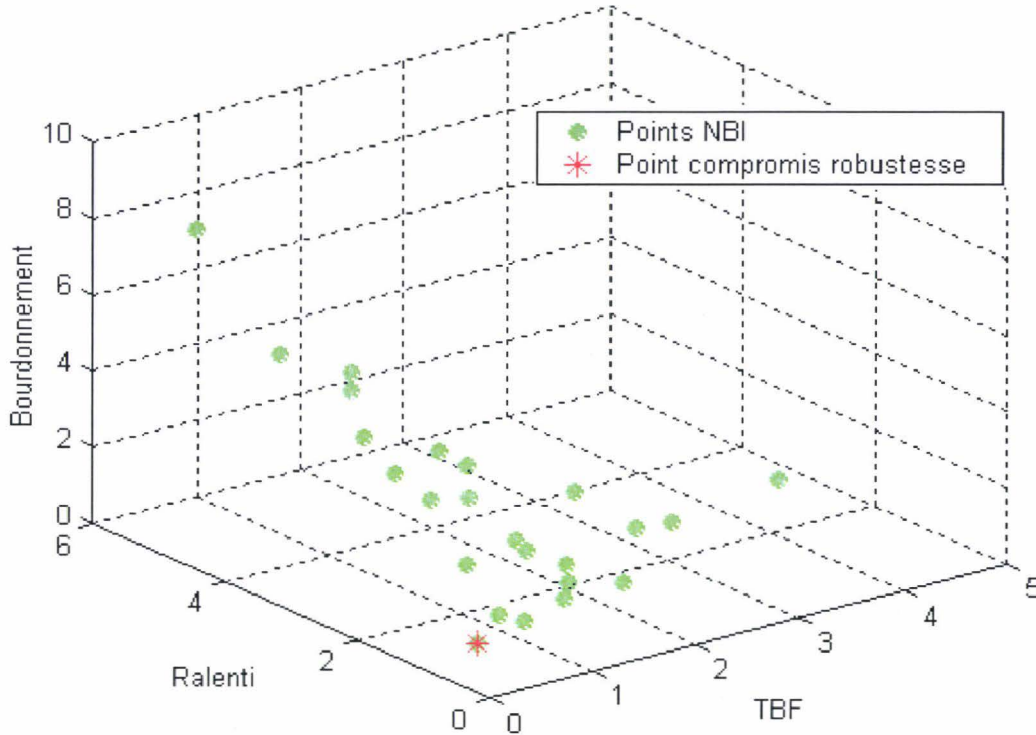


Figure 5-21 : Placement de la configuration compromise modifiée robuste sur le diagramme de Pareto.

Cette architecture présente les caractéristiques suivantes (Figure 5-22) :

- les cales porteuses sont situées très haut (Z) et en léger retrait (X) par rapport à l'ANR.
- les courbes effort-déplacement des reprises de couple sont fortement non-linéaires et engendrent des niveaux d'effort sous couples statiques élevés,
- le mode de roulis, à la fréquence de 12,3 Hz, n'est pas pur.

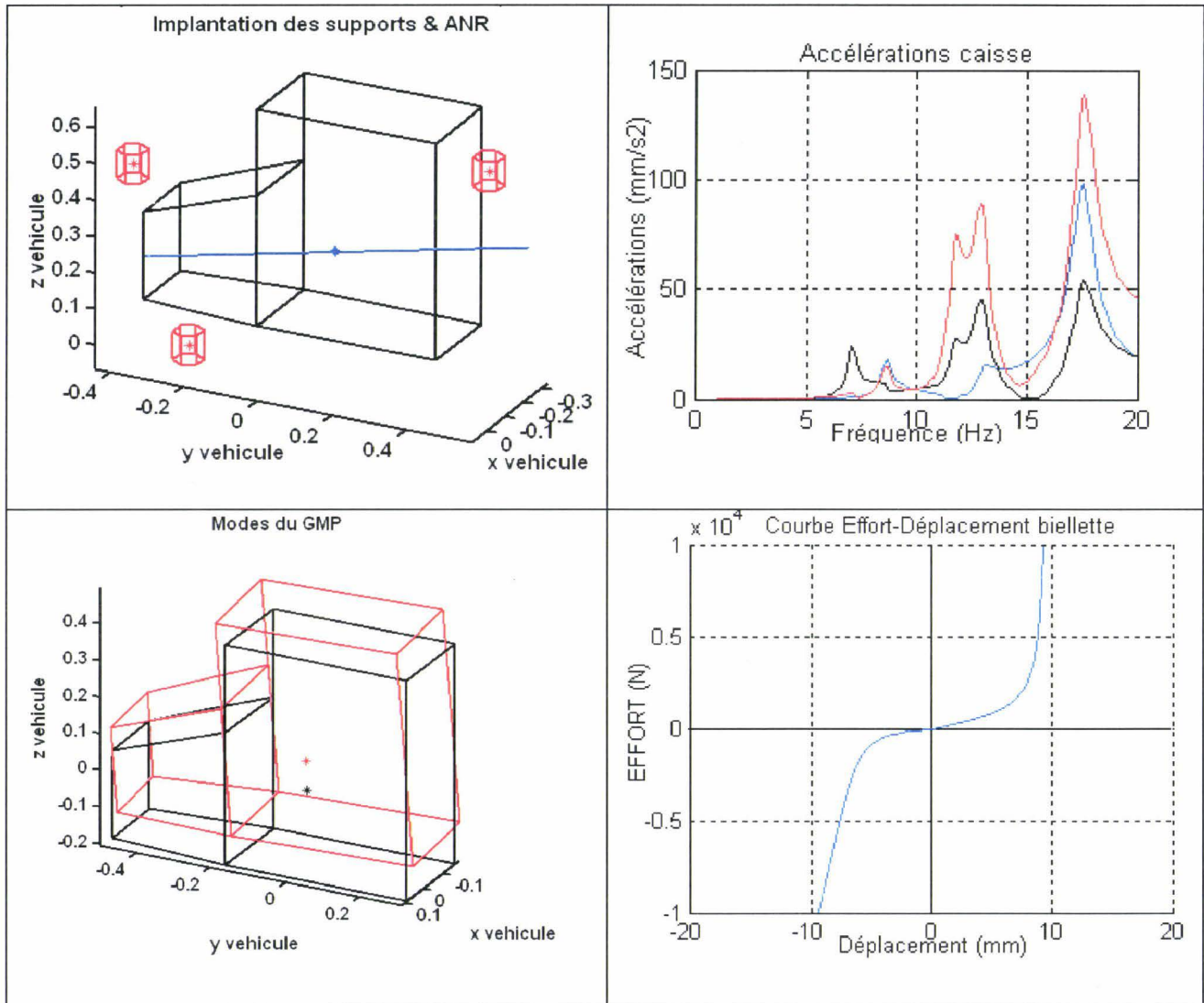


Figure 5-22 : Caractéristiques de la solution relative à la configuration favorisant la robustesse lors d'une optimisation compromis modifiée.

L'architecture obtenue est difficilement réalisable de par le fait que les implantations en Z et X des supports ne paraissent pas envisageable. De même, la forte non-linéarité des courbes effort-déplacement couplée à une saturation rapide pose le problème de la réalisation physique de tels éléments.

La Figure 5-23 illustre les résultats issus de la simulation de Monte-Carlo réalisée en considérant les imprécisions sur les paramètres à partir du design généré. Elle permet d'effectuer une analyse de la distribution des fonctions relatives à la performance ainsi que des écart-types.

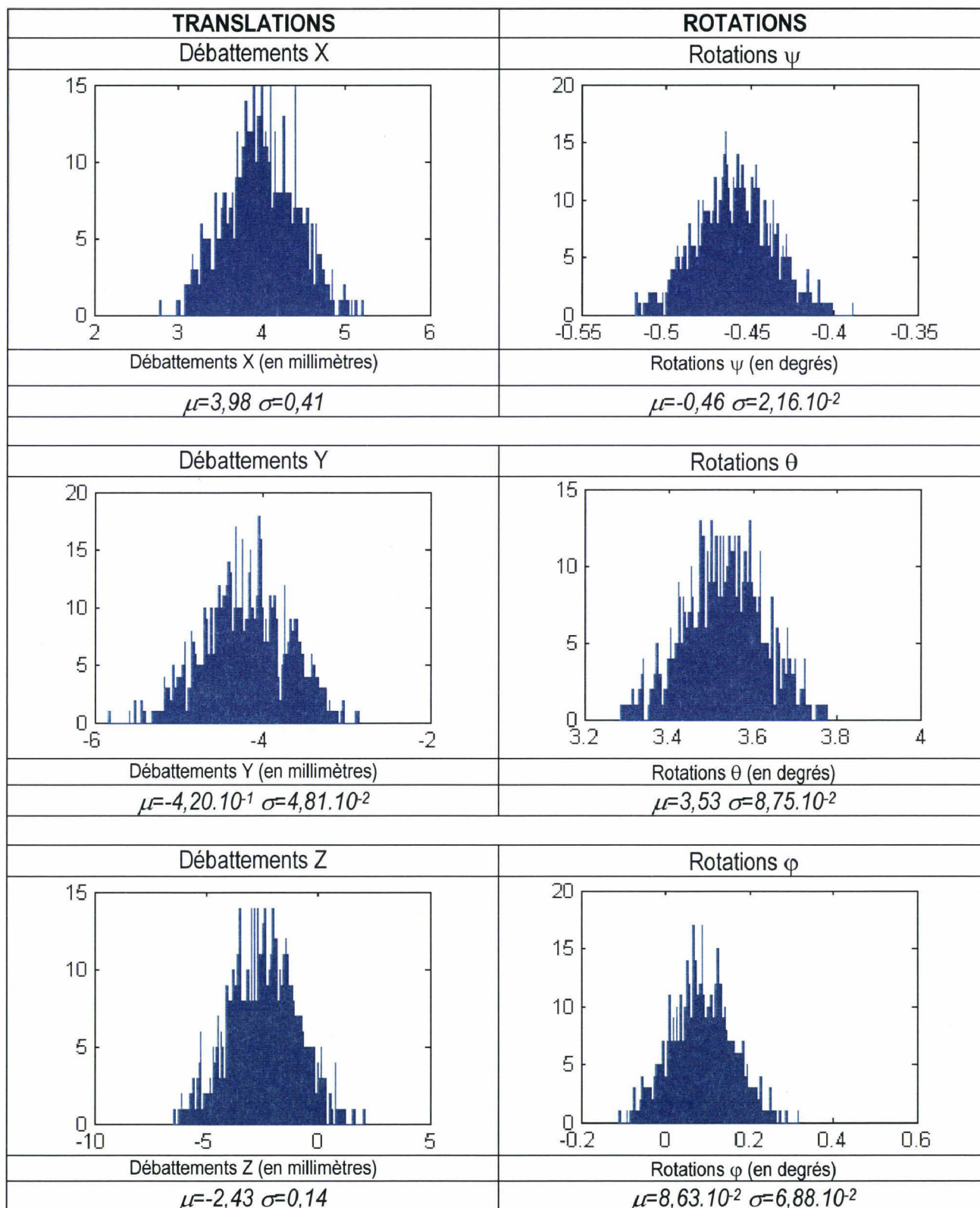
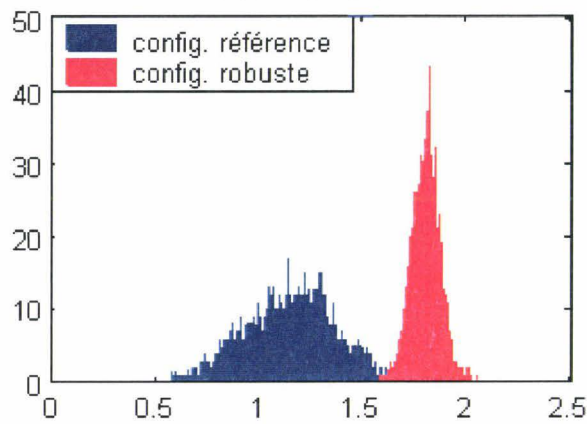
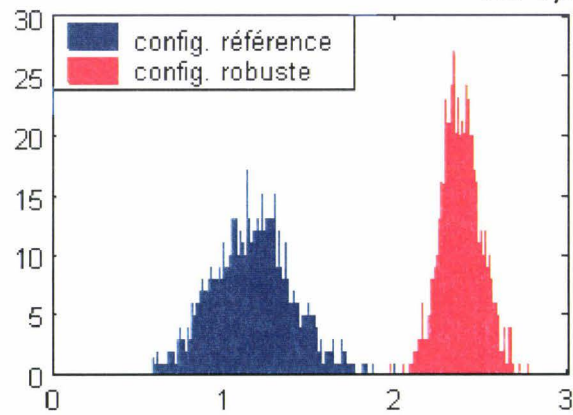


Figure 5-23 : Distribution des débattements statiques sous couple pour la configuration favorisant la robustesse.

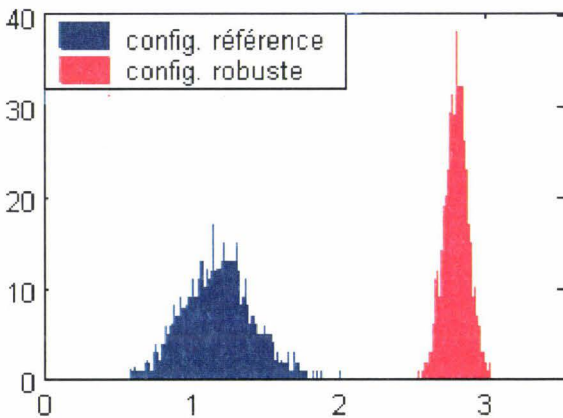
HISTOGRAMMES DES FONCTIONS « COUT NOMINAL N »



TBF : $\mu=1,851$ $\sigma=0,061$



Ralenti : $\mu= 2,372$ $\sigma=0,101$



Bourdonnement : $\mu=2,765$ $\sigma=0,073$

REPRESENTATION DE LA MOYENNE ET DE L'ECART TYPE

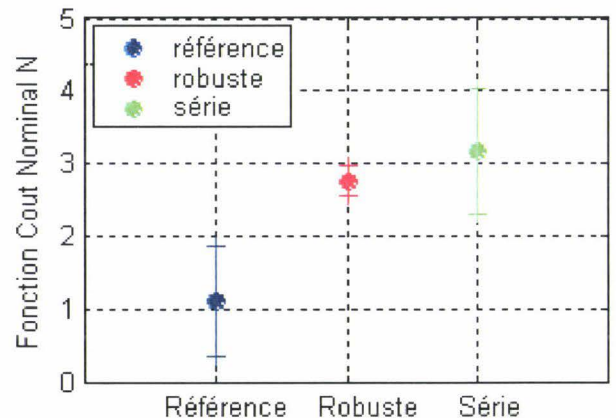
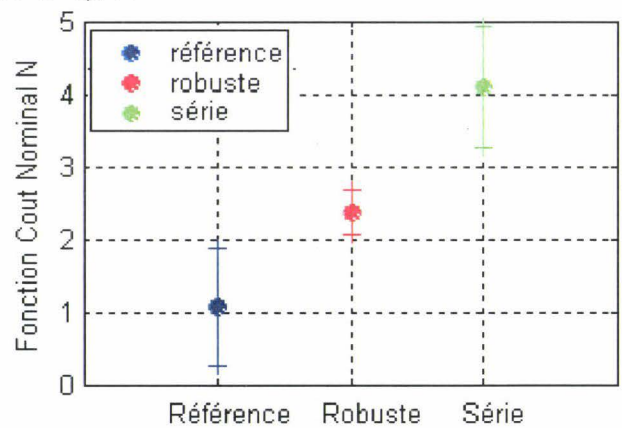
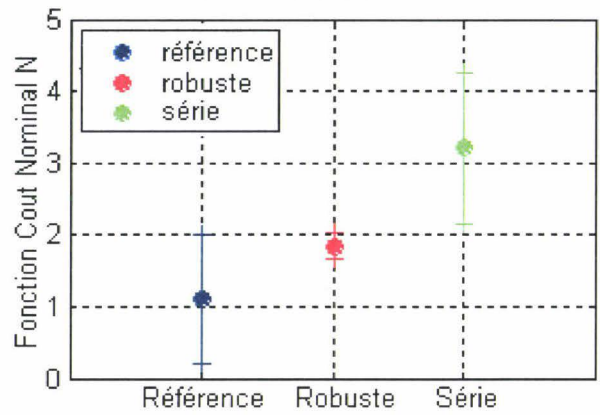


Figure 5.24 : Analyse de la solution relative à la configuration favorisant la robustesse.

Fonctions « Coût Nominal »	Moyennes		Ecart-type	
	Optimisation performance	Optimisation Robuste	Optimisation performance	Optimisation. Robuste
N₁ (TBF)	1,102	1,851	0,301	0,061
N₂ (Ralenti)	1,081	2,372	0,269	0,101
N₃ (Bourdonnement)	1,109	2,765	0,251	0,073

Tableau 5-17 : Analyse statistique de la configuration favorisant la robustesse.

Les moyennes des trois fonctions « Coût Nominal » issues des simulations de Monte-Carlo sont dégradées ce qui implique que la configuration est moins performante que la solution initiale. Par contre, en termes de robustesse, les écarts-types relatifs à ces trois fonctions (associées à la performance pure) sont sensiblement diminués. La solution obtenue apparaît donc être effectivement améliorée en terme de robustesse.

L'amélioration de la robustesse de cette architecture a pour origine essentielle le positionnement géométrique des supports ainsi que les caractéristiques associées des courbes efforts-déplacements. Ainsi, il apparaît clairement que les cales droite et gauche se trouvent beaucoup plus haut en Z que dans la configuration initiale (cf. Figure 5-22). En outre, elles sont décalées selon la direction X par rapport à l'ANR.

La résultante d'un tel positionnement entraîne une dégradation notoire des prestations de la suspension GMP. Le décalage en Z positif a des répercussions directes sur le bourdonnement et le décalage en X sur le ralenti.

On est clairement ici dans le cas d'une optimisation de la robustesse pure pour laquelle la solution générée est dégradée, elle est moins performante que la solution référence (qui est optimisée uniquement en terme de performance). Il est toutefois à noter qu'elle améliore la configuration série, tant en termes de performance que de robustesse. Ainsi, cette solution non performante n'est que peu sensible à une variation d'un des paramètres.

Cette tendance est confirmée dans la Figure 5-22 par les niveaux relativement élevés des accélérations aux points confort.

En outre, la non-linéarité des courbes efforts-déplacements entraîne des niveaux d'efforts élevés pour le point de fonctionnement en troisième dégradant ainsi la prestation en bourdonnement (4^{ème} tableau dans la Figure 5-22).

En ce qui concerne les contraintes de débattements statiques sous couple, la plage de valeurs prises par les débattements statiques reste dans les cahiers des charges métiers (Figure 5-23).

Dans le cas présent, la robustesse de l'architecture a été améliorée en trouvant un point de fonctionnement non performant pour se trouver dans une zone dégradée peu sensible aux variations paramétriques.

Configuration favorisant la performance : ($\lambda_1=0,8$ et $\lambda_2=0,2$)

Après la réalisation préalable du calcul des minima sous restrictions de chacune des nouvelles fonctions objectif « Compromis » modifiées prises séparément, condition initiale nécessaire au déroulement de la méthode NBI, un panel de 25 solutions a été obtenue. La modification des fonctions « Compromis » a pour objectif d'aboutir à des solutions privilégiant la performance. Les minima calculés pour chacune des trois fonctions sont répertoriés dans le Tableau 5-18.

