



HAL
open science

Le delta-barre pour certains feuilletages complexes

Jihène Slimène

► **To cite this version:**

Jihène Slimène. Le delta-barre pour certains feuilletages complexes. Mathématiques [math]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis; Université de Monastir, 2008. Français. NNT: 2008VALE0012 . tel-03009673

HAL Id: tel-03009673

<https://uphf.hal.science/tel-03009673v1>

Submitted on 17 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE MONASTIR

UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES
ET DU HAINAUT-CAMBRÉSIS

LE $\bar{\partial}_F$ POUR CERTAINS FEUILLETAGES COMPLEXES

Thèse soutenue le 2 mai 2008

par

Jihène SLIMÈNE

**pour obtenir le grade de
Docteur en Mathématiques**

Composition du Jury

<i>Président</i>	E. SALHI <i>Faculté des Sciences de Sfax</i>
<i>Rapporteurs</i>	J.-P. DEMAILLY <i>Université de Grenoble</i> J.-J. LÖEB <i>Université d'Angers</i>
<i>Examineur</i>	H. BEN MESSAOUD . <i>Faculté des Sciences de Sfax</i>
<i>Directeurs de Thèse</i>	M. BLEL <i>Faculté des Sciences de Monastir</i> A. EL KACIMI <i>Université de Valenciennes</i>

UNIVERSITÉ DE MONASTIR

UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES
ET DU HAINAUT-CAMBRÉSIS

LE $\bar{\partial}_F$ POUR CERTAINS FEUILLETAGES COMPLEXES

Thèse soutenue le 2 mai 2008

par

Jihène SLIMÈNE

**pour obtenir le grade de
Docteur en Mathématiques**

Composition du Jury

<i>Président</i>	E. SALHI <i>Faculté des Sciences de Sfax</i>
<i>Rapporteurs</i>	J.-P. DEMAILLY <i>Université de Grenoble</i> J.-J. LÖEB <i>Université d'Angers</i>
<i>Examineur</i>	H. BEN MESSAOUD . <i>Faculté des Sciences de Sfax</i>
<i>Directeurs de Thèse</i>	M. BLEL <i>Faculté des Sciences de Monastir</i> A. EL KACIMI <i>Université de Valenciennes</i>

N^o d'ordre : 08 - 09

*À mes parents.
À mes frères et sœurs.
À tous ceux que j'aime
et qui m'aiment.*

REMERCIEMENTS

Je commence ces remerciements par ceux qui ont guidé mes premiers pas dans la recherche mathématique.

Le professeur Aziz EL KACIMI m'a proposé ce sujet de travail de thèse. Durant toute son élaboration il n'a cessé de me motiver, me guider et me prodiguer conseil et toujours avec une attention constante et sincère. Le contenu de ce mémoire et la forme définitive qu'il a prise lui doivent beaucoup. Je lui exprime toute ma reconnaissance et lui adresse un grand merci.

J'ai beaucoup appris auprès du professeur Mongi BLEL durant la préparation de cette thèse. Il m'a initiée à l'analyse complexe, s'est toujours intéressé à mon travail et m'a souvent motivée. Je tiens à le remercier et lui exprimer toute ma gratitude.

Je suis heureuse que les professeurs Jean-Pierre DEMAILLY et Jean-Jacques LÖEB se soient intéressés à mon travail. Ils ont donné de leur temps pour le lire et rapporter dessus. Je les en remercie infiniment.

Les professeurs Hédi BEN MESSAOUD et Ezzeddine SALHI ont gentiment accepté d'être respectivement examinateur et président dans ce jury de thèse. Je les en remercie.

Je remercie vivement le professeur Khélifa HARZALLAH. Il m'a consacré généreusement son temps, il m'a souvent écoutée et conseillée et j'ai beaucoup profité de son expérience.

Merci au professeur Marcel NICOLAU qui a bien voulu lire mon travail et le recommander auprès de la Commission de recrutement lors de ma candidature au concours d'assistantat.

Je tiens à remercier Nabila DAIFI pour ses qualités humaines et de m'avoir toujours aidée à régler tout problème administratif à l'Université de Valenciennes. Merci aussi à tous les membres du LAMAV pour l'accueil et l'amitié qu'ils m'ont toujours réservés.

Je ne saurais terminer cette page sans remercier tous les enseignants que j'ai eus à la Faculté des Sciences de Monastir, tous mes amis et mes collègues pour leurs encouragements constants et leur soutien moral.

CONTENU

Introduction	9
Chapitre I : Rappels de géométrie différentielle	
1. Variétés différentiables et complexes	13
2. Fibrés vectoriels	17
3. Faisceaux et préfaisceaux	19
4. Cohomologie des groupes discrets	24
Chapitre II : Le $\bar{\partial}$ pour les feuilletages complexes	
1. Le problème du $\bar{\partial}$	27
2. Feuilletages complexes	31
3. Le problème du $\bar{\partial}$ le long des feuilles	33
Chapitre III : Trois exemples de base	
1. Flots complexes linéaires sur le tore	39
2. Une submersion en courbes elliptiques	46
3. Feuilletage complexe de Reeb sur $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^1$	49
Chapitre IV : Feuilletage complexe sur le tore hyperbolique	
1. Construction du feuilletage complexe	63
2. Les espaces de fonctions sur \mathbb{T}_A^{n+1}	65
3. Formulation du problème du $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$	67
4. Divers objets géométriques	69
5. Le théorème principal	72
Références	81

INTRODUCTION

La naissance de la théorie des feuilletages (vers les années quarante) et son développement depuis lors a amené à se poser beaucoup de questions d'analyse et de géométrie réelle ou complexe, d'analyse globale ou autres, sous une version paramétrée par les transversales. Tout problème classique a son analogue le long des feuilles dès que celles-ci possèdent la structure géométrique qui permet de lui donner un sens. Par exemple le problème du $\bar{\partial}$ sur les variétés complexes dont on sait à quel point il a marqué le développement de l'analyse et la géométrie complexes. (On peut citer en passant le théorème de Mittag-Leffler qui a été central dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.) Ce problème admet une version le long des feuilles d'un feuilletage complexe (*i.e.* les feuilles sont munies d'une structure complexe variant localement différemment). Le problème du $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$, dit encore $\bar{\partial}$ le long des feuilles, peut s'interpréter comme une version paramétrée (par l'espace des feuilles M/\mathcal{F}) du problème du $\bar{\partial}$ usuel. Si la codimension (réelle) de \mathcal{F} n'est pas nulle, l'opérateur $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ n'est plus elliptique contrairement au cas classique. La régularité des solutions (quand elles existent) n'est alors plus automatiquement acquise. Ces questions ont été un peu abordées dans [DO], [Ek1], [Ek2], [GT] et [Sli]. Le présent travail s'inscrit dans cette direction.

Résoudre le $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ revient à montrer la trivialité de la cohomologie de Dolbeault feuilletée $H_{\mathcal{F}}^{p,*}(M)$. Celle-ci est un invariant de la classe de conjugaison complexe du feuilletage et mesure l'obstruction à la résolution de ce problème. Dans le cas classique, différentes méthodes ont été développées pour résoudre le $\bar{\partial}$ ou, de manière équivalente, pour déterminer la cohomologie de Dolbeault ; mais la plupart d'entre elles appliquées au cas feuilleté, ne donnent pas des solutions explicites qui permettent de contrôler la régularité des solutions par rapport au paramètre transverse. Toutefois, nous sommes arrivés à donner des réponses et des calculs explicites pour des exemples de feuilletages complexes, assez représentatifs de situations géométriques diverses.

Dans notre démarche, nous avons utilisé des méthodes de cohomologie des groupes discrets à valeurs dans des espaces de Fréchet liés aux feuilletages considérés (fonctions ou formes différentielles holomorphes le long des feuilles).

Le premier chapitre est consacré à des préliminaires sur les variétés différentiables et analytiques, les fibrés vectoriels, les faisceaux, la cohomologie à valeurs dans un faisceau, la cohomologie des groupes discrets et quelques autres outils.

Dans le second chapitre, on rappelle le problème du $\bar{\partial}$ classique et la cohomologie de Dolbeault. On y définit la notion de feuilletage complexe et on donne une formulation du problème du $\bar{\partial}$ le long des feuilles ainsi que la cohomologie de Dolbeault feuilletée. Certaines situations comme celles des revêtements feuilletés ramènent à l'utilisation des outils comme ceux de la cohomologie des groupes discrets et les suites spectrales. Nous montrons comment nous en usons.

Les chapitres III et IV de ce mémoire de thèse sont dédiés à nos résultats proprement dits. Nous les avons divisés en deux.

Dans le troisième chapitre, nous étudions le $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ pour les trois feuilletages complexes suivants pour lesquels nous donnons explicitement tous les calculs. (Les deux premiers constituent le contenu de l'article [Sli].)

1. *Un flot linéaire complexe sur le tore.* On note $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n . Soient X et Y deux champs de vecteurs linéaires indépendants ; X et Y engendrent alors un feuilletage \mathcal{F} réel orientable de dimension 2. En posant $J_{\mathcal{F}}(X) = Y$ et $J_{\mathcal{F}}(Y) = -X$, on définit sur le fibré tangent à \mathcal{F} une structure presque complexe intégrable qui fait de \mathcal{F} un feuilletage complexe de dimension (complexe) 1.

2. *Une submersion en courbes elliptiques.* On note \mathbb{H} le demi-plan supérieur $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ et \widehat{M} la variété complexe $\mathbb{C}^* \times \mathbb{H}$ qu'on munit du feuilletage holomorphe $\widehat{\mathcal{F}}$ dont les feuilles sont les facteurs $\mathbb{C}^* \times \{\omega\}$ avec ω variant dans \mathbb{H} . Ce feuilletage est invariant par le biholomorphisme :

$$\gamma : (z, \omega) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{H} \longmapsto (e^{-i\varphi(\omega)}z, \omega) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{H}$$

où φ est un automorphisme de \mathbb{H} . Il induit donc un feuilletage holomorphe (a fortiori complexe) \mathcal{F} de dimension 1 sur la variété quotient $M = \widehat{M}/\Gamma$ où Γ est le groupe des automorphismes de $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ engendré par γ . La variété M et le feuilletage \mathcal{F} sont différentiablement le produit par \mathbb{H} d'une courbe elliptique Σ . Mais du point de vue complexe \mathcal{F} est loin d'être un produit : deux feuilles Σ_{ω} et Σ_{ζ} sont holomorphiquement équivalentes si, et seulement si, il existe une matrice $B \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ telle que $\varphi(\zeta) = B\varphi(\omega)$.

3. *Un feuilletage affine de Reeb en surfaces complexes.* Soit \widetilde{M} la variété $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ munie du feuilletage complexe $\widetilde{\mathcal{F}}$ de dimension 2 défini par l'équation $dt = 0$ ((z_1, z_2, t) désignent les coordonnées sur \widetilde{M}). Ce feuilletage est invariant par le difféomorphisme :

$$\gamma : (z_1, z_2, t) \in \widetilde{M} \longmapsto (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda t) \in \widetilde{M}$$

(où $\lambda \in]0, 1[$) et induit donc un feuilletage complexe \mathcal{F} de dimension 2 sur la variété quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ (où Γ est le groupe des automorphismes de $\widetilde{\mathcal{F}}$ engendré par γ).

Le quatrième chapitre est consacré aux feuilletages complexes homogènes définis par une action localement libre du groupe affine de la droite réelle sur une variété homogène compacte à groupe fondamental résoluble. Décrivons explicitement ces feuilletages.

4. *Feuilletage complexe sur le tore hyperbolique.* Soit $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ une matrice diagonalisable ayant toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réelles positives et différentes de 1 (on dit que A est *hyperbolique*). On a une action du groupe \mathbb{R} sur \mathbb{R}^n :

$$(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto A^t x \in \mathbb{R}^n$$

qui permet de construire un groupe de Lie résoluble $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ ayant $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ comme réseau cocompact. Le quotient G/Γ est une variété compacte notée \mathbb{T}_A^{n+1} et appelée *tore hyperbolique* de dimension $n+1$. Soit v un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A dans $]0, 1[$. Les champs de vecteurs $X = \lambda^t v$ et $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ sont linéairement indépendants et induisent des champs sur la variété \mathbb{T}_A^{n+1} sur laquelle ils définissent un feuilletage \mathcal{F} de dimension réelle 2. Il est muni d'une structure complexe définie à l'aide de la structure presque complexe intégrable $J_{\mathcal{F}}(X) = Y$ et $J_{\mathcal{F}}(Y) = -X$.

CHAPITRE I

RAPPELS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Les feuilletages qu'on considère dans ce travail sont définis sur des variétés différentiables ou des variétés analytiques complexes. Il est donc naturel d'en rappeler les éléments de base et tous les objets qui leur sont rattachés : champ de vecteurs, formes différentielles, fibrés vectoriels, faisceaux, cohomologie *etc.* On aura aussi à utiliser la notion de cohomologie des groupes discrets ; on en introduira les ingrédients essentiels.

Tout espace topologique M que l'on considérera sera supposé paracompact *i.e.* M est séparé et tel que tout recouvrement ouvert admet un recouvrement ouvert plus fin et localement fini. Tout recouvrement que l'on prendra sera de ce type. Le mot "différentiable" signifiera toujours indéfiniment différentiable.

1. Variétés différentiables et complexes

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M tel que, pour tout $i \in I$, il existe un homéomorphisme $\varphi_i : O_i \rightarrow U_i$ où O_i est un ouvert de \mathbb{R}^n . Si $x \in U_i$, la paire (U_i, φ_i) est appelée *carte locale* et $(x_1, \dots, x_n) = \varphi_i^{-1}(x)$ sont les *coordonnées* de x dans cette carte. Si (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont deux cartes locales telles que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ alors un point $x \in U_i \cap U_j$ sera repéré par ses coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans U_i et ses coordonnées (x'_1, \dots, x'_n) dans U_j . On doit avoir :

$$(I.1) \quad (x'_1, \dots, x'_n) = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(x_1, \dots, x_n).$$

L'application $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ est appelée *changement de coordonnées* de la carte (U_i, φ_i) à la carte (U_j, φ_j) . La collection $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ est appelée *atlas* sur M .

1.1. Définition. On dira que M est une **variété différentiable** de dimension n si elle admet un atlas $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ tel que, pour toute paire de cartes locales (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'homéomorphisme de changement de coordonnées $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ soit un difféomorphisme (de classe C^∞).

On dira que la variété M est *orientable* si elle peut être définie à l'aide d'un atlas $\{U_i, \varphi_i\}$ pour lequel les difféomorphismes $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ préservent l'orientation de \mathbb{R}^n : pour

$x \in U_i \cap U_j$, le déterminant de l'application linéaire $d(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(\varphi_i^{-1}(x))$ est strictement positif. Une variété différentiable est dite *compacte*, *connexe* etc. si l'espace topologique sous-jacent est compact, connexe etc.

1.2. Définition. Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives n et p . On dira qu'une application $f : M \rightarrow N$ est **différentiable** au point $x \in M$ si, pour toute carte locale (U, φ) de M contenant x et toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(x)$ et tout voisinage ouvert W de x contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^p$ est différentiable. On dira que f est **différentiable**, si elle est différentiable en tout point de M .

En particulier, on dira qu'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est *différentiable* si, pour toute carte locale (U, φ) , la fonction $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ sera donc par définition $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(x))$. Si f est différentiable, bijective et f^{-1} est différentiable, on dira que f est un *difféomorphisme* de M sur N . Dans ce cas les variétés M et N ont nécessairement la même dimension.

On notera $C^\infty(M, N)$ l'ensemble des applications différentiables de M dans N et simplement $C^\infty(M)$ lorsque $N = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) ; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des difféomorphismes d'une variété sur elle-même est un groupe (pour la composition des applications) noté $\text{Diff}(M)$.

1.3. Des exemples et comment on peut en construire

Nous en donnerons très peu pour le moment ! Beaucoup apparaîtront dans ce texte par la suite.

- Il est clair que le premier exemple est l'espace \mathbb{R}^n (et n'importe lequel de ses ouverts) puisqu'il constitue le *modèle local*.

- Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives n et q . Alors le produit cartésien $M \times N$ est une variété différentiable de dimension $n + q$. De manière générale le produit cartésien d'un nombre fini de variétés différentiables est une variété différentiable de dimension la somme des dimensions. Par exemple le produit de n exemplaires du cercle \mathbb{S}^1 est une variété de dimension n appelée *n-tore réel* $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$.

- Soient B , F et M trois variétés de dimensions respectives m , q et $n = m + q$ et $\pi : M \rightarrow B$ une submersion surjective. On dira que π est une *fibration localement triviale* de fibre F et de base B s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ de B et, pour chaque $i \in I$, un difféomorphisme $\varphi_i : V_i \times F \rightarrow U_i = \pi^{-1}(V_i)$ tel que le diagramme qui suit commute :

$$\begin{array}{ccc} V_i \times F & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ V_i & \xrightarrow{\text{identité}} & V_i \end{array}$$

où p_1 est la première projection. On voit facilement que, pour chaque $x \in V_i \cap V_j$, l'application $\gamma_{ij}(x) : y \in F \mapsto (\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(x, y) \in F$ est un difféomorphisme ; en plus, les applications $\gamma_{ij} : V_i \cap V_j \rightarrow \text{Diff}(F)$ sont continues (le groupe $\text{Diff}(F)$ étant muni de la topologie C^0) et vérifient $\gamma_{jk} \circ \gamma_{ij} = \gamma_{ik}$ (lorsque bien sûr $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$). En fait, la donnée du recouvrement ouvert $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ de B et des γ_{ij} vérifiant cette condition caractérise la fibration $\pi : M \rightarrow B$. On dira que $\{V_i, \gamma_{ij}\}$ est un *cocycle* définissant cette fibration.

Le produit $M = B \times F$ muni de la première projection $p_1 : (x, y) \in M \mapsto x \in B$ est une fibration localement triviale ; c'est la *fibration triviale* de fibre F et de base B !

Nous verrons que les diverses fibrations qu'on utilise en géométrie s'obtiennent en mettant une structure géométrique supplémentaire (vectorielle ou autre) sur F et en imposant aux γ_{ij} de la respecter !

- Si la fibre est un groupe dénombrable Γ muni de la topologie discrète on dira que la fibration $\Gamma \hookrightarrow M \rightarrow B$ est un *revêtement de groupe* Γ . Dans ce cas, la base B et l'espace total ont les mêmes structures géométriques locales.

1.4. Variétés complexes

Elles se définissent de la même manière que les variétés différentiables : la notion de difféomorphisme entre ouverts de \mathbb{R}^n sera remplacée par celle d'application biholomorphe entre ouverts de \mathbb{C}^n .

L'espace \mathbb{C}^n sera identifié à \mathbb{R}^{2n} à l'aide de l'application qui à $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ de \mathbb{R}^{2n} associe $(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$ dans \mathbb{C}^n . Soient U un ouvert de \mathbb{C} et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 . Alors la différentielle de φ en un point z quelconque de U est une application \mathbb{R} -linéaire $d\varphi_z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de matrice :

$$d\varphi_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(z) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(z) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(z) \end{pmatrix}$$

où φ_1 et φ_2 sont les composantes (resp. réelle et imaginaire) de φ i.e. $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ et $z = x + iy$.

On dira que φ est *holomorphe* en z si la différentielle $d_z\varphi$ est \mathbb{C} -linéaire. On dira que φ est holomorphe sur U si elle est holomorphe en tout point de U . Si φ est holomorphe sur U , les coefficients de la matrice $d_z\varphi$ en tout point $z \in U$ vérifient les égalités (dites *conditions de Cauchy-Riemann*) : $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(z) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(z)$ et $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(z) = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(z)$. On peut aussi écrire : $d_z\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ où les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sont donnés par :

$$(I.2) \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Alors φ est holomorphe sur U si, et seulement si, la dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}$ y est identiquement nulle.

Soit maintenant U un ouvert de \mathbb{C}^n . Pour $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , on pose $\partial\varphi = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} dz_k$ et $\bar{\partial}\varphi = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k$ où

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right). \end{cases}$$

Alors $d\varphi = \partial\varphi + \bar{\partial}\varphi$ où, pour tout point $z \in U$, $\partial_z\varphi$ et $\bar{\partial}_z\varphi$ sont des 1-formes complexes \mathbb{R} -linéaires sur \mathbb{C}^n . La première est \mathbb{C} -linéaire et la deuxième est \mathbb{C} -antilinéaire. On dira que φ est *holomorphe* si, pour tout point $z \in U \subset \mathbb{C}^n$, la 1-forme $d_z\varphi$ est \mathbb{C} -linéaire *i.e.* si la partie antilinéaire $\bar{\partial}_z\varphi$ est nulle.

Si $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ et à valeurs dans \mathbb{C}^m on dira que φ est *holomorphe* sur U si chacune de ses composantes φ_ℓ , $\ell = 1, \dots, m$ est holomorphe en tant que fonction définie sur U et à valeurs dans \mathbb{C} .

Une *application biholomorphe* d'un ouvert U de \mathbb{C}^n sur un ouvert V de \mathbb{C}^m est une application bijective $\varphi : U \rightarrow V$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient holomorphes. Dans ce cas, on a nécessairement $n = m$. On dira que les deux ouverts U et V de \mathbb{C}^n sont *holomorphiquement équivalents*.

On est maintenant en mesure de donner la notion de *variété analytique complexe*. Soit M une variété topologique de dimension $2n$.

On dira que M est une **variété analytique complexe** de dimension n si elle admet un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où, pour tout $i \in I$, φ_i est un homéomorphisme d'un ouvert de \mathbb{C}^n sur U_i tel que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ l'homéomorphisme de changement de coordonnées $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^n$ soit un biholomorphisme.

Par définition même, toute variété analytique complexe est munie naturellement d'une structure de variété différentiable. Tout ouvert d'une variété analytique complexe (en particulier tout ouvert de \mathbb{C}^n) est une variété analytique complexe de même dimension.

1.5. Actions de groupes

Soient \widetilde{M} une variété différentiable (resp. complexe) de dimension n et Γ un groupe discret (dénombrable). Une *action différentiable* (resp. *holomorphe*) de Γ sur \widetilde{M} est une application différentiable (resp. *holomorphe*) $\Phi : (\gamma, x) \in \Gamma \times \widetilde{M} \mapsto \gamma \cdot x \in \widetilde{M}$ telle que :

- i) $(\gamma'\gamma) \cdot x = \gamma' \cdot (\gamma \cdot x)$ pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et tout $x \in \widetilde{M}$;
- ii) $e \cdot x = x$ pour tout $x \in \widetilde{M}$ (e étant l'élément neutre de Γ).

On dira que l'action Φ est *libre* si $\gamma \cdot x = x$ implique $\gamma = e$; *propre* si, pour tout compact $K \subset \widetilde{M}$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : (\gamma \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. On a le résultat qui suit.

Soient \widetilde{M} une variété différentiable (resp. complexe) de dimension n et Γ un groupe discret agissant différemment (resp. holomorphiquement) sur M de façon propre et libre. Alors le quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ est muni canoniquement d'une structure de variété différentiable (resp. structure complexe) de dimension n et la projection canonique $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ est un revêtement différentiable (resp. holomorphe) de groupe Γ .

2. Fibrés vectoriels

Ils apparaissent très souvent en géométrie et en analyse globale. Des objets comme les fonctions, les formes différentielles etc. sont naturellement associés à des fibrés vectoriels. Dans toute la suite M sera une variété différentiable de dimension n .

2.1. Définition. Un fibré vectoriel (réel ou complexe) de rang k est une fibration localement triviale $\pi : E \rightarrow M$ dans laquelle la fibre $E_x = \pi^{-1}(x)$ en $x \in M$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) de dimension k et définie par un cocycle $\{U_i, \gamma_{ij}\}$ où $\mathcal{U} = \{U_i\}$ est un recouvrement ouvert de M et les fonctions de transition γ_{ij} (définies sur les U_{ij}) sont à valeurs dans le groupe linéaire $GL(k, \mathbb{K})$ de \mathbb{K}^k .

Une section (continue, C^∞ etc.) de $\pi : E \rightarrow M$ est une application $\alpha : M \rightarrow E$ (continue, C^∞ etc.) telle que, pour tout $x \in M$, $\alpha(x) \in E_x$ et $\pi(\alpha(x)) = x$. L'ensemble $C^\infty(E)$ des sections C^∞ de E est un espace vectoriel ; c'est même un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions C^∞ sur M . Comme la restriction de E à chaque ouvert U du recouvrement \mathcal{U} définit un fibré trivial i.e. $E|_U \simeq U \times \mathbb{K}^k$, sur U , une section α est une fonction (continue, différentiable etc.) $\alpha : U \rightarrow \mathbb{K}^k$ donnée par ses coordonnées $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_k(x))$ où les $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des fonctions (continues, différentiables etc.). L'espace des sections (C^∞ par exemple) au-dessus de U s'identifie donc à l'espace $C^\infty(U, \mathbb{K}^k)$ des fonctions de classe C^∞ sur U à valeurs dans \mathbb{K}^k .

2.2. Le fibré tangent

Il est certainement le premier exemple de fibré vectoriel qui apparaît de façon naturelle dès qu'on considère une variété M et qu'on y fait de la géométrie différentielle.

Supposons M définie par un atlas de cartes locales $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$. Pour tout $k = 1, \dots, n$, on a un opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ qui à toute fonction différentiable f sur U_i associe la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. En chaque point $x \in U_i$, les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ sont linéairement indépendants. Ils engendrent donc sur \mathbb{R} un espace vectoriel de dimension n indépendant de la carte choisie (U_i, φ_i) . On appelle *espace tangent* à M en x , l'espace vectoriel $T_x M$ engendré par les $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$ à l'aide d'une carte quelconque (U_i, φ_i) .

Pour tout $i \in I$, on note Ω_i la réunion des $T_x M$ pour x variant dans U_i . Alors l'application $\Phi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega_i$ définie par $\Phi_i(x, f_1, \dots, f_n) = \left(x, \sum_{k=1}^n f_k \frac{\partial}{\partial x_k}(x)\right)$ est une bijection. On munit Ω_i de l'unique topologie \mathcal{T}_i pour laquelle l'application Φ_i est

un homéomorphisme. De cette façon on définit une structure de variété topologique de dimension $2n$ sur l'ensemble $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ à l'aide de l'atlas $\{\Omega_i, \Phi_i\}$. (La topologie sur TM est celle engendrée par les \mathcal{T}_i .) En fait TM est une variété différentiable. On a une projection canonique $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $\pi(x, u_x) = x$. On appelle **fibré tangent** à M la variété TM et la projection $\pi : TM \rightarrow M$.

