



**HAL**  
open science

# Analyse et synthèse des modèles non linéaires périodiques

Hichem Kerkeni

► **To cite this version:**

Hichem Kerkeni. Analyse et synthèse des modèles non linéaires périodiques. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2011. Français. NNT : 2011VALE0007. tel-03012519

**HAL Id: tel-03012519**

**<https://uphf.hal.science/tel-03012519v1>**

Submitted on 18 Nov 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

2011 VALE 0007



N° d'ordre : 11/14

# THÈSE

Présentée à

L'UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES  
ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR D'UNIVERSITÉ**

Spécialité

Automatique

Par

**Hichem KERKENI**

Ingénieur Maître ISTV-UVHC

Analyse et synthèse des modèles non linéaires  
périodiques: Application au moteur à allumage  
commandé

À soutenir le 20 mai 2011 devant la commission d'examen :

|    |                |             |                                  |                |
|----|----------------|-------------|----------------------------------|----------------|
| M. | Yann           | CHAMAILLARD | Pr. à l'université d'Orléans     | (examineur)    |
| M. | Jamal          | DAAFOUZ     | Pr., à l'ENSEM de Nancy          | (rapporteur)   |
| M. | John-theodores | ECONOMOU    | Dr., Université de Cranfield     | (examineur)    |
| M. | Thierry- Marie | GUERRA      | Pr., Université de Valenciennes  | (directeur)    |
| M. | Hak Keung      | LAM         | Dr- à King's college London      | (examineur)    |
| M. | Jimmy          | LAUBER      | MdC., Université de Valenciennes | (co-encadrant) |
| M. | Olivier        | SENAME      | Pr., à l'INPG de Grenoble        | (rapporteur)   |



# THÈSE

Présentée à

L'UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES  
ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR D'UNIVERSITÉ**

Spécialité

Automatique

Par

**Hichem KERKENI**

Ingénieur Maître ISTV-UVHC



Analyse et synthèse des modèles non linéaires  
périodiques: Application au moteur à allumage  
commandé

À soutenir le 20 mai 2011 devant la commission d'examen :

|    |                |             |                                  |                |
|----|----------------|-------------|----------------------------------|----------------|
| M. | Yann           | CHAMAILLARD | Pr. à l'université d'Orléans     | (examineur)    |
| M. | Jamal          | DAAFOUZ     | Pr., à l'ENSEM de Nancy          | (rapporteur)   |
| M. | John-theodores | ECONOMOU    | Dr., Université de Cranfield     | (examineur)    |
| M. | Thierry- Marie | GUERRA      | Pr., Université de Valenciennes  | (directeur)    |
| M. | Hak Keung      | LAM         | Dr- à King's college London      | (examineur)    |
| M. | Jimmy          | LAUBER      | MdC., Université de Valenciennes | (co-encadrant) |
| M. | Olivier        | SENAME      | Pr., à l'INPG de Grenoble        | (rapporteur)   |

## Sommaire

|  |           |
|--|-----------|
| <b><i>Sommaire</i></b> .....   | <b>3</b>  |
| <b><i>Nomenclature</i></b> .....   | <b>7</b>  |
| <b><i>Introduction Générale</i></b> .....  | <b>11</b> |
| <b><i>Enjeux et Motivations</i></b> .....  | <b>15</b> |
| <b><i>Présentation de la Partie I</i></b> .....  | <b>23</b> |
| <b><i>Chapitre I. Moteur à allumage commandé : Généralités, Modèles dynamiques et Structures de commande</i></b> ..... | <b>24</b> |
| <b>I.1. Introduction</b> .....   | <b>25</b> |
| <b>I.2. Moteur à allumage commandé : MAC</b> .....   | <b>26</b> |
| <b>I.3. MAC : Architectures et Modèles dynamiques orientés contrôle</b> .....  | <b>40</b> |
| <b>I.4. Conclusion</b> .....   | <b>63</b> |
| <b><i>Chapitre II. Modèles flous discrets de type Takagi-Sugeno (TS)</i></b> .   | <b>65</b> |
| <b>II.1. Introduction</b> .....  | <b>66</b> |
| <b>II.2. Définition et problématique</b> .....   | <b>66</b> |
| <b>II.3. Stabilité et stabilisation des modèles TS discrets</b> .....  | <b>72</b> |
| <b>II.4. Discussion sur le conservatisme des résultats obtenus</b> .....   | <b>79</b> |
| <b>II.5. Conclusion</b> .....  | <b>84</b> |
| <b><i>Présentation de la Partie II</i></b> .....   | <b>85</b> |