Optimisation mono-objectif de :	C ₁	C ₂	C ₃
Evaluation du Compromis robuste TBF C _{p1} :	0,535	1,827	4,463
Evaluation du Compromis robuste ralenti C _{p2} :	1,398	0,386	3,095
Evaluation du Compromis robuste bourdonnement C _{p3} :	6,948	2,503	0,427

Tableau 5-18 : Valeurs des fonctions "compromis modifiées" associées aux optimisations mono-objectif.

Aussi, à l'issue du calcul de ces minima est réalisée l'optimisation multiobjectif via la méthode NBI. L'ensemble de Pareto obtenu est décrit par la Figure 5-25.

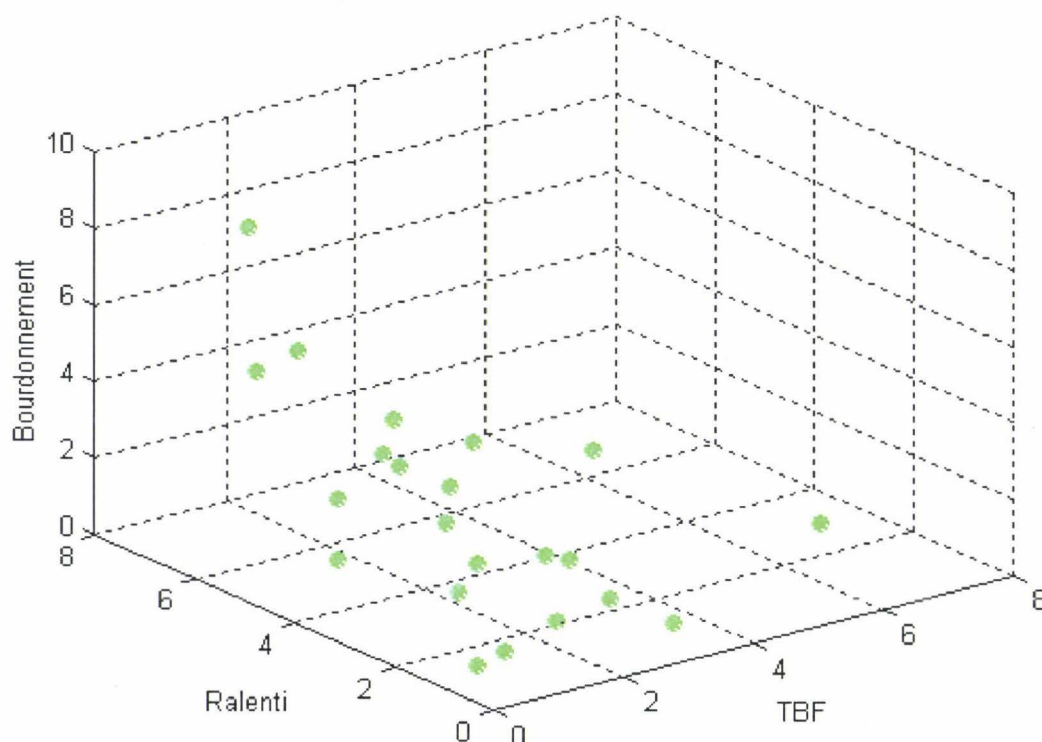


Figure 5-25 : Diagramme de Pareto obtenu par la méthode NBI pour trois objectifs modifiés afin d'obtenir une configuration favorisant la performance.

Comme précédemment, afin d'aider le concepteur dans le choix d'une solution, chaque architecture a été caractérisée sur la Figure 5-26 par les valeurs des fonctions « Coût Nominal » et « Instabilité » associées, ramenées à l'écart-type.

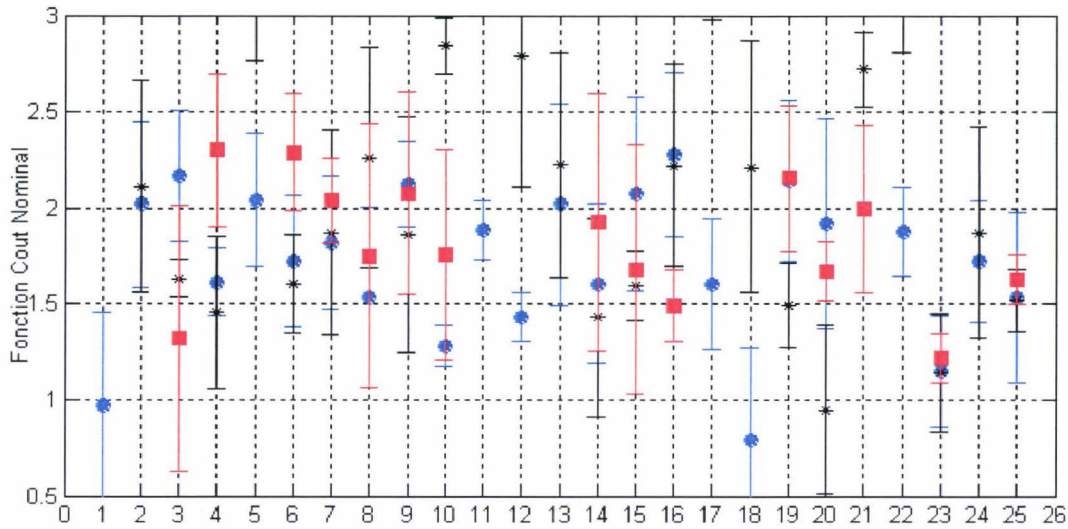


Figure 5-26 : Moyennes et écarts-types des fonctions « Coût Nominal » issue de l'optimisation modifiée favorisant la performance.

A l'issue du déroulement de la méthode NBI pour le cas d'étude décrit ci-dessus, la 23^{ème} solution déterminée est retenue. Celle-ci se positionne sur le diagramme de Pareto comme illustré sur la Figure 5-27.

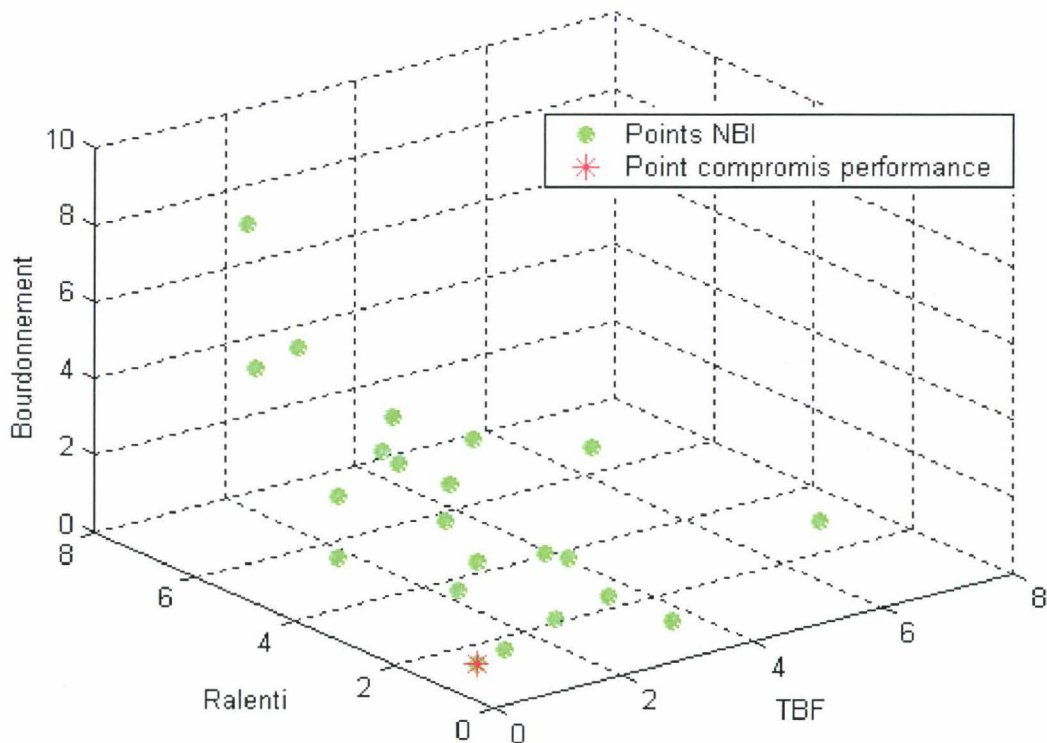


Figure 5-27 : Placement de la configuration favorisant la performance retenue sur le diagramme de Pareto.

Les trois fonctions objectif « compromis » C_1 , C_2 et C_3 modifiées de ce point prennent respectivement comme valeurs 0,6890, 0,7018 et 0,8592.

La configuration associée à ce design présente les caractéristiques suivantes :

- la cale droite est placée exactement sur l'ANR,
- la cale gauche est à la verticale de l'ANR pour ne pas être sollicité par l'excitation GMP en roulis,
- le mode de roulis est à la fréquence de 10,2 Hz,
- la biellette de reprise de couple est placée près du centre du GMP.

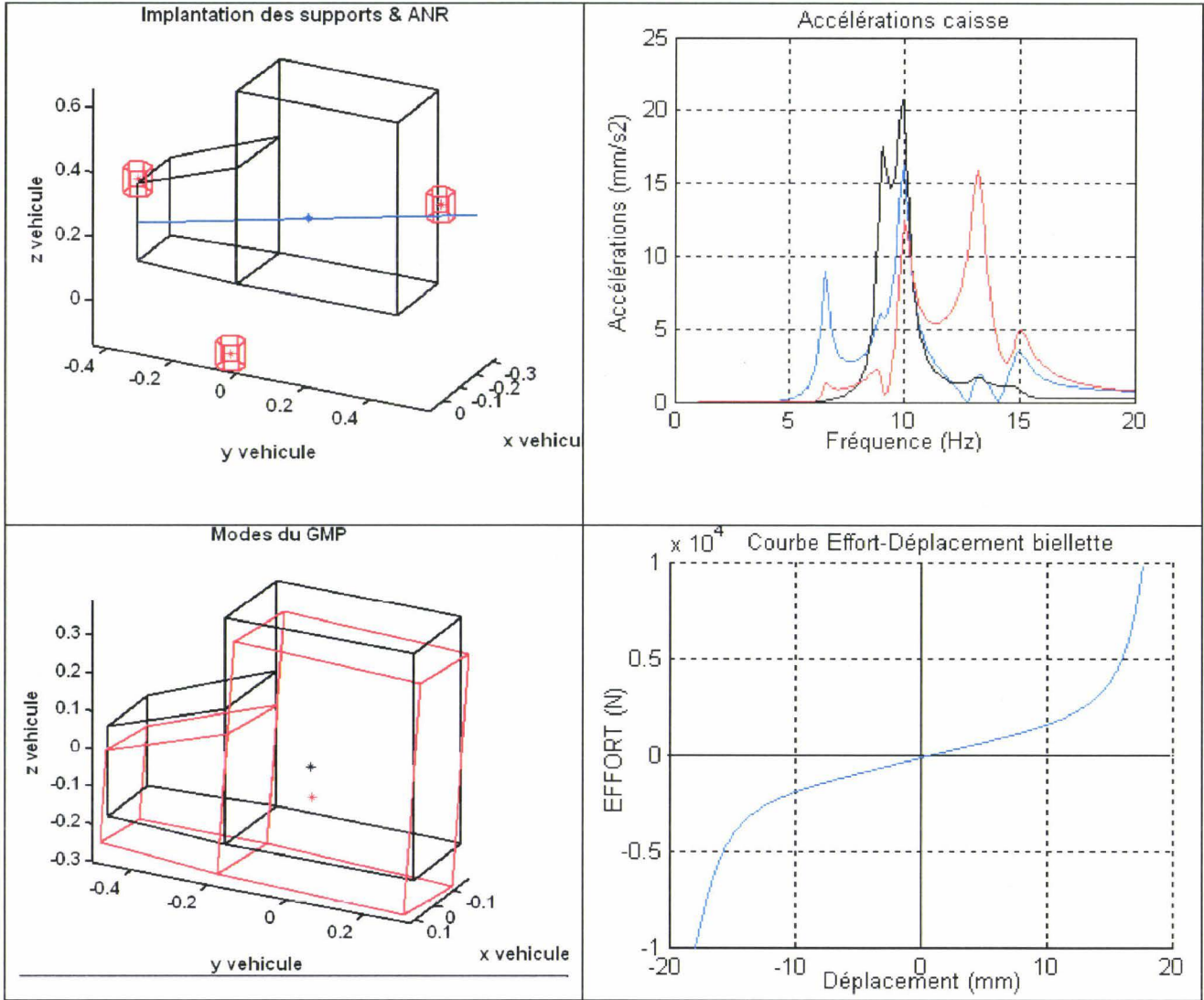


Figure 5-28 : Caractéristiques de la solution relative à la configuration favorisant la performance.

La distribution des fonctions relatives à la performance ainsi que les écarts-types associés à la configuration étudiée dans le champ de conception imprécis considéré sont illustrés par la Figure 5-30.

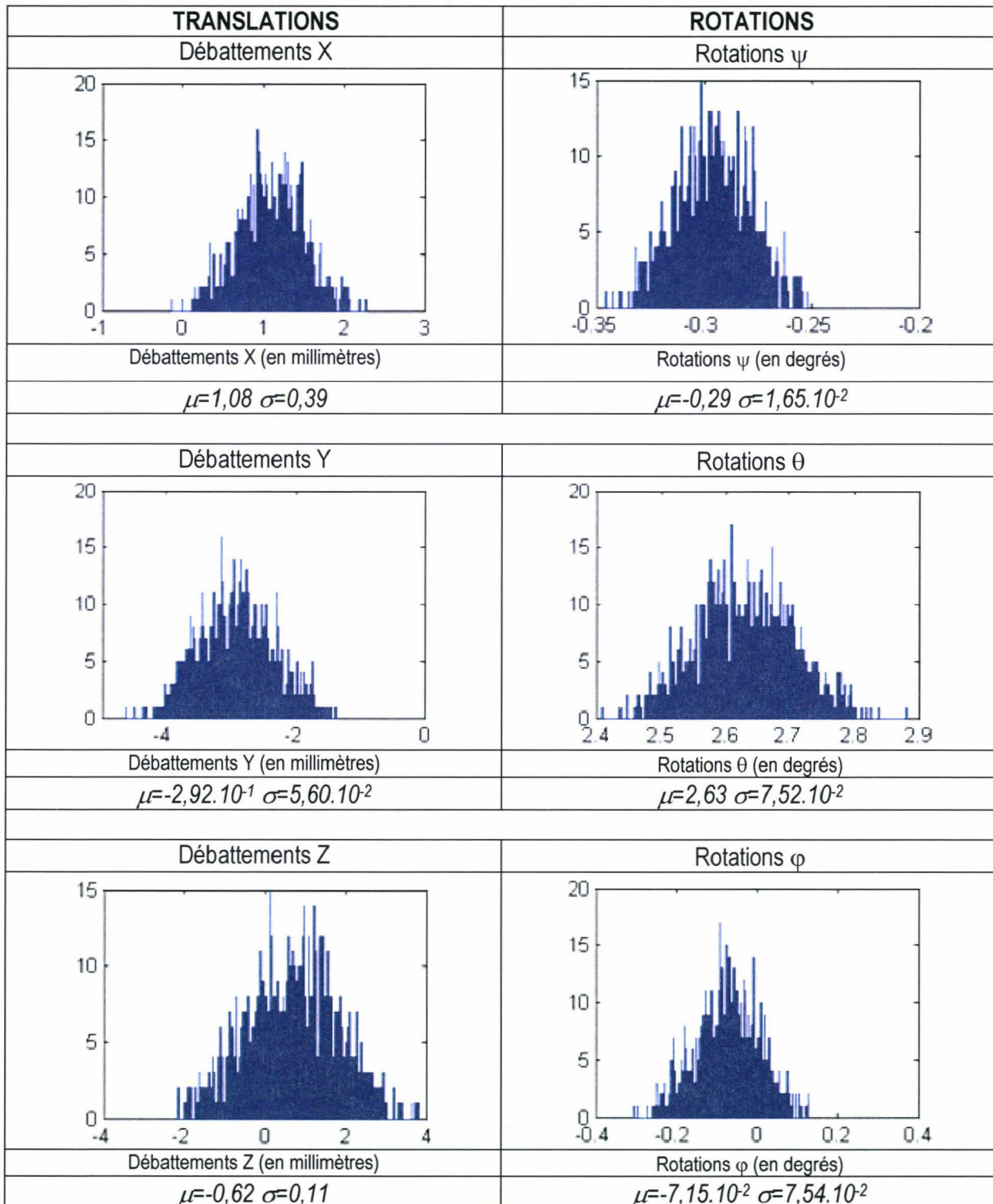
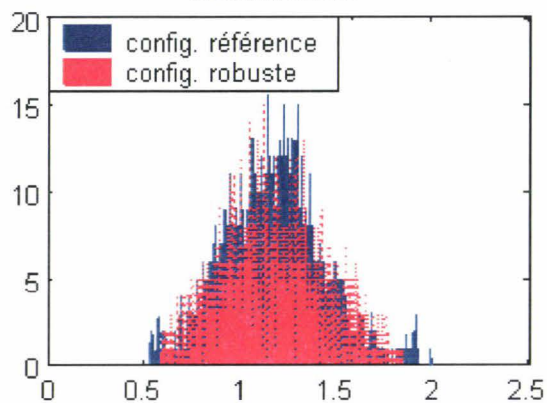


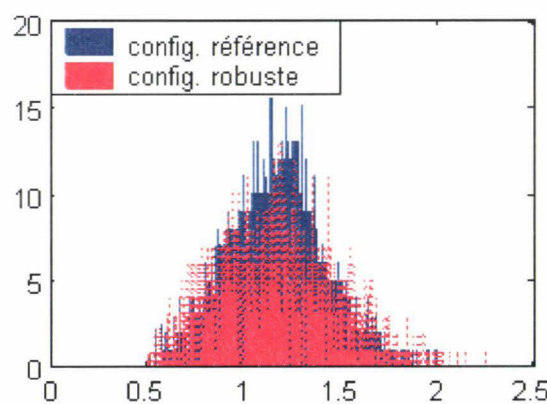
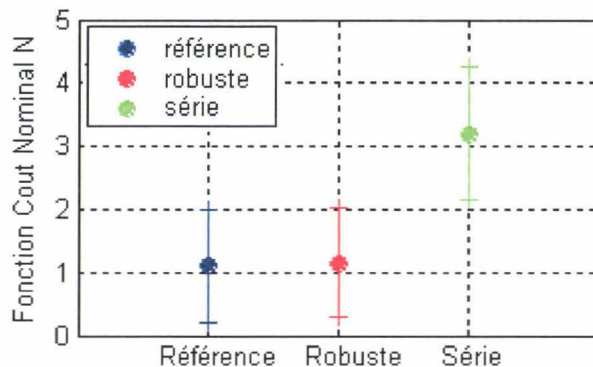
Figure 5-29 : Distribution des débattements statiques sous couple pour la configuration favorisant la performance.