2.3. Opérateurs différentiels

Si $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, $|s| = s_1 + \dots + s_n$ sera sa longueur. Pour tout $s \in \mathbb{N}^n$, on désigne par $\frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}$ l'opérateur différentiel $C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ qui à f associe $\frac{\partial^{|s|} f}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}(x)$.

Soient E et F deux fibrés vectoriels complexes de rangs respectifs k et ℓ au-dessus de M . On appelle *opérateur différentiel* d'ordre m de E vers F toute application linéaire $D : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ s'écrivant localement sous la forme :

$$(I.3) \quad D = \sum_{|s| \leq m} a_s(x) \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}$$

où $a_s(x) = (a_s^{ij}(x))$ est une matrice à k colonnes et ℓ lignes (dépendant de manière C^∞ de x) définissant une application linéaire $E_x \rightarrow F_x$. À toute section $\alpha \in C^\infty(E)$ on associe la section $D\alpha$ donnée localement de la façon suivante : si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ alors $D\alpha = ((D\alpha)_1, \dots, (D\alpha)_\ell)$ où, pour tout $i = 1, \dots, \ell$:

$$(D\alpha)_i = \sum_{|s| \leq m} \left(\sum_{j=1}^k a_s^{ij}(x) \frac{\partial^{|s|} \alpha_j}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}(x) \right).$$

On définit le symbole de D en $x \in M$ et $(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi \in T_x^* M$ comme étant l'application linéaire $\sigma(D)(x, \xi) : E_x \rightarrow F_x$ donnée par :

$$\sigma(D)(x, \xi)(\eta) = \sum_{|s|=m} \xi_1^{s_1} \dots \xi_n^{s_n} a_s(x)(\eta).$$

On dira que l'opérateur D est *elliptique* si $\sigma(D)(x, \xi)$ est un isomorphisme pour tout $x \in M$ et tout covecteur $\xi \in T_x^* M$ non nul. Ceci implique en particulier que les fibrés E et F ont même rang *i.e.* $k = \ell$. Voici deux propriétés importantes d'un opérateur elliptique :

- Si l'équation $D\alpha = \beta$ a une solution, alors α a exactement la régularité de β , en particulier α est C^∞ si β l'est (c'est la propriété de *régularité*).
- Si M est compacte, le noyau N de D et son conoyau $C = C^\infty(F)/\text{Im}D$ sont de dimension finie.

On appelle *complexe différentiel* sur M la donnée d'une suite de fibrés vectoriels $(E^q)_{q \geq 0}$ et d'opérateurs différentiels d'ordre 1 :

$$(I.4) \quad 0 \longrightarrow C^\infty(E^0) \xrightarrow{D_0} C^\infty(E^1) \xrightarrow{D_1} \dots \xrightarrow{D_{q-1}} C^\infty(E^q) \xrightarrow{D_q} C^\infty(E^{q+1}) \xrightarrow{D_{q+1}} \dots$$

tels que $D_{q+1} \circ D_q = 0$ pour tout $q \geq 0$ (on dira aussi que la suite est *semi-exacte*). Le noyau $Z(E^q)$ de $D_q : C^\infty(E^q) \longrightarrow C^\infty(E^{q+1})$ contient donc l'image $B(E^q)$ de $D_{q-1} : C^\infty(E^{q-1}) \longrightarrow C^\infty(E^q)$; le quotient $H^q(E^*) = Z(E^q)/B(E^q)$ est le $q^{\text{ème}}$ espace vectoriel de *cohomologie* du complexe différentiel (E^*, D_*) .

Pour tout $x \in M$ et tout covecteur $\xi \in T_x^*M$, notons σ_q le symbole $\sigma(D_q)(x, \xi)$. On a alors une suite semi-exacte :

$$\dots \xrightarrow{\sigma_{q-2}} E_x^{q-1} \xrightarrow{\sigma_{q-1}} E_x^q \xrightarrow{\sigma_q} E_x^{q+1} \xrightarrow{\sigma_{q+1}} \dots$$

On dira que le complexe est *elliptique* si cette suite est exacte pour tout $x \in M$ et tout covecteur ξ non nul. On a le théorème suivant qui est un résultat marquant de la théorie de Hodge.

Théorème. *La cohomologie d'un complexe elliptique sur une variété compacte est de dimension finie.*

3. Faisceaux et préfaisceaux

Tout ce que nous allons raconter dans cette section peut se faire sur un espace topologique (ayant un minimum de propriétés) ; mais nous allons nous restreindre au cas d'une variété différentiable. Nous ne donnerons que l'essentiel, le lecteur désireux d'en savoir plus pourrait consulter [Gom].

3.1. Définition. *Un faisceau vectoriel sur M est la donnée d'un espace topologique \mathcal{E} et d'une projection continue $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow M$ telle que :*

i) π est un homéomorphisme local i.e. tout point $z \in \mathcal{E}$ admet un voisinage ouvert U tel que la restriction de π à U soit un homéomorphisme sur un voisinage ouvert de $x = \pi(z)$;

*ii) pour tout $x \in M$, $\pi^{-1}(x) = \mathcal{E}_x$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel ; on dira que \mathcal{E}_x est la **fib**re de \mathcal{E} au point x ;*

iii) pour tout $x \in M$, les applications $(u, v) \in \mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_x \longmapsto u + v \in \mathcal{E}_x$ et $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times \mathcal{E}_x \longmapsto \lambda u \in \mathcal{E}_x$ sont continues.

Dans toute la suite le mot "faisceau" désignera un faisceau vectoriel. Le plus élémentaire des exemples est celui obtenu en prenant $\mathcal{E} = M \times \mathbb{K}$ où \mathbb{K} est muni de la topologie discrète et $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow M$ la première projection. On l'appelle *faisceau constant* de fibre \mathbb{K} .

Soient $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow M$ un faisceau et U un ouvert de M . Une *section* de \mathcal{E} au-dessus de U est une application continue $\alpha : U \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que $\pi \circ \alpha = \text{id}_U$. Donc, pour tout $x \in U$, $\alpha(x) \in \mathcal{E}_x$. Une section au-dessus de M est dite *globale*. L'espace des sections au-dessus de U sera noté $\mathcal{E}(U)$; c'est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Observons que, comme π est un homéomorphisme local, deux sections qui coïncident en un point, coïncident sur tout un voisinage de ce point. Par exemple, les sections au-dessus de U du faisceau constant $M \times \mathbb{K}$ sont les fonctions localement constantes $U \longrightarrow \mathbb{K}$.

Soient $\pi_1 : \mathcal{E}^1 \longrightarrow M$ et $\pi_2 : \mathcal{E}^2 \longrightarrow M$ deux faisceaux sur M . Un *morphisme* de \mathcal{E}^1 vers \mathcal{E}^2 est une application continue $\Phi : \mathcal{E}^1 \longrightarrow \mathcal{E}^2$ telle que $\pi_1 = \pi_2 \circ \Phi$ et, pour tout $x \in M$, l'application induite sur les fibres $\Phi_x : \mathcal{E}_x^1 \longrightarrow \mathcal{E}_x^2$ est linéaire. On dira que Φ est un isomorphisme si Φ est un homéomorphisme ; dans ce cas, toutes les applications Φ_x linéaires sont des isomorphismes.

Une suite de faisceaux et de morphismes $\dots \longrightarrow \mathcal{E}^{i-1} \xrightarrow{\Phi_{i-1}} \mathcal{E}^i \xrightarrow{\Phi_i} \mathcal{E}^{i+1} \longrightarrow \dots$ est dite *exacte* si, pour tout $x \in M$, la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires $\dots \longrightarrow \mathcal{E}_x^{i-1} \xrightarrow{\Phi_x^{i-1}} \mathcal{E}_x^i \xrightarrow{\Phi_x^i} \mathcal{E}_x^{i+1} \longrightarrow \dots$ est exacte.

Soient $\pi_1 : \mathcal{E}^1 \longrightarrow M$ et $\pi_2 : \mathcal{E}^2 \longrightarrow M$ deux faisceaux et $\Phi : \mathcal{E}^1 \longrightarrow \mathcal{E}^2$ un morphisme. Alors, pour tout ouvert U de M , Φ induit une application linéaire $\Phi_U : \mathcal{E}^1(U) \longrightarrow \mathcal{E}^2(U)$ définie par $\Phi_U(\alpha)(x) = \Phi_x(\alpha(x))$; si Φ est un isomorphisme, il en est de même pour Φ_U . En particulier, on a une application linéaire $\Phi_* : \mathcal{E}^1(M) \longrightarrow \mathcal{E}^2(M)$ au niveau des sections globales.

- Le *support* d'un morphisme $\Phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est l'adhérence de l'ensemble des points $x \in M$ pour lesquels $\Phi_x \neq 0$. On le note $\text{supp}(\Phi)$.

- Une *partition de l'unité* de \mathcal{E} subordonnée à un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ est la donnée d'une collection de morphismes $\Phi_i : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ tels que $\text{supp}(\Phi_i) \subset U_i$ et $\sum_i \Phi_i$ est le morphisme identité. On dira que \mathcal{E} est *fin* si tout recouvrement ouvert (localement fini) $\{U_i\}$ possède une partition de l'unité.

Toute suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{\Phi^0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{\Phi^1} \mathcal{E}^2 \longrightarrow 0$ induit une suite exacte au niveau des sections globales $0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(M) \xrightarrow{\Phi_*^0} \mathcal{E}^1(M) \xrightarrow{\Phi_*^1} \mathcal{E}^2(M)$. En général la dernière flèche n'est pas surjective ; elle l'est lorsque le faisceau \mathcal{E}^0 vérifie une certaine propriété.

3.2. Définition. Un **préfaisceau** \mathcal{E} d'espaces vectoriels sur M est la donnée pour chaque ouvert U de M d'un espace vectoriel $\mathcal{E}(U)$ et, pour chaque paire d'ouverts $U \subset V$, d'une application linéaire $R_{UV} : \mathcal{E}(V) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ telle que si $U \subset V \subset W$ on ait $R_{UW} = R_{UV} \circ R_{VW}$. Un élément α de $\mathcal{E}(U)$ est appelé **section** de \mathcal{E} au-dessus de U ; l'image de $\beta \in \mathcal{E}(V)$ par R_{UV} est la **restriction** de β à U .

Le préfaisceau \mathcal{E} est dit **complet** si, pour toute famille d'ouverts $\{U_j\}_{j \in J}$ et U la réunion des U_j , il vérifie en plus les deux propriétés qui suivent :

i) pour toute famille $\alpha_j \in \mathcal{E}(U_j)$ telle que $R_{U_i, U_j}(\alpha_i) = R_{U_i, U_j}(\alpha_j)$, il existe $\alpha \in \mathcal{E}(U)$ telle que $\alpha_j = R_{U_j, U}(\alpha)$ pour tout $j \in J$ (ici $U_{ij} = U_i \cap U_j$) ;

ii) si $\alpha, \beta \in \mathcal{E}(U)$ sont telles que $R_{U_j, U}(\alpha) = R_{U_j, U}(\beta)$ pour tout $j \in J$, alors $\alpha = \beta$.

Soient \mathcal{E}^1 et \mathcal{E}^2 deux préfaisceaux sur M . Un morphisme $\Phi : \mathcal{E}^1 \longrightarrow \mathcal{E}^2$ est la donnée, pour chaque recouvrement ouvert U , d'une application linéaire $\Phi_U : \mathcal{E}^1(U) \longrightarrow \mathcal{E}^2(U)$ telle que, pour toute paire d'ouverts $U \subset V$, le diagramme qui suit commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^1(V) & \xrightarrow{\Phi_V} & \mathcal{E}^2(V) \\ R_{UV}^1 \downarrow & & \downarrow R_{UV}^2 \\ \mathcal{E}^1(U) & \xrightarrow{\Phi_U} & \mathcal{E}^2(U). \end{array}$$

On dira que Φ est un *isomorphisme* de préfaisceaux si, pour tout ouvert U , Φ_U est un isomorphisme.

Tout faisceau $\mathcal{E} \longrightarrow M$ donne lieu à un préfaisceau. Il suffit d'associer à chaque ouvert U de M l'espace vectoriel $\mathcal{E}(U)$ des sections de \mathcal{E} au-dessus de U et, pour toute paire d'ouverts $U \subset V$, définir $R_{UV} : \mathcal{E}(V) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ par $R_{UV}(\alpha) =$ restriction de α à U . De même, à tout préfaisceau \mathcal{E} on peut associer canoniquement un faisceau. Par le procédé qui précède, il redonnera le préfaisceau \mathcal{E} si celui-ci est complet. Il y a une correspondance biunivoque canonique entre les faisceaux et les préfaisceaux complets. Nous confondrons les deux notions dans toute la suite.

Comme pour les espaces vectoriels, on peut définir la notion de noyau et d'image d'un morphisme $\Phi : \mathcal{E}^1 \longrightarrow \mathcal{E}^2$ de préfaisceaux. Ce sont les préfaisceaux \mathcal{N} et \mathcal{R} définis sur un ouvert U par :

- $\mathcal{N}(U) = \ker\{\Phi_U : \mathcal{E}^1(U) \longrightarrow \mathcal{E}^2(U)\}$;
- $\mathcal{R}(U) = \text{Im}\{\Phi_U : \mathcal{E}^1(U) \longrightarrow \mathcal{E}^2(U)\}$.

Si \mathcal{E}^1 et \mathcal{E}^2 sont des faisceaux, \mathcal{N} est aussi un faisceau ; par contre \mathcal{R} n'en est pas toujours un (cf. [For] page 120).

La construction et les justifications de tout ce qu'on vient d'exposer demandent un peu de travail, nous renvoyons le lecteur à l'une des références [Gom] ou [War].

Soient M, M' deux variétés, $f : M \longrightarrow M'$ une application continue et \mathcal{E} un faisceau sur M . Pour tout ouvert $U' \subset M'$, on pose $\mathcal{E}'(U') = \mathcal{E}(f^{-1}(U'))$. On définit ainsi un faisceau \mathcal{E}' sur M' qu'on appelle *image directe* de \mathcal{E} par f . On le note habituellement $f_*\mathcal{E}$.

3.3. Exemples

- Pour tout ouvert U de M , on note $C^\infty(U)$ l'espace des fonctions $U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ et, pour toute paire d'ouverts $U \subset V$, R_{UV} sera la restriction $C^\infty(V) \longrightarrow C^\infty(U)$ i.e. à toute fonction différentiable $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$, on associe sa restriction $R_{UV}(f)$ à U . Il est

facile de voir qu'on définit ainsi un faisceau \tilde{C}^∞ sur M ; c'est le faisceau des *germes de fonctions* C^∞ sur M .

- Supposons que M est une variété analytique complexe. À tout ouvert U , on associe l'espace $\mathcal{H}(U)$ des fonctions $U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes et pour toute paire d'ouverts $U \subset V$, R_{UV} sera la restriction $\mathcal{H}(V) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ i.e. à toute fonction holomorphe $f : V \rightarrow \mathbb{C}$, $R_{UV}(f)$ associe sa restriction à U . De même que précédemment, il est facile de voir qu'on définit de cette façon un faisceau \mathcal{H} sur M ; c'est le faisceau des *germes de fonctions holomorphes* sur M .

- À tout fibré vectoriel $E \rightarrow M$ est associé le faisceau \tilde{C}^∞ des germes de ses sections C^∞ : pour tout ouvert U , $C^\infty(U, E)$ sera l'espace des sections C^∞ de E au-dessus de U . Pour la simplicité, l'espace des sections globales sera noté $C^\infty(E)$.

Dans chacun des cas qui précèdent, la fibre est obtenue de la façon qui suit. (Faisons-le pour le préfaisceau des sections C^∞ d'un fibré vectoriel $E \rightarrow M$. La même démarche fonctionne pour les sections continues, holomorphes ou autres.) Nous dirons que deux sections $\alpha_1 \in \mathcal{E}(U_1)$ et $\alpha_2 \in \mathcal{E}(U_2)$ ont même *germe* au point x , s'il existe un voisinage ouvert $W \subset U_1 \cap U_2$ de x tel que α_1 et α_2 soient égales sur W . Une classe d'équivalence suivant cette relation est un germe en x de sections de E . L'ensemble des germes au point x est un \mathbb{K} -espace vectoriel ; c'est la fibre \mathcal{E}_x du faisceau \mathcal{E} .

Ces exemples jouent un rôle essentiel en géométrie différentielle et complexe. Nous les utiliserons constamment dans ce travail.

- On appelle *résolution* du faisceau \mathcal{E} la donnée d'une suite exacte de faisceaux et de morphismes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}_0 \xrightarrow{\Phi_0} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\Phi_1} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{\Phi_2} \dots \xrightarrow{\Phi_{n-1}} \mathcal{E}_n \xrightarrow{\Phi_n} \mathcal{E}_{n+1} \dots$$

On dira que cette résolution est *fine* si tous les \mathcal{E}_n (pour $n \geq 1$) sont fins. Cette notion est capitale dans le calcul de la cohomologie comme on le verra.

3.4. Cohomologie

Soit \mathcal{E} un faisceau sur M . On se donne un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ (supposé comme toujours localement fini). Pour tout multi-indice (i_0, \dots, i_q) , on note $U_{i_0 \dots i_q}$ l'intersection $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}$ et Σ_q l'ensemble de ces multi-indices pour lesquels $U_{i_0 \dots i_q} \neq \emptyset$. Soit $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ l'ensemble des collections $(f_{i_0 \dots i_q})_{(i_0, \dots, i_q) \in \Sigma_q}$ où $f_{i_0 \dots i_q}$ est un élément de $\mathcal{E}(U_{i_0 \dots i_q})$; c'est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Un élément f de $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ est appelé *q-cochaîne* sur \mathcal{U} à valeurs dans \mathcal{E} . On définit un opérateur $\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ en associant à toute *q-cochaîne* $f = (f_{i_0 \dots i_q})_{(i_0, \dots, i_q)}$ la $(q+1)$ -cochaîne δf définie par :

$$(I.5) \quad (\delta f)_{i_0 \dots i_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{q+1}}$$

où $f_{i_0 \dots i_j \dots i_{q+1}}^j$ est la section $f_{i_0 \dots i_j \dots i_{q+1}}$ restreinte à l'ouvert $U_{i_0 \dots i_{q+1}}$. Par exemple, si on prend $q = 0$, une 0-cochaîne est donnée par $f = (f_i)$ et δf est la 1-cochaîne (f_{ij}) avec $f_{ij} = f_j - f_i$; si $q = 1$ et $f = (f_{ij})$ alors $\delta f = (f_{ijk})$ avec $f_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}$. On vérifie (c'est facile mais un peu lourd) que $\delta \circ \delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \longrightarrow C^{q+2}(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ est nul. On a donc un complexe différentiel (*i.e.* une suite semi-exacte) :

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \cdots C^q(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \cdots$$

Le noyau $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ de $\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ contient donc l'image $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ de $\delta : C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{E})$; le quotient $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{E}) = Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{E})/B^q(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ est le $q^{\text{ème}}$ espace de *cohomologie* de \mathcal{U} à coefficients dans le faisceau \mathcal{E} .

Rappelons qu'un recouvrement $\mathcal{U}' = \{U'_j\}_{j \in J}$ est dit *plus fin* que \mathcal{U} si, pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $U'_j \subset U_i$. Pour un tel recouvrement, on a un morphisme de restriction $r_q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \longrightarrow C^q(\mathcal{U}', \mathcal{E})$ dont il n'est pas difficile de voir qu'il commute à l'opérateur δ *i.e.* le diagramme qui suit est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\delta} & C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \\ r_q \downarrow & & \downarrow r_{q+1} \\ C^q(\mathcal{U}', \mathcal{E}) & \xrightarrow{\delta} & C^{q+1}(\mathcal{U}', \mathcal{E}). \end{array}$$

Il induit donc un morphisme en cohomologie $r_q^* : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \longrightarrow H^q(\mathcal{U}', \mathcal{E})$. La limite inductive obtenue sur les recouvrements de plus en plus fins donne un espace vectoriel noté $H^q(M, \mathcal{E})$ qui est par définition la *cohomologie* en degré q de M à valeurs dans le faisceau \mathcal{E} . On a les propriétés qui suivent.

- $H^0(M, \mathcal{E})$ n'est rien d'autre que l'espace $\mathcal{E}(M)$ des sections globales de \mathcal{E} .
- Soient M et M' deux variétés, $f : M \longrightarrow M'$ une applicationn continue, \mathcal{E} un faisceau sur M et \mathcal{E}' son image directe par f . Alors, pour tout entier $q \geq 0$, f induit un morphisme $f^* : H^q(M', \mathcal{E}') \longrightarrow H^q(M, \mathcal{E})$. Si M'' est une troisième variété, $g : M' \longrightarrow M''$ une application continue et \mathcal{E}'' l'image directe de \mathcal{E}' par g , alors $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. D'autre part si $M = M'$ et $f =$ identité de M alors $f^* =$ identité de $H^q(M, \mathcal{E})$.
- Tout morphisme $\Phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ de faisceaux au-dessus de M induit, pour chaque q , un morphisme $\Phi_* : H^q(M, \mathcal{E}) \longrightarrow H^q(M, \mathcal{E}')$ de telle sorte que $(\Phi' \circ \Phi)_* = \Phi'_* \circ \Phi_*$. Si Φ est un isomorphisme, il en est de même pour Φ_* .
- Toute suite exacte courte de faisceaux $0 \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow 0$ induit une suite exacte longue de cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(M, \mathcal{E}') \longrightarrow H^0(M, \mathcal{E}) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{E}'') \longrightarrow H^1(M, \mathcal{E}') \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow H^q(M, \mathcal{E}') \longrightarrow H^q(M, \mathcal{E}) \longrightarrow H^q(M, \mathcal{E}'') \longrightarrow H^{q+1}(M, \mathcal{E}') \cdots \end{aligned}$$

• Un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de M est dit *acyclique* si, pour toute intersection finie $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}$ on a $H^q(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}, \mathcal{E}) = 0$ pour $q \geq 1$. Pour un tel recouvrement, on a toujours $H^q(M, \mathcal{E}) = H^q(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ pour tout $q \geq 0$. C'est le théorème de Leray ; dans certaines situations il permet de calculer aisément les espaces $H^q(M, \mathcal{E})$.

• Soient \mathcal{E} un faisceau sur M et $(E^q)_{q=0, \dots, m}$ une famille finie de fibrés vectoriels. Pour tout $q = 0, \dots, m$, notons $\tilde{C}^\infty(E^q)$ le faisceau des germes de sections C^∞ de E^q ; l'espace $C^\infty(E^q)$ des sections globales du fibré E^q est exactement l'espace des sections globales du faisceau $\tilde{C}^\infty(E^q)$. On se donne des opérateurs différentiels $D_q : C^\infty(E^q) \longrightarrow C^\infty(E^{q+1})$ pour $q = 0, 1, \dots, m$ (avec $D_m = 0$) ; chacun des D_q induit un morphisme de faisceaux $D_q : \tilde{C}^\infty(E^q) \longrightarrow \tilde{C}^\infty(E^{q+1})$. On rappelle que, comme il existe une partition de l'unité C^∞ subordonnée à n'importe quel recouvrement ouvert localement fini de M , chacun des faisceaux $\tilde{C}^\infty(E^q)$ est fin. On a alors le théorème qui suit connu comme étant le *théorème abstrait de de Rham*.

Théorème. *Si $0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \tilde{C}^\infty(E^0) \xrightarrow{D_0} \tilde{C}^\infty(E^1) \dots \tilde{C}^\infty(E^{m-1}) \xrightarrow{D_{m-1}} \tilde{C}^\infty(E^m) \longrightarrow 0$ est une résolution de \mathcal{E} (i.e. la suite est exacte), la cohomologie $H^*(M, \mathcal{E})$ est exactement celle du complexe différentiel :*

$$0 \longrightarrow C^\infty(E^0) \xrightarrow{D_0} C^\infty(E^1) \xrightarrow{D_1} \dots \xrightarrow{D_{m-2}} C^\infty(E^{m-1}) \xrightarrow{D_{m-1}} C^\infty(E^m) \longrightarrow 0$$

i.e. $H^0(M, \mathcal{E})$ est le noyau de D_0 et, pour chaque $q = 1, \dots, m$, $H^q(M, \mathcal{E})$ est le quotient du noyau de l'opérateur $C^\infty(E^q) \xrightarrow{D_q} C^\infty(E^{q+1})$ par l'image de $C^\infty(E^{q-1}) \xrightarrow{D_{q-1}} C^\infty(E^q)$.

Ce théorème permet de recourir à l'outil analytique pour calculer la cohomologie d'une variété à valeurs dans un faisceau. Nous aurons l'occasion de voir cela dans notre travail.

4. Cohomologie des groupes discrets

C'est une notion dont les méthodes seront souvent présentes dans notre travail. Il est donc nécessaire d'en donner les éléments de base. Soit Γ un groupe discret (dénombrable pour simplifier) agissant sur un espace vectoriel E . L'action d'un élément $\gamma \in \Gamma$ sur un élément $u \in E$ sera notée $\gamma \cdot u$.

4.1. Définition

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $C^k(\Gamma, E)$ l'ensemble des fonctions de Γ^k dans E qu'on appelle *k-cochaînes inhomogènes* sur Γ à valeurs dans E . On définit l'application linéaire $d : C^k(\Gamma, E) \longrightarrow C^{k+1}(\Gamma, E)$ par :

$$(I.6) \quad \begin{aligned} (dc)(\gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}) &= \gamma_1 \cdot c(\gamma_2, \dots, \gamma_{k+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^k (-1)^i c(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i \gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \dots, \gamma_{k+1}) \\ &+ (-1)^{k+1} c(\gamma_1, \dots, \gamma_k). \end{aligned}$$

L'opérateur d satisfait $d^2 = 0$; l'image $B^k(\Gamma, E)$ de $d : C^{k-1}(\Gamma, E) \longrightarrow C^k(\Gamma, E)$ est donc un sous-espace vectoriel du noyau $Z^k(\Gamma, E)$ de $d : C^k(\Gamma, E) \longrightarrow C^{k+1}(\Gamma, E)$. Les quotients $H^k(\Gamma, E) = Z^k(\Gamma, E)/B^k(\Gamma, E)$ pour $k \in \mathbb{N}$ sont appelés les *espaces de cohomologie* de Γ à valeurs dans le Γ -module E .