***Chapitre III. Réduction du conservatisme des Modèles TS à temps discret : Fonction de Lyapunov retardée..... 86***

|  |     |
|--|-----|
| III.1. Introduction .....  | 87  |
| III.2. Nouvelles conditions de Stabilisation des Modèles TS discret..... | 89  |
| III.3. Retour de sortie avec un observateur de modèles TS discrets ..... | 94  |
| III.4. Discussion des résultats.....                                     | 98  |
| III.5. Généralisation.....   | 101 |
| III.6. Conclusion.....   | 105 |

***Chapitre IV. Modèles non linéaires discrets à coefficient périodiques : Analyse et Synthèse..... 107***

|  |     |
|--|-----|
| IV.1. Introduction .....   | 108 |
| IV.2. Analyse des systèmes non linéaires à coefficient périodiques.....                    | 108 |
| IV.3. Synthèse de lois de commande et d'observateurs pour les modèles TS périodiques ..... | 110 |
| IV.4. Performances des modèles TS périodiques .....  | 119 |
| IV.5. Modèles TS discrets périodiques à retard .....                                       | 121 |
| IV.6. Conclusion .....   | 127 |

***Présentation de la Partie III..... 129***

***Chapitre V. Estimation des variables caractéristiques par cylindre  
131***

|  |     |
|--|-----|
| V.1. Introduction.....   | 132 |
| V.2. Estimation du débit individuel d'air frais pour chaque cylindre .....           | 132 |
| V.3. Estimation du débit individuel des gaz d'échappement pour chaque cylindre ..... | 146 |
| V.4. Estimation des fractions d'air individuelle à l'échappement .....               | 152 |

|   |                   |
|---|-------------------|
| V.5. Conclusion.....  | 161               |
| <b><i>Chapitre VI. Perspectives.....</i></b>                      | <b><i>163</i></b> |
| VI.1. Introduction .....  | 164               |
| VI.2. Equilibrage des cylindres par commande des injecteurs ..... | 164               |
| VI.3. Estimation des couples de combustion.....                   | 167               |
| <b><i>Conclusion Générale .....</i></b>                           | <b><i>170</i></b> |
| <b><i>Références .....</i></b>                                    | <b><i>173</i></b> |
| <b><i>Références personnelles .....</i></b>                       | <b><i>193</i></b> |
| <b><i>ANNEXES.....</i></b>  | <b><i>195</i></b> |
| ANNEXE A. Généralités sur les moteurs Thermiques .....            | 196               |
| ANNEXE B. Généralités sus les systèmes périodiques linéaires..... | 202               |
| ANNEXE C. Moyens Expérimentaux .....                              | 219               |
| ANNEXE D. Modèles utilisés .....                                  | 222               |



## Nomenclature

### Acronymes

|                 |  |
|-----------------|--|
| MAC             | Moteur à allumage commandé   |
| CO <sub>2</sub> | Dioxyde de carbone,  |
| CO              | Monoxyde de Carbone,   |
| HC              | Hydrocarbures imbrûlés   |
| NO <sub>x</sub> | Oxyde d'Azote  |
| AA              | Avance à l'allumage  |
| AC              | Allumage Commandé  |
| BF              | Basse Fréquence (Modèle)   |
| HF              | Haute Fréquence (Modèle)   |
| MIMO            | Plusieurs entrées et Plusieurs sorties (Modèle), (Multiple Inputs, Multiple Outputs) |
| MISO            | Plusieurs entrées et une seule sortie (Modèle), (Multiple Input, Single Output)      |
| SISO            | Monovariabale (Single Input, Single Output)  |
| PMH             | Point Mort haut  |
| PMB             | Point Mort Bas   |
| EGR             | Recirculation externe des gaz d'échappement (Exhaust Gaz Recirculation)              |
| GES             | Gaz à effet de Serre   |
| PID             | Proportionnel, Intégral, Dérivée   |
| VCT             | Déphaseurs d'arbre à cames (Variable Camshaft Timing)                                |
| PM              | Particules (Particulate Matter)  |
| AOA             | Avance à l'Ouverture d'Admission   |
| RFA             | Retard à la Fermeture d'Admission  |
| AOE             | Avance à l'Ouverture d'Echappement   |
| RFE             | Retard à la Fermeture d'Echappement  |
| FAP             | Filtre à Particules  |
| SCR             | Réduction Catalytique Sélective  |
| HCCI            | Combustion Homogène Diesel (Homogeneous Combustion Compression Ignition)             |
| TWC             | Pot Catalytique ou convertisseur catalytique 3 voies (Three Way Catalytic converter) |