HISTOGRAMMES DES FONCTIONS « COUT NOMINAL N »

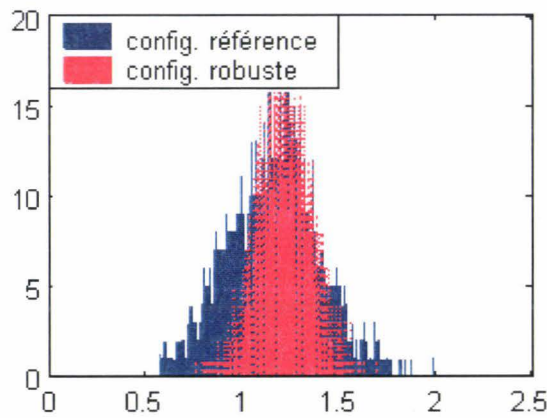
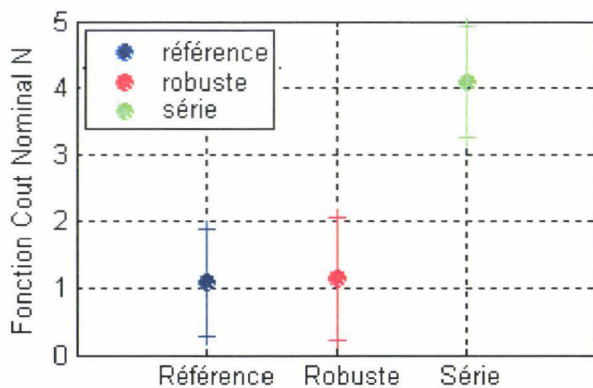


TBF : $\mu=1,155$ $\sigma=0,289$

REPRESENTATION DE LA MOYENNE ET DE L'ECART TYPE



Ralenti : $\mu=1,145$ $\sigma=0,307$



Bourdonnement : $\mu=1,217$ $\sigma=0,228$

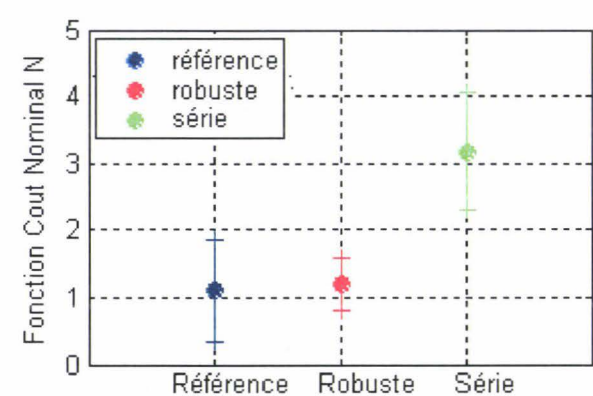


Figure 5-30 : Confrontation de la configuration favorisant la performance avec la référence.

Fonctions « Coût Nominal »	Moyennes		Ecart-type calculé par	
	Optimisation performance	Optimisation Robuste	Optimisation performance	Optimisation Robuste
N₁ (TBF)	1,102	1,155	0,301	0,289
N₂ (Ralenti)	1,081	1,145	0,269	0,307
N₃ (Bourdonnement)	1,109	1,217	0,251	0,128

Tableau 5-19 : Analyse statistique de la configuration favorisant la performance.

En termes de performance, la solution obtenue est du même niveau que la référence. Par contre son architecture diffère de cette dernière. Ainsi la cale gauche voit sa position en Z augmentée et légèrement décalée en X par rapport à l'ANR. La biellette est centrée avec un entraxe plus important pour reprendre un maximum de débattement statique et ce de manière équilibrée. Le mode de roulis n'est pas pur mais n'est pas couplé avec le mode de tamis et se trouve hors de la zone 5-7,5 Hz. La Figure 5-29 montre que le cahier des charges pour les débattements statiques est vérifié.

Aussi, cette architecture, en termes de performance, représente un bon design pour le concepteur de suspension GMP. Il est également intéressant de voir qu'avec une architecture et des jeux de paramètres modifiés, il est possible d'aboutir à une configuration de classe équivalente en terme de performance et de robustesse.

5.3.5 Conclusion

Au vu de l'analyse des configurations étudiées précédemment, il apparaît clairement que la réalisation d'une optimisation robuste peut entraîner une modification notable de l'architecture de suspension moteur. Le choix de cette architecture reviendra donc au concepteur qui devra prendre en compte les orientations imposées par son projet comme les implantations de supports mais devra aussi s'assurer de la faisabilité des pièces dont les caractéristiques fonctionnelles ont été définies par l'optimisation. On a ainsi pu voir que des courbes effort-déplacement obtenues via le processus d'optimisation numérique peuvent ne pas être physiquement réalisables.

Dans la démarche d'optimisation robuste, il a été intéressant d'appréhender le fait que la scission de la fonction « Compromis » en la somme d'une fonction « Coût Nominal » et « Instabilité » permet d'avoir, par la valeur de ces deux fonctions, un bon indicateur de la moyenne et de l'écart type de la performance dans l'espace d'imprécision considéré. Cette démarche permet ainsi de s'affranchir des simulations de Monte-Carlo, lourdes en temps de calcul.

5.4 Conclusion

A l'issu de cette étude, une méthode de dimensionnement robuste d'une suspension moteur en phase d'avant-projet a été proposée. L'originalité de cette méthode repose sur la recherche d'une solution à la fois performante vis-à-vis des critères métiers et à la fois robuste vis-à-vis des imprécisions sur les paramètres de conception.

Cette méthode et l'outil en découlant s'inscrivent complètement dans la démarche de conception en phase d'avant-projet où la réactivité est nécessaire. Les temps de calculs nécessaires pour la réalisation d'une optimisation robuste sont de l'ordre de 60 à 120 minutes contre 24 à 36 heures pour des simulations de Monte-Carlo.

L'application d'une méthodologie d'optimisation numérique appliquée à ce dimensionnement a été explicitée. L'algorithme d'optimisation multiobjectif retenu est la méthode NBI. C'est un algorithme déterministe reposant sur la génération de plusieurs sous-problèmes dont la résolution conduit à des solutions potentielles du problème multiobjectif.

L'intégration de routines dans le processus de dimensionnement fonctionnel robuste a été réalisée. Ainsi, les solutions issues des différentes optimisations, sont à la fois robustes et à la fois performantes. Ce procédé de dimensionnement permet en outre d'orienter les solutions vers la performance ou la robustesse.

Un outil d'analyse de la robustesse des solutions générées par cette méthode a été développé sur la base des simulations de Monte-Carlo. Cet outil permet d'accéder à la distribution des fonctions objectif robustes considérées ainsi qu'à celle des débattements sous couples statiques dans la plage d'imprécisions considérées pour les paramètres. Cet outil a permis de valider, a posteriori, les designs générés par les processus d'optimisation robuste.

Nous pouvons noter que le nombre de ces solutions est relativement important. Dans cette partie, le choix n'a été réalisé que sur des critères qualitatifs. Dans le cadre d'une application plus réaliste, le tri sera effectué par le concepteur selon les critères définis par le cahier des charges inhérent à ce projet. Ce dernier dispose en effet d'un ensemble de designs optimisés robustes pouvant correspondre à des architectures innovantes.

CHAPITRE 6

Conclusion générale

6 CONCLUSION GENERALE

6.1 Conclusion

Les travaux présentés dans ce document avaient pour objectif la mise au point et le développement d'outils numériques permettant la prise en compte des imprécisions dans le dimensionnement et l'optimisation multi-objectif de systèmes dynamiques non-linéaires. La méthodologie développée a pour application le dimensionnement des suspensions GMP en phase d'avant-projet.

L'étude bibliographique a été réalisée en deux volets. Dans un premier temps, la description des méthodes d'analyse de la robustesse de systèmes imprécis a permis d'identifier principalement les méthodes stochastiques et la méthode des intervalles comme étant les approches les plus appropriées. Bien que fondamentalement différentes dans leur formalisme, ces deux méthodes ont pour but commun la détermination d'un intervalle pondéré ou non, agrégeant l'ensemble des solutions d'un système fonction des paramètres imprécis. Les méthodes stochastiques, notamment les méthodes de Monte-Carlo, demeurent les méthodes de références, surtout dans le domaine de l'ingénierie. Le principal inconvénient de ces méthodes réside dans le temps de calcul qui peut rapidement devenir prohibitif. En outre, la difficulté majeure dans l'utilisation des méthodes stochastiques réside dans le fait qu'elles ont pour base un calcul statistique nécessitant la description des paramètres par des variables aléatoires. La valeur des densités de probabilité est difficile à obtenir dans notre contexte. Cependant, les simulations de Monte-Carlo ne nécessitant aucune approximation quant à l'évaluation des fonctions considérées, elles ont été, pour notre problématique, une méthode de validation de l'approche proposée. Quant à l'arithmétique des intervalles, elle pouvait apparaître comme une alternative intéressante puisqu'elle ne nécessite pas une connaissance de la distribution de la valeur des paramètres. Pourtant, la surestimation des résultats inhérente à cette arithmétique, associée à un processus d'optimisation par nature itératif, nous a contraints à écarter cette voie. Aussi, la stratégie d'intégration des imprécisions retenue a consisté en l'utilisation de techniques de réanalyse et plus spécifiquement de développements en série. L'intérêt de ces méthodes réside dans la diminution du nombre de calculs puisque les imprécisions considérées sur les paramètres sont faibles et qu'elles reposent sur une analyse de sensibilité. Ces développements présentent l'avantage supplémentaire d'être réutilisés lors de la phase d'optimisation. Dans un second temps, un recensement de diverses méthodes numériques d'optimisation multi-objectif a été réalisé. Il est apparu que la méthode NBI modifiée [KRE01] est la plus adaptée à la résolution de problème dynamique dans un contexte de conception. A l'issue de cette étude bibliographique et dans la perspective de notre problématique industrielle, la nécessité de prendre en compte le stade de conception nous a amené à faire la distinction entre deux processus de dimensionnement. Le premier concerne la phase de conception en avance de phase (analyse *a priori*) pour laquelle sera appliquée une optimisation utilisant la méthode NBI et intégrant la robustesse. Le second concerne la phase de validation du design (analyse *a posteriori*) qui sera alors effectuée grâce aux simulations de Monte-Carlo.

Dans la deuxième partie du mémoire, une analyse fonctionnelle de la suspension GMP a été réalisée. La description des différentes sources d'excitations impactant le fonctionnement d'une suspension GMP a été accomplie. Quelques règles de dimensionnement et différents types d'architectures pour ce système ont été présentés. Ces descriptions ont permis de révéler le caractère antagoniste des diverses prestations devant être assurées par une suspension GMP. La qualité du compromis entre performance et stabilité devra permettre de démontrer la pertinence du design obtenu. Par la suite, une description plus précise des items

dimensionnant une suspension moteur, en particulier les supports, a permis de recenser les principales sources d'imprécisions, tant sur le plan qualitatif que quantitatif. La prise en compte de ces dernières, couplée au caractère antagoniste des prestations, a mis en exergue la nécessité du développement d'un outil de dimensionnement robuste.

La troisième partie a consisté à formuler le problème d'optimisation robuste d'une suspension GMP en phase d'avant-projet. Pour chaque cas de fonctionnement du système, un modèle spécifique a été développé. Les imprécisions sur les paramètres de conception ont été intégrées par la définition de fonctions robustes dédiées (fonctions *hypervolume*). Une telle formulation a pour objectif d'assurer que le design optimisé robuste vérifie les contraintes du cahier des charges fonctionnel de la suspension. Ses prestations seront garanties dans la plage d'imprécision définie.

Enfin, dans la dernière partie, la méthodologie d'optimisation multi-objectif robuste a été appliquée au cas du dimensionnement complet d'une suspension GMP pendulaire. Cette méthode permet d'atteindre une solution à la fois performante vis-à-vis des critères métiers et robuste vis-à-vis des imprécisions sur les variables de conception. Comme il a été explicité dans l'étude bibliographique, l'algorithme d'optimisation multi-objectif retenu est la méthode NBI. Afin d'analyser sa pertinence, les solutions obtenues ont été validées *a posteriori* par une méthode de simulation de Monte-Carlo. Il s'avère que la méthodologie d'optimisation robuste développée permet au concepteur d'accéder directement aux distributions des fonctions objectif considérées ainsi qu'à celles des débattements sous couples. L'outil développé montre que l'intégration de la robustesse dans le processus de dimensionnement peut amener le concepteur à faire le choix d'une architecture, initialement écartée dans le cadre d'une optimisation classique ne considérant que la performance seule. En outre, lors de la création d'un nouveau véhicule, la possibilité de réaliser la reconduction d'une architecture existante peut être, grâce à cette méthodologie, facilement étudiée, analysée et envisagée.

6.2 Perspectives

A l'issue de ces travaux, des outils dédiés et adaptés au dimensionnement robuste d'une suspension GMP intégrant les imprécisions sur les variables de conception ont été réalisés. Ces outils permettent à la fois d'obtenir des solutions robustes vis-à-vis de variables de conceptions imprécises mais aussi d'évaluer a posteriori la robustesse d'une architecture existante. Cependant, de nombreuses voies d'amélioration et d'enrichissement de ces outils peuvent être envisagées.

Tout d'abord, les fonctions objectif relatives aux prestations de la suspension moteur utilisées dans les développements présentées dans le chapitre 3 sont non-linéaires. Le choix de l'analyse de la robustesse du modèle via l'analyse des surfaces de réponses déterministes par le calcul de sensibilités s'est porté sur l'utilisation d'un développement en série de Taylor limité à l'ordre 2. Il a pour intérêt principal son intégration directe dans le processus d'optimisation. La littérature propose d'autres types de développements en série permettant éventuellement d'améliorer la convergence ou de réduire le nombre de calculs. Les développements en série de Padé [SAD97] pourraient par exemple constituer une voie d'étude intéressante à court terme.

L'algorithme d'optimisation multi-objectif utilisé dans les travaux est un algorithme de type déterministe (NBI). Dans le processus de dimensionnement de structures mécaniques, l'utilisation des algorithmes génétiques permettrait d'assurer un balayage de l'espace de conception plus important, réduisant le risque de converger vers un optimum local [KRE01]. Leur défaut principal consiste en un temps de calcul nettement plus important que pour les méthodes déterministes. Cependant, avec le développement des ressources informatiques, leur utilisation, couplée à une analyse statistique des solutions générées, pourrait également être envisagée rapidement.

Les développements réalisés dans ces travaux de thèse ne considèrent uniquement que des cas de charges liés à un domaine fréquentiel. La prise en compte de nouveaux cas de fonctionnement transitoires (tel que les scénarii de chocs ou les manœuvres exceptionnelles) pourraient également être considérée.

Ensuite, l'intégration des imprécisions dans le processus de dimensionnement robuste a été faite via l'hypothèse que ces imprécisions étaient réparties de manière homogène autour d'une valeur nominale centrée. Ce choix semble légitime de par le fait qu'en avance de phase, il est très fréquent d'avoir des informations non consolidées sur les paramètres utilisés lors du dimensionnement. Cependant, à moyen terme, on peut considérer qu'avec des échanges plus poussés avec les fournisseurs de pièces et la volonté d'améliorer le référentiel métier, nous serons en mesure d'obtenir une représentation plus réaliste de la répartition des imprécisions. Le cas échéant, il sera possible d'intégrer cette connaissance en pondérant les intervalles de variation des paramètres autour de leur valeur nominale. Les approches non-déterministes telles que les méthodes probabilistes ou la théorie des sous-ensembles flous pourront alors être envisagées.

Dans la recherche de gains en termes de productivité et de coût, l'obtention d'une architecture robuste prend tout son sens de par le fait que des solutions peuvent être reconduites d'un véhicule à un autre. La politique des plateformes dans le groupe PSA reprend cette philosophie qui veut que pour une même plateforme correspondant à plusieurs véhicules, on retrouve un maximum de pièces communes. Dans le cadre des développements réalisés dans cette thèse, le dimensionnement passe par le renseignement des données représentatives d'un seul GMP. On pourra également envisager l'intégration de plusieurs

GMP pour une même caisse, la finalité étant d'obtenir une seule architecture de suspension GMP pour une plateforme et donc pour plusieurs véhicules du même segment.

Enfin, le processus de dimensionnement décrit dans ces travaux passe par la mise en place d'une optimisation numérique multi-objectif. Aussi, à plus long terme, en considérant les avancées des travaux sur la conception robuste des structures mécaniques, ce dimensionnement pourrait s'affranchir de cette phase d'optimisation par l'élaboration d'un processus de conception robuste, utilisant simultanément un calcul direct et une représentation des restrictions du cahier des charges par formalisme flou.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[AHM00]

S. AHMED, N. V. SAHINIDIS, E. N. PISTIKOPOULOS

An improved decomposition algorithm for optimization under uncertainty.

Computers and chemical engineering, vol.23, p1589-1604, 2000

[ALE98]

G. ALEFELD, G. CLAUDIO

The basic properties of interval arithmetic, its software realizations and some applications

Computers and structures, vol.67, p3-8,1998

[ALE00]

G. ALEFELD, G. MAYER

Interval analysis : theory and applications.

Journal of computational and applied Mathematics, vol. 121, p421-464, 2000

[ARN05]

E.ARNOULT, A.TOUACHE, P.LARDEUR

Détermination des fréquences propres d'une structure avec paramètres incertains

Colloque National en Calcul des Structures – Giens 2005

[AVE00]

I. AVERBAKH

Minmax regret solutions for minimax optimizations problems with uncertainty

Operations research letters, vol 27, p57-65, 2000

[BAR00]

M. BARTHOLOMWB-BIGGS, S. BROWN, B. CHRISTIANSON

Automatic differentiation of algorithms.

Journal of computational and applied mathematics 124, p171-190, 2000

[BEA98]

O. BEAUMONT

Solving interval linear systems with linear programming techniques.

Linear algebra and its applications, vol.281, p293-309, 1998

[BEN74]

W BENZ

Vibrations de flexion du moteur diesel quatre cylindres avec suspension élastique.

M.T.Z, n°4, avril 1974, p1-7, avril 1974

[BEN88]

H. BENAROYA, M. REHAK

Finite element methods in probabilistic structural analysis: a selective review.

Appl. Mech. Rev., vol.41, n°5, mai 1988

[BEN99]

A. BEN-TAL, A. NEMIROVSKI

Robust solutions of uncertain linear programs

Operations Research Letters, vol.25, p1-13, 1999

[BER83]

J. E. BERNARD, J. M. STARKEY

Engine mount optimization.

International congress & exposititon, detroit, michigan, février 1983.

[BER84]

M. BERNUCHON

A new generation of engine mounts

SAE Technical Paper Series, SAE 840259, 1984

[BER99]

J.M. BERGHEAU, M. ROUSSET, G. MATHERON, M. ROCHETTE

Sensitivity analysis of laminated composite structures with a polynomial method

Publication CADOE & Léonard de Vinci

[BRA85]

V. BRAIBANT

Optimisation de formes des structures en vue de la conception assistée par ordinateur

Thèse Ph. d, Université de Liège

[BRA99]

R.D. BRAATZ, E.L. RUSSEL

Robustness margin computation for large scale systems

Computers and chemical engineering, vol.23, p1030-1604, 1999

[BOI01]

Y. BOIRAL

Effets des modes de corps rigides du groupe d'entraînement sur le confort de conduite, les secousses de cycles de charge et les vibrations au ralenti.

Psa T 14933

[BOL71]

B. L. BOLTON-KNIGHT

Engine mounts : analytical methods to reduce noise and vibration.