4.2. Exemples

Supposons, pour simplifier, que l'action de Γ sur E est triviale. Une autre manière de définir la cohomologie $H^*(\Gamma, E)$ est la suivante. Il existe un espace topologique connexe noté $K(\Gamma, 1)$ (ou $B\Gamma$) appelé *classifiant* de Γ , défini à homotopie près par les conditions :

$$\pi_i(K(\Gamma, 1)) = \begin{cases} \Gamma & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par définition la cohomologie de Γ à coefficients dans E sera la cohomologie singulière à coefficients dans E de l'espace $K(\Gamma, 1)$ (cf. [BT]).

Par exemple, si Γ agit librement et proprement sur un espace contractile M , $K(\Gamma, 1) = M/\Gamma$ et la cohomologie du groupe Γ s'identifie canoniquement à celle de l'espace quotient M/Γ .

- $\Gamma = \mathbb{Z}^n$; alors $K(\mathbb{Z}^n, 1)$ est (à homotopie près) le tore \mathbb{T}^n et donc :

$$H^*(\mathbb{Z}^n, E) = E^{C_n^*}$$

où $C_n^* = \frac{n!}{*(n-*)!}$.

- Γ est le groupe engendré par $\gamma_1, \dots, \gamma_g, \sigma_1, \dots, \sigma_g$ (avec $g \geq 2$) vérifiant la relation $\gamma_1 \sigma_1 \gamma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \dots \gamma_g \sigma_g \gamma_g^{-1} \sigma_g^{-1} = 1$. Alors $K(\Gamma, 1)$ est la surface compacte orientable de genre g . Dans ce cas la cohomologie de Γ est donnée par :

$$H^*(\Gamma, E) = \begin{cases} E & \text{si } * = 0, 2 \\ E^{2g} & \text{si } * = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.3. Cas de $\Gamma = \mathbb{Z}$

Supposons que Γ est le groupe infini cyclique \mathbb{Z} et que son action sur E est engendrée par un élément γ . Alors un calcul facile montre que :

$$(I.7) \quad H^*(\Gamma, E) = \begin{cases} E^\gamma & \text{si } * = 0 \\ E/\langle x - \gamma x \rangle & \text{si } * = 1 \\ 0 & \text{si } * \geq 2 \end{cases}$$

où $\langle x - \gamma x \rangle$ est le sous-espace vectoriel de E constitué des éléments de la forme $x - \gamma x$ avec x variant dans E . Le calcul de $H^1(\Gamma, E)$ se ramène donc à la résolution de l'équation cohomologique :

Étant donné $y \in E$, existe-t-il $x \in E$ tel que $y = x - \gamma x$?

CHAPITRE II

LE $\bar{\partial}$ POUR LES FEUILLETAGES COMPLEXES

On introduit dans ce chapitre la notion de feuilletage complexe et le problème du $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ proprement dit. Mais avant on fera quelques rappels sur le problème du $\bar{\partial}$ classique et la cohomologie de Dolbeault. Le lecteur désireux de plus de détails peut se référer à [Dem1], [For], [Hör] ou [War].

1. Le problème du $\bar{\partial}$

On se donne une variété différentiable M . Une *structure presque complexe* sur M est une section J de classe C^∞ du fibré $\text{End}(TM)$ vérifiant $J^2 = -\text{id}$. Le couple (M, J) est dit *variété presque complexe*. Il s'agit donc de la donnée d'une famille $\{J(x)\}$ de *structures complexes linéaires* sur les espaces vectoriels $T_x M$ variant de manière C^∞ par rapport à x . Remarquons que dans ce cas M est de dimension réelle paire. En effet, pour tout point $x \in M$, l'espace $T_x M$ tangent à M en x , admet une base de la forme $(X_1, \dots, X_m, JX_1, \dots, JX_m)$. La variété M hérite ainsi d'une orientation naturelle. Ces deux conditions (la dimension paire et l'orientation) sont nécessaires mais non suffisantes.

Soit (M, J) une variété presque complexe. Le complexifié $TM^{\mathbb{C}}$ de l'espace tangent réel TM à M se décompose en somme directe $TM^{\mathbb{C}} = TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$ où $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$ désignent les sous-fibrés propres associés respectivement aux valeurs propres i et $-i$ de J . Ceci donne lieu à une décomposition de l'espace des r -formes différentielles en somme directe $\Omega^r(M) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M)$ où $\Omega^{p,q}(M)$ est l'espace des sections du fibré $\Lambda^p(T^{1,0})^* \otimes \Lambda^q(T^{0,1})^*$. L'opérateur de différentiation extérieure d se décompose en une somme $d = d_{(1,0)} + d_{(0,1)} + d_{(2,-1)} + d_{(-1,2)}$. L'opérateur :

$$(II.1) \quad d_{(0,1)} : \Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(M)$$

est appelé *opérateur de Cauchy-Riemann* et est noté $\bar{\partial}$.

On note $\mathfrak{X}^{1,0}(M)$ (respectivement $\mathfrak{X}^{0,1}(M)$) l'espace des sections C^∞ du fibré $T^{1,0}M$ (respectivement $T^{0,1}M$). On considère l'application $\theta : \mathfrak{X}^{1,0}(M) \times \mathfrak{X}^{1,0}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^{0,1}(M)$ qui à $X, Y \in \mathfrak{X}^{1,0}(M)$ associe la composante de type $(0,1)$ de $[X, Y]$; on l'appelle *torsion* de la structure presque complexe J . Le *problème d'intégrabilité* consiste à trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la torsion d'une structure presque complexe soit

identiquement nulle, c'est-à-dire pour que $\mathfrak{X}^{1,0}(M)$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{X}(M)$. À cet effet on a le résultat suivant :

La structure presque complexe J est intégrable si, et seulement si, l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) le tenseur $\mathcal{N}(X, Y) = 2\{[JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]\}$ de Nijenhuis associé à J est identiquement nul ;

(ii) $d = d_{(1,0)} + \bar{\partial}$;

(iii) $\bar{\partial}^2 = \bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$.

Conséquence : *Toute structure presque complexe J sur une variété différentiable de dimension 2 est intégrable.*

On a aussi le théorème de Newlander-Nirenberg : *toute structure presque complexe intégrable est définie par une structure analytique complexe unique.*

1.1. Formes de type (p, q)

Soit M une variété analytique complexe de dimension m . Soit (z_1, \dots, z_m) un système de coordonnées locales de M . Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, on a $z_j = x_j + iy_j$. Ainsi $dz_j = dx_j + idy_j$, $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$ et :

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

Toute forme $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$ s'écrit localement :

$$\omega = \sum_{|I|=p, |J|=q} \omega_{IJ}(z_1, \dots, z_m) dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

où la somme porte sur tous les multi-indices $I = (i_1, \dots, i_p)$ et $J = (j_1, \dots, j_q)$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq m$ et :

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \quad \text{et} \quad d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Rappelons que $\bar{\partial}$ désigne l'opérateur de Cauchy-Riemann sur M .

1.2. Cohomologie de Dolbeault

Pour toute forme ω de type (p, q) comme on vient de se la donner, la $(p, q+1)$ -forme $\bar{\partial}\omega$ s'écrit :

$$(II.2) \quad \bar{\partial}\omega = \sum_{I, J} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \omega_{IJ}}{\partial \bar{z}_k}(z_1, \dots, z_m) d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

On sait déjà que l'opérateur $\bar{\partial}$ vérifie la relation $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$. Donc, pour tout p fixé dans $\{0, \dots, m\}$, on a un complexe différentiel :

$$0 \longrightarrow \Omega^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,m-1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,m}(M) \longrightarrow 0$$

dit *complexe de Dolbeault* de M . On note $Z^{p,q}(M)$ (respectivement $B^{p,q}(M)$) l'espace des formes de type (p, q) sur M $\bar{\partial}$ -fermées (resp. $\bar{\partial}$ -exactes) c'est-à-dire :

$$Z^{p,q}(M) = \text{Noyau}\{\Omega^{p,q}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,q+1}(M)\}$$

et

$$B^{p,q}(M) = \text{Image}\{\Omega^{p,q-1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,q}(M)\}.$$

La *cohomologie de Dolbeault* de M est définie par $H^{p,*}(M) = Z^{p,*}(M)/B^{p,*}(M)$. Elle mesure l'obstruction à la résolution du :

Problème du $\bar{\partial}$. Soient $q \geq 1$ et $\beta \in Z^{p,q}(M)$. Existe-t-il une forme $\omega \in \Omega^{p,q-1}(M)$ vérifiant $\bar{\partial}\omega = \beta$?

Localement, ce problème admet toujours une solution ; plus précisément, on a le lemme qui suit (qui est l'équivalent du lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham).

Lemme de Dolbeault-Grothendieck. Tout point x de M admet un voisinage ouvert U tel que, pour tout $p = 0, \dots, m$, $H^{p,q}(U) = 0$, pour tout $q \geq 1$.

Une forme ω sur M est dite *holomorphe* si elle est de type $(p, 0)$ et vérifie $\bar{\partial}\omega = 0$. Ces formes donnent lieu à un faisceau noté \mathcal{H}^p et appelé faisceau des *germes de p -formes holomorphes* sur M . Si $\tilde{\Omega}^{p,q}(M)$ est le faisceau des germes de formes de type (p, q) de classe C^∞ sur M , on a le théorème qui suit dû à P. Dolbeault (cf. [Dem1], [Hör] ou [Wel]).

Théorème Pour tout $p = 0, 1, \dots, m$, la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^p \longrightarrow \tilde{\Omega}^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \tilde{\Omega}^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \tilde{\Omega}^{p,m-1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \tilde{\Omega}^{p,m}(M) \longrightarrow 0$$

est une résolution fine et elliptique du faisceau \mathcal{H}^p . Ainsi $H^q(M, \mathcal{H}^p) = H^{p,q}(M)$ d'après le théorème abstrait de de Rham. Si en plus M est compacte, les espaces vectoriels $H^q(M, \mathcal{H}^p)$ sont de dimension finie.

1.3. Quelques exemples

- Pour tout ouvert M de \mathbb{C} (cf. [Hör]), on a $H^{p,q}(M) = 0$ pour $p = 0, 1$ et $q = 1$. (On a bien sûr $H^{p,q}(M) = 0$ lorsque $q \geq 2$ pour des raisons immédiates de dimension.)

- Pour toute surface de Riemann M non compacte, on a toujours $H^{p,q}(M) = 0$ pour $p = 0, 1$ et $q \geq 1$ (cf. [For] pour la démonstration).

• Soit M un ouvert de \mathbb{C}^m . On dira que M est un *domaine d'holomorphic* s'il n'existe pas d'ouverts non vides M_1 et M_2 de \mathbb{C}^m tels que :

- i) $M_1 \subset M_2 \cap M$;
- ii) M_2 est connexe non contenu dans M ;
- iii) pour toute fonction holomorphe $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, il existe une fonction holomorphe $f_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f = f_2$ sur M_1 .

Pour un tel domaine (cf. [Hör]), on a :

$$H^{p,q}(M) = 0 \quad \text{pour tout } p = 0, \dots, m \text{ et tout } q = 1, \dots, m.$$

• Soit M une variété complexe de dimension m (dénombrable à l'infini). On dira que M est une *variété de Stein*, si :

- i) M est *holomorphiquement convexe*, i.e. pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble :

$$\hat{K} = \{z \in M : |f(z)| \leq \sup_{w \in K} |f(w)| \text{ pour toute fonction holomorphe } f \text{ sur } M\}$$

est un compact de M ;

- ii) si z_1, z_2 sont deux points distincts de M , il existe $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(z_1) \neq f(z_2)$;

iii) pour tout $z \in M$, il existe m fonctions holomorphes f_1, \dots, f_m sur un voisinage de z qui forment un système de coordonnées.

Pour une telle variété, il existe toujours un plongement holomorphe $M \rightarrow \mathbb{C}^N$ pour un certain entier N . L'espace \mathbb{C}^m lui-même est une variété de Stein ; un ouvert de \mathbb{C}^m est de Stein si, et seulement si, il est d'holomorphic. Tout ouvert de \mathbb{C} est de Stein. Le produit de deux variétés de Stein est une variété de Stein ; par contre un fibré dont la base et la fibre sont de Stein n'est pas toujours de Stein (cf. [Dem2], [CL], [Sko]). Pour une variété de Stein M , on a toujours :

$$H^{p,q}(M) = 0 \quad \text{pour tout } p = 0, \dots, m \text{ et tout } q = 1, \dots, m.$$

• Voici un exemple où la cohomologie est non nulle. On se contentera de signaler le calcul de $H^{0,1}(M)$. Soit M l'ouvert $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ de \mathbb{C}^2 . Considérons le recouvrement ouvert $U_1 = \{(z_1, z_2) \in M : z_1 \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $U_2 = \{(z_1, z_2) \in M : z_2 \neq 0\} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Alors $U_1 \cap U_2 \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Comme chacun des ouverts U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ est une variété de Stein, le recouvrement $\{U_1, U_2\}$ est acyclique. Les calculs (qu'on trouvera dans [MK]) montrent que $H^{0,1}(M)$ est engendré par les séries uniformément convergentes sur tout compact de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$:

$$\sum_{\substack{m_1 < 0 \\ m_2 < 0}} \frac{c_{m_1 m_2}}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \quad \text{où les } c_{m_1 m_2} \text{ sont des constantes complexes.}$$

2. Feuilletages complexes

Cette section sera consacrée aux définitions et aux ingrédients qui serviront à formuler le problème du $\bar{\partial}$ le long des feuilles. Tout ce matériel se trouve exposé en détail dans [Ek1].

Un feuilletage \mathcal{F} de dimension m sur une variété différentiable M est une relation d'équivalence ouverte sur M dont les classes d'équivalence sont des sous-variétés connexes, de dimension m , immergées dans M et appelées *feuilles* de (M, \mathcal{F}) . De façon précise :

Soit M une variété (connexe) de dimension $m+n$. Un feuilletage \mathcal{F} de **codimension** n (ou de **dimension** m) sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ et pour tout i , d'un difféomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow U_i$ tel que, sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$, le difféomorphisme de changement de coordonnées $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (x, y) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow (x', y') \in \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ soit de la forme $x' = \varphi_{ij}(x, y)$ and $y' = \gamma_{ij}(y)$.

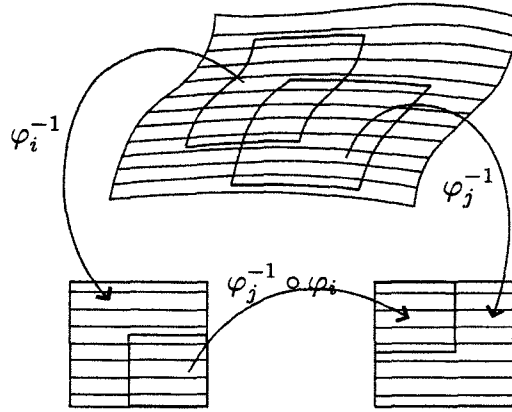


Fig.1

Les systèmes de coordonnées (U_i, φ_i) satisfaisant les conditions de la définition qu'on vient de donner sont dits *distingués* pour le feuilletage. Soit M une variété différentiable munie d'un feuilletage \mathcal{F} de dimension réelle $2m$. On notera $T\mathcal{F}$ le fibré tangent à \mathcal{F} .

2.1. Définition. On dira que \mathcal{F} est **complexe** s'il peut être défini par un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de M et des difféomorphismes $\varphi_i : \Omega_i \times \mathcal{O}_i \rightarrow U_i$ (où Ω_i est un ouvert de \mathbb{C}^m et \mathcal{O}_i un ouvert de \mathbb{R}^n) tels que les changements de coordonnées :

$$(II.3) \quad \varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (z, t) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow (z', t') \in \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

soient de la forme $(z', t') = (\varphi_{ij}^1(z, t), \varphi_{ij}^2(t))$ avec $\varphi_{ij}^1(\cdot, t)$ holomorphe en z pour t fixé.

On peut aussi donner une autre définition en termes de géométrie différentielle. Une structure *presque complexe* sur \mathcal{F} est la donnée d'un endomorphisme $J_{\mathcal{F}} : T\mathcal{F} \rightarrow T\mathcal{F}$

tel que $J_{\mathcal{F}}^2 = -\text{id}_{T\mathcal{F}}$. En particulier, chaque feuille est munie d'une structure presque complexe.

On suppose dans la suite que la variété feuilletée (M, \mathcal{F}) est munie d'une structure presque complexe le long des feuilles $J_{\mathcal{F}}$. Considérons le complexifié $T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ du fibré $T\mathcal{F}$ et notons respectivement $T^{10}\mathcal{F}$ et $T^{01}\mathcal{F}$ les sous-fibrés propres associés respectivement aux valeurs propres i et $-i$ de l'automorphisme $J_{\mathcal{F}}$. On a une décomposition en somme directe:

$$T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C} = T^{10}\mathcal{F} \oplus T^{01}\mathcal{F}.$$

On note :

a) $\mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M)$ l'espace des sections du fibré $T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ i.e. les champs de vecteurs sur M tangents au feuilletage \mathcal{F} ;

b) pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\Omega_{\mathcal{F}}^r(M)$ l'espace des sections C^∞ du fibré $\Lambda^r T\mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}$; en fixant un supplémentaire du fibré $T\mathcal{F}$ dans TM , on peut voir les éléments de $\Omega_{\mathcal{F}}^r(M)$ comme des formes différentielles feuilletées sur (M, \mathcal{F}) (à coefficients complexes). On a un opérateur de différentiation extérieure le long des feuilles $d_{\mathcal{F}} : \Omega_{\mathcal{F}}^r(M) \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{r+1}(M)$ défini par :

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}}\alpha(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{i < j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{r+1}). \end{aligned}$$

Pour tout $r \in \{0, \dots, 2m\}$, on a une décomposition en somme directe :

$$\Omega_{\mathcal{F}}^r(M) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}(M).$$

Un élément $\alpha \in \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)$ est appelé *forme feuilletée* de type (p, q) . La différentielle extérieure le long des feuilles $d_{\mathcal{F}}$ se décompose en une somme d'opérateurs :

$$(II.4) \quad d_{\mathcal{F}} = \partial_{\mathcal{F}} + \bar{\partial}_{\mathcal{F}} + d_{\mathcal{F}}^{(2,-1)} + d_{\mathcal{F}}^{(-1,2)}$$

respectivement de types $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, -1)$ et $(-1, 2)$. L'opérateur :

$$\bar{\partial}_{\mathcal{F}} : \alpha \in \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}(M) \longmapsto \bar{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha \in \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q+1}(M)$$

est dit *opérateur de Cauchy-Riemann le long des feuilles* de (M, \mathcal{F}) . On définit le *tenseur de Nijenhuis* $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} : \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M) \times \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}(M)$ associé à $J_{\mathcal{F}}$ par :

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(X, Y) = 2\{[J_{\mathcal{F}}X, J_{\mathcal{F}}Y] - [X, Y] - J_{\mathcal{F}}[J_{\mathcal{F}}X, Y] - J_{\mathcal{F}}[X, J_{\mathcal{F}}Y]\}.$$

Proposition. Soit $J_{\mathcal{F}}$ une structure presque complexe le long des feuilles de \mathcal{F} . Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Le tenseur de Nijenhuis $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ associé à $J_{\mathcal{F}}$ est identiquement nul.

(ii) $d_{\mathcal{F}} = \partial_{\mathcal{F}} + \bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ i.e. les opérateurs $d_{\mathcal{F}}^{(2,-1)}$ et $d_{\mathcal{F}}^{(-1,2)}$ sont nuls.

Si l'une de ces assertions est vérifiée on dira que $J_{\mathcal{F}}$ est **intégrable**.

2.2. Définition. Un feuilletage \mathcal{F} sur M est dit **complexe** s'il existe sur son fibré tangent $T\mathcal{F}$ une structure presque complexe intégrable.

Conséquence immédiate : toute structure presque complexe le long des feuilles d'un feuilletage orientable par surfaces est intégrable. Le problème se pose évidemment si la dimension (réelle) des feuilles est au moins 4. Par exemple, le seul feuilletage complexe de dimension supérieure ou égale à 2 sur une sphère impaire \mathbb{S}^{2n+1} connu à ce jour a été construit sur \mathbb{S}^5 par L. Meersseman et A. Verjovsky (cf. [MV]) suite à une question posée dans la version préliminaire de [Ek1].

Ainsi, si \mathcal{F} est un feuilletage complexe sur M les feuilles de (M, \mathcal{F}) sont des variétés complexes. Localement, la structure complexe sur les feuilles varie différemment par rapport au paramètre transverse.

Soient (M, \mathcal{F}) et (M', \mathcal{F}') deux feuilletages complexes. On appelle *morphisme* de (M, \mathcal{F}) vers (M', \mathcal{F}') toute application $f : M \rightarrow M'$ de classe C^∞ et telle que l'image de toute feuille F de \mathcal{F} est contenue dans une feuille F' de \mathcal{F}' et l'application $f : F \rightarrow F'$ est holomorphe. On dira qu'un morphisme $f : (M, \mathcal{F}) \rightarrow (M', \mathcal{F}')$ est un *isomorphisme de feuilletages complexes* si c'est un difféomorphisme qui est un biholomorphisme sur les feuilles. Lorsque $M = M'$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ on parlera simplement d'automorphisme de (M, \mathcal{F}) . On notera $\text{Aut}(M, \mathcal{F})$ l'ensemble des automorphismes de (M, \mathcal{F}) qui est un groupe pour la composition des applications.

3. Le problème du $\bar{\partial}$ le long des feuilles

Soit M une variété munie d'un feuilletage complexe \mathcal{F} de dimension m . Lorsqu'on travaillera en coordonnées locales, on les notera toujours $(z, t) = (z_1, \dots, z_m, t_1, \dots, t_n)$ où n est la codimension réelle de \mathcal{F} . Pour chaque $j = 1, \dots, m$, $z_j = x_j + iy_j$. Ainsi, pour $j = 1, \dots, m$:

$$dz_j = dx_j + idy_j \quad \text{et} \quad d\bar{z}_j = dx_j - idy_j.$$

De même :

$$(II.5) \quad \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Pour tous multi-indices $I = (i_1, \dots, i_p)$ et $J = (j_1, \dots, j_q)$ dans $\{1, \dots, m\}$, on adoptera les notations suivantes pour l'écriture des formes différentielles le long des feuilles :

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \quad \text{et} \quad d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Une forme différentielle de degré $r = p + q$ s'écrivant localement comme combinaison linéaire (à coefficients des fonctions différentiables) de telles formes est dite *feuilletée de type* (p, q) . Soit $\alpha \in \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)$ s'écrivant localement :

$$\alpha = \sum_{|I|=p, |J|=q} \alpha_{IJ}(z, t) dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

où la somme porte sur tous les multi-indices $I = (i_1, \dots, i_p)$ et $J = (j_1, \dots, j_q)$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq m$. L'opérateur de Cauchy-Riemann le long des feuilles a pour expression locale :

$$(II.6) \quad \bar{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = \sum_{I,J} \sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial \bar{z}_k}(z, t) d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Il vérifie $\bar{\partial}_{\mathcal{F}} \circ \bar{\partial}_{\mathcal{F}} = 0$; pour tout p fixé dans $\{0, \dots, m\}$, on obtient donc un complexe différentiel :

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,m-1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,m}(M) \longrightarrow 0$$

appelé *complexe de Dolbeault feuilleté* (ou *complexe* du $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$) de \mathcal{F} . On pose :

$$Z_{\mathcal{F}}^{p,q}(M) = \text{noyau}\{\Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q+1}(M)\}$$

et

$$B_{\mathcal{F}}^{p,q}(M) = \text{image}\{\Omega_{\mathcal{F}}^{p,q-1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)\}.$$

La cohomologie de ce complexe $H_{\mathcal{F}}^{p,*}(M) = Z_{\mathcal{F}}^{p,*}(M)/B_{\mathcal{F}}^{p,*}(M)$ est appelée $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ -cohomologie ou *cohomologie de Dolbeault feuilletée*.

L'espace vectoriel topologique $H_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)$ (les espaces de formes feuilletées de type (p, q) sont munis de la topologie C^∞) peut ne pas être séparé ! On appelle alors *cohomologie de Dolbeault feuilletée réduite* le quotient $\overline{H}_{\mathcal{F}}^{p,q}(M) = Z_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)/\overline{B_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)}$ où $\overline{B_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)}$ est l'adhérence de $B_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)$.

3.1. Problème du $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$. *Étant donnée une forme feuilletée $\beta \in Z_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)$, existe-t-il une forme feuilletée $\alpha \in \Omega_{\mathcal{F}}^{p,q-1}(M)$ telle que $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = \beta$?*

La cohomologie de Dolbeault feuilletée mesure donc l'obstruction à l'existence des solutions pour le problème du $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$. Localement, ce problème admet toujours une solution ; plus précisément, on a une version feuilletée du Lemme de Dolbeault-Grothendieck qui est l'équivalent du lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham. La démonstration consiste à adapter au cas paramétré celle du cas classique bien connue.

3.2. Lemme de Dolbeault-Grothendieck feuilleté. *Tout point de M admet un voisinage ouvert U distingué pour \mathcal{F} tel que, pour tout $p = 0, \dots, m$, on ait $H_{\mathcal{F}}^{p,q}(U) = 0$ pour $q \geq 1$.*

On peut aussi décrire $H_{\mathcal{F}}^{p,*}(M)$ à l'aide d'un faisceau qui joue un rôle analogue au faisceau des germes de formes holomorphes sur une variété analytique complexe.

3.3. Définition. *Une p -forme α est dite \mathcal{F} -holomorphe, si elle est feuilletée de type $(p, 0)$ et vérifie $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}\alpha = 0$.*

Localement, une p -forme \mathcal{F} -holomorphe s'écrit $\alpha = \sum \alpha_{j_1 \dots j_p}(z, t) dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p}$ avec $\alpha_{j_1 \dots j_p}$ holomorphe en z .

Soient $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}^p$ le faisceau des germes de p -formes \mathcal{F} -holomorphes sur M et $\tilde{\Omega}_{\mathcal{F}}^{p,q}$ celui des germes de formes différentielles de type (p, q) sur \mathcal{F} ; ce dernier est un faisceau fin sur M . Le lemme 3.2 implique la :

3.4. Proposition. *La suite $0 \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{F}}^p \hookrightarrow \tilde{\Omega}_{\mathcal{F}}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \tilde{\Omega}_{\mathcal{F}}^{p,m} \longrightarrow 0$ est une résolution fine de $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}^p$. On a alors $H^q(M, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}^p) = H_{\mathcal{F}}^{p,q}(M)$, pour tous $p, q = 0, 1, \dots, m$.*

Si $n \geq 1$, cette résolution n'est pas elliptique ; elle l'est seulement le long des feuilles. La cohomologie $H^*(M, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}^p)$ n'est donc pas toujours de dimension finie même si M est compacte.