## Nomenclature

### Indices

|      |                               |
|------|-------------------------------|
| air  | Air frais                     |
| amb  | ambient                       |
| m    | moteur                        |
| comb | combustion                    |
| frot | frottement                    |
| biel | bielle                        |
| cyl  | cylindre                      |
| i    | Indiqué (e) ou i-ème cylindre |
| pist | piston                        |
| inj  | injecteur                     |
| adm  | admission                     |
| ech  | échappement                   |
| pap  | papillon (throttle)           |
| sa   | Soupape d'admission           |
| se   | Soupape d'échappement         |
| pc   | Pot catalytique               |

### Symboles

|              |           |  |
|--------------|-----------|--|
| $\beta_{bm}$ | [-]       | Rapport Bielle- Manivelle              |
| $\beta_{cd}$ | [-]       | Rapport course diamètre                |
| $\beta_{mb}$ | [-]       | Rapport Manivelle Bielle               |
| $D$          | [m]       | Diamètre de l'alésage                  |
| $L$          | [m]       | Course du piston                       |
| $l$          | [m]       | Longueur de la bielle                  |
| $n_{cyl}$    | [-]       | Nombre des cylindres                   |
| $r$          | [m]       | Rayon Vilebrequin                      |
| $r_c$        | [-]       | Rapport de compression volumétrique    |
| $S$          | [ $m^2$ ] | Surface                                |
| $V$          | [ $m^3$ ] | Volume                                 |
| $V_c$        | [ $m^3$ ] | Cylindrée totale                       |
| $V_d$        | [ $m^3$ ] | Volume déplacé (ou cylindrée unitaire) |
| $V_m$        | [ $m^3$ ] | Volume mort                            |

## Nomenclature

|                 |                |  |
|-----------------|----------------|--|
| $V_t$           | [ $m^3$ ]      | Volume total de la chambre de combustion         |
| $\omega$        | [ $rad/s$ ]    | Vitesse angulaire                                |
| $\theta$        | [ $rad$ ]      | Position angulaire                               |
| t               | [ $s, -$ ]     | Temps [continu, discret]                         |
| $J$             | [ $kg.m^2$ ]   | Moment d'Inertie                                 |
| $m$             | [ $kg$ ]       | Masse  |
| $N_e$           | [ $tr/min$ ]   | Régime du moteur                                 |
| $P$             | [ $Pa$ ]       | Pression   |
| $T$             | [ $K$ ]        | Température                                      |
| $CD_{in}$       | [-]            | Coefficient du décharge du débit à l'admission   |
| $CD_{exh}$      | [-]            | Coefficient du décharge du débit à l'échappement |
| $A_r$           | [ $m^2$ ]      | Aire de référence                                |
| $D_{pap}$       | [ $Kg/s$ ]     | Débit massique d'air traversant le papillon      |
| $D_{cyl}$       | [ $Kg/s$ ]     | Débit massique d'air entrant dans le cylindre    |
| $D_{exh}$       | [ $Kg/s$ ]     | Débit massique d'air sortant de cylindre         |
| $D_{pc}$        | [ $Kg/s$ ]     | Débit massique au niveau du pot catalytique      |
| $\eta$          | [-]            | Rendement global du moteur                       |
| $\eta_{vol}$    | [-]            | Rendement volumétrique                           |
| PME             | [ $Pa$ ]       | Pression Moyenne effective                       |
| R               | [ $J/mol.K$ ]  | Constante Universelle des gaz                    |
| r               | [ $J/(kg.K)$ ] | Constante massique du gaz                        |
| $\lambda_s$     | [-]            | Rapport air essence stœchiométrique              |
| $\lambda_{exh}$ | [-]            | Richesse à l'échappement                         |
| $F_{er}$        | [-]            | Fraction d'air au niveau du pipe d'échappement   |
| $F_{exh}$       | [-]            | Fraction d'air globale à l'échappement           |
| $C_p$           | [ $J/(kg.K)$ ] | Chaleur massique à pression constante            |
| $C_v$           | [ $J/(kg.K)$ ] | Chaleur massique à volume constant               |
| $\gamma$        | [-]            | Rapport des chaleurs spécifiques                 |