Instn. Mech. Engrs., p24-34, 1971

[BOO83]

J. V. D. BOOM, H. HOLLERWEGER

Depuis la suspension flottante jusqu'aux supports au réglage électronique.

Mai 1983

[BOU98]

N. BOUHADDI, S.J. HUANG, J-P LOMBARD

Robustesse des modèles condensés vis-à-vis de perturbations paramétriques

Mécanique Industrielle et Matériaux, vol. 51, n°4, décembre 1998

[CHA98]

S. CHAKRABORTY, S.S. DEY

A stochastic finite element dynamic analysis of structures with uncertain parameters

Int. Journal of Mech., Vol. 40, n°11, p. 107161087,1998

[CHE95]

S-H chen, J-H chou, C-H CHAO

Stability robustness of the LQG active suspensions with disturbance/noise uncertainties and time-varying parametrical perturbations

Int. Journal of Vehicle Design, Vol. 16, Nos 4/5, 1995

[CHE97]

L. chen, S.S rao

Fuzzy finite elements in analysis of imprecisely-defined systems

Finite elements in analysis and design, vol. 27, p69-83, 1997

[CAS90]

J-M. CASTILLO, P. PINTADO, F-G. BENITEZ

Optimization for vehicle suspension II : Frequency Domain

Vehicle Suspension Dynamics, Vol. 19, pp. 331-352, 1990

[CHE96]

F-Y. CHENG, D. LI

Multiobjective optimization of structures with and without control

Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 19(2), pp. 392-397.

[CHE97]

F-Y. CHENG, D. LI

Multiobjective optimization design with pareto genetic algorithm

Journal of structural engineering, Vol. 123(9), pp. 1252-1261, 1997

[CHE00]

S-H CHEN, X-W YANG

Interval finite element method for beam structures.

Finite elements in analysis and design, vol.34, p75-88, 2000

[COL97]

T. F. COLEMAN, GUDBJORN F. JONSSON

The efficient computation of structured gradients using automatic differentiation.

Cornell theory centre technical report CTC97TR272, p1-8, avril 1997

[COR96]

C.A. CORRAL,

Minimax Algorithm for Matrix Inversion

Electronic systems division, Scientific Atlanta, 1996

[DAR98]

J. DARLINGTON, C.C. PANTELIDES, B.RUSTEM, B.A. TANYI

An algorithm for constrained nonlinear optimization under uncertainty

Automatica, vol. 35, p 217-228, 1999

[DAR99]

J. DARLIGTON, C.C. PANTELIDES, B. RUSTEM, B.A. TANYI
An algorithm for constrained nonlinear optimization under uncertainty
Automatica, vol.35, p217-228, 1999

[DAS95]

I. DAS, J. DENNIS
Normal-boundary intersection: an alternate method for generating pareto optimal points in multicriteria optimization problems
Publication dep. Of computational & applied Mathematics of the Rice University of Houston

[DAS96]

I. DAS, J. DENNIS
Normal-boundary intersection: an new method for generating pareto optimal points in multicriteria optimization problems
Publication dep. Of computational & applied Mathematics of the Rice University of Houston

[DAS97a]

I. DAS, J-E. DENNIS
A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems
Structural Optimization, Vol. 14, pp. 63-69, 1997.

[DAS97B]

I. DAS
Robustness optimization for constrained, nonlinear programming problems
Publication de l'université de Rice Houston, mars 1997

[DAS98]

I. DAS, J-E. DENNIS
Normal-boundary intersection : a new method for generating the Pareto surface in multicriteria optimization problems
SIAM J. Optimization, Vol. 8, pp. 631-657, 1998

[DAT98]

S. DATOUSSAID
Optimisation du comportement dynamique et cinématique de systèmes multicorps à structure cinématique complexe
Thèse de Doctorat en Sciences Appliquées, Faculté Polytechnique de Mons, 1998

[DAT00]

R. GHOSH, S. SEN, K.B. DATTA
An improved method for determining the stability of interval matrices
International Journal of systems sciences, vol.31, n°2, p1716176, 2000

[DEC96]

F. DELCROIX, V. BRAIBANT
Méthodes d'éléments finis stochastiques
Note de synthèse, université Léonard de Vinci, Aout 1996

[DEC97]

F. DELCROIX, V. BRAIBANT

Méthode de résolutions des systèmes linéaires à intervalles

Note de synthèse, n° 97-FD03, université Pierre et Marie Curie, Paris VI., nov. 97

[DEC99]

FRANCK DELCROIX

Analyse structurale non-déterministe. Approche par intervalles.

Thèse de doctorat, université Pierre et Marie Curie, Paris VI.

[DEM90]

HANS DEMANT, JÜRGEN ROOS, DIETER F. VOLKO

Exigences à satisfaire par les supports moteur en matière de vibrations

Publications de l'institut français du pétrole, p 110-118, 1990

[DES99]

OLIVIER DESSOMBZ

Utilisation des intervalles en calcul de structures. Gestion de l'imprécision des données.

Journée Φ^2 AS, 1999

[DES00]

O. DESSOMBZ, F. THOUVEREZ, J-P. LAINE, L. JEZEQUEL

Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite elements methods.

Journal of sound and vibration, 2000

[DIC99]

J. D. DICKENS

Phase velocity of rubber element in vibration, isolator under static load.

Journal of sound and vibration, p21-24, 1999

[DIO95]

DION, J. L

Modélisation et identification du comportement dynamique de liaisons hydroélastiques

Thèse de Doctorat en Automatique, Ecole Centrale de Paris, 1995.

[DMI90]

MIROSLAV DEMIE

A contribution to the optimization of the position and the characteristics of passenger car powertrain mounts.

Int J.of vehicle design, vol 11, n°1, 1990

[ESC90]

H. ESCHENAUER, J. KOSKI, A. OSYCZKA

Multicriteria design optimization

Berlin, Springer-Verlag, 1990

[ELI01]

LAURE ELIE, BERNARD LAPEYRE

Introduction aux Méthodes de Monte-Carlo

[FLA89]

D. FLANIGAN, L-H. WU, F.SABETI

Analytical optimization of chassis component for reduction of vehicle sound and vibration

Ford motor compagny, 7th conference of vehicle structural mechanics, Detroit, p13-25, avril89

[FU88]

M. FU, B. R. BARMISH

Maximal unidirectional perturbation bounds for stability of polynomials and matrices.

System and control letters, n°11, p173-179, 1988

[GAR01]

S. GARREAU, M. ROCHETTE

Computation of the frequency response using complex modal basis for frequency dependant material.

Publication CADOE S.A

[GEO98]

M. GEFFREY

Analyse du comportement dynamique des supports hydroélastiques excités par un déplacement latéral.

Mécanique industrielle et matériaux, vol 51, n°1, mars 1998

[GIE78]

D-P, GIESY

Calculation of Pareto-optimal solutions to multiple-objective problems using threshold-of-acceptability constraints

IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-23(6), pp. 1114-1115, 1978

[GUT92]

S. GUTMAN.

Data and uncertain parameters in robust analysis.

IEEE transactions on automatic control, vol.37, n°8, p1238-1239, 1992

[HAD72]

M. HADDAR, M. A. HAMDI, A. GENESSAUX

Etude vibratoire des systèmes de solides indéformables liés élastiquement.

S.A automobile Citroën, p 1-32, 1972

[HAN64]

E. HANSEN

Interval arithmetic in matrix computations, part I

SIAM J. Numerical analysis, vol.2, n°2, 1964

[HAN67]

E. HANSEN, R. SMIRH

Interval arithmetic in matrix computations, part II

SIAM J. Numerical analysis, vol.29, n°5, p1493-1503, octobre 1992

[HAN92]

E. HANSEN

Bouding the solution of interval linear equations

SIAM J. Numerical analysis, vol.4, n°1, 1967

[HAY94]

S. HAYASHI, S. KANO

Optimization method for mount layout and mount specifications of vehicle sub-frame.

JSAE review 15, p 27-33, 1994

[HER95]

S. HERNANDEZ

General sensitivity analysis for unconstrained and constrained Pareto optima in multiobjective optimization

Proceedings of the 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and AIAA/ASME Adaptative Structures Forum, Vol. 2, pp. 1132-1139, 1995

[HIE93]

K. HIERONIMUS, G. GURICH, N. WIEHAGEN

Concepts de support moteur pour un meilleur confort au ralenti

MTZ, 93, N°4, p 207-209

[HOL75]

J-H, HOLLAND

Adaptation in natural and artificial systems

The University of Michigan Press, Ann Arbor

[HOU95]

C. HOUCK, J. JOINES, M-G KAY

A genetic algorithm for function optimization : a Matlab implementation

North California State University-IE, Technical Report 95-01, 1995

[IBR87]

R. A. IBRAHIM

Structural dynamics with parameter uncertainties.

Applied mech. Rev., vol.40, n°3, p309-328, mars 1987

[IDE01]

variational analysis using high order derivatives

Publication I-DEAS VGX

[ING97]

G. INGLESE

A stochastic perturbation method for studying inverse problems of dynamics.

Communication, R. P. Gilbert, IAGA-CNR

[JAN98]

J-H. JANG, C-S. HAN

The sensitivity analysis of lateral acceleration for the front wheel steering vehicle in the frequency domain.

Int journal of vehicle design, vol 19,n°4, p415-435, 1998

[JAU00]

L. JAULIN

Rapport de soutenance de HDR

Université Paris-Sud, CNRS-Supelec

[JEO99]

T. JEONG, R. SINGH

Analytical methods of decoupling the automotive engine torque roll axis.

Journal of sound and vibration, p85-114, 2000

[JOH79]

S. R. JONHSON, J. W. SUBHEDAR

Computer optimization of engine mounting systems.

Society of automotive engineers, p 19-26, 1979

[JOL99]

J-M. JOLION

[HTTP://www.rfv.insa-lyon/proba/~jolion](http://www.rfv.insa-lyon/proba/~jolion)

[KEA96]

R.B. KEARFOTT, C. HU, M. NOVOA III

A review of preconditioners for the interval Gauss-Seidel Method

Department of Mathematics, University of Southwestern Louisiana

[KHE95]

A. KHELIFA, J.L. ROBERT, Y. OUELLET

L'approximation quadratique et l'approche Taylor-Galerkin pour la modélisation des problèmes transitoires d'advection-diffusion

Revue européenne des éléments finis, vol. 4, n°2, p127-158, 1995

[KIR01]

U. KIRSCH, P.Y. PAPALAMBROS

Accurate displacement derivatives for structural optimization using approximate reanalysis

Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., vol 190, p3945-3956, 2001

[KOL97]

M. KOLLI, K. CHANDRASHEKHARA

Non-linear static and dynamic analysis of stiffened laminated plate

Int. Journal Non-Linear Mechanics, Vol.32, n°1, p 89-101, 1997

[KOS82]

J.KOSKI, R.SILVENNOINEN

Pareto optima of isostatic trusses

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 31, pp. 265-279, 1982

[KOS87]

J.KOSKI, R.SILVENNOINEN

Norm methods and partial weighting in multicriterion optimization of structures
International Journal for Methods in Engineering, Vol. 24, pp 1101-1121

[KOY98a]

H. U. KOYLUOGLU, I. ELISHAKOFF

Data and uncertain parameters in robust analysis.
Computers & structures, vol. 67, p. 91-98, 1998

[KOY98B]

H. U. KOYLUOGLU, I. ELISHAKOFF

A comparison of stochastic and interval finite elements applied to shear frames with uncertain stiffness properties.
Computers and structures, vol.67, p91-98, 1998

[KRE01]

A KREIS

Optimisation multiobjectifs de systèmes dynamiques; application à la suspension de groupes motopropulseurs de véhicules en phase d'avant-projet.
Thèse de doctorat de l'université de Valenciennes, 2000.

[LAN85]

R. S. LANGLEY

A finite element method for the statistics of non-linear random vibration.
Journal of sound and vibration, vol 101, p41-54, 1985

[LEG98]

J. LE GUEN

Modélisation et caractérisation du véhicule pour les études de comportement dynamique
Thèse de Doctorat en Mécanique, Ecole Centrale de Lyon, 1998.

[LEE01]

K-H LEE, G-J PARK

Robust optimization considering tolerances of design variables.
Computers and structures, vol 79, p77-86, 2001.

[LEM02]

M.LEMAIRE

Fiabilité des structures mécaniques, couplage mécano-fiabiliste statistique: introduction aux méthodes de fiabilité en mécanique
Rapport PhiMeca, 27 mars 2002

[LEN92]

G. LENG, N. SRI NAMACHCHIVAYA, S. TALWAR

Robustness of non-linear systems perturbed by external random excitation.
Journal of applied mechanics, vol 59, p1015-1022, 1992

[LIN75]

J-G, LIN

Three methods for determining Pareto-optimal solutions of multiple-objective problems
Directions in Large-Scale Systems, pp. 117-138, 1975

[LIN76a]

J-G, LIN

Multiple-objective programming : Lagrange multipliers and method of proper inequality constraints
Proc. 1976 Joint AUTOMAT. Contr. Conf., pp. 517-523, 1976

[LIN76b]

J-G, LIN

Multiple-objective problems : Pareto-optimal solutions by method of proper equality constraints
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-21(5), pp. 641-650, 1976

[LIN93]

Y.J LIN, Y.Q LU, J. PADOVAN

Fuzzy logic control of vehicle suspension systems
Int. Journal of Vehicle Design, vol. 14, n°5/6, p457-470, 1993

[LIN98]

J. L. LIN, S. J. CHEN

Maximal unidirectional perturbation bounds for robustness of uncertain singular systems.
JSME International journal, série C, vol.41, n°1, p83-89, 1998

[MAD73]

K. MADSEN

On the solution of non-linear equations in interval arithmetic
Numerisk institut, danmarks tekniske hojskole, lyngby, Denmark, BIT 13, p428-433,1973

[MAH96]

B. MAHIEUX

Contribution à l'optimisation en masse de structures complexes sous contraintes vibratoires
Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes, Septembre 1996

[MAL00]

E. MALLIL, H. LAHMAN, N. DAMIL, M. POTIER-FERRY

An iterative process based on homotopy end perturbation techniques.
Computers methods applied to mechanical engineering, n°190, p1845-1858, 2000

[MAL02]

D. MALABAT

Optimisation du découplage d'un GMP et de sa ligne d'échappement en phase d'avant-projet
Mémoire CNAM mécanique des structures et des systèmes, février 2002

[MAR98]

J.P. MARCH, M.D. CROKER

Present and future perspectives of powertrain refinement

Ricardo consulting engineers limited, Shoreham-by-sea, UK, p 23-40, 1998

[MAS05]

Méthode d'aide à la conception en présence d'imprécisions

F. MASSA, T.TISON, B.LALLEMAND

Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Humaines, UMR 8530, Université de Valenciennes

7ème Colloque national en calcul des structures.

[MAT97]

H. G. MATTHIES, C. E. BRENNER, C. G. BUCHER, C. G. SOARES

Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solid – stochastic finite element.

Structural safety, vol.19, n°3, p283-336, 1997

[MAT98]

MATLAB

Optimization Toolbox Users's Guide, The MathWorks

[MCW99]

S. McWILLIAM

Anti-optimisation of uncertain structures using interval analysis.

Computers and structures, vol. 79, p.421-430, 2001

[MIC92]

Z. MICHALEWICZ

Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs

Springer-Verlag, AI Series, New York, 1992

[MIC94a]

Z. MICHALEWICZ, N. ATTIA

Evolutionary optimization of constrained problems

Proceedings of the 3rd Annual Conference on Evolutionary Programming, eds. A. V. Sebald and L. J. Fogel, River Edge, NJ, World Scientific Publishing, pp. 98-108, 1994

[MIC94b]

Z. MICHALEWICZ, T-D. LOGAN, S. SWAMINATHAN

Evolutionary operators for continuous convex parameter spaces

Proceedings of the 3rd Annual Conference on Evolutionary Programming, eds. A. V. Sebald and L. J. Fogel, River Edge, NJ, World Scientific Publishing, pp. 84-97, 1994

[MIC95a]

Z. MICHALEWICZ

A survey of constraint handling techniques in evolutionary computation methods

Proceedings of the 4th Annual Conference on Evolutionary Programming, MIT Press, Cambridge, MA, 1995

[MIC95b]

Z. MICHALEWICZ, G. NAZHIYATH

Genocop III : a co-evolutionary algorithm for numerical optimization problems with non-linear constraints

Proceedings of the 2nd IEEE ICEC, Perth, Australia, 29 Nov. – 1 Dec. 1995

[MOR96]

H. MORVAN

Contribution à l'élaboration d'un optimiseur de structures mécaniques sous contraintes statiques et/ou dynamiques

Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes, Janvier 1993

[MIT98]

M. MITSCHKE, B. KLINGNER

Confort vibratoire en automobile.

Technique des vibrations, confort vibratoire, ATZ, vol 1000, n°1, p 18-24, 1998

[MOR83]

I. MORITA, Y. NOZAWA, K. ARAI

On noise and vibration from engines transversely installed in front wheel drive cars.

JSAE review, p 24-31, novembre 1983

[MUL94A]

M. MULLER, U. WELTIN

The effect of engine mounts on the noise and vibration behavior of vehicles.

International congress & exposition, Detroit, Michigan, p1-10, mars 1994

[MOO66]

R.E. MOORE

Interval analysis

Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J

[MUL97]

M. MULLER, M. HEIDRICH, U. BERNARD

The design of engine mount systems

ATZ Automobiltechnische Zeitschrift 99, p11-14, 1997

[MUS00]

G. MUSCOLINO, G. RICCIARDI, N. IMPOLLONIA

Improved dynamic analysis of structures with mechanical uncertainties under deterministic input.

Probabilistic engineering mechanics, n°15, p199-212, 2000

[NEU90]

A. NEUMAIER

Interval methods for systems of equations

Encyclopedia of mathematics and its applications

[NEU93]

A. NEUMAIER

Global, rigorous and realistic bounds for the solution of dissipative differential equations.
Part I: theory

[NEU97]

A. NEUMAIER

Scaling and structural condition numbers
Institut für Mathematik, Universität de Vienne, 1997

[OSY94]

A. OSYCZKA, W. KUCHTA, R. CZULA

Computer aided multicriterion optimization system for computationally expensive functions
Structural Optimization, Vol. 8, pp. 37-41, 1994

[OUD94]

A. OUDSHOORN

Contribution à l'optimisation des structures mécaniques sous contraintes. Application aux structures des véhicules de transport guidés
Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes, Juillet 1994

[PAN00]

C. P. PANTELIDES, B. C. BOOTH

Computer-aided design of optimal structures with uncertainty.
Computer and structures, vol. 74, p293-307, 2000

[PAP96]

M. PAPADRAKAKIS, V. PAPADOPOULOS

Robust and efficient methods for stochastic finite element analysis using Monte-Carlo simulation.
Computers methods in applied mechanics and engineering, vol.134, p325-340, 1996

[PEE81]

H. PEEKEN, C. TROEDER, G. DIEKHANS, A. LASCHEET

Etudes dynamique du groupe motopropulseur des véhicules automobiles.
Antriebstechnik n°7-8, p1-14, juillet- août 1981

[PER94]

A. PERRIOT, J-L. RAYNAUD

Incertitudes sur les caractéristiques modales.
Mécanique industrielle et matériaux, vol. 47, n°2, p329-331, juin 1994

[PLE01]

G. PLESSIS

Utilisation du formalisme flou pour l'identification modale à partir de données expérimentales incertaines
Thèse de doctorat de génie mécanique, université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

[POU95]

D. POUPARD

Confort vibratoire des automobiles

Cours du CLESIA, Paris, 1995.