Pour $p = 0$, on notera $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ le faisceau $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}^0$; ses sections sont les fonctions C^∞ qui sont \mathcal{F} -holomorphes. Pour tout ouvert $U \subset M$, l'espace $H^0(U, \mathcal{H}_{\mathcal{F}})$ est constitué par les fonctions C^∞ et \mathcal{F} -holomorphes sur U . On le notera $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(U)$ et simplement $\mathcal{H}(U)$ si \mathcal{F} est de codimension 0 i.e. M est complexe et est la seule feuille de \mathcal{F} .

3.5. Remarque

Soit $M = F \times B$ le produit d'une variété analytique complexe F et d'une variété différentiable B muni du feuilletage \mathcal{F} dont les feuilles sont les copies de $F : F \times \{b\}$, $b \in B$, ayant la même structure complexe. On a alors (cf. [Ek2]), pour tous $p = 0, 1, \dots, m$ et $q = 0, 1, \dots, m$:

$$H_{\mathcal{F}}^{p,q}(M) = H^{p,q}(F) \otimes C^\infty(B)$$

où $C^\infty(B)$ est l'espace des fonctions C^∞ sur B . En particulier, si F est une variété de Stein, alors :

$$H_{\mathcal{F}}^{p,q}(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 0 \\ \mathcal{H}^p(F) \otimes C^\infty(B) & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

où $\mathcal{H}^p(F)$ est l'espace des p -formes holomorphes sur F .

3.6. Fonctionnelles \mathcal{F} -analytiques invariantes

L'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ des fonctions \mathcal{F} -holomorphes est un sous-espace de l'espace $C^\infty(M)$; il y est fermé pour la topologie C^∞ . La topologie induite sur $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ est celle de la convergence uniforme sur les compacts des dérivées par rapport au paramètre transverse (il n'est pas nécessaire de dériver le long des feuilles). Une *fonctionnelle \mathcal{F} -analytique* sur (M, \mathcal{F}) est une forme linéaire continue $\zeta : h \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M) \mapsto \langle \zeta, h \rangle \in \mathbb{C}$. Elle généralise la notion classique de fonctionnelle analytique de Martineau [Ma].

Soit Γ un groupe d'automorphismes du feuilletage complexe (M, \mathcal{F}) : chaque élément $\gamma \in \Gamma$ est un difféomorphisme $\gamma : M \rightarrow M$ tel que, pour toute feuille $F \in \mathcal{F}$, γ est un biholomorphisme de F sur la feuille $F' = \gamma(F)$. Alors Γ agit sur l'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$:

$$(\gamma, h) \in \Gamma \times \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M) \longrightarrow h \circ \gamma^{-1} \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M).$$

C'est une action continue ; par transposition, elle induit une action continue sur l'espace $\mathcal{H}'_{\mathcal{F}}(M)$ des fonctionnelles \mathcal{F} -analytiques (dual topologique de $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$). Un point fixe ζ de cette action est appelé fonctionnelle \mathcal{F} -analytique Γ -invariante. Il suffit en fait que cette propriété soit vérifiée sur un système générateur du groupe ; ce qui simplifie le calcul dans le cas des groupes finiment engendrés.

Supposons Γ isomorphe à \mathbb{Z} engendré par un élément $\gamma \in \text{Aut}(M, \mathcal{F})$. Dans cette situation on a un opérateur $\delta : h \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M) \mapsto (h - h \circ \gamma) \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$. Son conoyau est fondamental dans la détermination de l'espace $\mathcal{H}'_{\mathcal{F}, \Gamma}(M)$ des fonctionnelles \mathcal{F} -analytiques Γ -invariantes. En effet, une fonctionnelle \mathcal{F} -analytique Γ -invariante est nulle sur l'image de δ qui n'est rien d'autre que l'espace \mathcal{C} engendré par les éléments de la forme $h - h \circ \gamma$ avec h variant dans $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$; elle induit donc une forme linéaire continue sur le quotient $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)/\mathcal{C}$ qui est exactement le premier groupe de cohomologie $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M))$ à valeurs dans le \mathbb{Z} -module $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$. Son calcul se ramène à la résolution du problème qui se formule comme suit : *Étant donnée $g \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$, existe-t-il $h \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ telle que $h - h \circ \gamma = g$?* Pour cette raison, cette équation sera appelée *équation cohomologique \mathcal{F} -analytique*. Pour g donnée dans $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$, une condition nécessaire pour que l'équation $h - h \circ \gamma = g$ admette une solution h dans $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(M)$ est que $\langle \zeta, g \rangle = 0$ pour toute fonctionnelle \mathcal{F} -analytique γ -invariante sur (M, \mathcal{F}) .

3.7. Un outil de calcul

On se donne un feuilletage complexe $\tilde{\mathcal{F}}$ de dimension m sur une variété \tilde{M} et Γ un groupe dénombrable opérant librement et proprement sur \tilde{M} par automorphismes de $\tilde{\mathcal{F}}$ (en tant que feuilletage complexe). Alors la variété quotient $M = \tilde{M}/\Gamma$ est munie du feuilletage induit \mathcal{F} qui est complexe de dimension m . Notons $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ la projection

de revêtement ; c'est un morphisme de $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ sur (M, \mathcal{F}) . L'image directe $\pi_*(\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})$ du faisceau $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ n'est rien d'autre que le faisceau $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$. Il existe alors une suite spectrale E_r dont le terme E_2 est donné par :

$$(II.7) \quad E_2^{k\ell} = H^k(\Gamma, H^\ell(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$$

et convergeant vers $H^*(M, \mathcal{H}_{\mathcal{F}})$. Les espaces vectoriels $H^\ell(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})$ sont vus comme des Γ -modules via l'action induite sur $H^\ell(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})$ par celle de Γ sur $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$:

$$(\gamma, f) \in \Gamma \times \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) \longmapsto f \circ \gamma^{-1} \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}).$$

(Cette suite spectrale résulte de la théorie des foncteurs dérivés de Grothendieck [Gro]. On peut en trouver un exposé dans [Bro].) Si \widetilde{M} est acyclique *i.e.* :

$$H^\ell(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}) = \begin{cases} \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases}$$

la suite E_r converge au terme E_2 et on a :

$$(II.8) \quad H^k(M, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = H^k(\Gamma, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})).$$

Lorsque le groupe Γ est isomorphe à \mathbb{Z} et est engendré par un élément γ , tous les groupes de cohomologie $H^k(\Gamma, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}))$ sont nuls pour $k \geq 2$ et $H^1(\Gamma, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})) = \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})/\mathcal{C}$ où \mathcal{C} est le sous-espace de $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$ engendré par les éléments de la forme $h - h \circ \gamma$ avec $h \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$. Ce qui nous amènera souvent à résoudre l'équation cohomologique discrète $f - f \circ \gamma = g$ dans l'espace $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$.

Terminons cette section par la proposition qui suit. Elle donne une condition suffisante pour qu'une fonction continue et \mathcal{F} -holomorphe soit constante.

3.8. Proposition. *Supposons M compacte et que toutes les feuilles sont denses. Alors toute fonction $M \rightarrow \mathbb{C}$ continue et \mathcal{F} -holomorphe est constante.*

Démonstration. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction \mathcal{F} -holomorphe. Comme M est une variété compacte, f admet un maximum en un point z ; soit L_z la feuille passant par z . Alors la restriction de f à la variété complexe L_z est une fonction holomorphe qui atteint son maximum en z ; elle est donc constante ; comme L_z est dense dans M , f est constante partout. L'espace $H_{\mathcal{F}}^{0,0}(M)$ est donc isomorphe à \mathbb{C} . \diamond

La condition " M compacte" est substantielle : nous verrons un exemple (*cf.* IV.4.1) de feuilletage complexe \mathcal{F} dont toutes les feuilles sont denses sur une variété non compacte pour lequel l'espace des fonctions C^∞ et \mathcal{F} -holomorphes est de dimension infinie.

On pourrait penser qu'une fonction continue et \mathcal{F} -holomorphe sur (M, \mathcal{F}) avec M compacte est basique (*i.e.* constante sur les feuilles). Il n'en est rien de tout cela ! Dans [FZ] R. Feres et A. Zeghib ont construit un contre exemple à cet effet.

CHAPITRE III

TROIS EXEMPLES DE BASE

Le premier est un feuilletage de Lie et est défini en plus par une action libre du groupe de Lie complexe \mathbb{C} . Le deuxième a des courbes elliptiques comme feuilles qui épuisent toutes les structures complexes possibles. Le troisième a une structure conforme tangentiellement et transversalement et n'est pas riemannien.

1. Flots complexes linéaires sur le tore

Soit $n \geq 3$ un entier ; munissons l'espace vectoriel \mathbb{R}^n de son produit scalaire habituel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $|\cdot|$. Le tore \mathbb{T}^n est obtenu comme le quotient de \mathbb{R}^n par son réseau standard \mathbb{Z}^n . Pour $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, on note $e_{\mathbf{m}}$ la fonction $e_{\mathbf{m}}(x) = e^{2i\pi\langle \mathbf{m}, x \rangle}$. Une fonction sur \mathbb{T}^n n'est rien d'autre qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie $f(x + \mathbf{m}) = f(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$. Si f est intégrable, elle peut être développée en série de Fourier :

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}} e_{\mathbf{m}}(x)$$

où les $f_{\mathbf{m}}$ sont ses coefficients de Fourier donnés par les formules intégrales :

$$f_{\mathbf{m}} = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2i\pi\langle \mathbf{m}, x \rangle} dx.$$

Si en plus f est de carré intégrable, les coefficients $f_{\mathbf{m}}$ vérifient la condition de convergence $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} |f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note $W^{1,r}$ l'espace des fonctions f sur le tore \mathbb{T}^n données par leurs coefficients de Fourier $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n}$ vérifiant la condition $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}| < +\infty$. De même, $W^{2,r}$ sera l'espace des fonctions f sur le tore \mathbb{T}^n données par leurs coefficients de Fourier $(f_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n}$ vérifiant la condition $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\mathbf{m}|^{2r} |f_{\mathbf{m}}|^2 < +\infty$. Ce sont des espaces complets pour les normes :

$$\|f\|_{1,r} = |f_0| + \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}| \quad \text{pour } f \in W^{1,r}$$

et

$$\|f\|_{2,r} = \sqrt{|f_0|^2 + \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\mathbf{m}|^{2r} |f_{\mathbf{m}}|^2} \quad \text{pour } f \in W^{2,r}$$

L'espace $W^{2,r}$ est le $r^{\text{ème}}$ espace de Sobolev du tore \mathbb{T}^n ; il a une structure d'espace de Hilbert donnée par le produit hermitien :

$$\langle f, g \rangle_r = f_0 \bar{g}_0 + \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\mathbf{m}|^{2r} f_{\mathbf{m}} \bar{g}_{\mathbf{m}}.$$

On a des inclusions naturelles :

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \dots \subset W^{1,r+1} \subset W^{1,r} \subset \dots \subset W^{1,0}$$

et

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \dots \subset W^{2,r+1} \subset W^{2,r} \subset \dots \subset W^{2,0} = L^2(\mathbb{T}^n).$$

La proposition suivante est facile à démontrer.

1.1. Proposition. Soit $f = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}} e_{\mathbf{m}}$ une série (les $f_{\mathbf{m}}$ sont des nombres complexes). Alors les assertions i), ii) et iii) qui suivent sont équivalentes :

- i) f est une fonction de classe C^∞ ;
- ii) pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^{2r} |f_{\mathbf{m}}|^2$ est convergente ;
- iii) pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}|$ est convergente.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, les injections $j_{1,r} : W^{1,r+1} \hookrightarrow W^{1,r}$ et $j_{2,r} : W^{2,r+1} \hookrightarrow W^{2,r}$ sont des opérateurs compacts.

Les trois premiers points de cette proposition disent : $\bigcap_{r \in \mathbb{N}} W^{1,r} = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} W^{2,r} = C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Soient $X = \sum_{i=1}^n \kappa_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_{j=1}^n \nu_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ deux champs de vecteurs linéaires et indépendants sur \mathbb{T}^n . Ils engendrent un sous-fibré intégrable du fibré tangent à \mathbb{T}^n et définissent ainsi un feuilletage \mathcal{F} sur \mathbb{T}^n de dimension réelle 2. Considérons la structure presque complexe le long des feuilles définie par $J_{\mathcal{F}}(X) = Y$ et $J_{\mathcal{F}}(Y) = -X$; \mathcal{F} étant un feuilletage orientable par surfaces, $J_{\mathcal{F}}$ est intégrable et confère à \mathcal{F} une *structure complexe*. Les fibrés $T^{10}\mathcal{F}$ et $T^{01}\mathcal{F}$ sont engendrés respectivement par les champs :

$$Z = \frac{1}{2}(X - iY) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\kappa_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \kappa_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) - i \left(\nu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \nu_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right\}$$

et

$$\bar{Z} = \frac{1}{2}(X + iY) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\kappa_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \kappa_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) + i \left(\nu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \nu_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right\}.$$

Ils forment une base (Z, \bar{Z}) du complexifié $T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ du fibré tangent au feuilletage. Soient $\kappa' = (\kappa'_1, \dots, \kappa'_n)$ et $\nu' = (\nu'_1, \dots, \nu'_n)$ des vecteurs de \mathbb{R}^n tels que :

$$\langle \kappa, \kappa' \rangle = 1 \quad \langle \nu, \kappa' \rangle = 0 \quad \langle \kappa, \nu' \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \nu, \nu' \rangle = 1.$$

(Ici $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ et $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$.) Alors (Z, \bar{Z}) admet pour base duale $(\omega, \bar{\omega})$ où ω et $\bar{\omega}$ sont les 1-formes feuilletées de types respectivement $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et données explicitement par :

$$\omega = (\kappa'_1 dx_1 + \dots + \kappa'_n dx_n) + i(\nu'_1 dx_1 + \dots + \nu'_n dx_n)$$

et

$$\bar{\omega} = (\kappa'_1 dx_1 + \dots + \kappa'_n dx_n) - i(\nu'_1 dx_1 + \dots + \nu'_n dx_n).$$

Le complexe de Dolbeault feuilleté s'écrit :

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{0,0}(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow 0$$

où l'opérateur $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ est donné par :

$$\bar{\partial}_{\mathcal{F}} f = \frac{1}{2} \left\{ \left(\kappa_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \kappa_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) + i \left(\nu_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \nu_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \right\} \otimes \bar{\omega}.$$

avec

$$\Omega_{\mathcal{F}}^{0,*}(\mathbb{T}^n) = \begin{cases} C^\infty(\mathbb{T}^n) & \text{si } * = 0 \\ C^\infty(\mathbb{T}^n) \otimes \bar{\omega} & \text{si } * = 1. \end{cases}$$

On suppose que les κ_i (ainsi que les ν_i) sont \mathbb{Q} -indépendants. Le feuilletage \mathcal{F} est alors à feuilles denses. Une partie de ce qu'on va définir se trouve dans [Sch].

1.2. Définition. Soient $\nu, \kappa \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs. On dira que :

- ν est **diophantien** s'il existe $\delta > 0$ et $\tau \geq 1$ tels que :

$$|\langle \nu, \mathbf{m} \rangle| \geq \frac{\delta}{|\mathbf{m}|^\tau} \text{ pour tout } \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\};$$

- le couple (ν, κ) est de **Liouville** s'il existe δ tel que, pour toute suite strictement croissante $(\tau_k)_k$ dans \mathbb{N}^* , il existe une suite infinie $(\mathbf{m}_k)_k$ dans $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$|\langle \nu, \mathbf{m}_k \rangle + i \langle \kappa, \mathbf{m}_k \rangle| \leq \frac{\delta}{|\mathbf{m}_k|^{\tau_k}}.$$

Un champ de vecteurs $X = \sum_{j=1}^n \nu_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ est dit **diophantien** si $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ l'est.

Si X ou Y est diophantien, on dira que \mathcal{F} est un **feuilletage diophantien**. Si le couple

de champs (X, Y) avec $X = \sum_{j=1}^n \nu_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ et $Y = \sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ définissant \mathcal{F} est tel que le couple (ν, κ) est de Liouville, on dira que \mathcal{F} est un **feuilletage de Liouville**.

• Un vecteur $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ dont les composantes sont des nombres algébriques \mathbb{Q} -linéairement indépendants est diophantien. En effet, après multiplication des composantes par un dénominateur entier commun, on peut supposer que les ν_i sont des entiers algébriques. Soient σ_i , pour $i = 1, \dots, n$, les différents plongements du corps de nombres $\mathbb{Q}[\nu_1, \dots, \nu_n]$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et G le groupe de Galois d'une extension algébrique de ce corps. Pour tout n -uplet \mathbf{m} d'entiers non nul, le produit $\prod_j \sigma_j(\langle \nu, \mathbf{m} \rangle)$ est un entier algébrique non nul, invariant par G , donc un entier relatif non nul. Ceci implique $\left| \prod_j \sigma_j(\langle \nu, \mathbf{m} \rangle) \right| \geq 1$, donc si $\sigma_1 = \text{Id}$:

$$|\langle \nu, \mathbf{m} \rangle| \geq \frac{1}{\left| \prod_{j \geq 2} \sigma_j(\langle \nu, \mathbf{m} \rangle) \right|} \geq \frac{C}{|\mathbf{m}|^{d-1}}$$

où d est le degré de $\mathbb{Q}[\nu_1, \dots, \nu_n]$ et C une constante réelle positive.

• Pour $n = 3$, on peut construire facilement des couples de vecteurs de Liouville comme suit (pour $n > 3$ il suffit d'ajouter des composantes nulles) : on prend $\nu = (1, 0, \alpha)$ et $\kappa = (0, 1, \beta)$ avec $\alpha = \sum_{s=1}^{\infty} a_s 10^{-s!}$ et $\beta = \sum_{s=1}^{\infty} b_s 10^{-s!}$ où $a_s, b_s \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Alors il existe des entiers A_s et B_s tels que $|A_s - 10^{s!} \alpha| < (10^{s!})^{-s}$ et $|B_s - 10^{s!} \beta| < (10^{s!})^{-s}$. On prend alors $\mathbf{m}_s = (A_s, B_s, -10^{s!})$. La suite $(\mathbf{m}_s)_{s \in \mathbb{N}^*}$ confère alors au couple (ν, κ) la propriété de Liouville. Il n'est pas difficile de voir qu'on peut même choisir ainsi α et β algébriquement indépendants (la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(\alpha)$ est dénombrable, alors que le nombre de choix possibles pour β est non dénombrable).

Ces deux constructions de vecteurs diophantiens et de couples de Liouville m'ont été indiquées par Jean-Pierre Demailly ; je l'en remercie.

On définit une forme linéaire continue $\mathcal{L} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ par $\mathcal{L}(g) = g_0$ pour toute fonction $g = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} g_{\mathbf{m}} e_{\mathbf{m}}$. On peut aussi interpréter \mathcal{L} comme un opérateur sur $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ qui à g associe la fonction $\mathcal{L}(g)\mathbf{1}$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 ; c'est donc un opérateur compact car de rang fini (son rang est 1). Son noyau \mathcal{N} est fermé et tel que $C^\infty(\mathbb{T}^n) = \mathcal{N} \oplus \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$. Notons P la première projection $C^\infty(\mathbb{T}^n) = \mathcal{N} \oplus \mathbb{C} \cdot \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{N}$. Elle vérifie $P \oplus \mathcal{L} = I$ (où I est l'identité de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$). On a alors le :

1.3. Théorème. *Soit \mathcal{F} le feuilletage linéaire sur le tore \mathbb{T}^n défini comme précédemment.*

i) Supposons que le feuilletage \mathcal{F} est diophantien. Alors il existe un opérateur borné

$G : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tel que $G\bar{\partial}_{\mathcal{F}} = I - \mathcal{L}$. Il en découle que :

$$H_{\mathcal{F}}^{0,q}(\mathbb{T}^n) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } q = 0 \\ \mathbb{C} \otimes \bar{\omega} & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q \geq 2. \end{cases}$$

ii) Supposons \mathcal{F} de Liouville. Alors on a toujours $H_{\mathcal{F}}^{0,0}(\mathbb{T}^n) = \mathbb{C}$, $H_{\mathcal{F}}^{0,q}(\mathbb{T}^n) = 0$ pour $q \geq 2$ et l'espace vectoriel topologique $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n)$ est de dimension infinie et est non séparé. Mais $\bar{H}_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n)$ est isomorphe à \mathbb{C} et est engendré par $\bar{\omega}$.

Démonstration.

- Quelle que soit la nature arithmétique de \mathcal{F} (diophantien ou de Liouville), on a $H_{\mathcal{F}}^{0,0}(\mathbb{T}^n) = \mathbb{C}$ car les feuilles sont denses et $H_{\mathcal{F}}^{0,q}(\mathbb{T}^n) = 0$ pour $q \geq 2$ car $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = 1$. Il n'y a en fait que le cas $q = 1$ à examiner.

- Déterminons l'espace $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n)$ en cherchant une condition nécessaire et suffisante sur $g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, $g = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} g_{\mathbf{m}} e_{\mathbf{m}}$ pour qu'il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, $f = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}} e_{\mathbf{m}}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$(III.1) \quad \frac{1}{2} \left\{ \left(\nu_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \nu_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) + i \left(\kappa_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \kappa_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \right\} = g$$

En identifiant les coefficients de Fourier des deux membres de l'égalité (III.1) on aura, pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$:

$$(E_{\mathbf{m}}) \quad i\pi(\langle \nu, \mathbf{m} \rangle + i\langle \kappa, \mathbf{m} \rangle) f_{\mathbf{m}} = g_{\mathbf{m}}$$

Pour $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, le premier membre de l'équation $(E_{\mathbf{m}})$ est nul. Une condition nécessaire d'existence d'une solution est donc $g_{\mathbf{0}} = 0$. On pose alors :

$$f_{\mathbf{m}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{0} \\ \frac{-ig_{\mathbf{m}}}{\pi(\langle \nu, \mathbf{m} \rangle + i\langle \kappa, \mathbf{m} \rangle)} & \text{si } \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}. \end{cases}$$

Reste à montrer que la famille des $f_{\mathbf{m}}$ définit effectivement une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Cela va dépendre de la "nature arithmétique" du feuilletage \mathcal{F} .

i) \mathcal{F} diophantien

Pour $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, on a $|f_{\mathbf{m}}| \leq \frac{|\langle \nu, \mathbf{m} \rangle| + |\langle \kappa, \mathbf{m} \rangle|}{\pi(\langle \nu, \mathbf{m} \rangle^2 + \langle \kappa, \mathbf{m} \rangle^2)} |g_{\mathbf{m}}|$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|f_{\mathbf{m}}| \leq |\mathbf{m}| \frac{C}{(\langle \nu, \mathbf{m} \rangle^2 + \langle \kappa, \mathbf{m} \rangle^2)} |g_{\mathbf{m}}|$$

avec $C = \frac{|\nu| + |\kappa|}{\pi}$. Ainsi :

$$|f_{\mathbf{m}}| \leq \frac{C}{\langle \vartheta, \mathbf{m} \rangle^2} |\mathbf{m}| \cdot |g_{\mathbf{m}}|$$

avec $\vartheta \in \{\kappa, \nu\}$ (ϑ est celui des deux vecteurs ν ou κ qui est diophantien). Comme ϑ est diophantien, il existe $\delta > 0$ et $\tau > 0$ tels que $|\langle \vartheta, \mathbf{m} \rangle| \geq \frac{\delta}{|\mathbf{m}|^\tau}$, pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. On a donc, pour tout $s \in \mathbb{N}$:

$$(III.2) \quad |\mathbf{m}|^s |f_{\mathbf{m}}| \leq \beta |\mathbf{m}|^{s+1+2\tau} |g_{\mathbf{m}}|$$

avec $\beta = \frac{C}{\delta^2}$. La série $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} |\mathbf{m}|^s |f_{\mathbf{m}}|$ converge donc, c'est-à-dire que la fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{T}^n . L'image de l'opérateur $\bar{\partial}_{\mathcal{F}} : \Omega_{\mathcal{F}}^{0,0}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n)$ s'identifie donc au sous-espace \mathcal{N} ; en fait la restriction de $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ à \mathcal{N} est un isomorphisme (algébrique continu) sur \mathcal{N} ; notons G_0 son inverse : à g dans \mathcal{N} on associe f unique solution dans \mathcal{N} de l'équation $\bar{\partial}_{\mathcal{F}} f = g\bar{\omega}$. On pose alors $G = G_0 P$; on vérifie facilement que $G\bar{\partial}_{\mathcal{F}} = I - \mathcal{L}$.

L'inégalité (III.2) montre que pour tout entier naturel s , l'opérateur :

$$G_0 : g \in \mathcal{N} \subset W^{1,s+1+2\tau} \longmapsto G_0(g) = f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset W^{1,s}$$

vérifie l'inégalité :

$$\|G_0(g)\|_{1,s} \leq \beta \|g\|_{1,s+1+2\tau}.$$

Il est donc borné.

Comme on vient de le voir, l'image de l'opérateur $\bar{\partial}_{\mathcal{F}} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n) \otimes \bar{\omega}$ est l'espace $\mathcal{N} \otimes \bar{\omega}$ qui est de codimension 1, donc l'espace vectoriel $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n)$ est de dimension 1 engendré par la $(0,1)$ -forme $\bar{\omega}$.

ii) \mathcal{F} de Liouville

Cela signifie que le couple (ν, κ) est de Liouville. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour toute suite strictement croissante $(\tau_k)_k$ dans \mathbb{N}^* , il existe une suite infinie $(\mathbf{m}_k)_k$ dans $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$|\langle \nu, \mathbf{m}_k \rangle + i \langle \kappa, \mathbf{m}_k \rangle| \leq \frac{\delta}{|\mathbf{m}_k|^{\tau_k}}.$$

On définit alors une fonction g à l'aide de ses coefficients de Fourier :

$$g_{\mathbf{m}} = \begin{cases} |\mathbf{m}_k|^{-\frac{\tau_k}{2}} & \text{si } \mathbf{m} = \mathbf{m}_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier, à l'aide de l'assertion iii) de la proposition 1.1, que g est de classe C^∞ . Mais :

$$\begin{aligned} |f_{\mathbf{m}_k}| &= \left| \frac{-ig_{\mathbf{m}_k}}{\pi(\langle \nu, \mathbf{m}_k \rangle + i\langle \kappa, \mathbf{m}_k \rangle)} \right| \\ &= \frac{|\mathbf{m}_k|^{-\frac{\tau_k}{2}}}{\pi|\langle \nu, \mathbf{m}_k \rangle + i\langle \kappa, \mathbf{m}_k \rangle|} \\ &\geq \frac{1}{\pi\delta} |\mathbf{m}_k|^{\frac{\tau_k}{2}}. \end{aligned}$$

Les modules des coefficients $f_{\mathbf{m}}$ tendent vers $+\infty$! De cette façon on peut fabriquer une famille infinie libre de fonctions $(g^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}^*}$ de classe C^∞ pour lesquelles l'équation (III.1) n'a pas de solution. Le conoyau de l'opérateur :

$$\bar{\partial}_{\mathcal{F}} : \Omega_{\mathcal{F}}^{0,0}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n)$$

est donc de dimension infinie *i.e.* l'espace vectoriel $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n)$ est de dimension infinie.