## Introduction Générale

Les enjeux énergétiques et environnementaux sont aujourd'hui des préoccupations majeures au niveau international, en particulier dans le domaine du transport. En effet, des contraintes de plus en plus importantes imposées aux constructeurs automobiles au travers de normes antipollution traduisent cette volonté de rendre plus « économes » en terme de consommation de carburant et plus « propres » les véhicules.

Cet objectif peut être réalisé en passant par une meilleure gestion des moteurs thermiques qui restent la principale source de propulsion des véhicules actuels et à venir. Jusqu'à présent, les lois de commande développées dans l'industrie automobile restent majoritairement basées sur des cartographies ou au mieux sur des modèles moyens qui représentent le comportement statique ou moyen du moteur.

La volonté persistante de diminuer les polluants et d'augmenter les performances du moteur a suscité la recherche de techniques de contrôle et de combustion de plus en plus sophistiquées. Il faut pouvoir *maîtriser le comportement au niveau des cylindres* pour améliorer les performances.

De nos jours, les stratégies de régulation même évoluées supposent que les comportements des cylindres sont identiques alors que leur contribution au mélange n'est pas forcément équivalente. Une gestion indépendante de chaque cylindre, puisqu'au moins un actionneur par cylindre est disponible, serait plus judicieuse.

Notre ambition, au travers cette thèse, est de proposer un début de réponse à cette problématique. Des outils théoriques sont nécessaires pour mettre en œuvre des lois de commandes qui permettent de détecter et de traiter les disparités qui existent entre les différents cylindres dans le but de les équilibrer.

Pour pouvoir prendre en compte ces phénomènes rapides, il est nécessaire de s'intéresser à une modélisation à l'échelle du cycle moteur. En effet, les moteurs thermiques ont un *comportement cyclique* qui est dû à la séquence des événements dans et entre les cylindres. Cette périodicité s'avère être un point clé pour développer des commandes performantes. Seuls quelques travaux ont, jusqu'à présent, exploité cette particularité. Pourtant, bien qu'elle complique un peu le cadre théorique de la commande des systèmes, la

périodicité apporte de nouvelles issues à un certain nombre de problèmes réputés difficiles ou insolubles sous l'hypothèse classique de stationnarité. Ce paradigme est connu depuis déjà quelques décennies dans le domaine de l'aérospatiale, de l'aéronautique et des télécommunications [Bittanti & Colaneri 09].

De plus, le moteur thermique à allumage commandé représente un système complexe à modéliser et à contrôler. En effet, les modèles associés font intervenir plusieurs phénomènes tels que la mécanique, la thermodynamique, la chimie, etc... dont les dynamiques sont non linéaires, non stationnaires, à multiples entrées et multiples sorties (MIMO), à retards variables... Un *formalisme non linéaire* doit être adopté pour considérer ces modèles.

Un aspect original de la thèse est d'utiliser une classe de **modèles non linéaires périodiques discrets** en fonction d'une **variable angulaire** au lieu de la variable temporelle.

Dans ce contexte, la base des modèles est une représentation floue discrète de type Takagi-Sugeno (TS) [Takagi & Sugeno 85]. Elle permet d'obtenir une représentation exacte d'un modèle non linéaire et fournit des outils systématiques pour réaliser son analyse et sa synthèse.

Pour répondre à la problématique posée, la thèse est divisée en trois parties :

- Partie I : Moteur à allumage commandé, problèmes de contrôle et outils théoriques
- Partie II : Les modèles Takagi-Sugeno ; réduction de conservatisme et périodicité
- Partie III : Estimation et contrôle cylindre à cylindre d'un MAC.

La première partie propose un état de l'art des différents sujets traités dans ce travail sous la forme de deux chapitres. L'un est dédié à la description du moteur à allumage commandé, ces différents modèles et aux problématiques de contrôle, et l'autre concerne les modèles flous discrets de type Takagi-Sugeno (commande, observation, robustesse,...).