[QIU98]

Z. QIU., I. ELISHAKOFF

Anti-optimization of structures with large uncertain-but-non-random parameters via interval analysis.

Computer. Methods Applied to Mechanical Engineering, n°152, p361-372, 1998

[QIU01]

ZHIPING QIU, ISAAC ELISHAKOFF

Anti-optimization technique – a generalization of interval analysis for non-probabilistic treatment of uncertainty.

Chaos, solitons and fractals, n°12, p1747-1759, 2001

[RAC82]

R. RACCA

How to select power-train isolators for good performance and long service life.

International Off-Highway Meeting & exposition, Milwaukee, Wisconsin, sept 1982

[RAO84]

S-S. RAO

Design of vibration isolation systems using multiobjective optimization techniques

ASME Paper, N°84-DET-60, 1984

[RAO87]

S.S. RAO

Multi-objective optimization of fuzzy structural systems

International journal for numerical methods in engineering, vol. 24, p 1157-1171

[REV01]

N. REVOL

Introduction à l'arithmétique par intervalles

Rapport de recherche, INRIA, ISSN 0249-6399

[RIC99]

F. RICO

Multiple precision computation of interval elementary functions

Part of the SPIE Conference on advance signal processing algorithms, architectures and implementations, Denver, Colorado, juillet 1999

[RIC02]

H. RICHTER, G. STEIN

On taylor series expansion for chaotic nonlinear systems

Chaos, Solitons and fractal, vol. 13, p1783-1789, 2002

[ROH95]

J. ROHN

Checking bounds on solutions of linear interval equations is NP-Hard.

Linear algebra and its applications, vol. 223, p589-596, 1995

[ROH97]

J. ROHN

Overestimations in bounding solutions of perturbed linear equations

Linear algebra and its applications, vol. 262, p55-65, 1997

[RUM95]

S. M. RUMP

Verified solution of large systems and global optimization problems

Journal of computational and applied Mathematics, vol. 60, p201-218, 1995

[RUM98]

S. M. RUMP

Structured perturbations and symmetric matrices

Linear algebra and its applications, vol.278, p121-132, 1998

[SCH98]

HANS-EBERHARD SCHOLZ

The examination of non-linear stability and solvability of the algebraic equations for the implicit Taylor method

Applied numerical mathematics 28, p439-458, 1998

[SHI93A]

C.J. SHIH, T.K. LAI

Fuzzy weighting optimization with several objectives functions in structural design

Computers & Structures, vol.52, n°5, p 917-924, 1994

[SET91]

K. SETO, K. SAWATARI, A. NAGAMATSU, M. ISHIHAMA, et K. DOI

Optimum design method for hydraulic engine mounts

SAE Technical Paper Series, SAE 911055, 1991

[SIN00]

R. SINGH

Rubber & hydraulic mounts.

Short course for PSA, novembre 2000.

[STA95]

W. STADLER

Caveats and boons of multicriteria optimization

Microcomputers in Civil Engineering, Vol. 10(4), pp. 291-299, 1995

[SWO84]

B. SWOBODA

Mécanique des moteurs alternatifs.

Publications de l'institut français du pétrole

[TAR98]

M. TARRAZO

Calculating uncertainty intervals in approximate equation systems.

Applied Numerical Mathematics, vol. 27, p59-67, 1998

[TAK00]

I. TAKEWAKI

Optimal damper placement for critical excitation.

Probabilistic engineering mechanics, n°15, p317-325, 2000

[TAM96]

H.TAMAKI, H.KITA, S.KOBAYASHI, S

Multi-objective optimization by genetic algorithms : a review

Proceedings of the 1996 International Conference on Evolutionary Computation (ICEC'96), Nagoya, Japan, pp. 517-522

[TIB95]

B. TIBKEN, E. P. HOFER

Simulation of controlled uncertain non-linear systems.

Applied mathematics and computation, vol 70, p329-338, 1995

[TON98]

F. TONON, A. BERNARDINI

A random set approach to the optimization of uncertain structures.

Computers and structures, n°68, 583-600, 1998

[TON01]

FULVIO TONON, ALBERTO BERNARDINI, ISAAC ELISHAKOFF

Hybrid analysis of uncertainty: probability, fuzziness and anti-optimisation

Chaos, Solitons & Fractals 12, p1403-1414, 2001

[TRE03]

S.A. TRELLEBORG

Formation caoutchouc anti-vibratoire

Présentation fournisseur sur les élastomères. 20/11/2003

[TSE90]

C-H.TSENG, T-W. LU

Minimax multiobjective optimization in structural design

International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, pp. 1213-1228, 1990

[VIB04]

VIBRATEC (L. DUVERMY)

Evaluation d'une méthode de détermination de la matrice d'inertie d'un GMP monté sur véhicule.

Rapport d'étude. Société Vibrattec.

[WEN75]

Y-K WEN, M. ASCE

Approximate method for non-linear random vibration.

Journal of the engineering mechanics division, p389-401, août 1975

[WOL00]

M.A. WOLFE

Interval mathematics, algebraic equations and optimization

Journal of computational and applied Mathematics, vol. 124, p263-280, 2000

[ZHA99]

L. ZHANG, J. W. ZU, Z. ZHENG

The stochastic Newmark algorithm for random analysis of multi-degree of freedom non-linear systems.

Computers and structures, vol 70, p557-568, 1999

ANNEXES

A. PROCESSUS DE FABRICATION DES ELASTOMERES ET IMPRECISIONS

A.1 La fabrication

A.1.1 Le mélangeage

L'élément de base des élastomères reste le caoutchouc, cependant, pour que celui-ci devienne un produit fini, « industriellement » utilisable, il doit subir des transformations lui permettant d'acquérir le comportement attendu.

Le caoutchouc le plus connu est celui provenant de l'hévéa, il en existe une grande variété issue de la chimie du pétrole. Ainsi, les industries produisant de l'élastomère utilisent cette grande diversité de caoutchouc dont les propriétés diffèrent selon leurs utilisations. Par exemple: les caoutchoucs de butadiène ont la faculté de bien résister à l'abrasion, ceux de chloroprène aux produits gras et les terpolymères d'éthylène au vieillissement thermique.

La première étape de fabrication consiste à malaxer le caoutchouc dans le but d'y introduire différents éléments (noir de carbone, plastifiant, oxyde de zinc, soufre...) dans un ordre déterminé, d'abord en mélangeur interne (cf. Figure A-1), puis en mélangeur à cylindre (mélangeur externe). Ces opérations doivent être réalisées rapidement afin d'empêcher à la fois une dégradation trop prononcée du caoutchouc et un échauffement trop important.

Le mélangeur interne prépare le caoutchouc à recevoir les différents additifs puis les malaxe selon des critères déterminés de température, puissance et durée. Le mélangeur externe finalise l'homogénéisation, puis le refroidit.

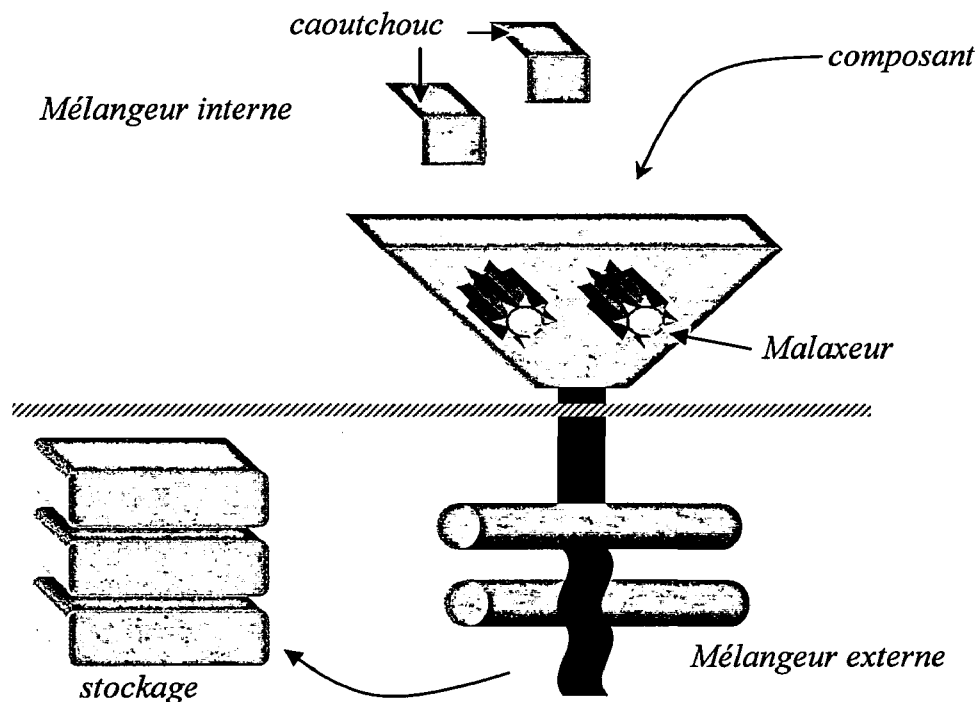


Figure A-1 : Schéma de principe de la phase de mélangeage du caoutchouc.

Les principaux additifs intervenant dans la fabrication des élastomères sont les noirs de carbone et les plastifiants. L'addition de ces éléments a pour but de modifier les propriétés de l'élastomère. Un des problèmes principal est de trouver le meilleur dosage afin d'obtenir le bon compromis pour les propriétés du matériau. En effet, en prenant le cas du noir de carbone, plus son taux est élevé dans le mélange, plus la rigidification est importante, par contre, son allongement diminue (cf. Figure A-2).

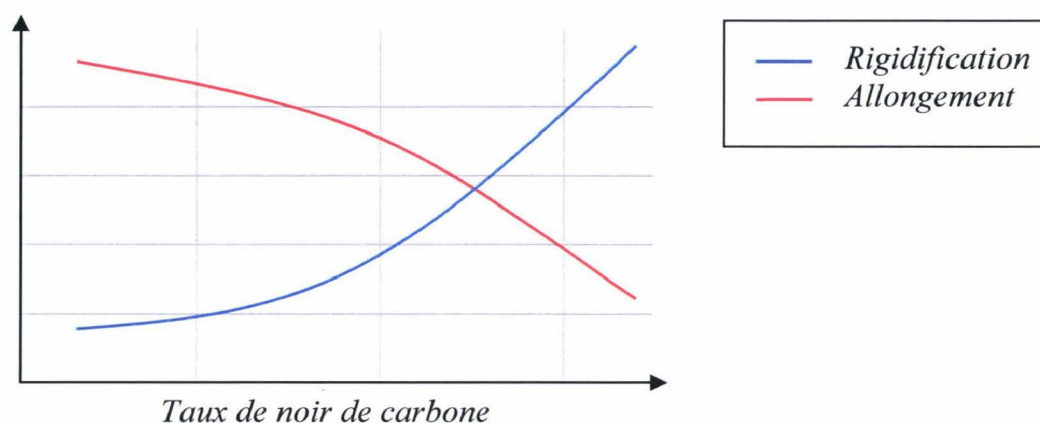


Figure A-2 : Influence du noir de carbone sur les propriétés des élastomères.

A.1.2 Process de fabrication d'un composant anti-vibratoire

Le cycle de fabrication d'un composant est décrit par la Figure A-3.

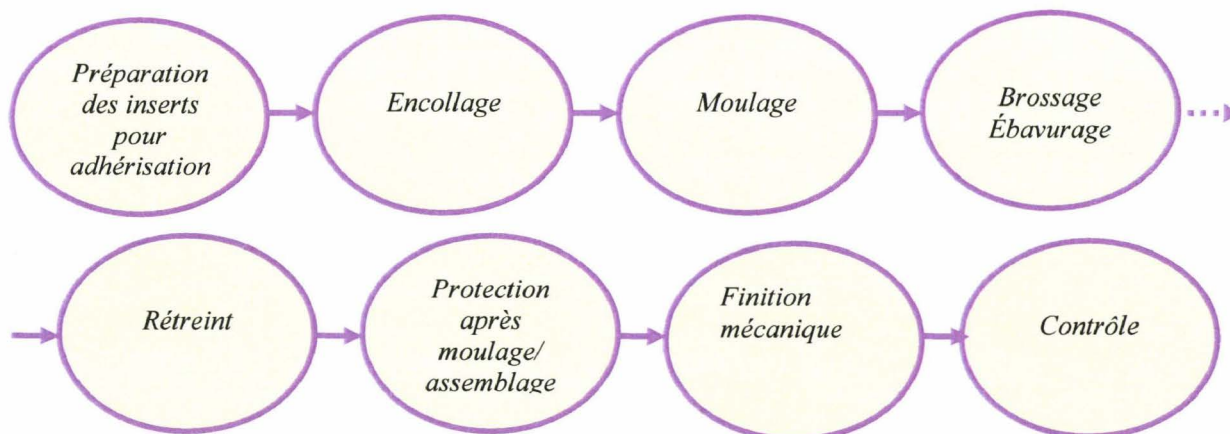


Figure A-3 : Cycle de fabrication d'un composant anti-vibratoire.

A.1.2.1 L'adhésion

Certaines pièces nécessitent que des parties métalliques soient directement liées au caoutchouc. Une technique complexe, l'adhésion, permet le collage par agents chimiques d'une armature métallique ou plastique à un élastomère. Elle s'effectue lors du moulage de la pièce. Cette technique, en fonction du type d'insert, nécessite une préparation spécifique (cf. Figure A-4).

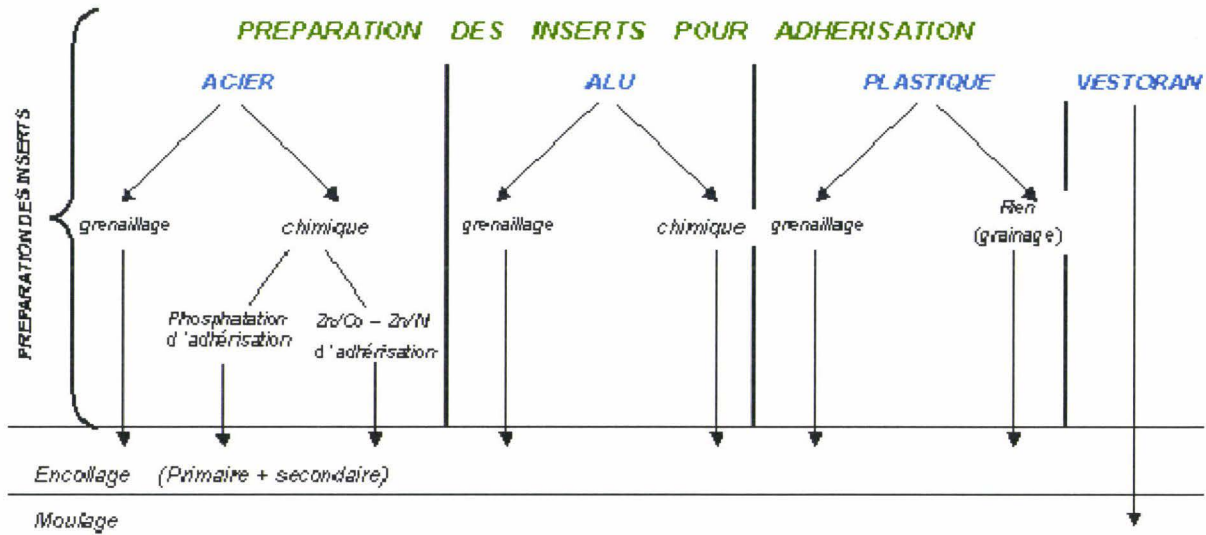


Figure A-4 : mode de préparation des inserts pour adhérisation.

A.1.2.2 Process de moulage

Le moulage des pièces élastomères repose sur un processus physique essentiel : la vulcanisation. La vulcanisation est indispensable car c'est elle qui donne au caoutchouc ses propriétés d'élasticité. L'élastomère étant constitué de grandes chaînes macromoléculaires, on réalise entre celles-ci des liaisons chimiques sous forme de ponts soufrés. Le produit ainsi obtenu est un réseau tridimensionnel de chaînes agissant les unes sur les autres, comme l'illustre Figure A-5.

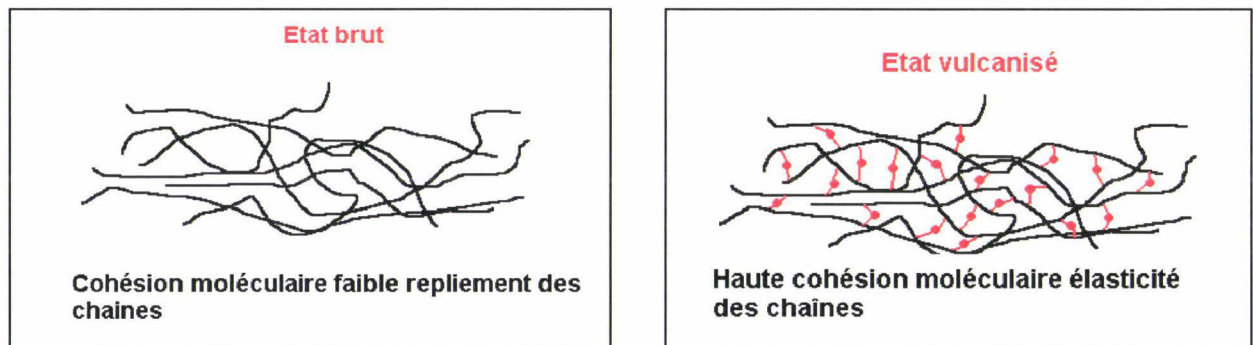


Figure A-5 : schéma de principe de la vulcanisation.

Cette étape s'effectue en même temps, voire immédiatement après, que la mise en forme du caoutchouc. Elle nécessite une température comprise entre 170°C et 200°C.

Les propriétés du caoutchouc sont ainsi essentiellement déterminées par la température et la durée de vulcanisation et la quantité de soufre. Les différentes combinaisons des différents constituants déterminent la nature des chaînes et leur densité, donc, par voie de conséquence, les propriétés chimiques (vieillessement), les propriétés mécaniques et la vitesse de réticulation.

Les Figure A-6 et Figure A-7 montrent l'influence du pontage et donc de la vulcanisation sur le vieillissement thermique et sur les propriétés du matériau.

Pontage	Energies de rupture (kJ/mol)
C-C Peroxyde	346
C-S-C monosulfure	285
C-S-S-C bisulfure	268
C-S _x -C polysulfure	< 268

Figure A-6 : Influence du pontage sur le vieillissement thermique.