Si g est un polynôme trigonométrique sans terme constant, l'équation (III.1) a toujours une solution : le problème de la convergence ne se pose pas. Comme l'adhérence du sous-espace engendré algébriquement par ces polynômes est de codimension 1 (c'est l'orthogonal de la fonction constante 1), l'image de l'opérateur $\bar{\partial}_{\mathcal{F}} : \Omega_{\mathcal{F}}^{0,0}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n)$ n'est pas fermée, donc $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n)$ n'est pas séparé. Ceci montre clairement que $\overline{H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n)} = \mathbb{C}\bar{\omega}$. \diamond

1.4. Remarque et problème

Tous les résultats du théorème 1.3 restent vrais si on avait considéré le complexe différentiel $0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{1,0}(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{1,1}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow 0$. En particulier on aurait :

- i) si \mathcal{F} est diophantien, l'espace $H_{\mathcal{F}}^{1,1}(\mathbb{T}^n)$ est de dimension 1 engendré par la forme feuilletée $\omega \otimes \bar{\omega}$ qui est de type $(1, 1)$;
- ii) si \mathcal{F} est de Liouville, l'espace $H_{\mathcal{F}}^{1,1}(\mathbb{T}^n)$ est de dimension infinie non séparé. \diamond

Si \mathcal{F} est un feuilletage complexe sur une variété M , le fibré vectoriel $T^{10}\mathcal{F} \longrightarrow M$ est \mathcal{F} -holomorphe. On peut donc considérer la cohomologie de Dolbeault feuilletée à valeurs dans $T^{10}\mathcal{F}$ qu'on notera $H_{\mathcal{F}}^{0,*}(M, T^{10}\mathcal{F})$. Dans le cas où M est compacte, l'espace vectoriel $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(M, T^{10}\mathcal{F})$ paramètre les déformations infinitésimales des structures complexes sur \mathcal{F} (les feuilles restent fixes) et $H_{\mathcal{F}}^{0,2}(M, T^{10}\mathcal{F})$ devrait contenir les obstructions à la réalisation de ces déformations.

Dans le cas du feuilletage $(\mathbb{T}^n, \mathcal{F})$ qu'on vient d'étudier on a $H_{\mathcal{F}}^{0,2}(\mathbb{T}^n, T^{10}\mathcal{F}) = 0$ (quelle que soit la nature arithmétique de \mathcal{F}) et :

$$H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n, T^{10}\mathcal{F}) = \mathbb{C}\bar{\omega} \otimes Z$$

lorsque \mathcal{F} est diophantien.

Problème : On suppose \mathcal{F} diophantien. Montrer que l'espace versel des déformations des structures complexes sur \mathcal{F} est un voisinage de 0 dans $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}^n, T^{10}\mathcal{F}) \simeq \mathbb{C}$.

2. Une submersion en courbes elliptiques

Du point de vue différentiable, c'est un feuilletage produit d'une courbe elliptique par un plan mais, du point de vue complexe, il n'est même pas une fibration localement triviale. Toutefois sa cohomologie de Dolbeault feuilletée est exactement celle d'un produit complexe.

3.1. Construction du feuilletage

- Rappelons que le groupe $\text{Aut}(\mathbb{C})$ des automorphismes de \mathbb{C} est le produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ où le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* agit par homothéties sur \mathbb{C} . Un réseau dans \mathbb{C} est un sous-groupe de la forme $\Gamma' = \{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ où α_1 et α_2 sont des nombres complexes linéairement indépendants sur \mathbb{R} . Le quotient $\mathbb{T}' = \mathbb{C}/\Gamma'$ est une courbe elliptique. Si $\Gamma = \{m_1 + m_2\omega : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ avec $\omega = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, les deux courbes elliptiques $\mathbb{T}' = \mathbb{C}/\Gamma'$ et $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Gamma$ sont isomorphes, l'isomorphisme $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}'$ étant induit par la multiplication $z \in \mathbb{C} \mapsto \alpha_1 z \in \mathbb{C}$. Le groupe Γ étant engendré sur \mathbb{Z} par les vecteurs 1 et ω , on peut toujours choisir ω dans $\mathbb{H} = \{\omega \in \mathbb{C} : \text{Im}\omega > 0\}$. Dans ce cas $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \omega\mathbb{Z}$ sera noté Γ_ω et \mathbb{T}_ω sera la courbe elliptique $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Gamma_\omega$. Il est bien connu que les deux courbes elliptiques \mathbb{T}_ω et \mathbb{T}_ζ sont isomorphes si, et seulement si, il existe une matrice $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ telle que $A\omega = \zeta$. Les classes d'isomorphie des courbes elliptiques sont donc paramétrées par la surface modulaire $\mathbb{H}/\text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

- Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{C})$ contient les translations $\tau_b : z \mapsto z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$. Deux translations τ_b et $\tau_{b'}$ (avec $b, b' \in \mathbb{C}^*$) sont toujours conjuguées : il suffit de prendre l'homothétie $h : z \in \mathbb{C} \mapsto az \in \mathbb{C}$ avec $a = \frac{b'}{b}$ et voir que $h^{-1} \circ \tau_b \circ h = \tau_{b'}$. Par conséquent les sous-groupes \mathcal{T}_b et $\mathcal{T}_{b'}$ engendrés respectivement par τ_b et $\tau_{b'}$ sont conjugués. Les quotients \mathbb{C}/\mathcal{T}_b (avec b variant dans \mathbb{C}) sont donc tous isomorphes à la même surface de Riemann \mathbb{C}^* .

- Soit $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ l'application définie par $p(z) = e^{2i\pi z}$. Alors l'action standard de Γ_ω sur \mathbb{C} (i.e. celle qui donne la courbe elliptique \mathbb{T}_ω) se projette par p en l'action Ψ de \mathbb{Z} sur \mathbb{C}^* donnée par $\Psi : (k, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* \mapsto e^{2ik\pi\omega} z \in \mathbb{C}^*$. Les courbes elliptiques \mathbb{T}_ω et $C_\omega = \mathbb{C}^*/\Psi$ sont alors isomorphes.

- Soit \widehat{M} la variété complexe $\mathbb{C}^* \times \mathbb{H}$. Un point de \widehat{M} sera repéré par ses coordonnées (z, ω) ; on utilisera $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ pour désigner la coordonnée ω . On munit \widehat{M} du feuilletage holomorphe $\widehat{\mathcal{F}}$ dont les feuilles sont les sous-variétés complexes $\{\mathbb{C}^* \times \{\omega\}\}_{\omega \in \mathbb{H}}$. Une fonction C^∞ et $\widehat{\mathcal{F}}$ -holomorphe est une fonction $f : \widehat{M} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ par rapport au couple (z, ω) et holomorphe en z . Une telle fonction admet un développement

de Laurent en z :

$$f(z, \omega) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_p(\omega) z^p$$

où les f_p sont des fonctions C^∞ en ω et telles que, pour tout compact $K \times C \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{H}$ et tout entier naturel s la série de Laurent $\sum_{p \in \mathbb{Z}} \|f_p\|_\infty^s z^p$ converge uniformément par rapport à $z \in K$ où :

$$\|f_p\|_K^s = \max_{s_1 + s_2 \leq s} \left\{ \sup_{\omega \in C} \left| \frac{\partial^{s_1} f_p}{\partial \omega_1^{s_1} \partial \omega_2^{s_2}}(\omega) \right| \right\}.$$

Cette condition traduit la régularité “être de classe C^∞ et $\widehat{\mathcal{F}}$ -holomorphe” dans l’espace $\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$.

• Soit $\varphi : \omega \mapsto \omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ un biholomorphisme non trivial de \mathbb{H} (où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$). L’application :

$$\Phi : (p, (z, \omega)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{H} \mapsto (e^{-ip\varphi(\omega)} z, \omega) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{H}$$

est une action holomorphe, libre et propre de \mathbb{Z} sur \widehat{M} . Elle préserve le feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}$ (elle préserve même chaque feuille individuellement). L’espace quotient $M = \mathbb{C}^* \times \mathbb{H} / \Phi$ est alors muni d’une structure de variété complexe de dimension 2. On note \mathcal{F} le feuilletage sur M induit par $\widehat{\mathcal{F}}$; il est de dimension 1 et ses feuilles sont toutes des courbes elliptiques \mathbb{T}_ω dont la structure complexe varie en fonction de $\omega \in \mathbb{H}$. Deux feuilles \mathbb{T}_ω et \mathbb{T}_ζ sont isomorphes si, et seulement si, il existe une matrice $B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ telle que $\varphi(\zeta) = B\varphi(\omega)$. La classe d’isomorphie d’une feuille est donc un ensemble dénombrable. Ce feuilletage complexe n’est donc même pas une fibration complexe localement triviale. Mais différentiablement, \mathcal{F} n’est rien d’autre qu’un produit.

2.2. Théorème. *L’espace vectoriel de cohomologie $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(M)$ est un module libre de rang 1 sur l’anneau $C^\infty(\mathbb{H})$ des fonctions C^∞ sur \mathbb{H} .*

Démonstration. Comme le feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}$ est un produit complexe de \mathbb{H} par \mathbb{C}^* qui est un ouvert de \mathbb{C} (donc une variété de Stein), pour tout $q \geq 1$, on a :

$$(III.3) \quad H_{\widehat{\mathcal{F}}}^{0,q}(\mathbb{C}^* \times \mathbb{H}) = H^{0,q}(\mathbb{C}^*) \otimes C^\infty(\mathbb{H}) = 0.$$

D’après (II.8) on a $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(M) = H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}))$ où $\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$ est vu comme \mathbb{Z} -module via l’action :

$$(p, f) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) \mapsto f \circ \gamma^p \in \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$$

où $\gamma(z, \omega) = (e^{-i\varphi(\omega)} z, \omega)$. Ce qui nous amène donc à résoudre l’équation cohomologique discrète :

Étant donnée $g \in \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$ existe-t-il $f \in \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$ telle que $f - f \circ \gamma = g$?

Pour ce faire, nous utiliserons les développements de Laurent respectivement de f et g :

$$f(z, \omega) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f_p(\omega) z^p \quad \text{et} \quad g(z, \omega) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} g_p(\omega) z^p.$$

Au niveau des coefficients f_p et g_p , l'équation $f - f \circ \gamma = g$ est alors équivalente au système suivant :

$$(1 - e^{-ip\varphi(\omega)}) f_p(\omega) = g_p(\omega) \quad \text{pour } p \in \mathbb{Z}.$$

Une condition nécessaire d'existence d'une solution est que la fonction g_0 soit identiquement nulle. Nous allons montrer qu'elle est aussi suffisante. Supposons cette condition remplie. On pose alors :

$$f_p(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \\ \frac{g_p(\omega)}{1 - e^{-ip\varphi(\omega)}} & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Reste à montrer que la collection de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ définit bien une fonction $f \in \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$. On a $|e^{-ip\varphi(\omega)}| = e^{p\omega'_2} = e^{\frac{p\omega_2}{|c\omega+d|^2}}$. D'où :

$$|1 - e^{-ip\varphi(\omega)}| \geq \left| 1 - e^{\frac{p\omega_2}{|c\omega+d|^2}} \right| > 0.$$

Par suite :

$$\frac{1}{|1 - e^{-ip\varphi(\omega)}|} \leq \frac{1}{\left| 1 - e^{\frac{p\omega_2}{|c\omega+d|^2}} \right|}.$$

On voit aussi facilement que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left| 1 - e^{\frac{p\omega_2}{|c\omega+d|^2}} \right|} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{1}{\left| 1 - e^{\frac{p\omega_2}{|c\omega+d|^2}} \right|} = 1.$$

Soit $K \times C$ un compact de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{H}$. Alors comme la fonction :

$$\omega \mapsto \frac{1}{\left| 1 - e^{\frac{p\omega_2}{|c\omega+d|^2}} \right|}$$

est en plus continue, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$ et tout $\omega \in C$ on ait $|f_p(\omega)| \leq \delta |g_p(\omega)|$. Il en résulte que la série $\sum_{p \in \mathbb{Z}^*} f_p(\omega) z^p$ converge uniformément sur $K \times C$

car la série $\sum_{p \in \mathbb{Z}^*} g_p(\omega) z^p$ y est uniformément convergente.

En utilisant le fait que $g \in \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$ et en suivant le même type de raisonnement, on montre facilement que, pour tout compact $K \times C \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{H}$ et tout entier naturel s la

série $\sum_{p \in \mathbb{Z}} \|f_p\|_\infty^s z^p$ converge uniformément par rapport à $z \in K$. Ce qui établit le fait que $f \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$.

L'image de l'opérateur $f \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) \mapsto (f - f \circ \gamma) \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$ est donc exactement le noyau de l'application linéaire continue surjective $g \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) \mapsto g_0 \in C^\infty(\mathbb{H})$. Il en résulte que l'espace $H_{\tilde{\mathcal{F}}}^{0,1}(M) = H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\widehat{M}))$ est un module libre sur $C^\infty(\mathbb{H})$ engendré par la fonction constante égale à 1. \diamond

3. Feuilletage complexe de Reeb sur $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^1$

C'est un feuilletage complexe de dimension 2 non kählérien sur la variété de Hopf $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^1$. Du point de vue réel, c'est le feuilletage (de codimension 1) affine de Reeb.

3.1. Construction du feuilletage

On considère la variété $\widetilde{M} = (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$; les coordonnées d'un point courant seront notées (z_1, z_2, t) . On la munit de son feuilletage complexe canonique qu'on notera $\widetilde{\mathcal{F}}$ i.e. celui défini par l'équation $dt = 0$ dont les feuilles sont toutes des \mathbb{C}^2 sauf celle passant par 0 qui est un $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Soient $\lambda \in]0, 1[$ et Γ le groupe engendré par le difféomorphisme γ de \widetilde{M} défini par $\gamma(z_1, z_2, t) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda t)$; comme γ est un automorphisme de $\widetilde{\mathcal{F}}$ et que l'action de Γ est libre et propre, $\widetilde{\mathcal{F}}$ induit un feuilletage \mathcal{F} complexe de dimension 2 sur la variété quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$. Il existe un difféomorphisme analytique réel (via les coordonnées sphériques) $\phi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{S}^4 \times \mathbb{R}_+^*$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\gamma} & \widetilde{M} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{S}^4 \times \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{S}^4 \times \mathbb{R}_+^* \end{array}$$

où $\sigma(w, t) = (w, \lambda t)$. Ceci montre que M est analytiquement difféomorphe à la variété de Hopf $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^1$. Les feuilles de \mathcal{F} sont toutes holomorphiquement équivalentes à \mathbb{C}^2 sauf celle qui provient de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ qui est équivalente à la surface de Hopf $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$; le feuilletage \mathcal{F} ne saurait donc être kählérien.

Pour avoir une idée de la structure géométrique de ce feuilletage, voici un dessin qui donne un morceau de son analogue sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$:

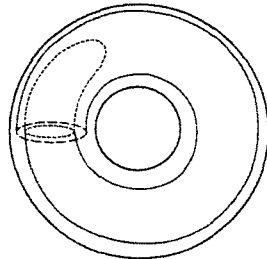


Fig. 2

3.2. Les espaces $H_{\tilde{\mathcal{F}}}^{0,*}(\tilde{M})$

En degré $*$ = 0

• Un élément de $H_{\tilde{\mathcal{F}}}^{0,0}(\tilde{M})$ est une fonction $f(z_1, z_2, t)$ qui est C^∞ et holomorphe en (z_1, z_2) pour tout (z_1, z_2, t) tel que $(z_1, z_2, t) \neq (0, 0, 0)$. D'après le théorème de Hartogs (voir [Hör] par exemple) et un raisonnement élémentaire utilisant la formule de Cauchy, f se prolonge à $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ en une fonction C^∞ et $\tilde{\mathcal{F}}$ -holomorphe. Donc $H_{\tilde{\mathcal{F}}}^{0,0}(\tilde{M}) = \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$. Une fonction $f \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ s'écrit :

$$f(z_1, z_2, t) = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} a_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

où les $a_{m_1 m_2}$ sont des fonctions C^∞ telles que, pour tout compact $K \times C \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ et tout entier naturel s la série $\sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} \frac{\partial^s a_{m_1 m_2}}{\partial t^s}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$ converge uniformément sur le compact $K \times C$.

• On pose $U_0 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*$ et, pour $i = 1, 2$, on note U_i l'ouvert de \tilde{M} tel que $z_i \neq 0$; $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ est un recouvrement ouvert de \tilde{M} . Les ouverts U_1 et U_2 sont respectivement égaux à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$. On a :

$$U_{01} = U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*, \quad U_{02} = U_0 \cap U_2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*, \quad U_{12} = U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$$

et :

$$U_{012} = U_0 \cap U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*.$$

Les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_0, \tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2, \tilde{\mathcal{F}}_{01}, \tilde{\mathcal{F}}_{02}, \tilde{\mathcal{F}}_{12}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{012}$ induits respectivement sur les ouverts $U_0, U_1, U_2, U_{01}, U_{02}, U_{12}$ et U_{012} sont des produits de variétés de Stein par \mathbb{R} ou par \mathbb{R}^* . On a donc, pour $* \geq 1$:

$$H_{\tilde{\mathcal{F}}_0}^{0,*}(U_0) = 0, \quad H_{\tilde{\mathcal{F}}_1}^{0,*}(U_1) = 0, \quad H_{\tilde{\mathcal{F}}_2}^{0,*}(U_2) = 0$$

et

$$H_{\tilde{\mathcal{F}}_{01}}^{0,*}(U_{01}) = 0, \quad H_{\tilde{\mathcal{F}}_{02}}^{0,*}(U_{02}) = 0, \quad H_{\tilde{\mathcal{F}}_{12}}^{0,*}(U_{12}) = 0, \quad H_{\tilde{\mathcal{F}}_{012}}^{0,*}(U_{012}) = 0.$$

Le recouvrement $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ est alors de Leray ; il permet de calculer la cohomologie $H_{\tilde{\mathcal{F}}}^{0,*}(\tilde{M})$. Pour $* = 0$, les espaces $H_{\tilde{\mathcal{F}}_0}^{0,0}(U_0), H_{\tilde{\mathcal{F}}_1}^{0,0}(U_1), H_{\tilde{\mathcal{F}}_2}^{0,0}(U_2), H_{\tilde{\mathcal{F}}_{01}}^{0,0}(U_{01}), H_{\tilde{\mathcal{F}}_{02}}^{0,0}(U_{02}), H_{\tilde{\mathcal{F}}_{12}}^{0,0}(U_{12})$ et $H_{\tilde{\mathcal{F}}_{012}}^{0,0}(U_{012})$ sont respectivement égaux aux suivants :

$$\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_0}(U_0) = \{ \text{fonctions } \tilde{\mathcal{F}}_1\text{-holomorphes sur } U_0 \} = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} a_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \right\}$$

$$\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_1}(U_1) = \{\text{fonctions } \tilde{\mathcal{F}}_1\text{-holomorphes sur } U_1\} = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} b_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \right\}$$

$$\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_2}(U_2) = \{\text{fonctions } \tilde{\mathcal{F}}_2\text{-holomorphes sur } U_2\} = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} c_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \right\}$$

$$\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_{01}}(U_{01}) = \{\text{fonctions } \tilde{\mathcal{F}}_{01}\text{-holomorphes sur } U_{01}\} = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} \alpha_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \right\}$$

$$\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_{02}}(U_{02}) = \{\text{fonctions } \tilde{\mathcal{F}}_{02}\text{-holomorphes sur } U_{02}\} = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} \beta_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \right\}$$

$$\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_{12}}(U_{12}) = \{\text{fonctions } \tilde{\mathcal{F}}_{12}\text{-holomorphes sur } U_{12}\} = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} \gamma_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \right\}$$

$$\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_{012}}(U_{012}) = \{\text{fonctions } \tilde{\mathcal{F}}_{012}\text{-holomorphes sur } U_{012}\} = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} d_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \right\}$$

où $a_{m_1 m_2}$, $\alpha_{m_1 m_2}$, $\beta_{m_1 m_2}$ et $d_{m_1 m_2}$ sont des fonctions C^∞ sur \mathbb{R}^* et $b_{m_1 m_2}$, $c_{m_1 m_2}$ et $\gamma_{m_1 m_2}$ sont des fonctions C^∞ sur \mathbb{R} et les séries en question doivent converger uniformément sur tout compact ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à t . Comme le recouvrement $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ est constitué de trois ouverts, on a $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q} = \emptyset$ pour $q \geq 4$. Pour $k \geq 3$, tous les k -cocycles sont donc nuls ; ce qui donne $H_{\tilde{\mathcal{F}}}^{0,k}(\tilde{M}) = 0$ pour $k \geq 3$.

En degré $*$ = 1

Un 1-cocycle sur le recouvrement \mathcal{U} à valeurs dans le faisceau $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ est la donnée d'un triplet (f_{12}, f_{02}, f_{01}) avec $f_{12} \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_{12}}(U_{12})$, $f_{02} \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_{02}}(U_{02})$ et $f_{01} \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_{01}}(U_{01})$ tel que $f_{12} - f_{02} + f_{01} = 0$ sur U_{012} ; il sera un cobord s'il existe un triplet (f_0, f_1, f_2) avec $f_0 \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_0}(U_0)$, $f_1 \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_1}(U_1)$ et $f_2 \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_2}(U_2)$ tel que :

$$(S) \quad \begin{cases} f_2 - f_1 = f_{12} \\ f_2 - f_0 = f_{02} \\ f_1 - f_0 = f_{01}. \end{cases}$$

En remplaçant chacune de ces fonctions par son développement en série entière, ce système se transforme en le suivant :

$$(S') \quad \begin{cases} \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} c_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} - \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} b_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} \gamma_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \\ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} c_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} - \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} a_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} \beta_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \\ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} b_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} - \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} a_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} \alpha_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} \end{cases}$$

Les fonctions $\alpha_{m_1 m_2}$, $\beta_{m_1 m_2}$ et $\gamma_{m_1 m_2}$ vérifient (là où elles sont définies) la relation suivante qui vient du fait que (f_{12}, f_{02}, f_{01}) est un cocycle :

$$\gamma_{m_1 m_2} - \beta_{m_1 m_2} + \alpha_{m_1 m_2} = 0 \quad \text{pour tous } m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Cette relation se simplifie suivant la position du couple (m_1, m_2) dans le réseau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Plus précisément, on aura ce qui suit :

i) Si $m_1 \geq 0$ et $m_2 \geq 0$, on a $\gamma_{m_1 m_2} - \beta_{m_1 m_2} + \alpha_{m_1 m_2} = 0$. Le système devient alors :

$$(S'') \quad \begin{cases} c_{m_1 m_2} - b_{m_1 m_2} = \gamma_{m_1 m_2} \\ c_{m_1 m_2} - a_{m_1 m_2} = \beta_{m_1 m_2} \\ b_{m_1 m_2} - a_{m_1 m_2} = \alpha_{m_1 m_2} \end{cases}$$

et a une solution particulière $a_{m_1 m_2} = -\alpha_{m_1 m_2}$, $b_{m_1 m_2} = 0$ et $c_{m_1 m_2} = \gamma_{m_1 m_2}$.

ii) Si $m_1 \geq 0$ et $m_2 < 0$ alors $\alpha_{m_1 m_2} = 0$, $a_{m_1 m_2} = 0$ et $b_{m_1 m_2} = 0$ et l'équation se réduit à $\gamma_{m_1 m_2} - \beta_{m_1 m_2} = 0$. Ceci force alors la fonction $\beta_{m_1 m_2}$ à être C^∞ sur \mathbb{R} tout entier (a priori elle ne l'était que sur \mathbb{R}^*). Le système devient alors :

$$\begin{cases} c_{m_1 m_2} = \gamma_{m_1 m_2} \\ c_{m_1 m_2} = \beta_{m_1 m_2} \end{cases}$$

On a une solution $(a_{m_1 m_2}, b_{m_1 m_2}, c_{m_1 m_2})$ avec $b_{m_1 m_2} = a_{m_1 m_2} = 0$ et $c_{m_1 m_2} = \gamma_{m_1 m_2} = \beta_{m_1 m_2}$.

iii) Si $m_1 < 0$ et $m_2 \geq 0$ alors $\beta_{m_1 m_2} = 0$, $a_{m_1 m_2} = 0$ et $c_{m_1 m_2} = 0$ et l'équation se réduit à $\gamma_{m_1 m_2} + \alpha_{m_1 m_2} = 0$. Ceci force alors la fonction $\alpha_{m_1 m_2}$ à être C^∞ sur \mathbb{R} tout entier (a priori elle ne l'était que sur \mathbb{R}^*). Le système devient alors :

$$\begin{cases} -b_{m_1 m_2} = \gamma_{m_1 m_2} \\ b_{m_1 m_2} = \alpha_{m_1 m_2} \end{cases}$$

On a une solution $(a_{m_1 m_2}, b_{m_1 m_2}, c_{m_1 m_2})$ en posant $b_{m_1 m_2} = \alpha_{m_1 m_2} = -\gamma_{m_1 m_2}$.

iv) Si $m_1 < 0$ et $m_2 < 0$, $\alpha_{m_1 m_2} = 0$ et $\beta_{m_1 m_2} = 0$; l'équation et le système (S'') deviennent $\gamma_{m_1 m_2} = 0$. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que le système admette une solution $(a_{m_1 m_2}, b_{m_1 m_2}, c_{m_1 m_2})$.

Conclusion

Le 1-cocycle (f_{12}, f_{02}, f_{01}) où $f_{12} = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} \gamma_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$, $f_{02} = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} \beta_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$ et $f_{01} = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} \alpha_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$ est un cobord si et seulement si $\sum_{\substack{m_1 < 0 \\ m_2 < 0}} \gamma_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2} = 0$.