La deuxième partie présente les outils théoriques qui ont été développés dans le cadre de cette thèse. En premier lieu, le chapitre 3 propose une réduction du conservatisme des résultats existants dans la littérature en proposant une nouvelle fonction de Lyapunov pour les modèles TS discret. Puis, dans le chapitre 4, une extension de la commande et de l'observation des outils classiques pour les modèles TS discrets a été proposée dans le cas de coefficients périodiques.

La dernière partie concerne l'application pour la gestion du moteur thermique à allumage commandé. Le chapitre cinq montre l'utilisation des outils théoriques développés sur un des bancs d'essais moteur du LAMIH. En particulier, des estimateurs des débits instantanés des gaz entrants et sortants ainsi que de la richesse au niveau de chaque cylindre sont développés. Le dernier chapitre propose des perspectives sur le problème d'observation du couple moteur produit par chaque cylindre et sur l'utilisation des estimateurs obtenus précédemment dans le cadre de l'équilibrage des cylindres en couple et en richesse.



## Enjeux et Motivations

Le domaine du transport constitue une des préoccupations majeures au niveau international. La raison principale est que ce domaine est largement dépendant du pétrole et représente une demande fortement croissante. En effet, d'après l'Agence Internationale pour l'Energie (AIE) [[www.iea.org](http://www.iea.org)], en 2006, le domaine du transport mondial dépend à 95% du pétrole, représente 55% de la consommation totale de pétrole, 28% de la consommation d'énergie totale et suit une croissance annuelle moyenne d'environ 2% par an.

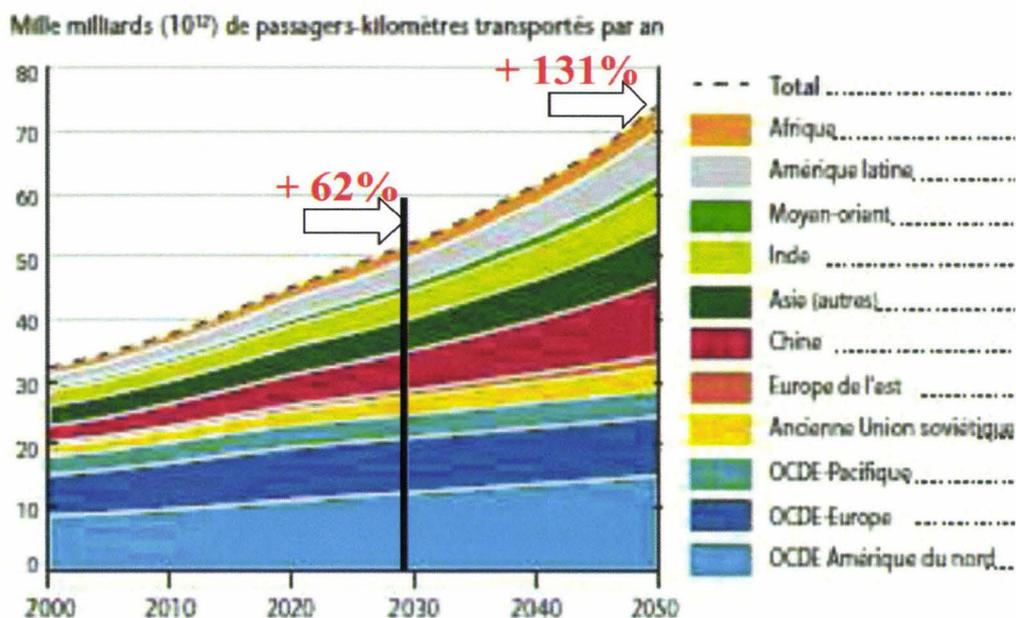


Figure 1.1 : Activités de Transport des personnes par région, [[www.wbcsd.org](http://www.wbcsd.org)]

En plus de cette forte dépendance au pétrole, la demande en transport est fortement croissante. Une étude prévisionnelle réalisée par le projet de mobilité durable en juillet 2004 [*Sustainable Mobility Project*, [www.wbcsd.org](http://www.wbcsd.org)] présente les évolutions en fonction du temps, dans les différents secteurs mondiaux, de la demande en transport des passagers et des marchandises. D'après cette étude, figure 1.1, la demande en transport des passagers va suivre une croissance de 64% d'ici 2030, essentiellement dans des régions du monde comme la Chine, l'Inde et l'Amérique de Nord. Cette demande pourrait atteindre 131% d'ici 2050.