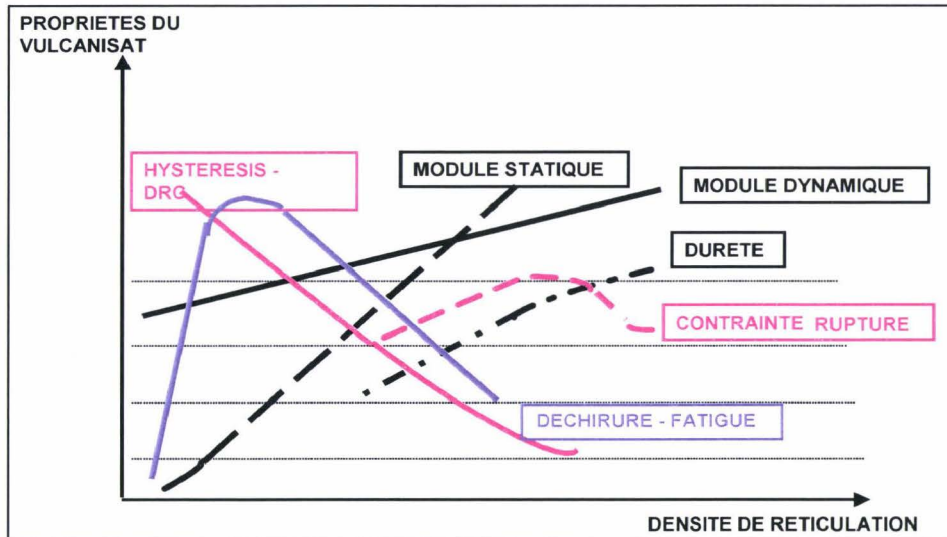


Figure A-7 : Influence du pontage sur les propriétés du matériau.

A.1.2.3 Mise en forme du matériau

Il existe deux processus de transformation de l'élastomère en pièce finie ou produit fonctionnel selon le type de pièces que l'on veut obtenir :

- *l'extrusion*

L'extrusion est utilisée pour la fabrication de pièces produites en grandes longueurs, avec une section constante ou quasi-constante, telles que les durits, les profilés et les raccords.

Cette technique consiste à pousser le caoutchouc par l'action d'une vis sans fin dans une forme métallique creuse, appelé filière, ayant la forme du profilé ou du raccord à obtenir. A l'inverse des autres techniques, la vulcanisation s'effectue après l'extrusion.

- *le moulage*

Le moulage est le moyen de production le plus utilisé pour la mise en forme des élastomères, c'est le mode de mise en forme utilisé pour réaliser les parties élastomères des suspensions moteurs. Son principe consiste en l'injection sous pression d'une masse de caoutchouc dans une empreinte elle-même maintenue sous pression via le moule. La Figure A-8 montre le procédé schématisé d'injection d'élastomère dans un moule.

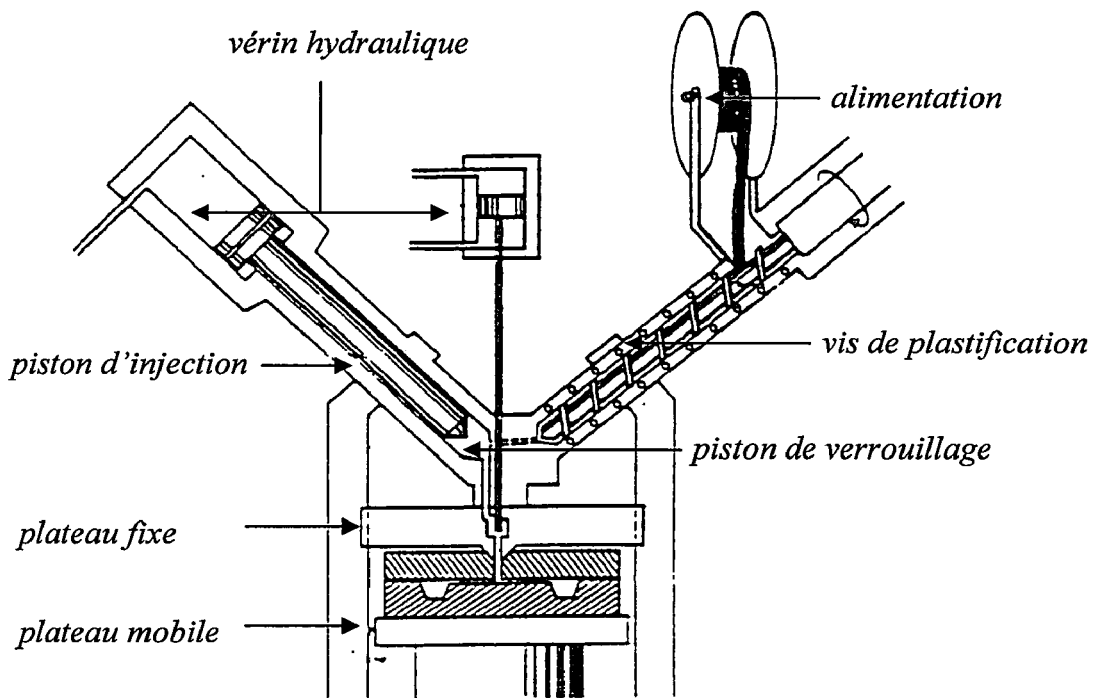


Figure A-8 : Process de moulage par injection.

A.1.2.4 Le retrait

Il apparaît après le démoulage de la pièce. Le retrait est un phénomène physique qui a pour conséquence la diminution de volume des pièces et une apparition de contraintes dans la matière et aux interfaces.

Sa conséquence principale est la modification de la géométrie de la pièce et surtout une diminution de l'endurance de la pièce.

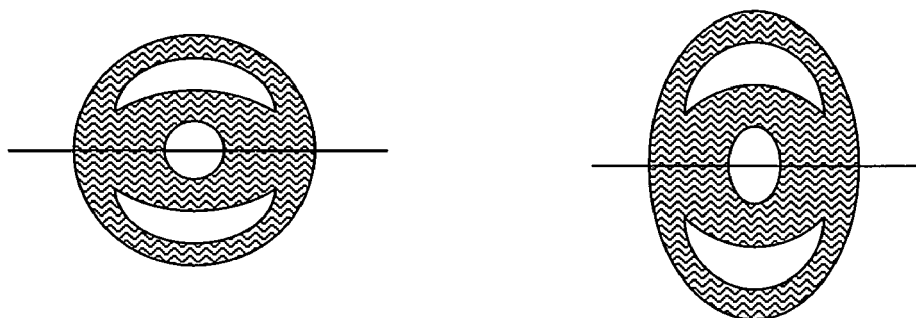


Figure A-9 : Exemple de retrait sur une suspente d'échappement en élastomère.

Pour pallier ce problème, il existe deux méthodes spécifiques. Soit le retrait est directement intégré dans la géométrie et prévu avant le moulage de sorte que la pièce obtenue après repos corresponde à la géométrie désirée, soit on contraint la pièce pendant le repos de manière à compenser les contraintes apparaissant dans la matière.

A.1.2.5 Caractérisation de l'élastomère après moulage

Afin de pouvoir modéliser le comportement du caoutchouc avec une fidélité maximale, les propriétés de celui-ci ont été quantifiées et contrôlées par les grandeurs et les expressions ci-dessous :

- la dureté qui caractérise la déformation élastique irréversible produite par un poinçon sous une charge donnée. Elle s'exprime en degrés DIDC ou en degrés SHORE. Cette grandeur, facilement mesurable, n'est guère employée dans les applications mécaniques car elle est trop imprécise et n'a qu'une valeur indicative.
- le K2 qui désigne la raideur de l'élément mesurée à 2 Hz avec une amplitude de ± 0.5 millimètres.
- le Tg2 qui désigne la tangente de l'angle de phase mesurée dans les mêmes conditions que le K2.
- le TV indiquant la vitesse de vulcanisation.

A.1.2.6 Défaut de moulage et dispersions

A l'issue du moulage, des défauts apparaissent sur les pièces affectant de manière plus ou moins sensible les propriétés de la pièce. Ces défauts sont caractérisés par une modification macroscopique de l'aspect ou de la texture de la pièce. Ce paragraphe se propose d'énumérer les plus connus de ces défauts et de caractériser les dispersions qu'ils peuvent engendrer :

- le manque de matière : la pièce obtenue est incomplète et partiellement remplie de caoutchouc. Ce défaut est essentiellement dû à un manque de matière lors de l'injection ou à un mauvais démoulage,
- les défauts d'air : ces défauts sont caractérisés par un aspect spongieux, voire poisseux de la pièce. Leurs origines sont essentiellement liées à un mauvais mélange matière ou à une vulcanisation mal contrôlée,
- les grilles : elles sont caractérisées par un aspect grumeleux en surface de la pièce. Ses origines sont les mêmes que pour les défauts d'air,
- les coupures, déchirures ou arrachement : ce sont des amorces de coupure ou des arrachements complets d'une partie de la pièce. Elles sont liées à un problème lors de la phase de démoulage,
- les décollements : ils ne concernent que les pièces nécessitant d'être collées dans un insert. Ces défauts sont liés à une mauvaise adhésion de l'élastomère,
- les déformées : la pièce obtenue n'a plus sa géométrie attendue. Ce phénomène est lié à un problème de température de la vulcanisation ou un problème dans la phase de retrait,
- la porosité : les pièces obtenues ont pour caractéristiques d'apparaître avec des trous de taille plus ou moins importante.

Ainsi, au vue de cette partie, il apparaît évident que les caractéristiques des pièces obtenues peuvent être sujettes à des dispersions non négligeable lié au process de moulage.

Ces dispersions sont donc le fait d'imprécisions liées soit au mélange, soit à la pièce elle-même. Les dispersions dues au mélange peuvent être inhérentes soit à des imprécisions sur le dosage des matières premières, soit au process de fabrication même. On estime que

l'impact de ces dispersions sur le K2 et le Tg2 est de l'ordre de $\pm 6\%$. Les dispersions pièces quant à elles, incluent les dispersions sur les mélanges et celles liées au process de fabrication. Ainsi, le process de fabrication est susceptible de générer des imprécisions dans les données des cahiers des charges. Tout d'abord, la température du moule peut ne pas être complètement homogène dans son sein et il est courant de noter un écart de températures significatif entre les empreintes extérieures et intérieures). Le cycle de fabrication peut également être soumis à des ruptures d'alimentations ou des dysfonctionnements perturbant le bon déroulement du process. Enfin et surtout, la géométrie des empreintes du moule est soumise à des tolérances de fabrication ainsi que les inserts et éventuellement les assemblages. L'ensemble de ces perturbations est estimé à une dispersion moyenne sur la raideur statique de l'ordre de $\pm 15\%$.

La Figure A-10 illustre l'impact des dispersions liées aux tolérances de fabrication des empreintes sur la raideur statique.

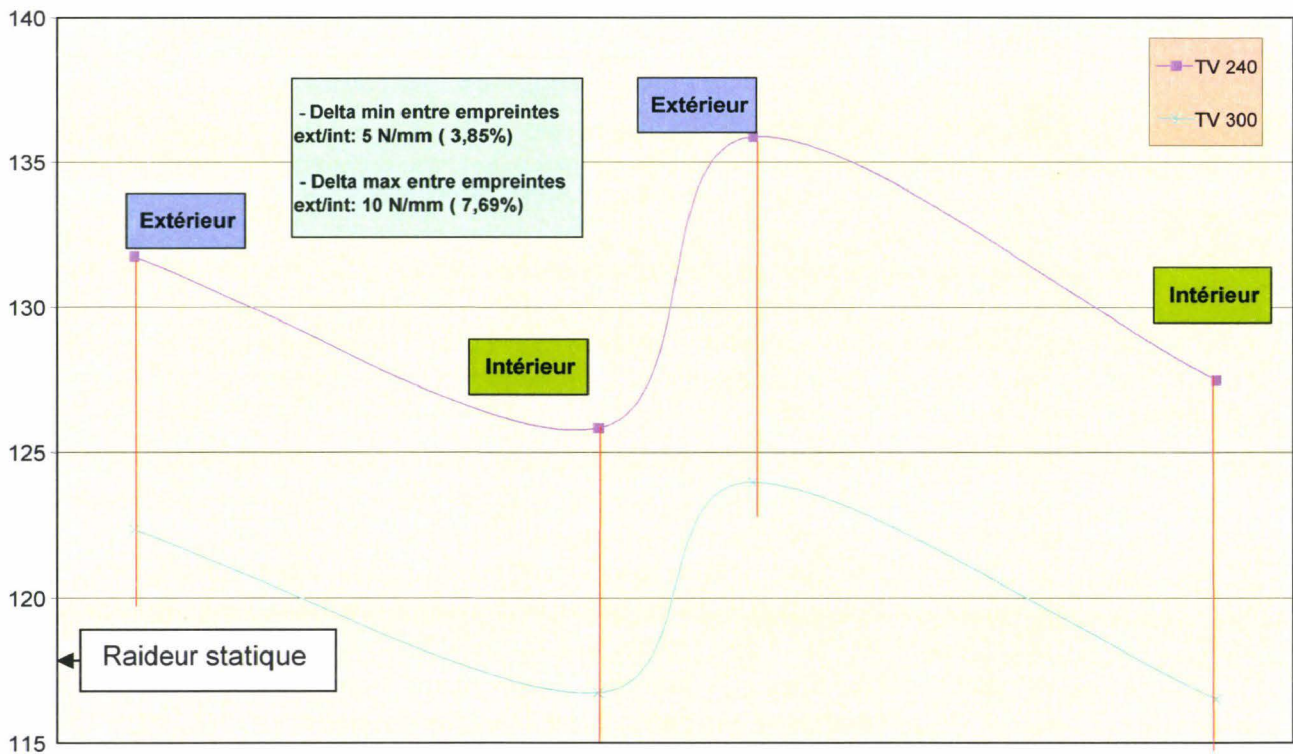


Figure A-10 : Dispersion de la raideur statique lié à la tolérance des empreintes de moulage.

A.1.2.7 Conclusion sur la mise en forme du caoutchouc

Le comportement des élastomères est essentiellement caractérisé par deux grandeurs que sont sa rigidité et son amortissement visqueux mais il est aussi influencé par divers paramètres mis en jeu au cours de l'élaboration et de l'utilisation des élastomères tels que les conditions de mélangeage, la vulcanisation et le facteur de forme du caoutchouc.

A.2 Comportement mécanique des élastomères et accommodation visco-élastique

La principale propriété des éléments élastomères est l'hyper-élasticité caractérisée par l'acceptation de grande déformation de manière réversible. Ce phénomène est illustré par la Figure A-11.

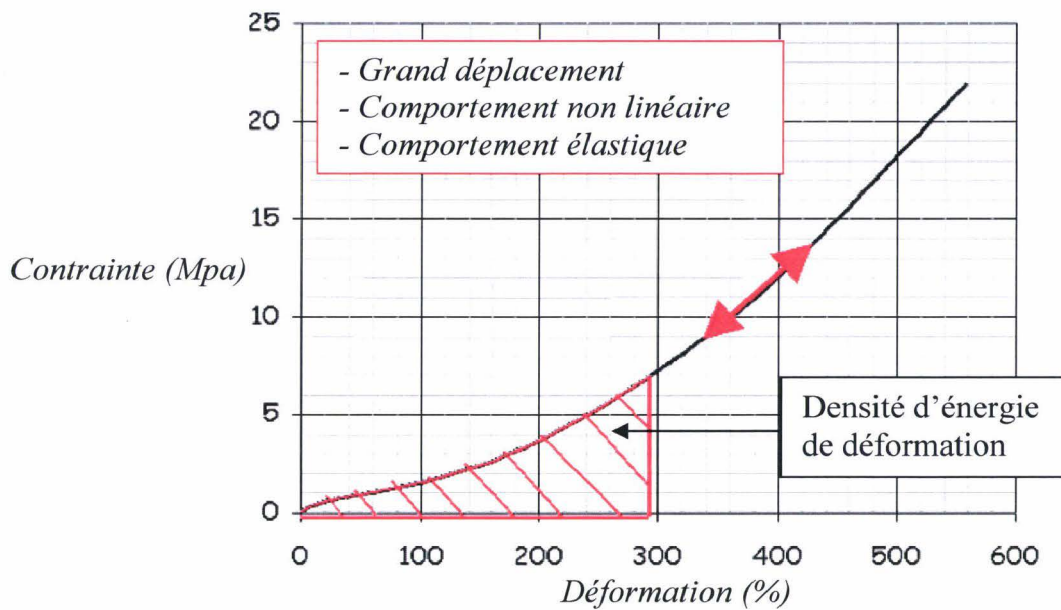


Figure A-11 : Caractérisation du comportement hyper-élastique des élastomères.

A.2.1 Caractérisation du comportement mécanique et imprécisions

A.2.1.1 Les modules statiques

Dans les applications pratiques, la principale propriété exploitée des élastomères est leur capacité à se déformer de façon importante dans toutes les directions.

On parvient à caractériser les relations existant entre les déformations et les contraintes engendrées, en utilisant un certain nombre de paramètres dont les plus courants sont les suivants :

- le module statique de traction-compression, utilisé pour établir le module d'Young ($E0$), se définit par la pente de la tangente à l'origine de la courbe contrainte-déformation en traction ou en compression (les valeurs du module $E0$ en traction ou en compression sont quasiment identiques).
- le module statique de cisaillement ou de glissement G se définit comme le produit de la contrainte par la déformation unitaire, obtenu en sollicitant tangentiellement une éprouvette de caoutchouc.

Ces deux modules varient suivant la composition et la dureté des mélanges. La déformation du caoutchouc, reste dans le domaine élastique réversible et se trouve donc en relation avec le module d'Young.

A.2.1.2 Quasi-incompressibilité

En plus d'une grande élasticité, les caoutchoucs possèdent la propriété de quasi-incompressibilité. En effet, leur coefficient de compressibilité est du même ordre de grandeur que celui de l'eau. Aussi, le volume est-il une donnée importante pour le calcul des pièces élastomères : plus l'espace libre est réduit, plus les possibilités de déformation sont diminuées et, par conséquent, plus la rigidité augmente.

A.2.2 Propriétés dynamiques

A.2.2.1 Fluage et relaxation

Les caoutchoucs ne sont pas totalement élastiques : il existe une composante visqueuse. Cette viscoélasticité se manifeste par essentiellement par les phénomènes de fluage et de relaxation. Ceux-ci sont liés à la modification du comportement de l'élastomère lorsqu'il est sollicité de manière continue.

Le fluage est caractérisé par l'accommodation de l'élastomère à un effort imposé sur une durée. Ainsi, si on soumet un élastomère à un niveau de contrainte constant pendant un temps défini suffisamment long, le déplacement résultant augmente. Ce phénomène est illustré par la Figure A-12.

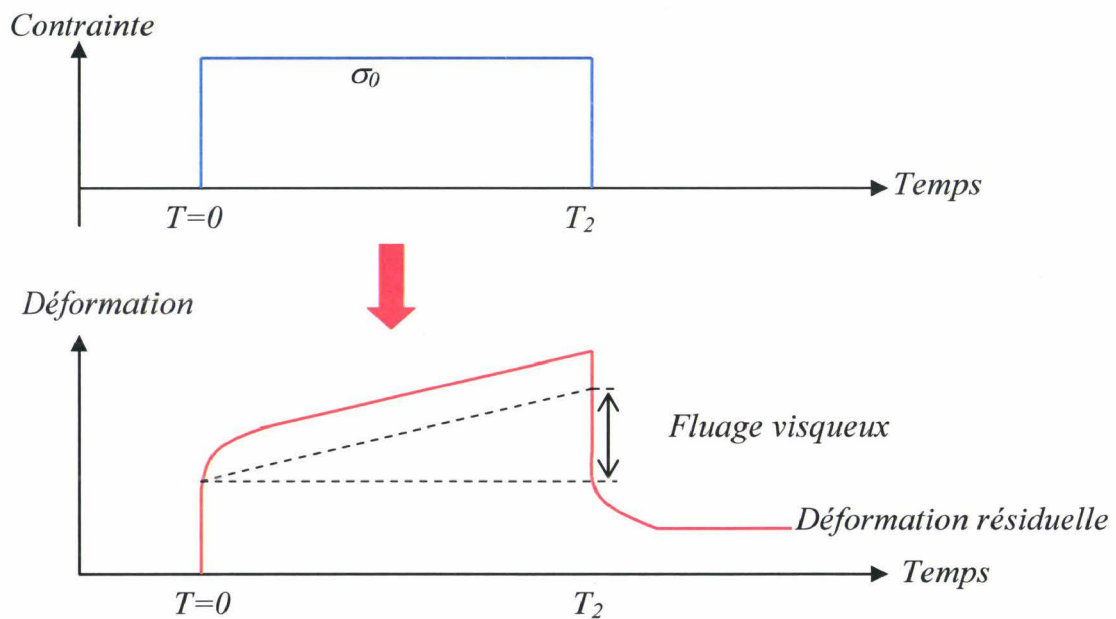


Figure A-12 : Fluage irréversible d'un élastomère.