On en déduit alors que $H_{\tilde{\mathcal{F}}}^{0,1}(\tilde{M}) = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$ où les fonctions $\gamma_{m_1 m_2}$ sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} et telles que la série $\sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$ converge uniformément sur tout compact ainsi que toutes les dérivées par rapport à t .

En degré $*$ = 2

On se donne une 2-cochaîne f_{012} ; c'est une fonction $\tilde{\mathcal{F}}$ -holomorphe sur l'ouvert $U_{012} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*$ et qui s'écrit donc sous la forme :

$$f_{012}(z_1, z_2, t) = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} d_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

où les $d_{m_1 m_2}$ sont des éléments de $C^\infty(\mathbb{R}^*)$ tels que la série en question et toutes ses dérivées par rapport à t convergent uniformément sur tout compact (de U_{012} bien sûr). Comme le recouvrement ne contient que trois ouverts, toute 4-intersection est vide et donc f_{012} est un cocycle. C'est un cobord s'il existe une 1-cochaîne (f_{12}, f_{02}, f_{01}) avec $f_{12} \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_{12}}(U_{12})$, $f_{02} \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_{02}}(U_{02})$ et $f_{01} \in \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}_{01}}(U_{01})$ telle que $f_{12} - f_{02} + f_{01} = f_{012}$ sur U_{012} . Rappelons que :

$$f_{12}(z_1, z_2, t) = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} \gamma_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

$$f_{02}(z_1, z_2, t) = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N} \\ m_2 \in \mathbb{Z}}} \beta_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

et

$$f_{01}(z_1, z_2, t) = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{Z} \\ m_2 \in \mathbb{N}}} \alpha_{m_1 m_2}(t) z_1^{m_1} z_2^{m_2}$$

où $\alpha_{m_1 m_2}$ et $\beta_{m_1 m_2}$ sont des éléments de $C^\infty(\mathbb{R}^*)$ et $\gamma_{m_1 m_2}$ est un élément de $C^\infty(\mathbb{R})$ et tels que les séries en question et toutes leurs dérivées par rapport à t convergent uniformément sur tout compact (de l'ouvert où elles sont définies). L'équation à résoudre $f_{12} - f_{02} + f_{01} = f_{012}$ donne alors le système :

$$\gamma_{m_1 m_2} - \beta_{m_1 m_2} + \alpha_{m_1 m_2} = d_{m_1 m_2} \quad \text{pour } m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Examinons maintenant ce qui se passe suivant la position du point (m_1, m_2) dans le réseau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Cela va permettre de dire dans quelles conditions on peut résoudre ce système.

i) Si $m_1 \geq 0$ et $m_2 \geq 0$, l'équation reste la même $\gamma_{m_1 m_2} - \beta_{m_1 m_2} + \alpha_{m_1 m_2} = d_{m_1 m_2}$. Elle a une solution : $\beta_{m_1 m_2}$ quelconque, $\gamma_{m_1 m_2} = \beta_{m_1 m_2}$ et $\alpha_{m_1 m_2} = d_{m_1 m_2}$.

ii) Si $m_1 \geq 0$ et $m_2 < 0$, $\alpha_{m_1 m_2} = 0$ et l'équation devient $\gamma_{m_1 m_2} - \beta_{m_1 m_2} = d_{m_1 m_2}$. Elle a une solution $\gamma_{m_1 m_2} = 0$, $\beta_{m_1 m_2} = -d_{m_1 m_2}$.

iii) Si $m_1 < 0$ et $m_2 \geq 0$, $\beta_{m_1 m_2} = 0$ et l'équation devient $\gamma_{m_1 m_2} + \alpha_{m_1 m_2} = d_{m_1 m_2}$. Elle a une solution $\gamma_{m_1 m_2} = 0$, $\alpha_{m_1 m_2} = d_{m_1 m_2}$.

iv) Si $m_1 < 0$ et $m_2 < 0$, $\alpha_{m_1 m_2} = 0$ et $\beta_{m_1 m_2} = 0$ et l'équation se réduit à l'égalité $\gamma_{m_1 m_2} = d_{m_1 m_2}$. Comme $\gamma_{m_1 m_2} \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $d_{m_1 m_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$, l'équation n'a de solution que si, et seulement si, la fonction $d_{m_1 m_2}$ s'étend en un élément de $C^\infty(\mathbb{R})$ i.e. $d_{m_1 m_2}$ est dans l'image de l'application restriction $\rho : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^*)$; ceci n'est pas toujours le cas. Mais cette exigence nous permettra de décrire d'abord l'espace $H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\mathcal{F}})$ nécessaire à la description de $H^2(M, \mathcal{H}_{\mathcal{F}})$. C'est ce que nous allons faire dans ce qui suit.

Considérons les espaces de Fréchet $C^\infty(\mathbb{R})$ et $C^\infty(\mathbb{R}^*)$ des fonctions complexes de classe C^∞ respectivement sur \mathbb{R} et son ouvert \mathbb{R}^* . L'application restriction :

$$\rho : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \longmapsto f|_{\mathbb{R}^*} \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$$

est injective et permet d'identifier $C^\infty(\mathbb{R})$ à un sous-espace de $C^\infty(\mathbb{R}^*)$. Le difféomorphisme $\sigma : t \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda t \in \mathbb{R}$ préserve l'ouvert \mathbb{R}^* . Il permet de définir des actions de \mathbb{Z} sur les espaces $C^\infty(\mathbb{R})$ et $C^\infty(\mathbb{R}^*)$:

$$(k, f) \in \mathbb{Z} \times C^\infty(\mathbb{R}) \longmapsto f \circ \sigma^k \in C^\infty(\mathbb{R})$$

et

$$(k, f) \in \mathbb{Z} \times C^\infty(\mathbb{R}^*) \longmapsto f \circ \sigma^k \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$$

qui deviennent donc des \mathbb{Z} -modules. On note W l'espace quotient $C^\infty(\mathbb{R}^*)/C^\infty(\mathbb{R})$ et $\pi : C^\infty(\mathbb{R}^*) \longrightarrow W$ la projection canonique. Comme $C^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas un idéal de l'anneau $C^\infty(\mathbb{R}^*)$, W n'est malheureusement qu'un espace vectoriel et ne possède pas de structure

d'anneau induite par celle de $C^\infty(\mathbb{R}^*)$. Comme l'action de \mathbb{Z} sur $C^\infty(\mathbb{R}^*)$ laisse stable $C^\infty(\mathbb{R})$, elle induit une action sur W qui devient aussi un \mathbb{Z} -module. On a une suite exacte de \mathbb{Z} -modules :

$$0 \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \xrightarrow{j} C^\infty(\mathbb{R}^*) \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0.$$

On prend la cohomologie du groupe discret \mathbb{Z} à valeurs dans chacun de ces \mathbb{Z} -modules et on obtient une suite exacte longue de cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R})) \xrightarrow{j_*^0} H^0(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}^*)) \xrightarrow{\pi_*^0} H^0(\mathbb{Z}, W) \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{c} H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R})) \xrightarrow{j_*^1} H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}^*)) \xrightarrow{\pi_*^1} H^1(\mathbb{Z}, W) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où c est l'homomorphisme de connexion habituel. Cette suite s'arrête aux termes du premier degré car la cohomologie de \mathbb{Z} (à valeurs dans n'importe quel module) est toujours nulle en degré supérieur ou égal à 2. Nous allons calculer explicitement les différents espaces qui y interviennent.

- L'espace $H^0(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}))$ est constitué des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ invariantes par σ i.e. telles que $f(\lambda t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; ce sont donc les constantes. Par suite $H^0(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R})) = \mathbb{C}$.

- L'espace $H^0(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}^*))$ est constitué des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ invariantes par σ i.e. telles que $f(\lambda t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$. Comme les actions de \mathbb{Z} sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* engendrées respectivement par $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda t \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \lambda t \in \mathbb{R}_-^*$ sont conjuguées (via la fonction logarithme) à l'action de \mathbb{Z} sur \mathbb{R} engendrée par la translation $t \in \mathbb{R} \mapsto t + 1 \in \mathbb{R}$, l'espace des fonctions σ -invariantes sur \mathbb{R}^* s'identifie à la somme directe de deux copies de l'espace des fonctions complexes C^∞ et 1-périodiques sur \mathbb{R} donc à la somme directe de deux copies de l'espace $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ des fonctions complexes C^∞ sur le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On le notera V ; on a ainsi $V = C^\infty(\mathbb{S}^1) \oplus C^\infty(\mathbb{S}^1)$. On a une application linéaire continue $I : f \in V \mapsto \int_\lambda^1 f(t) dt \in \mathbb{C}$. On notera V_0 son noyau. D'où une décomposition en somme directe $V = V_0 \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbf{1})$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 sur \mathbb{R}^* .

- On rappelle que, pour tout espace vectoriel E muni d'une action de \mathbb{Z} engendrée par un automorphisme $\sigma : E \longrightarrow E$, $H^1(\mathbb{Z}, E) = E / \langle f - \sigma f \rangle$ où $\langle f - \sigma f \rangle$ est le sous-espace de E engendré par les éléments de la forme $f - \sigma f$ avec f parcourant E . Dans notre situation $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}))$ est le quotient de $C^\infty(\mathbb{R})$ par le sous-espace engendré par les fonctions $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ de la forme $g = f - f \circ \sigma$. Nous sommes donc amenés à résoudre l'équation fonctionnelle : étant donnée $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, existe-t-il $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $g(t) = f(t) - f(\lambda t)$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Une condition nécessaire est $g(0) = 0$. En fait, elle est suffisante ; la solution est donnée par la série (convergente pour la topologie C^∞) :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(\lambda^n t).$$

Par suite le sous-espace $\langle f - \sigma f \rangle$ est exactement le noyau de la forme linéaire continue $g \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto g(0) \in \mathbb{C}$ et donc $H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}))$ est isomorphe à \mathbb{C} et est représenté par les fonctions constantes.

• L'action de \mathbb{Z} sur \mathbb{R}^* via σ est libre et propre ; le quotient est la somme disjointe de deux copies du cercle \mathbb{S}^1 . Comme \mathbb{R}^* est acyclique (en cohomologie réelle), on a :

$$H^1(\mathbb{Z}, C^\infty(\mathbb{R}^*)) = H^1(\mathbb{Z}, H^0(\mathbb{R}^*, \tilde{C}^\infty(\mathbb{R}^*))) = H^1(\mathbb{R}^*/\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

où $\tilde{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ est le faisceau des germes de fonctions complexes C^∞ sur \mathbb{R}^* . (La première égalité découle de la dégénérescence au deuxième terme de la suite spectrale associée au revêtement $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*/\mathbb{Z}$.)

Dans la suite exacte en cohomologie, les applications j_*^0 et j_*^1 sont données respectivement par $j_*^0(a) = \mathbf{a}$ (fonction constante égale à a) et $j_*^1(b) = (b, b)$. L'application j_*^1 est donc injective ; par suite l'homomorphisme de connexion c est l'application nulle. La suite exacte se partage donc en deux sous-suites exactes courtes :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{j_*^0} V \xrightarrow{\pi_*^0} W^\sigma \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{j_*^1} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{\pi_*^1} H^1(\mathbb{Z}, W) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

(Ici W^σ est l'espace $H^0(\mathbb{Z}, W)$ qui est constitué des invariants de W par l'action de \mathbb{Z} induite par σ .) De ces deux suites exactes on déduit que $W^\sigma = V/\mathbb{C} \simeq V_0$ et $H^1(\mathbb{Z}, W) \simeq \mathbb{C}$.

• Soit Θ^* l'espace des fonctions C^∞ et \mathcal{F} -holomorphes sur l'ouvert $U_{012} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*$ et qui s'écrivent :

$$f(z_1, z_2, t) = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$$

où $\gamma_{m_1 m_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ avec les conditions de convergence C^∞ habituelles. Il contient l'espace Θ des fonctions C^∞ et \mathcal{F} -holomorphes sur l'ouvert $U_{012} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$ et qui s'écrivent sous la même forme mais cette fois-ci $\gamma_{m_1 m_2} \in C^\infty(\mathbb{R})$ (avec aussi les conditions de convergence C^∞ habituelles). On a donc une injection $\Theta \hookrightarrow \Theta^*$ et le quotient Θ^*/Θ s'identifie à l'espace vectoriel de cohomologie $H^2(\tilde{M}, \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{F}}})$. Ses éléments peuvent s'interpréter comme des séries

$$\sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \text{ dont les coefficients sont dans le groupe } W. \quad \diamond$$

Reprenons maintenant le difféomorphisme $\sigma : t \mapsto \lambda t \in \mathbb{R}$ qui définit comme nous l'avons vu une action de \mathbb{Z} sur l'espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{R})$. Celle-ci induit une action (qu'on notera encore σ) de \mathbb{Z} sur l'espace :

$$H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\widetilde{M}) = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$$

donnée par $\sigma(f)(z_1, z_2, t) = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(\lambda t)}{\lambda^{m_1+m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$ et qui fait donc de l'espace $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\widetilde{M})$ un \mathbb{Z} -module qu'on notera L (pour simplifier les notations dans les calculs qui vont suivre).

Posons $\Delta = H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = \Theta^* / \Theta$. On a une action de \mathbb{Z} sur Δ induite par l'automorphisme du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}} : \gamma : (z_1, z_2, t) \in \widetilde{M} \mapsto (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda t) \in \widetilde{M}$ et ses restrictions aux divers ouverts invariants :

$$[f] = \left[\sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right] \mapsto \gamma[f] = \left[\sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(\lambda t)}{\lambda^{m_1+m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right]$$

où, pour $f \in \Theta^*$, $[f]$ désigne sa classe d'équivalence dans Δ . On notera Δ^γ le sous-espace de Δ dont les éléments sont les γ -invariants. Bien entendu, un élément de Δ^γ est représenté par une fonction $f(z_1, z_2, t) = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$ avec $\gamma_{m_1 m_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ telle que $\gamma f - f$ représente la classe nulle dans Δ i.e., pour tout $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^{*2}$, la fonction $\widetilde{\gamma}_{m_1 m_2}$ définie par :

$$\widetilde{\gamma}_{m_1 m_2}(t) = \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{\lambda^{m_1+m_2}} - \gamma_{m_1 m_2}(t)$$

est dans l'image de la restriction $\rho : C^\infty(\mathbb{R}^*) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$. On a finalement le :

3.3. Théorème. *On a :*

$$H_{\mathcal{F}}^{0,*}(M) = \begin{cases} \mathbb{C} & si * = 0 \\ \mathbb{C} \oplus \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} c_{m_1 m_2} \frac{t^{m_1+m_2}}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\} & si * = 1 \\ H^1(\mathbb{Z}, L) \oplus \Delta^\gamma & si * = 2 \\ 0 & si * \geq 3 \end{cases}$$

où, pour tout $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, les $c_{m_1 m_2}$ sont des constantes complexes telles que la série $\sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} c_{m_1 m_2} \frac{t^{m_1+m_2}}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour des raisons évidentes de degré, $H^q(M, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = 0$ pour $q \geq 3$. Reste à calculer seulement $H^q(M, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = 0$ pour $0 \leq q \leq 2$.

On a un revêtement feuilleté $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ de groupe $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$ engendré par l'automorphisme γ du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$. Le faisceau $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ des germes de fonctions $\widetilde{\mathcal{F}}$ -holomorphes sur \widetilde{M} est le relevé par π du faisceau $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ des germes de fonctions \mathcal{F} -holomorphes sur M . On a alors une suite spectrale de terme :

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma, H^q(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$$

et convergeant vers $H_{\mathcal{F}}^{0,*}(M)$. Comme $\Gamma = \mathbb{Z}$, la différentielle $d_2 : E_2^{p,q} \rightarrow E_2^{p+2,q-1}$ est nulle et donc la suite stationne déjà au terme E_2 . Ce qui nous donne, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$:

$$H_{\mathcal{F}}^{0,\ell}(M) = \bigoplus_{p+q=\ell} E_2^{p,q}.$$

De façon plus précise :

$$H_{\mathcal{F}}^{0,0}(M) = E_2^{00} = H^0(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) = E^\sigma = \{\text{éléments de } \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) \text{ invariants par } \gamma\}$$

$$H_{\mathcal{F}}^{0,1}(M) = E_2^{01} \oplus E_2^{10} = H^0(\Gamma, H^1(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) \oplus H^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$$

c'est-à-dire :

$$H_{\mathcal{F}}^{0,1}(M) = \{\text{éléments de } L \text{ invariants par } \sigma\} \oplus H^1(\Gamma, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})).$$

De même :

$$H_{\mathcal{F}}^{0,2}(M) = E_2^{02} \oplus E_2^{11} \oplus E_2^{20} = H^0(\Gamma, H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) \oplus H^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$$

Ici on a utilisé le fait que $E_2^{20} = H^2(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) = 0$ car le groupe Γ est isomorphe à \mathbb{Z} . Mais $H^0(\Gamma, H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$ n'est rien d'autre que l'espace des invariants de $H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}})$ par l'automorphisme induit par le difféomorphisme :

$$\gamma : (z_1, z_2, t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^* \mapsto (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*$$

que nous allons calculer de façon précise.

En degré $*$ = 0

Rappelons qu'on a l'égalité $\mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M}) = \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$. Il est alors clair que toute fonction $f \in \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ invariante par γ est constante ; d'où $H_{\mathcal{F}}^{0,0}(M) = \mathbb{C}$ engendré par la fonction constante égale à 1.

En degré $*$ = 1

Donner explicitement l'espace $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(M)$, revient à calculer $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}))$ et les éléments de $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\widetilde{M}) = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\gamma_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$ invariants par σ .

• **L'espace $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}))$**

On sait qu'il s'identifie canoniquement au conoyau de l'opérateur linéaire (et continu) $\delta : \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ défini par $\delta(f) = f - f \circ \gamma$. Cela revient à se donner $g \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ et à chercher $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ telle que, pour tout $(z_1, z_2, t) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$, on ait :

$$f(z_1, z_2, t) - f(\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda t) = g(z_1, z_2, t).$$

Une condition nécessaire pour que cette équation cohomologique ait une solution est que $g(0, 0, 0) = 0$. On va la supposer remplie. On a alors une solution formelle :

$$f(z_1, z_2, t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(\lambda^k z_1, \lambda^k z_2, \lambda^k t).$$

La "dérivée" (formelle) d'ordre $s \in \mathbb{N}^*$ en t s'écrit :

$$\frac{\partial^s f}{\partial t^s}(z_1, z_2, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{ks} \frac{\partial^s g}{\partial t^s}(\lambda^k z_1, \lambda^k z_2, \lambda^k t).$$

Soient $R > 0$ et K la boule fermée de centre l'origine et de rayon R de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$; alors, comme λ^{ks} tend vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$, la famille $\frac{\partial^s g}{\partial t^s}(\lambda^k z_1, \lambda^k z_2, \lambda^k t)$ y est bornée par une constante $C > 0$ indépendante de k . On a donc :

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{ks} \frac{\partial^s g}{\partial t^s}(\lambda^k z_1, \lambda^k z_2, \lambda^k t) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \lambda^{ks} \frac{\partial^s g}{\partial t^s}(\lambda^k z_1, \lambda^k z_2, \lambda^k t) \right| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{ks} < +\infty.$$

Toutes les séries dérivées $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{ks} \frac{\partial^s g}{\partial t^s}(\lambda^k z_1, \lambda^k z_2, \lambda^k t)$ convergent uniformément sur tout compact ; comme la série elle-même converge au point 0, elle converge finalement (au sens de ce qu'il faut) vers une fonction $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})$ solution de l'équation $f - f \circ \gamma = g$. L'image de l'opérateur δ est donc le noyau de la fonctionnelle $\widetilde{\mathcal{F}}$ -analytique :

$$g \in \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}) \longmapsto g(0) \in \mathbb{C}.$$

Ceci montre que l'espace vectoriel $H^1(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}))$ est isomorphe à \mathbb{C} et est engendré par la fonction constante égale à 1.

• **Les invariants de $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\widetilde{M})$**

On doit chercher les éléments de $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\widetilde{M}) = \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\phi_{m_1 m_2}(t)}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$ qui sont invariants par l'action de σ donnée par :

$$(\sigma \cdot f)(z_1, z_2, t) = \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} \frac{\phi_{m_1 m_2}(\lambda t)}{\lambda^{m_1+m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}}.$$

De tels éléments doivent satisfaire la condition d'invariance :

$$\phi_{m_1 m_2}(\lambda t) = \lambda^{m_1+m_2} \phi_{m_1 m_2}(t) \quad \text{pour tout couple } (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*.$$

Posons $k = m_1 + m_2$ et cherchons les fonctions complexes $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ qui vérifient $\phi(\lambda t) = \lambda^k \phi(t)$. De façon évidente la fonction $b(t) = t^k$ vérifie la condition $b(\lambda t) = \lambda^k b(t)$. Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ une autre fonction vérifiant la même condition ; alors, pour $t \neq 0$, la fonction $\psi(t) = \frac{\phi(t)}{t^k}$ vérifie $\psi(\lambda t) = \psi(t)$. On doit avoir $\phi(t) = \psi(t)t^k$ avec ψ définie sur \mathbb{R}^* et telle que $\psi(\lambda t) = \psi(t)$. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit et développons ϕ en série de Taylor sur l'ouvert $U =]-\varepsilon, +\varepsilon[$:

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \dots + \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} t^{k-1} + \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \dots$$

Comme la fonction $\frac{\phi(t)}{t^k}$ est bornée sur $U^* =]-\varepsilon, +\varepsilon[\setminus \{0\}$ (car coïncide sur $]0, \varepsilon[$ avec ψ qui est invariante par l'homothétie $t \in]0, +\infty[\mapsto \lambda t \in]0, +\infty[$), on a forcément $\phi^{(i)}(0) = 0$ pour $i = 0, 1, \dots, k-1$. Par suite $\phi(t) = t^k \psi(t)$ sur U . La fonction ψ est donc en fait définie sur U ; comme elle vérifie $\psi(\lambda t) = \psi(t)$ elle est constante. Par suite ϕ est un multiple par une constante de la fonction $b(t) = t^k$. On en déduit que le sous-espace des

invariants de $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\widetilde{M})$ est $\left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} c_{m_1 m_2} \frac{t^{m_1+m_2}}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$. Ce qui donne :

$$H_{\mathcal{F}}^{0,1}(M) = \mathbb{C} \oplus \left\{ \sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} c_{m_1 m_2} \frac{t^{m_1+m_2}}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}} \right\}$$

où les coefficients $c_{m_1 m_2}$ sont des constantes telles que la série $\sum_{\substack{m_1 \in \mathbb{N}^* \\ m_2 \in \mathbb{N}^*}} c_{m_1 m_2} \frac{t^{m_1+m_2}}{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}$ converge uniformément sur tout compact.

En degré $*$ = 2

Comme précédemment, E_2^{11} est l'espace $H^1(\mathbb{Z}, L)$ et qu'on ne sait pas déterminer explicitement pour l'instant ! L'espace $E_2^{02} = H^0(\mathbb{Z}, H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$ n'est rien d'autre que Δ^γ *i.e.* celui des éléments de $\Delta = H^2(\widetilde{M}, \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}) = \Theta^*/\Theta$ invariants par γ et qu'on a déjà décrit.

Ceci termine la démonstration du théorème et donc presque totalement le calcul de la cohomologie de Dolbeault feuilletée pour le feuilletage complexe affine de Reeb sur la variété de Hopf $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^1$. ◇

CHAPITRE IV

FEUILLETAGE COMPLEXE SUR LE TORE HYPERBOLIQUE

Cet exemple est extrêmement intéressant par la richesse de sa dynamique. Une grande partie du travail a consisté d'abord à dévisser sa structure géométrique et analytique pour pouvoir ensuite s'attaquer à la résolution proprement dite du problème du $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ et la détermination des fonctionnelles \mathcal{F} -analytiques.

1. Construction du feuilletage complexe

On va d'abord construire la variété homogène \mathbb{T}_A^{n+1} , son feuilletage complexe \mathcal{F} et les divers espaces fonctionnels qui serviront dans les calculs et à l'investigation de la cohomologie de Dolbeault feuilletée $H_{\mathcal{F}}^{0,*}(\mathbb{T}_A^{n+1})$ ainsi que d'autres invariants rattachés à ce feuilletage complexe.

1.1. La variété homogène \mathbb{T}_A^{n+1}

Soient $n \geq 2$ et $A \in \text{SL}(n, \mathbb{Z})$ une matrice diagonalisable sur \mathbb{R} ayant toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positives et toutes différentes de 1 (on dit qu'elle est *hyperbolique*). On note v_1, \dots, v_n des vecteurs propres unitaires associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. (Les composantes de v_i seront notées $(\kappa_1^i, \dots, \kappa_n^i)$.) Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on peut calculer la puissance $t^{\text{ème}}$ A^t de A ; on obtient une action :

$$(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto A^t x \in \mathbb{R}^n$$

qui permet de construire le produit semi-direct $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$; G est un groupe de Lie 1-connexe résoluble (non nilpotent) dans lequel $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ est un réseau cocompact. Le quotient G/Γ est une variété analytique réelle compacte notée \mathbb{T}_A^{n+1} qu'on appelle *tore hyperbolique* ; elle fibre sur le cercle \mathbb{S}^1 avec fibre le tore \mathbb{T}^n . On vérifie facilement que les champs de vecteurs :

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad X_i = \lambda_i^t v_i = \lambda_i^t \left(\kappa_1^i \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \kappa_n^i \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

avec $i = 1, \dots, n$ induisent des champs sur \mathbb{T}_A^{n+1} . Ils vérifient les relations de crochet :

$$\begin{cases} [X_i, X_j] = 0 \\ [Y, X_i] = (\ln \lambda_i) X_i. \end{cases}$$

Soit X l'un des champs X_1, \dots, X_n (X_1 par exemple) de coordonnées $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ associé à $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$; on suppose $\lambda < 1$ et donc $\nu = \ln \lambda < 0$. Les champs X, Y engendrent un sous-fibré intégrable du fibré tangent à \mathbb{T}_A^{n+1} et définissent donc un feuilletage \mathcal{F} . En fait, \mathcal{F} est aussi défini par le sous-groupe H de G , produit semi-direct de la direction propre $E_\lambda = \mathbb{R}X$ par \mathbb{R} agissant (sur E_λ bien sûr) par multiplication par λ^t ; H est isomorphe au groupe affine GA (groupe des transformations affines préservant l'orientation de la droite réelle). L'une des propriétés remarquables du feuilletage \mathcal{F} est qu'il est C^∞ -stable [EN].