Ce phénomène n'est pas systématique et n'apparaît que pour un niveau de contrainte suffisamment élevé. Son origine principale est la rupture des chaînes soufrées créées lors de la vulcanisation. Ce phénomène est prépondérant dans la conception d'une suspension moteur puisqu'une cale de support GMP est un élément susceptible d'être soumis à ce type de sollicitation. Il est donc susceptible de fluer ce qui aura pour impact évident la modification des caractéristiques de l'élastomère et donc des prestations.

La relaxation, à l'instar du fluage, est un phénomène physique lié à la visco-élasticité du matériau. Si un déplacement est imposé pendant un temps assez long à l'élastomère, celui-ci voit l'effort résultant de ce déplacement diminuer. La cause de ce phénomène est la même que pour le fluage. La Figure A-13 illustre ce principe.

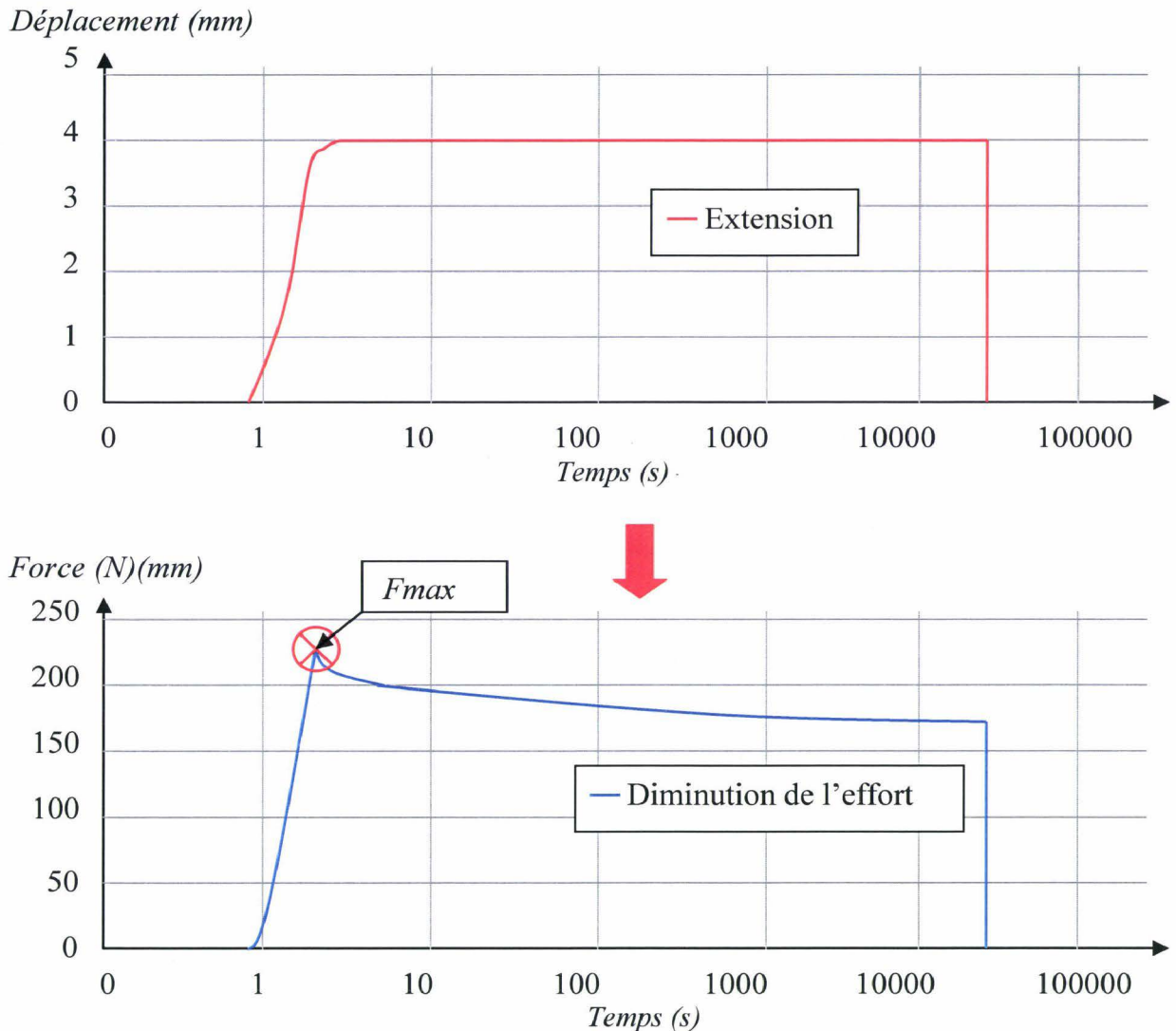


Figure A-13 : Caractérisation de la relaxation d'un élastomère.

Le phénomène de relaxation est à considérer avec attention lors du dimensionnement d'une cale de suspension GMP. En effet, une des fonctions principales d'une suspension moteur est de supporter le poids du GMP or à un poids donné correspond un déplacement donné de la cale. Ce déplacement est susceptible d'être appliqué à la cale durant la vie entière du véhicule. De ce fait, on peut facilement supposer que la cale sera sujette à subir ce phénomène qui n'est jusqu'alors pas pris en compte dans le dimensionnement numérique d'un support.

A.2.2.2 Cycle d'hystérésis et amortissement

Sur le diagramme effort-déformation (cf. Figure A-14) d'une éprouvette en caoutchouc, la courbe retour *ADO* ne se superpose pas avec la courbe aller *OCA*. Nous sommes donc en présence d'un phénomène d'hystérésis traduisant l'existence de frottements internes qui génèrent la transformation d'une partie de l'énergie mécanique en énergie calorifique. Cette caractéristique souligne le pouvoir amortissant du caoutchouc par dégradation de l'énergie mécanique. Ainsi sur le schéma, l'aire *OCAB* représente l'énergie absorbée pendant la phase de chargement aller. L'aire *BADO* représente l'énergie restituée pendant la phase retour. La différence représente l'énergie dissipée par l'amortissement.

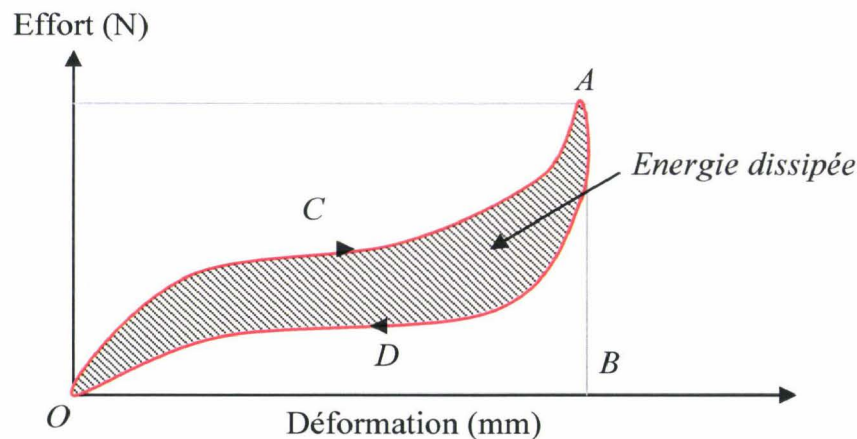


Figure A-14: Cycle d'hystérésis.

Ce phénomène est plus que problématique dans le processus de dimensionnement d'une suspension GMP. En effet, lorsque le concepteur étudie son système, il ne connaît pas le chargement de la cale et ne sais donc pas si il se situe sur la partie « montante » de la courbe ou sur le partie « descendante ». Aussi, une imprécision existe sur le comportement de la cale influant ainsi sur la prestation de la suspension.

A.2.2.3 Cas des petites vibrations et rigidification dynamique

Un autre phénomène de perturbations lié au comportement visco-élastique des élastomères est le cas des petites vibrations. Si un effort cyclique de petite amplitude est imposé au matériau, il est remarqué que cet effort est déphasé par rapport au déplacement. Ce phénomène a pour conséquence une rigidification dynamique de l'élastomère difficilement intégrable dans le dimensionnement de la suspension (cf Figure A-15).

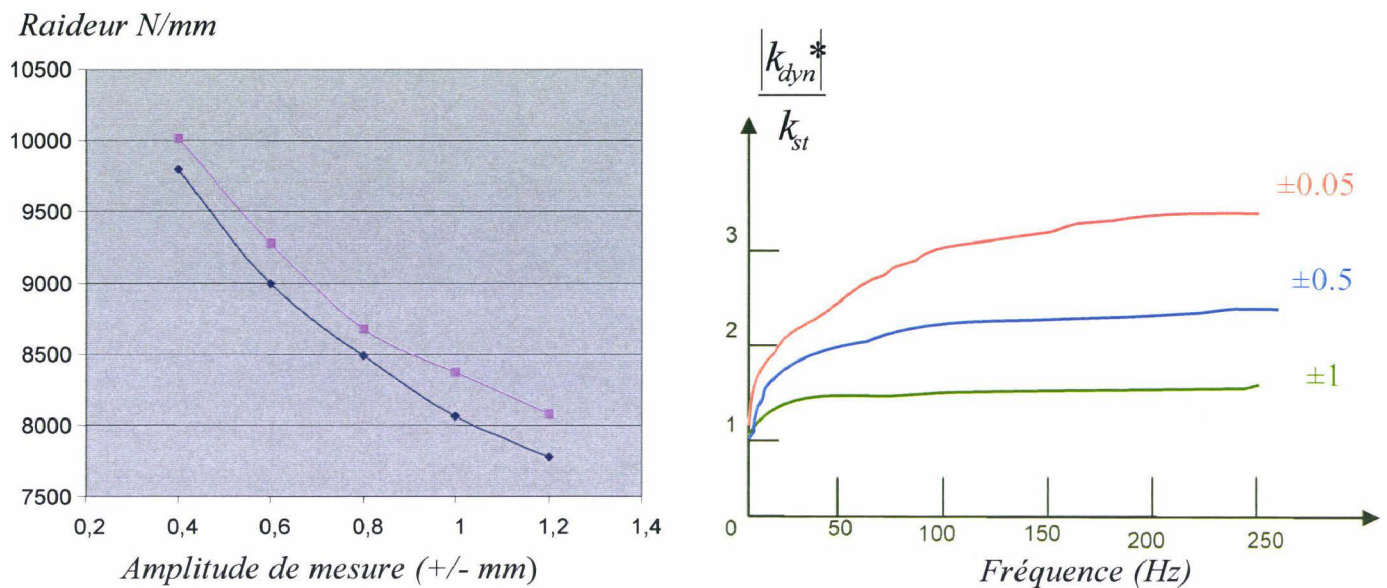


Figure A-15 : Petites vibrations et rigidification dynamique.

A.2.2.4 Effet Mullins

Le phénomène d'accommodation, appelé effet Mullins, est attribué à la rupture plus ou moins réversible de liaisons faibles de structure. L'effet Mullins intervient après un nombre limité de chargements et est modifié de façon sensible la réponse de l'élastomère. Aussi, dans les applications pratiques, la rigidité n'est mesurée qu'au second ou au troisième cycle. La Figure A-16 ci-dessous illustre cette caractéristique du caoutchouc.

En résumé, l'effet Mullins désigne l'accommodation de l'élastomère en fonction du nombre de cycles de sollicitation et de l'amplitude de sollicitation maximum vue par la pièce. Cette accommodation se traduit par une diminution de la raideur et une diminution de l'hystérésis.

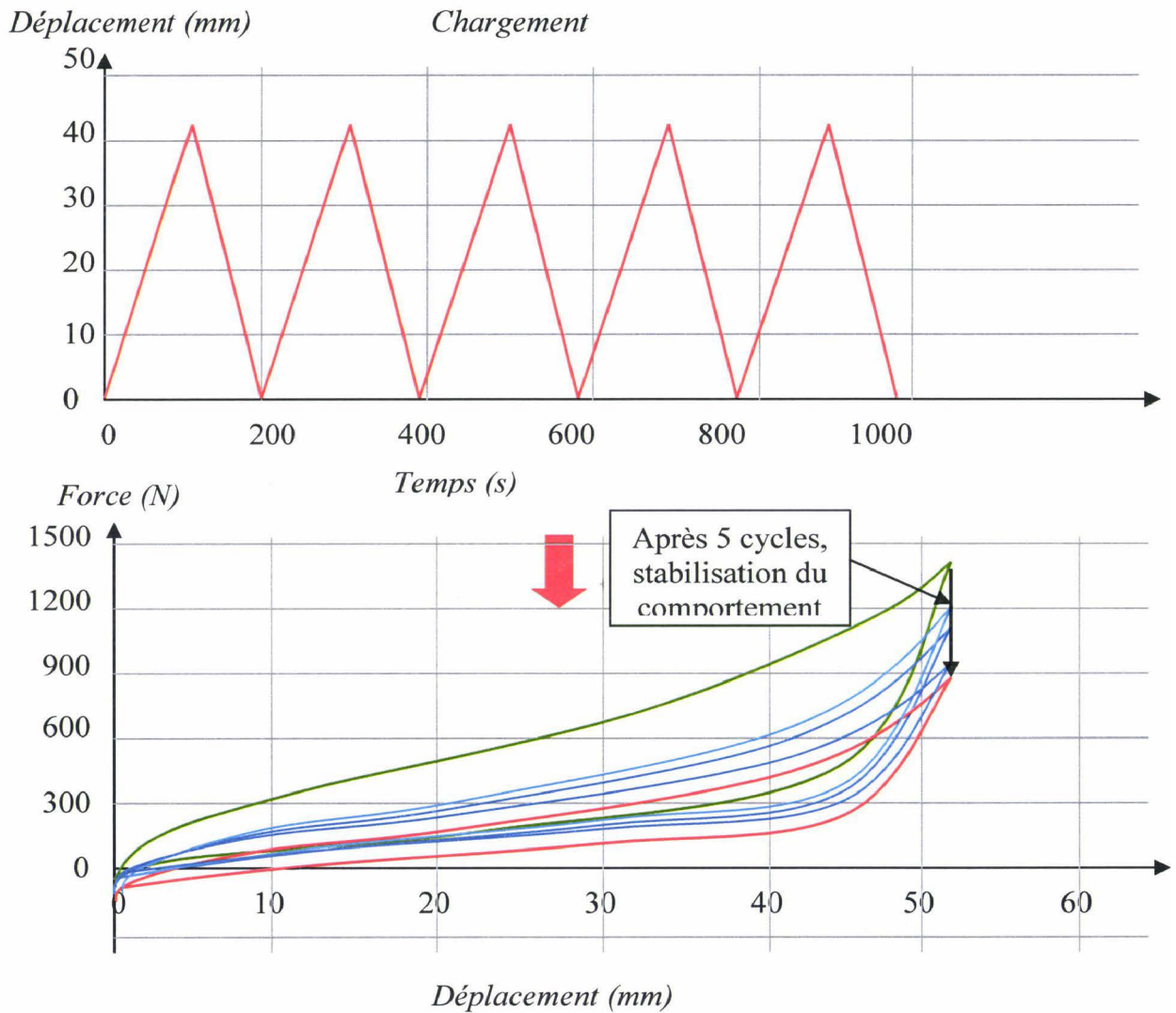


Figure A-16 : Effet Mullins après un cycle de cinq chargements.

A.2.3 Conclusion sur les effets de la viscoélasticité sur les élastomères

Les propriétés dynamiques du caoutchouc en soulignent certes tout son intérêt mais aussi toute sa complexité. Elles font apparaître un comportement visco-élastique qui confère des propriétés d'amortissement intéressantes liées à une élasticité modulable mais elles montrent aussi la non-linéarité du caoutchouc. Ceci permet ainsi de mettre à jour la difficulté de modélisation précise du comportement des élastomères.

A.3 Vieillessement et imprécisions

Lors de la phase de dimensionnement d'un élément élastomère, et plus particulièrement d'un item de la suspension GMP, le concepteur, en phase d'avant-projet, intègre les données inhérentes au produit fournies par le constructeur. Ce dernier fournit des informations sur un matériau n'ayant jamais été utilisé et dont la durée de vie est relativement courte. Or, quel que soit le matériau et plus particulièrement pour les élastomères, le vieillissement altère de façon plus ou moins significative les propriétés de celui-ci. Cette modification notable des propriétés peut alors constituer une source d'imprécision à intégrer dans la phase de dimensionnement.

Dans le cas d'un matériau élastomère, le vieillissement est de deux types :

- le vieillissement physique inhérent à une fatigue dynamique dont la cause réside dans une fatigue mécanique, liée à l'auto-échauffement ou au déchirement par amorce faisant suite à des sollicitations du type flexion, torsion, cisaillement et élongation ;
- le vieillissement chimique lié à une altération du polymère et du pontage (soufré) dont les sources principales sont l'ozone, les impuretés de mélange et la chaleur.

A.3.1 Influence de la température

La température est un facteur fondamental intervenant dans le vieillissement prématuré d'un élastomère. Les propriétés intrinsèques du matériau sont modifiées et son comportement est rapidement dégradé avec une augmentation de la température.

Chimiquement, le principal phénomène est un réarrangement du réseau soufré inhérent à la destruction du polymère caoutchouteux.

Résistance rupture à 80°C

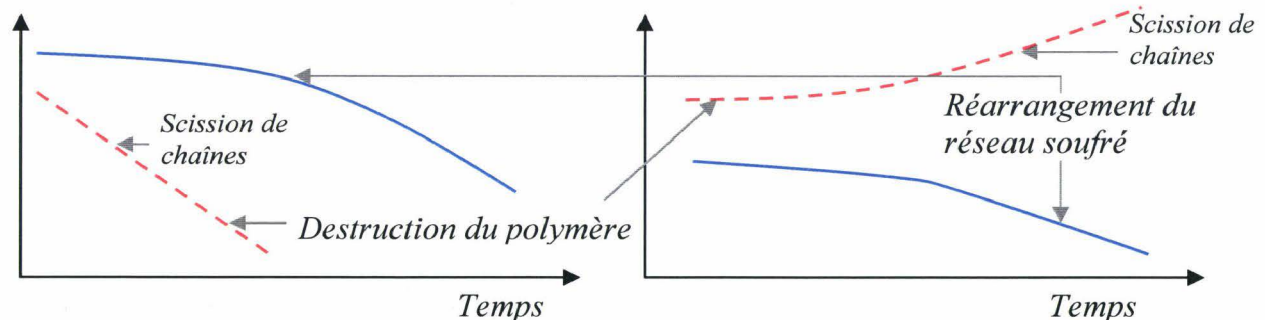


Figure A-17: Influence de la température sur la résistance et l'allongement de l'élastomère.