On peut définir une structure presque complexe sur les feuilles de \mathcal{F} en posant $J_{\mathcal{F}}(X) = Y$ et $J_{\mathcal{F}}(Y) = -X$. Comme leur dimension est 2, $J_{\mathcal{F}}$ est intégrable et confère à \mathcal{F} une *structure complexe*. On obtient donc un feuilletage complexe $(\mathbb{T}_A^{n+1}, \mathcal{F})$. Les fibrés $T^{10}\mathcal{F}$ et $T^{01}\mathcal{F}$ sont respectivement engendrés par les champs $Z = \frac{1}{2}(X - iY)$ et $\bar{Z} = \frac{1}{2}(X + iY)$ qui sont donnés exactement par les formules :

$$Z = \frac{1}{2} \left[\lambda^t \left(\kappa_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \kappa_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) - i \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

et

$$\bar{Z} = \frac{1}{2} \left[\lambda^t \left(\kappa_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \kappa_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) + i \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

Ces champs forment une base (Z, \bar{Z}) du complexifié $T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ du fibré tangent au feuilletage; (Z, \bar{Z}) admet pour base duale $(\omega, \bar{\omega})$ où ω et $\bar{\omega}$ sont les 1-formes feuilletées respectivement de type $(1, 0)$ et de type $(0, 1)$ données explicitement par :

$$\omega = \lambda^{-t}(\kappa_1 dx_1 + \dots + \kappa_n dx_n) + idt$$

et

$$\bar{\omega} = \lambda^{-t}(\kappa_1 dx_1 + \dots + \kappa_n dx_n) - idt.$$

La $(1, 0)$ -forme ω vérifie $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}\omega = -\frac{i\nu}{2}\omega \wedge dt$ et n'est donc pas \mathcal{F} -holomorphe. Il n'y a en fait aucune 1-forme \mathcal{F} -holomorphe sur $(\mathbb{T}_A^{n+1}, \mathcal{F})$ comme nous le verrons plus loin. Le complexe de Dolbeault feuilleté s'écrit :

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{0,0}(\mathbb{T}_A^{n+1}) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}_A^{n+1}) \longrightarrow 0.$$

On a, de façon plus précise :

$$\Omega_{\mathcal{F}}^{0,*}(\mathbb{T}_A^{n+1}) = \begin{cases} C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1}) & \text{si } * = 0 \\ C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1}) \otimes \bar{\omega} & \text{si } * = 1 \end{cases}$$

et l'opérateur $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ est défini par :

$$(IV.1) \quad \bar{\partial}_{\mathcal{F}}f = \frac{1}{2} \left[\lambda^t \left(\kappa_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \kappa_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) + i \frac{\partial f}{\partial t} \right] \otimes \bar{\omega}.$$

1.2. Une description hiérarchique

Pour simplifier, on pose $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$, $\widehat{M} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ et $M = \mathbb{T}_A^{n+1}$. Le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ est une extension scindée :

$$0 \longrightarrow \Gamma_0 = \mathbb{Z}^n \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Sigma = \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

La variété \widehat{M} est le quotient de G par l'action du sous-groupe Γ_0 (distingué dans Γ) à l'aide des difféomorphismes $\tau_i : (x_1, \dots, x_n, t) \in G \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_n, t) \in G$ pour $i = 1, \dots, n$. La variété M est obtenue comme quotient de \widehat{M} par l'action de $\Sigma = \mathbb{Z}$ engendrée par le difféomorphisme $\sigma : (x, t) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow (Ax, t + 1) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$.

Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur G est un produit complexe : chaque feuille \widetilde{F} de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est holomorphiquement équivalente au groupe affine muni de la structure complexe invariante donnée par l'automorphisme $J_{\mathcal{F}}$ qu'on a défini précédemment. Les flots des champs X_2, \dots, X_n engendrent un sous-groupe T isomorphe à \mathbb{R}^{n-1} et on a $G = \widetilde{F} \times T$. Les difféomorphismes τ_1, \dots, τ_n sont en fait des éléments de $\text{Aut}(G, \widetilde{\mathcal{F}})$ et σ est un élément de $\text{Aut}(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$. Pour chaque $i = 1, \dots, n$, on pose :

$$C_i = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{(i-1) \text{ fois}} \times \mathbb{S}^1 \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{(n-i) \text{ fois}}.$$

Alors le quotient de G par le sous-groupe engendré par τ_i est une variété \widehat{M}_i difféomorphe à $C_i \times \mathbb{R}$. Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ est invariant par l'action de τ_i et induit un feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}_i$ sur \widehat{M}_i qui est aussi un produit complexe : ses feuilles sont obtenues en multipliant par le facteur \mathbb{R}_+^* le flot linéaire en droites fermées de direction le champ X_i et sont toutes holomorphiquement équivalentes à GA . Aussi bien pour $(G, \widetilde{\mathcal{F}})$ que pour les feuilletages $(\widehat{M}_i, \widehat{\mathcal{F}}_i)$ on a :

$$H_{\widetilde{\mathcal{F}}}^{0,*}(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } * \geq 1 \\ \mathcal{H}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(G) & \text{si } * = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad H_{\widehat{\mathcal{F}}_i}^{0,*}(\widehat{M}_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } * \geq 1 \\ \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}_i}(\widehat{M}_i) & \text{si } * = 0 \end{cases}.$$

2. Les espaces de fonctions sur \mathbb{T}_A^{n+1}

La forme volume $\mu = dx \wedge dt = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dt$ sur $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ est invariante par l'action de $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$ et induit donc une forme volume sur \mathbb{T}_A^{n+1} .

2.1. Les fonctions

Une fonction sur \mathbb{T}_A^{n+1} est une fonction sur $G = \mathbb{R}^n \rtimes_A \mathbb{R}$ invariante par $\Gamma = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$. D'après ce qui précède, une telle fonction est identifiée à une fonction n -périodique, de période 1 en x_1, \dots, x_n et invariante par $\sigma : (x, t) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \mapsto (Ax, t + 1) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ *i.e.*

$f(Ax, t+1) = f(x, t)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$. On dira que f est *intégrable* ou L^1 si elle est mesurable et si la quantité :

$$\int_{\mathbb{T}_A^{n+1}} |f| d\mu = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(x, t)| dx \right) dt$$

est finie. Dans ce cas, f admet un développement de Fourier :

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}}(t) e^{2i\pi \langle \mathbf{m}, x \rangle}$$

où les $f_{\mathbf{m}}$ sont ses coefficients de Fourier donnés par les formules intégrales :

$$f_{\mathbf{m}}(t) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x, t) e^{-2i\pi \langle \mathbf{m}, x \rangle} dx.$$

La condition d'invariance sur la fonction f se traduit au niveau des $f_{\mathbf{m}}$ par la relation :

$$(CI) \quad f_{\mathbf{m}}(t+1) = f_{B\mathbf{m}}(t)$$

où B est la matrice transposée de A . En particulier $f_{\mathbf{0}}$ est une fonction périodique de période 1 en t . Toute fonction L^1 sur \mathbb{T}_A^{n+1} peut donc être regardée comme une fonction :

$$f : (\mathbf{m}, t) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R} \longmapsto f_{\mathbf{m}}(t) \in \mathbb{C}$$

où les valeurs $f_{\mathbf{m}}(t)$ vérifient la condition (CI). Nous travaillerons de cette façon dans tout ce qui suit.

2.2. Les différentes normes

Pour chaque $R \in \mathbb{N}^*$, notons C_R le compact $[-R, R]$. La suite $(C_R)_{R \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et recouvre \mathbb{R} . Il est bien connu que, pour tout $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, tout $R \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$, les quantités suivantes existent :

$$|f_{\mathbf{m}}|_{s, \infty}^R = \sup_{t \in C_R} \left| \frac{d^s f_{\mathbf{m}}}{dt^s}(t) \right| \quad \text{et} \quad \|f\|_{r, s}^R = |f_{\mathbf{0}}|_{s, \infty}^R + \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}|_{s, \infty}^R.$$

Alors $\|\cdot\|_{r, s}^R$ est une semi-norme sur $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$ et la famille $(\|\cdot\|_{r, s}^R)$ (indexée par r, s et R) y définit la topologie C^∞ . Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_\ell^R = \sum_{r+s \leq \ell} \|\cdot\|_{r, s}^R$ est une semi-norme sur $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$.

Sur l'espace $C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1})$, considéré comme le sous-espace des fonctions de $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$ vérifiant la condition (CI), il suffit de considérer les normes :

$$(IV.2) \quad \|f\|_{r, s} = |f_{\mathbf{0}}|_{s, \infty} + \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}|_{s, \infty} \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_\ell = \sum_{r+s \leq \ell} \|\cdot\|_{r, s}$$

où :

$$|f_{\mathbf{m}}|_{s,\infty} = \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{d^s f_{\mathbf{m}}}{dt^s}(t) \right|.$$

Pour chaque $\ell \in \mathbb{N}$, on note W^ℓ le complété de $(C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1}), \|\cdot\|_\ell)$. Il n'est pas difficile d'établir les assertions qui suivent :

i) La suite $\{W^\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ est décroissante et chaque injection $j_\ell : W^\ell \hookrightarrow W^{\ell-1}$ est un opérateur compact.

ii) On a $\bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} W^\ell = C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1})$. L'assertion ii) signifie qu'une fonction $f : \mathbb{T}_A^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ est C^∞ si, et seulement si, pour tout $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ on a :

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}|_{s,\infty} < +\infty.$$

La matrice B agit linéairement sur le réseau \mathbb{Z}^n . Soit Λ une partie de \mathbb{Z}^n contenant un et un seul représentant de chaque orbite de cette action. L'orbite de $\mathbf{0}$ est réduite à $\{\mathbf{0}\}$. Il est clair qu'on a une partition :

$$\mathbb{Z}^n = \bigcup_{\mathbf{m} \in \Lambda} \{B^j \mathbf{m} : j \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour tout $\mathbf{m} \in \Lambda$, soit $V_{\mathbf{m}}$ le sous-espace de $C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1})$ engendré par la famille de fonctions $\{e_{B^j \mathbf{m}} : j \in \mathbb{Z}\}$ i.e. toutes les fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1})$ qui s'écrivent :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{B^j \mathbf{m}} e_{B^j \mathbf{m}}.$$

L'espace $V_{\mathbf{0}}$ est constitué des fonctions qui ne dépendent que de la variable t et périodiques de période 1. Nous avons une décomposition en somme directe :

$$C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1}) = \bigoplus_{\mathbf{m} \in \Lambda} V_{\mathbf{m}}.$$

3. Formulation du problème du $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$

Dans notre situation précise, nous allons nous intéresser au complexe différentiel de Dolbeault feuilleté pour $p = 0$.

3.1. L'opérateur $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$

Comme le feuilletage \mathcal{F} est de dimension (complexe) égale à 1, le complexe différentiel en question s'écrit :

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{0,0}(\mathbb{T}_A^{n+1}) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}_A^{n+1}) \longrightarrow 0$$

où l'opérateur $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}$ est donné de façon exacte par la formule :

$$\bar{\partial}_{\mathcal{F}} f = \frac{1}{2} \left[\lambda^t \left(\kappa_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) + i \frac{\partial f}{\partial t} \right] \otimes \bar{\omega}.$$

Le feuilletage \mathcal{F} étant de dimension (complexe) 1, les espaces $H_{\mathcal{F}}^{0,q}(\mathbb{T}_A^{n+1})$ sont triviaux pour $q \geq 2$. Les feuilles étant denses, d'après la proposition II.3.8, l'espace $H_{\mathcal{F}}^{0,0}(\mathbb{T}_A^{n+1})$ est isomorphe à \mathbb{C} . Le problème se réduit uniquement à la détermination de $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}_A^{n+1})$ et de son séparé associé $\bar{H}_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}_A^{n+1})$. Il consiste à se donner $\alpha = g \otimes \bar{\omega} \in \Omega_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}_A^{n+1})$ et à trouver f dans l'espace :

$$\Omega_{\mathcal{F}}^{0,0}(\mathbb{T}_A^{n+1}) = C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1})$$

telle que $\bar{\partial}_{\mathcal{F}} f = \alpha$, ce qui revient à résoudre l'équation :

$$(IV.3) \quad \frac{1}{2} \left[\lambda^t \left(\kappa_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) + i \frac{\partial f}{\partial t} \right] = g$$

dans l'espace $C^\infty(\mathbb{T}_A^{n+1})$.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, les fonctions L^1 sur \mathbb{T}_A^{n+1} peuvent être regardées comme des fonctions $\phi : (\mathbf{m}, t) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R} \mapsto \phi_{\mathbf{m}}(t)$ telles que $\phi_{B\mathbf{m}}(t) = \phi_{\mathbf{m}}(t+1)$ (c'est la condition (CI)). Par exemple la fonction suivante :

$$\Delta(\mathbf{m}, t) = \Delta_{\mathbf{m}}(t) = e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t}$$

qui s'introduira naturellement par la suite, vérifie la condition (CI).

3.2. La quantité $\Delta(B^j \mathbf{m}, t)$

Son comportement sur l'orbite $\{B^j \mathbf{m} : j \in \mathbb{Z}\}$ d'un élément $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ nous sera essentiel. Explicitons-le. Rappelons que $0 < \lambda < 1$ et que :

$$\langle B^j \mathbf{m}, v \rangle = \langle \mathbf{m}, A^j v \rangle = \langle \mathbf{m}, \lambda^j v \rangle = \lambda^j \langle \mathbf{m}, v \rangle.$$

i) Cas $\langle \mathbf{m}, v \rangle > 0$

La quantité $\langle B^j \mathbf{m}, v \rangle$ reste strictement positive pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On a ainsi :

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \Delta(B^j \mathbf{m}, t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \Delta(B^j \mathbf{m}, t) = 1.$$

ii) Cas $\langle \mathbf{m}, v \rangle < 0$

La quantité $\langle B^j \mathbf{m}, v \rangle$ reste strictement négative pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On a ainsi :

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \Delta(B^j \mathbf{m}, t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \Delta(B^j \mathbf{m}, t) = 1.$$

4. Divers objets géométriques

4.1. Les fonctions $\widehat{\mathcal{F}}$ -holomorphes sur $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$

Rappelons que, via sa décomposition en série de Fourier, une fonction C^∞ :

$$f = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}} e_{\mathbf{m}}$$

sur $\widehat{M} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ est une fonction $f : (\mathbf{m}, t) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R} \mapsto f_{\mathbf{m}}(t) \in \mathbb{C}$ telle que, pour tout $R \in \mathbb{N}^*$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$ on ait $\|f\|_\ell^R < +\infty$ où :

$$|f_{\mathbf{m}}|_{s,\infty}^R = \sup_{t \in C_R} \left| \frac{d^s f_{\mathbf{m}}}{dt^s}(t) \right| \quad \text{et} \quad \|f\|_\ell^R = \sum_{r+s \leq \ell} \left(|f_0|_{s,\infty}^R + \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\mathbf{m}|^r |f_{\mathbf{m}}|_{s,\infty}^R \right).$$

On a alors, par continuité de l'opérateur $\bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}$ pour la topologie C^∞ :

$$\bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}} f(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} (2i\pi \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t f_{\mathbf{m}}(t) + i f'_{\mathbf{m}}(t)) e_{\mathbf{m}}(x).$$

Donc f est $\widehat{\mathcal{F}}$ -holomorphe si, et seulement si, on a :

$$2i\pi \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t f_{\mathbf{m}}(t) + i f'_{\mathbf{m}}(t) = 0$$

pour tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$. Si $\mathbf{m} = 0$, $f'_0(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc f_0 est une constante. Si $\mathbf{m} \neq 0$ alors :

$$f_{\mathbf{m}}(t) = C_{\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t} \quad \text{avec } C_{\mathbf{m}} \text{ constante pour tout } \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

Nous allons examiner les conditions que doivent satisfaire les constantes $C_{\mathbf{m}}$. Soit $s \in \mathbb{N}$ et posons $\beta_{\mathbf{m}}(t) = e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t}$. Un calcul facile mais lourd à mener donne :

$$\frac{d^s \beta_{\mathbf{m}}}{dt^s}(t) = P_s(\langle \mathbf{m}, v \rangle, \lambda^t) e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t}$$

où P_s est un polynôme à deux indéterminées U et V de degré $2s$ s'écrivant :

$$P_s(U, V) = \sum_{d,\ell=0}^s a_{d\ell} U^d V^\ell$$

où $a_{d\ell}$ sont des constantes réelles. La condition qu'on doit avoir est que, pour tous entiers naturels R, d, ℓ on ait $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} |C_{\mathbf{m}}| \cdot |\langle \mathbf{m}, v \rangle|^d \rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) < +\infty$ où :

$$\rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) = \sup_{t \in C_R} \left\{ \lambda^{\ell t} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t} \right\} = \begin{cases} \lambda^{-\ell R} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^R} & \text{si } \langle \mathbf{m}, v \rangle \text{ est négatif} \\ \lambda^{-\ell R} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^{-R}} & \text{si } \langle \mathbf{m}, v \rangle \text{ est positif.} \end{cases}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle \mathbf{m}, v \rangle| \leq |\mathbf{m}| \cdot |v| = |\mathbf{m}|$ (v étant de norme 1) ; on doit donc avoir finalement $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} |C_{\mathbf{m}}| \cdot |\mathbf{m}|^d \rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) < +\infty$. Ainsi :

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) = \left\{ f(x, t) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t} e_{\mathbf{m}}(x) \right\}$$

où les $f_{\mathbf{m}}$ sont des constantes complexes telles que :

$$(IV.4) \quad \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |f_{\mathbf{m}}| \cdot |\mathbf{m}|^d \rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) < +\infty$$

pour tous $\ell, d \in \mathbb{N}$ et tout $R \in \mathbb{N}^*$.

4.2. Les 1-formes ($\widehat{\mathcal{F}}$ ou \mathcal{F})-holomorphes

Rappelons qu'on a deux formes ω et $\bar{\omega}$ respectivement de type $(1, 0)$ et de type $(0, 1)$ et qui forment un coparallélisme sur les feuilles de \mathcal{F} . Elles sont données comme suit :

$$\omega = \lambda^{-t}(\kappa_1 dx_1 + \cdots + \kappa_n dx_n) + idt \quad \text{et} \quad \bar{\omega} = \lambda^{-t}(\kappa_1 dx_1 + \cdots + \kappa_n dx_n) - idt.$$

Un calcul immédiat donne $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}\omega = \frac{\nu}{4}\omega \wedge \bar{\omega}$.

• Sur $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$

Une 1-forme $\widehat{\mathcal{F}}$ -holomorphe sur \widehat{M} s'écrit $\alpha = h\omega$ avec $\bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}\alpha = 0$. Mais $\bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}\alpha$ a pour expression $\bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}(h\omega) = \bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}h \wedge \omega + h\bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}\omega$, c'est-à-dire :

$$\bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}\alpha = \left(-\bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}^0 h + \frac{\nu}{4}h \right) \omega \wedge \bar{\omega}$$

où $\bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}^0$ est l'opérateur sur l'espace $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$ défini par :

$$\bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}^0 h = \frac{1}{2} \left[\lambda^t \left(\kappa_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) + i \frac{\partial h}{\partial t} \right].$$

La 1-forme α est donc $\widehat{\mathcal{F}}$ -holomorphe si, et seulement si, la fonction h vérifie $\bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}^0 h = \frac{\nu}{4}h$ i.e. h est une fonction propre associée à la valeur propre $\frac{\nu}{4}$ de l'opérateur $\bar{\partial}_{\widehat{\mathcal{F}}}^0$. L'équation différentielle associée est donc :

$$\frac{1}{2} \left[\lambda^t \left(\kappa_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + \cdots + \kappa_n \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) + i \frac{\partial h}{\partial t} \right] = \frac{\nu}{4}h.$$

Cette équation est équivalente au système :

$$\left(2\pi \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t + \frac{i\nu}{2} \right) h_{\mathbf{m}}(t) + h'_{\mathbf{m}}(t) = 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

Pour chaque $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, on a une solution :

$$h_{\mathbf{m}}(t) = h_{\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle \lambda^t - \frac{i\pi}{2} t} \quad \text{avec } h_{\mathbf{m}} \text{ constante pour tout } \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

Ainsi l'espace $\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}^1(\widehat{M})$ des 1-formes $\widehat{\mathcal{F}}$ -holomorphes s'écrit :

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}^1(\widehat{M}) = \left\{ h(x, t) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} h_{\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle \lambda^t - \frac{i\pi}{2} t} e_{\mathbf{m}}(x) \right\}$$

où les $h_{\mathbf{m}}$ sont des constantes complexes. Comme pour le cas des fonctions $\widehat{\mathcal{F}}$ -holomorphes les constantes $f_{\mathbf{m}}$ sont assujetties à une condition de convergence ; celle-ci s'écrit :

$$(IV.4') \quad \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |h_{\mathbf{m}}| \cdot |\mathbf{m}|^d \rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) < +\infty$$

pour tous $\ell, d \in \mathbb{N}$ et tout $R \in \mathbb{N}^*$. Ici :

$$\rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) = \sup_{t \in \mathbb{C}_R} \left| \lambda^{\ell t} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle \lambda^t - \frac{i\pi}{2} t} \right| = \sup_{t \in \mathbb{C}_R} \left\{ \lambda^{\ell t} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle \lambda^t} \right\}.$$

• Sur $(\mathbb{T}_A^{n+1}, \mathcal{F})$

Une 1-forme \mathcal{F} -holomorphe sur $(\mathbb{T}_A^{n+1}, \mathcal{F})$ est une 1-forme $\widehat{\mathcal{F}}$ -holomorphe $\alpha = h\omega$ sur $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ invariante par l'automorphisme $\sigma : (x, t) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \mapsto (Ax, t + 1) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ (du feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}$). Mais comme ω est déjà σ -invariante, h doit satisfaire la condition $h \circ \sigma = h$. Si :

$$h(x, t) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} h_{\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle \lambda^t - \frac{i\pi}{2} t} e_{\mathbf{m}}(x),$$

cette relation impose aux coefficients $h_{\mathbf{m}}(t) = h_{\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle \lambda^t - \frac{i\pi}{2} t}$ de vérifier la condition (CI) *i.e.* $h_{\mathbf{m}}(t + 1) = h_{B\mathbf{m}}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$. Un calcul simple montre alors que les constantes $h_{\mathbf{m}}$ doivent satisfaire :

$$h_{B\mathbf{m}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} h_{\mathbf{m}} \quad \text{pour tout } \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n.$$

On a forcément $h_0 = 0$. Si $\mathbf{m} \neq 0$, on a $|h_{B^j \mathbf{m}}| = |h_{\mathbf{m}}|$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Si $h_{\mathbf{m}} \neq 0$, la condition de convergence (IV.4') est alors mise en défaut. Il n'y a donc aucune 1-forme \mathcal{F} -holomorphe non nulle sur $(\mathbb{T}_A^{n+1}, \mathcal{F})$ *i.e.* l'espace vectoriel $H_{\mathcal{F}}^{1,0}(\mathbb{T}_A^{n+1})$ est nul. \diamond

Rappelons qu'on a une partition $\mathbb{Z}^n = \{0\} \cup \bigcup_{\mathbf{m} \in \Lambda_*} \{B^j \mathbf{m} : j \in \mathbb{Z}\}$ où $\Lambda_* = \Lambda \setminus \{0\}$ qui est la partie de $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ constituée par un et un seul élément de chaque orbite de B agissant sur $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Pour tout $\mathbf{m} \in \Lambda$, on note $H_{\mathbf{m}}$ le sous-espace de $\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$:

$$H_{\mathbf{m}} = \left\{ h(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{B^j \mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle B^j \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle \lambda^t} e_{B^j \mathbf{m}}(x) \right\}.$$

Le sous-espace H_0 est réduit aux constantes, donc isomorphe à \mathbb{C} . Chaque $H_{\mathbf{m}}$ est fermé et on a une décomposition en somme directe :

$$\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) = H_0 \oplus \bigoplus_{\mathbf{m} \in \Lambda_*} H_{\mathbf{m}}.$$

L'opérateur $\delta : \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) \rightarrow \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$ défini par $\delta h = h - h \circ \sigma^{-1}$ respecte cette décomposition et son noyau est exactement H_0 . Sa restriction à chaque $H_{\mathbf{m}}$ est une injection $H_{\mathbf{m}} \rightarrow H_{\mathbf{m}}$. Enfin pour tout $\mathbf{m} \in \Lambda$, soit $H_{\mathbf{m}}^-$ l'espace des fonctions $h = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{B^j \mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle B^j \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t} e_{B^j \mathbf{m}}(x)$ dans $H_{\mathbf{m}}$ telles que $h_{B^j \mathbf{m}} = 0$ pour $j < j_0$ ou $j_0 \in \mathbb{Z}$ ne dépend que de la fonction h .

5. Le théorème principal

Pour $\mathbf{m} \in \Lambda_+ \cup \{0\}$ (où $\Lambda_+ = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n : \langle \mathbf{m}, v \rangle > 0\}$), on définit les applications linéaires $\mathcal{L}_{\mathbf{m}} : \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) \rightarrow \mathbb{C}$ comme suit. Pour :

$$g(x, t) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} g_{\mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t} e_{\mathbf{m}}(x)$$

on pose :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}(g) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_{B^j \mathbf{m}} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_0(g) = \int_{\mathbb{T}^n} \int_0^1 g(x, t) dx dt = g_0.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ et \mathcal{L}_0 ainsi définies sont des fonctionnelles $\widehat{\mathcal{F}}$ -analytiques non nulles et σ -invariantes sur $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$. On note $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ l'intersection de $H_{\mathbf{m}}$ avec le noyau de $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$.

5.1. Théorème. *i) On a $H_{\widehat{\mathcal{F}}}^{0,1}(\mathbb{T}_A^{n+1}) = H^1(\Sigma, \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}))$.*

ii) Si $g \in H_{\mathbf{m}}$ avec \mathbf{m} dans $\Lambda_+ \cup \{0\}$, alors l'équation cohomologique $\widehat{\mathcal{F}}$ -analytique $g = h - h \circ \sigma^{-1}$ a une solution $h \in H_{\mathbf{m}}$ si, et seulement si, $g \in \mathcal{N}_{\mathbf{m}}$; ce qui implique que $H^1(\Sigma, H_{\mathbf{m}})$ est isomorphe à \mathbb{C} . Ainsi l'espace vectoriel $H_{\widehat{\mathcal{F}}}^{0,1}(\mathbb{T}_A^{n+1})$ est de dimension infinie.

iii) Pour tout $g \in H_{\mathbf{m}}^-$ avec $\mathbf{m} \in \Lambda_- = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n : \langle \mathbf{m}, v \rangle < 0\}$, l'équation cohomologique $g = h - h \circ \sigma^{-1}$ a une solution unique $h \in H_{\mathbf{m}}$.

iv) L'espace des fonctionnelles $\widehat{\mathcal{F}}$ -analytiques σ -invariantes sur $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ est engendré par les fonctionnelles $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ avec $\mathbf{m} \in \Lambda_+ \cup \{0\}$.

La démonstration se fera en plusieurs étapes.

5.2. Étape 1

On a une extension de groupes : $0 \rightarrow \Gamma_0 = \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma \rightarrow \Sigma = \mathbb{Z} \rightarrow 0$. Les groupes Γ et Γ_0 agissent sur $H_{\widehat{\mathcal{F}}}^{0,*}(G)$ qui se réduit à l'espace $H_{\widehat{\mathcal{F}}}^{0,0}(G) = \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(G)$; Σ agit

sur $H^*(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G))$. La suite spectrale de Hochschild-Lyndon-Serre associée à l'extension ci-dessus a pour terme :

$$E_2^{pq} = H^p(\Sigma, H^q(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)))$$

et converge vers $H^*(\Gamma, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) = H_{\mathcal{F}}^{0,*}(\mathbb{T}_A^{n+1})$. Il faut donc calculer tous les espaces et morphismes qui interviennent dans cette suite spectrale. On peut déjà remarquer que, comme $\Sigma = \mathbb{Z}$, la différentielle $d_2 : E_2^{pq} \rightarrow E_2^{p+2, q-1}$ est nulle et donc la suite spectrale converge au terme E_2 ; d'où :

$$H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}_A^{n+1}) = E_2^{01} \oplus E_2^{10} = H^0(\Sigma, H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G))) \oplus H^1(\Sigma, H^0(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G))).$$

Mais :

$$H^1(\Sigma, H^0(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G))) = H^1(\Sigma, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\widehat{M})).$$

Nous allons montrer que l'espace vectoriel $H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G))$ est trivial.

5.3. Étape 2 : calcul de $H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G))$

L'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)$ est un Γ_0 -module. Comme les espaces vectoriels $H_{\mathcal{F}}^{0,*}(G)$ sont triviaux pour $* \geq 1$, la suite spectrale (D_r) associée au revêtement $\Gamma_0 \rightarrow G \rightarrow \widehat{M}$ dégénère au terme D_2 et on a l'égalité :

$$D_2^{*,0} = H_{\mathcal{F}}^{0,*}(\widehat{M}) = H^*(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)).$$

On peut écrire $\Gamma_0 = \Gamma_0^1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_0^n$ où, pour tout $i = 1, \dots, n$, Γ_0^i est engendré par l'automorphisme τ_i ; on pose alors $\bar{\Gamma}_0^i = \Gamma_0^i \oplus \cdots \oplus \Gamma_0^n$. Bien sûr $\bar{\Gamma}_0^1 = \Gamma_0$ et $\bar{\Gamma}_0^n = \Gamma_0^n$. On a ainsi $\bar{\Gamma}_0^i = \Gamma_0^i \oplus \bar{\Gamma}_0^{i+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$. Chacun des Γ_0^i est une copie de \mathbb{Z} et tous les groupes Γ_0^i et $\bar{\Gamma}_0^i$ (avec $i = 1, \dots, n$) agissent sur l'espace vectoriel $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)$. La formule de Künneth en cohomologie des groupes discrets donne alors, en l'appliquant à la somme directe $\Gamma_0 = \Gamma_0^1 \oplus \bar{\Gamma}_0^2$:

$$H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) = \underbrace{H^0(\bar{\Gamma}_0^2, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) \otimes H^1(\Gamma_0^1, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G))}_{=0} \oplus \underbrace{H^1(\bar{\Gamma}_0^2, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) \otimes H^0(\Gamma_0^1, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G))}_{=0}.$$

Mais :

$$H^1(\Gamma_0^1, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) = H_{\mathcal{F}_1}^{01}(\widehat{M}_1) = 0$$

et donc :

$$H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) = H^1(\bar{\Gamma}_0^2, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) \otimes H^0(\Gamma_0^1, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)).$$

Le même raisonnement appliqué à la somme directe $\bar{\Gamma}_0^2 = \Gamma_0^2 \oplus \bar{\Gamma}_0^3$ donne :

$$H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) = H^1(\bar{\Gamma}_0^3, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) \otimes H^0(\Gamma_0^2, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) \otimes H^0(\Gamma_0^1, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)).$$

En répétant ce processus, on arrive finalement à la formule :

$$H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) = H^1(\overline{\Gamma}_0^n, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^{n-1} H^0(\Gamma_0^j, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) \right).$$

Mais :

$$H^1(\overline{\Gamma}_0^n, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) = H^1(\Gamma_0^n, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) = H_{\mathcal{F}}^{01}(\widehat{M}_n) = 0$$

et par suite $H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(G)) = 0$. Ce qui donne :

$$H_{\mathcal{F}}^{01}(\mathbb{T}_A^{n+1}) = H^1(\Sigma, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(\widehat{M})).$$

5.4. Étape 3

L'action du groupe Σ sur l'espace $H_{\mathbf{m}}$ s'écrit $\sigma : h \in H_{\mathbf{m}} \mapsto h \circ \sigma^{-1} \in H_{\mathbf{m}}$. On note $\mathcal{C}_{\mathbf{m}}$ le sous-espace de $H_{\mathbf{m}}$ engendré par les éléments de la forme $h - h \circ \sigma^{-1}$ avec h parcourant $H_{\mathbf{m}}$. On sait alors que $H^1(\Sigma, H_{\mathbf{m}}) = H_{\mathbf{m}}/\mathcal{C}_{\mathbf{m}}$. Le problème se ramène donc à résoudre l'équation cohomologique :

Étant donnée $g \in H_{\mathbf{m}}$, existe-t-il $h \in H_{\mathbf{m}}$ telle que $h - h \circ \sigma^{-1} = g$?

Une condition nécessaire pour que cette équation ait une solution est que $\langle \mu, g \rangle = 0$ pour toute fonctionnelle σ -invariante μ sur $H_{\mathbf{m}}$. Écrivons h et g sous forme de séries :

$$h(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{B^j \mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{v} \langle B^j \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t} e_{B^j \mathbf{m}}(x) \quad \text{et} \quad g(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_{B^j \mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{v} \langle B^j \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t} e_{B^j \mathbf{m}}(x)$$

où les $h_{\mathbf{m}}$ et $g_{\mathbf{m}}$ sont des constantes complexes devant satisfaire la condition de convergence (condition (IV.4)) :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |h_{B^j \mathbf{m}}| \cdot |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) < +\infty$$

et :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |g_{B^j \mathbf{m}}| \cdot |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) < +\infty$$

pour tous $\ell, d \in \mathbb{N}$ et tout $R \in \mathbb{R}^*$. On sait que les $g_{\mathbf{m}}$ satisfont la condition (IV.4) (c'est la donnée du problème) et toute solution formelle h qu'on trouvera doit aussi satisfaire cette condition pour être une vraie solution de l'équation cohomologique susmentionnée. Cette équation est équivalente au système :

$$(IV.5) \quad h_{\mathbf{p}} - h_{B\mathbf{p}} = g_{\mathbf{p}} \quad \text{pour } \mathbf{p} \in \{B^j \mathbf{m} : j \in \mathbb{Z}\}.$$

Si $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, $g_0 = 0$ nécessairement ; ceci n'est rien d'autre que la condition $\mathcal{L}_0(g) = 0$.
Ce qui donne $H^1(\Sigma, H_0) = \ker \{\delta : H_0 \longrightarrow H_0\} = \mathbb{C}$.

Supposons $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$. On a deux solutions formelles :

$$h_{\mathbf{p}} = \sum_{j=0}^{\infty} g_{B^j \mathbf{p}} \quad \text{et} \quad h_{\mathbf{p}} = - \sum_{j=1}^{\infty} g_{B^{-j} \mathbf{p}}.$$

5.5. Étape 4 : point ii)

Comme δ est injectif, on doit avoir nécessairement $\sum_{j \in \mathbb{Z}} g_{B^j \mathbf{p}} = 0$ i.e. g doit vérifier $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}(g) = 0$ c'est-à-dire g doit être un élément de l'espace $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$. Cette condition est donc nécessaire et nous allons montrer qu'elle est suffisante.

• Pour ce faire, nous aurons besoin de choisir l'ensemble $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ bien adapté à notre problème. Il est donné par le :

Lemme [DE]. *On peut choisir l'ensemble Λ de telle sorte que pour $\mathbf{m} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$, les suites $(|B^j \mathbf{m}|)$ et $(|B^{-j} \mathbf{m}|)$ (indexées par $j \geq 0$) soient strictement croissantes et que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on ait :*

$$(IV.6) \quad |B^j \mathbf{m}|^2 \geq (|j| + 1).$$

Démonstration. Soient $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_q < 1 < \lambda_{q+1} \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de B (ce sont les mêmes que celles de A) et $(e_1, \dots, e_q, e_{q+1}, \dots, e_n)$ une base normale propre. On note E_- et E_+ les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n engendrés respectivement par les systèmes de vecteurs propres $\{e_1, \dots, e_q\}$ et $\{e_{q+1}, \dots, e_n\}$. Nous avons donc une décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = E_- \oplus E_+$ et tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$u = \sum_{i=1}^q a_i e_i + \sum_{j=q+1}^n b_j e_j.$$

où les a_i et b_j sont des réels. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ nous avons :

$$B^k(u) = \sum_{i=1}^q \lambda_i^k a_i e_i + \sum_{j=q+1}^n \lambda_j^k b_j e_j.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On note E_-^ε et E_+^ε les ε -voisinages respectivement de E_- et E_+ . Il existe alors $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq k_0 \implies B^k(u) \in E_+^\varepsilon \quad \text{et} \quad k \leq -k_0 \implies B^k(u) \in E_-^\varepsilon.$$

Remarquons d'abord qu'aucun des éléments du réseau n'appartient à $E_- \cup E_+$. Comme toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de B sont strictement positives, on peut définir B^t (puissance $t^{\text{ème}}$ de B) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit z un élément non nul dans \mathbb{R}^n . L'orbite $\{B^k(z) : k \in \mathbb{Z}\}$ est contenue dans la courbe différentiable $t \in \mathbb{R} \mapsto B^t(z) \in \mathbb{R}^n$. Dans la base propre (e_1, \dots, e_n) , le carré de sa norme admet pour paramétrage la fonction différentiable $\rho : t \in \mathbb{R} \mapsto |D^t|^2 = \langle D^t(z), D^t(z) \rangle \in \mathbb{R}_+$ (D est la matrice des valeurs propres). Cette fonction a pour dérivée seconde $\rho''(t) = 4\langle (\ln D) \cdot D^t(z), (\ln D) \cdot D^t(z) \rangle$ (où $\ln D$ est la matrice diagonale dont les termes sont les logarithmes des valeurs propres de A donc de B) ; c'est une fonction strictement positive. Donc sa dérivée $\rho'(t)$ est une fonction strictement croissante. Quand t est proche de $-\infty$, $B^t(z)$ est voisin de E_- et quand t est proche de $+\infty$, B^t est voisin de E_+ ; le point $B^t(z)$ passe par une position en laquelle $\rho(t)$ est minimale. En somme, la norme du vecteur $B^t(z)$ admet un minimum en un certain t_0 , elle est décroissante sur $] -\infty, t_0[$ et croissante sur $]t_0, +\infty[$. Si on choisit un élément z de $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, on trouve un unique \mathbf{m} dans l'orbite de z qui réalise le minimum de la famille $\{|B^k(z)| : k \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble Σ sera alors constitué de ces \mathbf{m} et de 0 .

Soit $\mathbf{m} \in \Sigma \setminus \{0\}$. Alors les suites $(|B^k(\mathbf{m})|)$ et $(|B^{-k}(\mathbf{m})|)$ (indexées par $k \geq 0$) sont strictement croissantes. Comme $|B^k(\mathbf{m})|^2$ est un entier strictement positif pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a forcément $|B^k(\mathbf{m})|^2 \geq (|k| + 1)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

5.6. Étape 5 : les estimations

• Pour démontrer que les $h_{\mathbf{p}} = \sum_{j=0}^{\infty} g_{B^j \mathbf{p}}$ ou $h_{\mathbf{p}} = - \sum_{j=-1}^{-\infty} g_{B^j \mathbf{p}}$ répondent à ce que nous cherchons, il reste à vérifier la convergence de la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |h_{B^j \mathbf{m}}| \cdot |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R)$ pour tout $R \in \mathbb{N}^*$ et tous $\ell, d \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |h_{B^j \mathbf{m}}| \\ &= \sum_{j \geq 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |h_{B^j \mathbf{m}}| + \sum_{j < 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |h_{B^j \mathbf{m}}|. \end{aligned}$$

Posons :

$$S_+ = \sum_{j \geq 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |h_{B^j \mathbf{m}}|$$

et

$$S_- = \sum_{j < 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |h_{B^j \mathbf{m}}|.$$

On a :

$$\begin{aligned} S_+ &= \sum_{j \geq 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) \left| \sum_{k=0}^{\infty} g_{B^{j+k} \mathbf{m}} \right| \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^j |B^k \mathbf{m}|^d \rho_{B^k \mathbf{m}}(\ell, R) \right) |g_{B^j \mathbf{m}}|. \end{aligned}$$

Rappelons que $|\mathbf{m}|^d \leq |B\mathbf{m}|^d \leq \dots \leq |B^{j-1}\mathbf{m}|^d \leq |B^j \mathbf{m}|^d$ et que $|B^j \mathbf{m}|^2 \geq j+1$. D'autre part :

$$\rho_{B^k \mathbf{m}}(\ell, R) = \sup_{t \in C_R} \left| \lambda^\ell e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle B^k \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t} \right| = \lambda^\ell e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle B^k \mathbf{m}, v \rangle \lambda^{-R}} = \lambda^\ell e^{-\frac{2\pi}{\nu} \lambda^k \langle \mathbf{m}, v \rangle \lambda^{-R}}$$

et donc :

$$\rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) \geq \rho_{B\mathbf{m}}(\ell, R) \geq \dots \geq \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R).$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} S_+ &\leq \rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) \sum_{j \geq 0} (j+1) |B^j \mathbf{m}|^d \cdot |g_{B^j \mathbf{m}}| \\ &\leq \rho_{\mathbf{m}}(\ell, R) \sum_{j \geq 0} |B^j \mathbf{m}|^{d+2} \cdot |g_{B^j \mathbf{p}}| \quad (\text{par l'inégalité (IV.6)}) \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que la donnée g est dans $\mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$. Nous avons donc montré que la série S_+ converge.

Pour démontrer la convergence de la série $S_- = \sum_{j < 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |h_{B^j \mathbf{m}}|$, on remplace cette fois-ci le terme $h_{B^j \mathbf{m}}$ par l'expression $h_{B^j \mathbf{m}} = - \sum_{k=-1}^{-\infty} g_{B^{j+k} \mathbf{m}}$ et on procède exactement par le même type de majorations que pour la série S_+ .

On vient donc de montrer que l'image de l'opérateur $\delta : h \in H_{\mathbf{m}} \longrightarrow (h - h \circ \sigma) \in H_{\mathbf{m}}$ est égale au noyau de la fonctionnelle $\mathcal{L}_{\mathbf{m}} : H_{\mathbf{m}} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie précédemment. On en déduit que l'espace $H^1(\Sigma, H_{\mathbf{m}})$ est isomorphe à \mathbb{C} (car la fonctionnelle $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ est non nulle). Comme l'inclusion naturelle $H_{\mathbf{m}} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$ induit une injection de $H^1(\Sigma, H_{\mathbf{m}})$ dans $H^1(\Sigma, \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})) = H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}_A^{n+1})$, l'espace $H_{\mathcal{F}}^{0,1}(\mathbb{T}_A^{n+1})$ "contient" tous les espaces $H^1(\Sigma, H_{\mathbf{m}})$ (avec $\mathbf{m} \in \Lambda_+$) qui sont transverses l'un à l'autre ; il est donc de dimension infinie.

5.7. Étape 6 : point iii)

Soit g une fonction dans $H_{\mathbf{m}}^-$; il existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tel que g soit de la forme :

$$g(x, t) = \sum_{j \geq j_0} g_{B^j \mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle B^j \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t} e_{B^j \mathbf{m}}(x).$$

Les coefficients $h_{B^j \mathbf{m}}$ de la solution $h = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{B^j \mathbf{m}} e^{-\frac{2\pi}{\nu} \langle B^j \mathbf{m}, v \rangle \lambda^t} e_{\mathbf{m}}(x)$ dans $H_{\mathbf{m}}$ de l'équation cohomologique $h - h \circ \sigma^{-1} = g$ sont donnés par la formule $h_{B^j \mathbf{m}} = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_{B^{j+k} \mathbf{m}}$.

La quantité $-\sum_{k < 0} g_{B^{j+k} \mathbf{m}}$ ne convient plus car la série en question n'est plus toujours convergente (dû au comportement pour $j \rightarrow -\infty$ de la quantité $\Delta(B^j \mathbf{m}, t)$ qui n'oblige plus les coefficients $g_{B^j \mathbf{m}}$ à avoir la décroissance qu'il faut). Comme ce qu'on a fait à l'étape 5, on doit montrer que cette solution formelle est en fait une vraie solution *i.e.* on doit établir la convergence de la série :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |h_{B^j \mathbf{m}}| \cdot |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R)$$

pour tout $R \in \mathbb{N}^*$ et tous $\ell, d \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |h_{B^j \mathbf{m}}| \\ &= \sum_{j \geq 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |h_{B^j \mathbf{m}}| + \sum_{j < 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |h_{B^j \mathbf{m}}|. \end{aligned}$$

Posons :

$$S_+ = \sum_{j \geq 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |h_{B^j \mathbf{m}}|$$

et

$$S_- = \sum_{j < 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |h_{B^j \mathbf{m}}|.$$

On a :

$$\begin{aligned} S_+ &= \sum_{j \geq 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) \left| \sum_{k=0}^{\infty} g_{B^{j+k} \mathbf{m}} \right| \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^j |B^k \mathbf{m}|^d \rho_{B^k \mathbf{m}}(\ell, R) \right) |g_{B^j \mathbf{m}}| \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^j |B^k \mathbf{m}|^d \right) \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |g_{B^j \mathbf{m}}| \\ &\leq \sum_{j \geq 0} (j+1) |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |g_{B^j \mathbf{m}}| \\ &\leq \sum_{j \geq 0} |B^j \mathbf{m}|^{d+2} \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) |g_{B^j \mathbf{m}}| \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Occupons-nous maintenant de la somme S_- . On supposera, pour la commodité de l'écriture, que l'indice j_0 est strictement négatif (ceci ne fait perdre aucune généralité). On a alors :

$$\begin{aligned} S_- &= \sum_{j < 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) \left| \sum_{k=0}^{\infty} g_{B^{j+k} \mathbf{m}} \right| \\ &\leq \sum_{j_0 \leq k \leq -1} \left(\sum_{j \leq k} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) \right) |g_{B^k \mathbf{m}}| \\ &\quad + \left(\sum_{j \leq 0} |B^j \mathbf{m}|^d \rho_{B^j \mathbf{m}}(\ell, R) \right) \left(\sum_{k \geq 0} |g_{B^k \mathbf{m}}| \right). \end{aligned}$$

Pour des raisons similaires à celles qui ont été évoquées précédemment, toutes les séries du terme de droite convergent. Par suite la fonction h est bien dans $H_{\mathbf{m}}$.

5.8. Étape 7 : point iv)

Nous avons montré que l'espace $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ intersection de $H_{\mathbf{m}}$ avec le noyau de la fonctionnelle analytique $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ (pour $\mathbf{m} \in \Lambda_+ \cup \{\mathbf{0}\}$) ainsi que l'espace $H_{\mathbf{m}}^-$ (pour $\mathbf{m} \in \Lambda_-$) sont dans l'image de l'opérateur $\delta : h \in \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) \rightarrow (h - h \circ \sigma^{-1}) \in \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M})$. Il n'est pas difficile de montrer que le sous-espace qu'ils engendrent (algébriquement) a pour adhérence :

$$\mathcal{E} = \bigcap_{\mathbf{m} \in \Lambda_+ \cup \{\mathbf{0}\}} \text{noyau}(\mathcal{L}_{\mathbf{m}}).$$

Ceci montre clairement que l'espace des fonctionnelles $\widehat{\mathcal{F}}$ -analytiques σ -invariantes sur $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ (qui est le dual de $\overline{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}^{0,1}(\mathbb{T}_A^{n+1})$) est engendré par les $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ avec $\mathbf{m} \in \Lambda_+ \cup \{\mathbf{0}\}$. On a par conséquent :

$$\overline{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}^{0,1}(\mathbb{T}_A^{n+1}) = \mathcal{H}_{\widehat{\mathcal{F}}}(\widehat{M}) / \mathcal{E}.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème. ◇

Références

- [BT] BOTT, R. & TU, L. *Differential Forms in Algebraic Topology*. GTM Vol. 82, Springer-Verlag (1982).
- [Bro] BROWN, K.S. *Cohomology of Groups*. GTM Vol. 87, Springer-Verlag (1982).
- [CL] CŒURÉ, G. & LŒB, J.-J. *A counterexample to the Serre conjecture with a bounded domain of \mathbb{C}^2 as fiber*. Ann. of Math. (2) 122, (1985), 329-334.
- [DO] DEDERICH, K. & OHSAWA, T. *On the parameter dependance of solutions to the $\bar{\partial}$ -equation*. Math. Ann. 289, (1991), 581-588.
- [DE] DEHGHAN-NEZHAD, A. & EL KACIMI ALAOUI, A. *Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov*. Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 54, N°4 (October 2007), 1105-1134.
- [Dem1] DEMAILLY, J.-P. *Complex Analytic and Differential Geometry*.
<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>
- [Dem2] DEMAILLY, J.-P. *Un exemple de fibré holomorphe non de Stein à fibre \mathbb{C}^2 ayant pour base le disque ou le plan*. Inven. Math. 48 (1978), 293-302.
- [Ek1] EL KACIMI ALAOUI, A. *Le problème du $\bar{\partial}$ le long des feuilles*. Prépublication de l'Université de Valenciennes (Mai 2007, en cours de révision).
- [Ek2] EL KACIMI ALAOUI, A. *The $\bar{\partial}$ along the leaves and Guichard's Theorem for a simple complex foliation*. Prépublication de l'Université de Valenciennes (December 2007).
- [EN] EL KACIMI ALAOUI, A. & NICOLAU, M. *A class of C^∞ -stable foliations*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 13, (1993), 697-704.
- [ES] EL KACIMI ALAOUI, A. & SLIMÈNE, J. *Cohomologie de Dolbeault le long des feuilles de certains feuilletages complexes*. Prépublication de l'Université de Valenciennes (Avril 2008).
- [For] FORSTER, O. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer Verlag, GTM 81(1981).
- [FZ] FERES, R. & ZEGHIB, A. *Leafwise holomorphic functions*. Proc. AMS Vol.131 Number 6, (2003) 1717-1725.
- [Gom] GODEMENT, R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris (1959).
- [God] GODBILLON, C. *Feuilletages. Études Géométriques*. Birkhäuser, (1991). Progress in Mathematics 98.

- [Gro] GROTHENDIECK, A. *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tohoku Math. J. Vol. 9 (1957) 119-221.
- [GT] GIGANTE, G. & TOMASSINI, G. *Foliations with complex leaves*. Diff. Geo. and its Applications 5, (1995) 33-49.
- [Hör] HÖRMANDER, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. D.Van Nostrand Compagny. Inc. (1966).
- [Mar] MARTINEAU, A. *Sur les fonctionnelles analytiques et la la transformation de Fourier-Borel*. J.Analyse Math. 9, (1963), 1-164.
- [MV] MEERSSEMAN, L.& VERJOVSKY, A. *A smooth foliation of the 5-sphere by complex surfaces*. Annals of Math.156,(2002), 915-930.
- [MK] MORROW, J. & KODAIRA, K. *Complex Manifolds*. Athena Series, Selected Topics in Mathematics, (1971).
- [Sch] SCHMIDT, W.M. *Diophantine approximation*. Lecture Notes in Math. 785,(1980).
- [Sko] SKODA, H. *Fibrés holomorphes à base et à fibre de Stein*. C.R. Acad. Sc. Paris Série A, (1977), 1159-1162
- [Sli] SLIMÈNE, J. *Deux exemples de calcul explicite de cohomologie de Dolbeault feuilletée*. Proyecciones Vol. 27, N^o 1, pp. 63 - 80, May 2008.
- [War] WARNER, F.W. : *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. GTM 94, Springer-Verlag (1983).
- [Wel] WELLS, R.O. : *Differential Analysis on Complex Manifolds*. GTM 65, Springer-Verlag (1972).

Résumé

La cohomologie de Dolbeault feuilletée mesure l'obstruction à la résolution du problème du $\bar{\partial}$ le long des feuilles d'un feuilletage complexe. Dans ce travail on étudie cette cohomologie en utilisant (le plus souvent) des méthodes de cohomologie de groupes discrets sur certains exemples assez significatifs : i) un feuilletage complexe linéaire de dimension 1 sur le tore \mathbb{T}^n ; ii) une submersion en courbes elliptiques ; iii) le feuilletage affine complexe (de Reeb) de dimension 2 sur la variété de Hopf $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^1$; iv) le feuilletage complexe sur le tore hyperbolique \mathbb{T}_A^{n+1} obtenu par une action localement libre du groupe affine réel (groupe de Lie des transformations affines qui préservent l'orientation de la droite réelle) où $A \in \text{SL}(n, \mathbb{Z})$ est hyperbolique diagonalisable ayant toutes ses valeurs propres réelles positives.

Discipline

Mathématiques

Mots-Clés

Feuilletage complexe, \mathcal{F} -holomorphie, le problème du $\bar{\partial}$ le long des feuilles, cohomologie de Dolbeault feuilletée, fonctionnelles \mathcal{F} -analytiques invariantes

Adresses des Laboratoires

LAMAV

Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

Le Mont Houy

59313 Valenciennes Cedex 9 – France

Unité de Recherche "Analyse complexe
et fonctions spéciales" 02/UR/1501

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences de Monastir

Boulevard de l'Environnement

5919 Monastir – Tunisie