Ainsi, sur la Figure A-17, il apparaît que l'impact de la température sur le vieillissement intervient en termes de réarrangement du réseau soufré et de destruction du polymère. Ainsi, sur la figure de gauche, si on s'intéresse au vieillissement de l'élastomère à 80°C, la capacité de résistance à la rupture de l'élastomère diminue avec le temps, entraînant une scission des chaînes dans le polymère. De même, si on s'intéresse à l'allongement de l'élastomère dans les mêmes conditions de température, il apparaît que le polymère va pouvoir s'allonger infiniment avec comme conséquence principale, la perte de ses propriétés mécaniques.

De même que la température impacte l'allongement et la résistance sur le vieillissement des élastomères, elle influe aussi sur la dureté. La Figure A-18 montre l'impact de la chaleur sur la capacité qu'à un élastomère à s'allonger : la courbe bleue de gauche montre un essai sur un matériau neuf dans les conditions classiques d'utilisation et la courbe rouge sur un matériau neuf dans des conditions de fonctionnement considérée comme chaude telle qu'on peut les trouver dans les pays dits chauds.

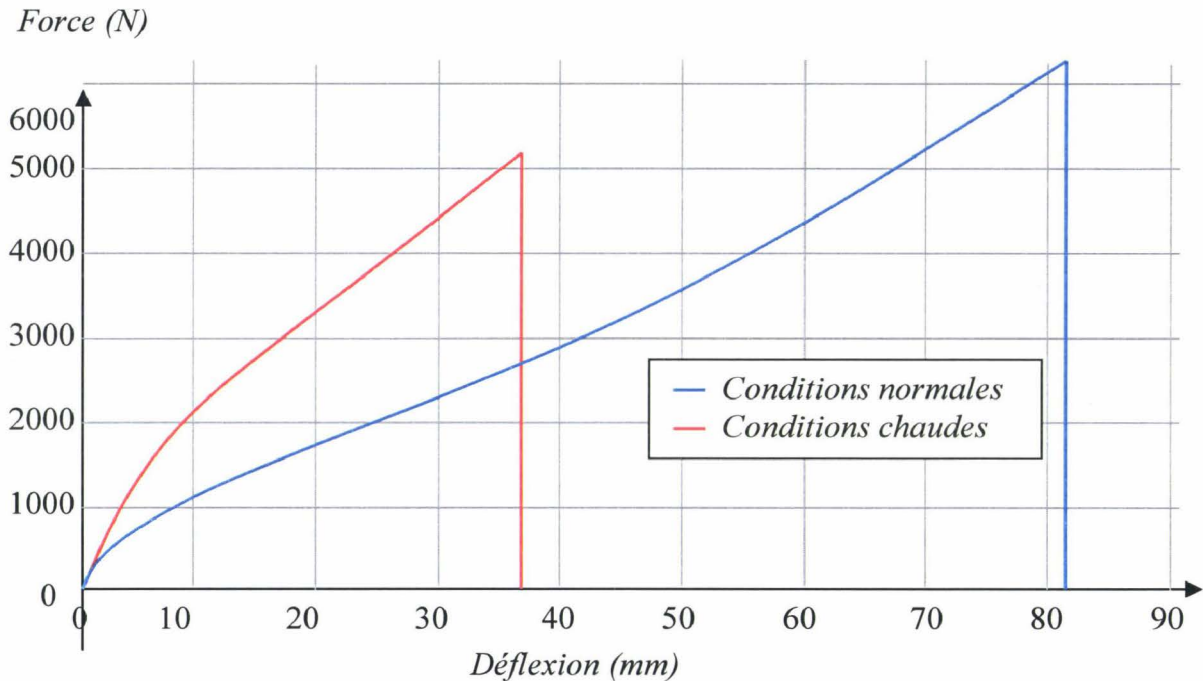


Figure A-18 : impact de la température sur l'allongement d'un élastomère.

Il apparaît alors clairement que la chaleur augmente de façon sensible la dureté du matériau excluant ainsi un allongement correct des propriétés du matériau. Les mesures sur ce type d'essai montrent que la pièce a subi une forte surchauffe et s'est arrachée. La dureté, mesurée au niveau de la zone d'arrachement, augmente alors de manière importante (pour l'essai qui correspond à notre étude, la dureté est passée de 65 shores au lieu de 45 au cahier des charges). La cause chimique de cette modification est liée aux sollicitations thermiques qui ont entraîné une survulcanisation des éléments C/C (carbone/carbone) ayant pour effets l'augmentation de la dureté Shore et la diminution des caractéristiques d'allongement.

A.3.2 Influence de l'ozone

L'ozone, en tant qu'élément chimique actif, altère de manière sensible le vieillissement des élastomères. La conséquence principale de l'ozone sur les élastomères est l'apparition de craquelures parallèles entre elles et perpendiculaires à la direction de traction apparaissant en tension ou en cisaillement. Ces craquelures, au cours du temps, se transforment en microfissures puis en fissures. La rapidité de propagation de la fissure est alors fonction de la concentration en ozone.

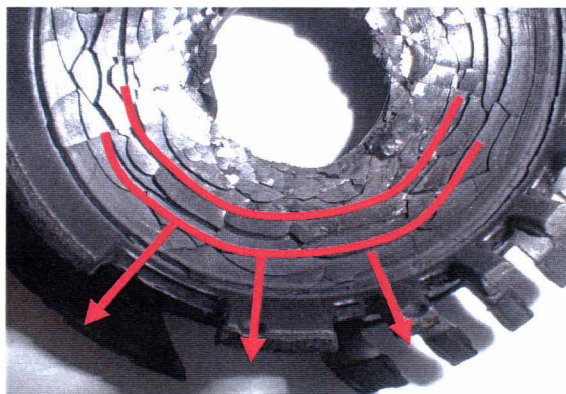


Figure A-19 : Influence de l'ozone sur un élément élastomère.

A.3.3 Conclusion

Cette partie a permis de mettre en évidence qu'un des facteurs importants dans la modification du comportement d'un élastomère est le temps. En effet, les caractéristiques de l'élastomère évoluent au cours de leur vie et c'est cette évolution qu'il est nécessaire de prendre en compte dans le dimensionnement d'une suspension moteur.

A.4 Conclusion sur les élastomères

Les élastomères constituent la partie essentielle d'une suspension moteur. Leurs caractéristiques permettent ainsi au concepteur de réaliser un système de filtration efficace des diverses sollicitations pouvant impacter le véhicule. Cependant, il apparaît qu'au cours de la vie de ce matériau, un ensemble de phénomènes peut modifier de manière plus ou moins sensible le comportement de cet élément. Ainsi, la fabrication, le vieillissement et les propriétés mécaniques même de l'élément sont autant de facteurs d'imprécisions qu'il sera nécessaire d'intégrer dans la phase de conception.

B. REPERE ET CONVENTIONS

La suspension GMP se trouvant à l'interface entre le GMP et la caisse, il est nécessaire de les positionner l'un par rapport à l'autre. Pour cela, toutes les cotes géométriques seront définies, dans un repère appelé repère véhicule. Par convention, le repère véhicule sera défini, pour un véhicule donné, par les règles suivantes :

- l'origine du repère véhicule est donnée par le centre du segment de droite dont les extrémités sont le centre des deux roues avants,
- l'axe X du repère véhicule est horizontal dirigé vers l'arrière véhicule,
- l'axe Z du repère véhicule est dirigé vers le haut du véhicule.

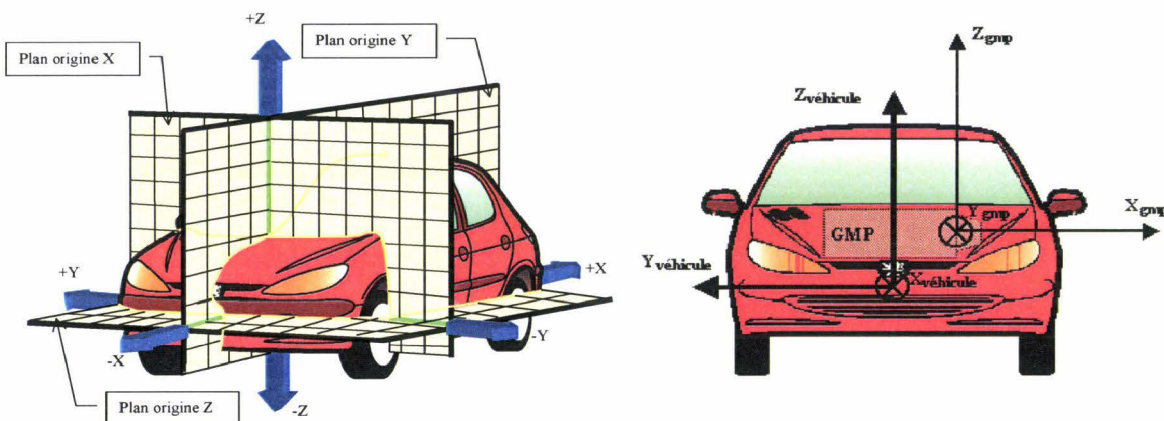


Figure B-1 : Représentation du repère véhicule et du repère GMP dans le véhicule.

Le repère GMP est pour sa part défini de la manière suivante:

- l'origine est positionnée à l'intersection de l'axe vilebrequin et du plan formé par la face d'accrochage du carter moteur sur le carter d'embrayage,
- l'axe X correspond à l'axe du vilebrequin dirigé du moteur vers la boîte de vitesse,
- l'axe Z est parallèle à l'axe des cylindres pour un moteur en ligne et est dirigé vers la culasse du moteur,
- l'axe Y est résultant de manière à former un repère orthonormé direct.

C. METHODES DE CALCULS DES DERIVEES D'UNE FONCTION

La question du calcul de sensibilités fait l'objet de nombreuses études quant aux moyens qu'il est possible de déployer par accéder à la valeur d'une dérivée. Cette question prend tout son intérêt quand on est amené à faire l'étude de la sensibilité d'un système dont le nombre de paramètres le décrivant n'est pas négligeable. Ceci est d'autant plus justifié que l'ordre de dérivation auquel on veut aboutir est grand car l'aspect combinatoire des paramètres dimensionnant intervient. Ainsi, pour l'évaluation du Hessien d'un système à n paramètres, il faut $n(n+1)/2$ évaluations de dérivées secondes. Aussi, le choix d'une méthode efficace pour réaliser ces calculs est prépondérant.

C.1 Motivation

Comme il a été décrit précédemment, les méthodes de résolutions de problèmes nécessitent, dans le cadre de la programmation scientifique, l'évaluation des dérivées d'une fonction. De nombreuses techniques d'optimisation non-linéaires utilisent les informations fournies par les gradients et les hessiens pour déterminer les directions de descente des fonctions objectif et contraintes. Les plus connues sont la méthode du gradient pour l'optimisation et la méthode de Newton pour la résolution de problème non-linéaires. Dans le contexte de l'optimisation par exemple, on cherche une valeur de x qui minimise une fonction $f: \nabla^n \rightarrow \nabla$ en utilisant la méthode du gradient ce qui implique le processus itératif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tant que la convergence n'est pas atteinte, on résout :} \\ B_i s_i = -\nabla f(x_i) \\ x_{i+1} = x_i + \alpha_i s_i \end{array} \right.$$

Pour l'ensemble des multiplicateurs appropriés $\alpha_i > 0$, $\nabla f(x)$ est le gradient de f en un point particulier x et B_i est une approximation définie positive du Hessien de f . Dans la plupart des problématiques, la fonction f n'est pas représentée par sa forme analytique directe mais sous la forme d'une routine informatique donnant une évaluation de sa valeur. Dans le cadre de notre exemple, on considère la fonction $f: x \in \nabla^n \rightarrow y \in \nabla$. Le but est de calculer les dérivées de f en fonction de la variable y .

On peut d'ores et déjà énumérer trois principaux modes de dérivations.

C.2 Calculs analytiques

Le premier mode de calcul de dérivées est la méthode analytique pour laquelle existent deux modes de résolutions qui sont fonction de la complexité du problème :

- si l'expression du problème est celle d'une composée de fonctions arithmétiques simples, on peut calculer directement la dérivée de l'expression via la méthode de composition des dérivées de fonctions ;

- Si on ne peut pas exprimer la fonction ou le problème en terme de composée de fonction, par exemple la solution d'un système linéaire, on peut utiliser la méthode des dérivées non-entières.

Considérons le système linéaire du premier ordre :

$$A.X = b$$

avec $A = A(p_1, \dots, p_m)$, $X = X(p_1, \dots, p_m)$ et $b = b(p_1, \dots, p_m)$

On cherche à connaître l'expression de la dérivée de X par rapport aux différents paramètres $p_{i, i=1, \dots, m}$ définissant le système. On peut alors écrire les équations suivantes :

$$\frac{\partial(A.X)}{\partial p_i} = \frac{\partial b}{\partial p_i}$$

En développant on a :

$$\frac{\partial A}{\partial p_i} X + A \frac{\partial X}{\partial p_i} = \frac{\partial b}{\partial p_i}$$

d'où

$$\frac{\partial X}{\partial p_i} = A^{-1} \left(\frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} X \right)$$

Cette dernière expression nous donne donc l'expression de la sensibilité au premier ordre de la réponse X en fonction du paramètre i . Comme il a été décrit précédemment, lorsque l'on s'intéresse aux problèmes d'optimisation, il peut être nécessaire de connaître l'expression des dérivées secondes de la réponse du système. Pour cela, si l'on applique la même méthode que précédemment, on écrit pour les dérivées des termes non couplées :

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial(A.X)}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial b}{\partial p_i} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} X + A \frac{\partial X}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial^2 b}{\partial p_i^2}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial p_i^2} X + \frac{\partial A}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_i} + A \frac{\partial^2 X}{\partial p_i^2} = \frac{\partial^2 b}{\partial p_i^2}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 X}{\partial p_i^2} = A^{-1} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial p_i^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial p_i^2} X - 2 \frac{\partial A}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_i} \right)$$

Cette deuxième expression permet ainsi d'avoir une évaluation de la dérivée seconde de la réponse en fonction d'un seul paramètre.

En ce qui concerne les termes couplés, il est possible d'écrire:

$$\frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial(A.X)}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial b}{\partial p_i} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} X + A \frac{\partial X}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial^2 b}{\partial p_i \partial p_j}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial p_i \partial p_j} X + \frac{\partial A}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_i} + A \frac{\partial^2 X}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 b}{\partial p_i \partial p_j}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 X}{\partial p_i \partial p_j} = A^{-1} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial^2 A}{\partial p_i \partial p_j} X - \frac{\partial A}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_i} \right)$$

Cette troisième expression nous donne l'expression de la dérivée seconde en fonction de deux paramètres distincts.

Cette méthode permet ainsi d'obtenir de manière systématique l'expression des dérivées de la réponse d'un système linéaire. La contrainte inhérente à cette méthode est la nécessité de pouvoir avoir accès aux dérivées des composantes du système.

C.3 Calculs par méthodes des différences finies

C'est en soit la méthode la plus systématique pour le calcul des dérivées. C'est une méthode générale qui ne nécessite que l'évaluation de la fonction en tous les points du domaine que l'on souhaite étudier.

Soit une fonction A dont on cherche à estimer les dérivées premières (gradient) et secondes (hessiens) en fonction de deux paramètres x et y . Considérons la Figure E-1.

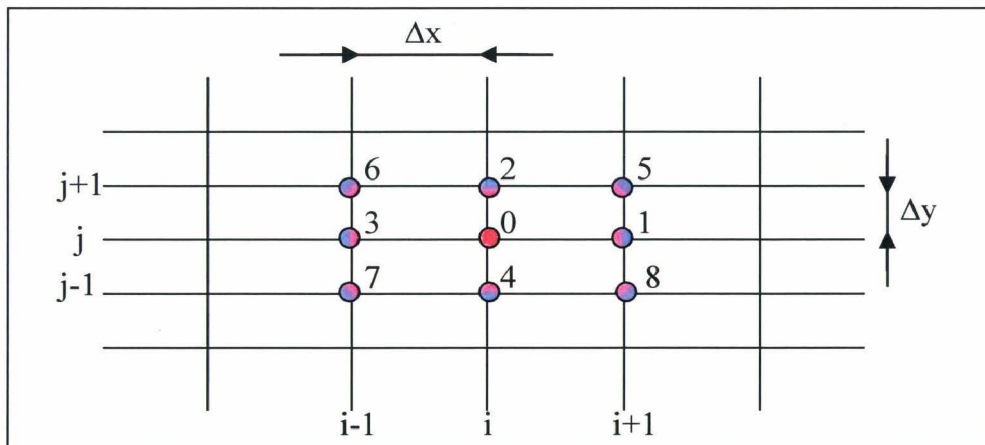


Figure C-1: Grille de coordonnées pour le calcul de dérivées par différences centrées

En se référant à la grille et en employant le formalisme suivant :

$$A_{i+1,j} = A(x + \Delta x, y) \text{ ou encore } A_{i-1,j-1} = A(x - \Delta x, y - \Delta y),$$

on peut alors calculer les dérivées de la fonction A au premier et second ordre.

C.3.1 Calcul des dérivées par différences finies centrées : Premier ordre

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2 \times \Delta x}$$

$$A'_x(0) = \frac{A(1) - A(3)}{2 \times \Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2 \times \Delta y}$$

$$A'_y(0) = \frac{A(2) - A(4)}{2 \times \Delta y}$$

C.3.2 Calcul des dérivées par différences finies centrées : deuxième ordre – termes non couplés

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2 \times A_{i,j} + A_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$A''_x(0) = \frac{A(1) - 2 \times A(0) + A(3)}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - 2 \times A_{i,j} + A_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

$$A''_y(0) = \frac{A(2) - 2 \times A(0) + A(4)}{(\Delta y)^2}$$

C.3.3 Calcul des dérivées par différences finies centrées : deuxième ordre – termes couplés

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j-1} - A_{i-1,j+1} + A_{i-1,j-1}}{4 \times \Delta x \times \Delta y}$$

$$A''_{xy}(0) = \frac{A(5) - A(8) - A(6) + A(7)}{4 \times \Delta x \times \Delta y}$$

On a présenté ici la méthode de calcul de dérivées par différences finies centrées. Il existe d'autres déclinaisons de la méthode qui peuvent se révéler moins « gourmandes » en terme de nombre de calculs effectués :

C.3.4 Calcul du gradient par différences finies arrière

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j} - A_{i-1,j}}{2 \times \Delta x}$$

C.3.5 Calcul du gradient par différences finies avant

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i,j}}{2 \times \Delta x}$$

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle nécessite un nombre d'évaluations de la fonction considérable, correspondant pour un gradient à deux fois le nombre de paramètres dont on veut analyser la sensibilité par la méthode par différences centrées. Cette restriction peut être très pénalisante pour les systèmes dont l'évaluation de la réponse est coûteuse en temps. De plus le choix de la variation est critique car elle doit être suffisamment petite pour qu'elle ait un sens mathématique, quelque soit le comportement de la fonction étudiée, mais suffisamment grande pour que la précision n'interfère avec la précision du processus de calcul informatique.



Bibliothèque Universitaire de Valenciennes



00900352