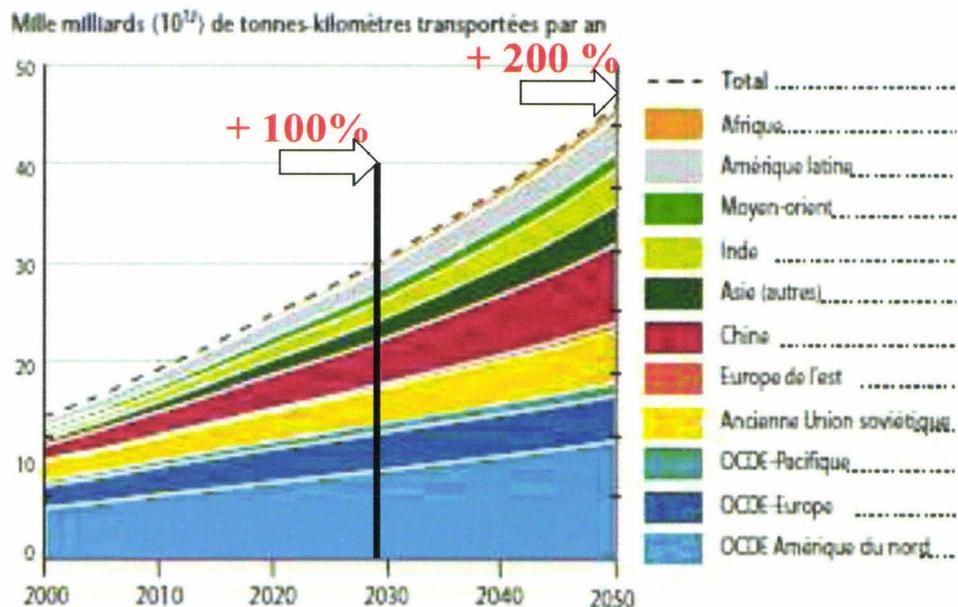


Figure 1.2 : Activités de transport routier et ferroviaire des marchandises par région, [www.wbcsd.org]

Comme le montre la figure 1.2, la prévision de la demande en transport des marchandises quant à elle, pourrait doubler d'ici 2030 et tripler d'ici 2050. Prenant en compte ces prévisions, la consommation en carburant et les émissions de gaz à effet de serre vont suivre des évolutions similaires.

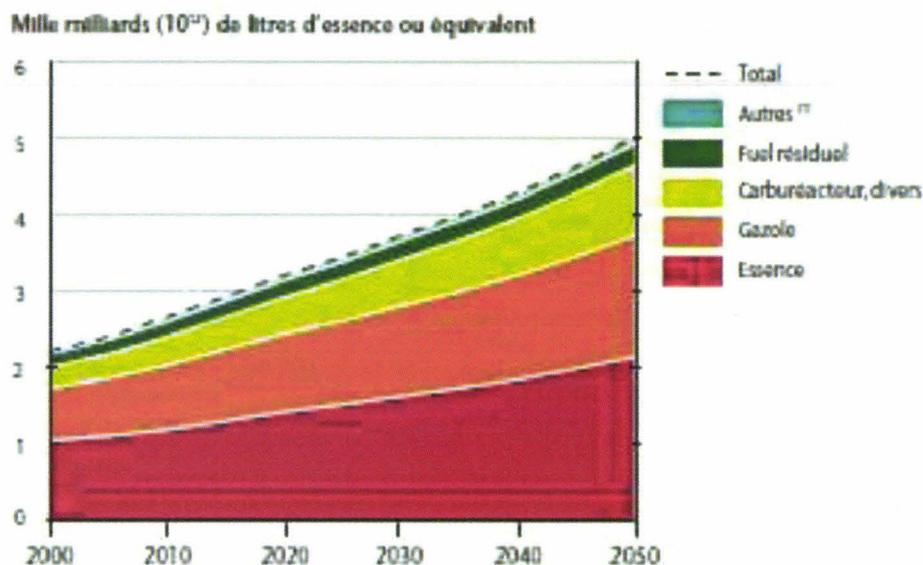


Figure 1.3 : consommation mondiale des carburants dans le secteur du transport, Pour tout types de transport, [www.wbcsd.org]

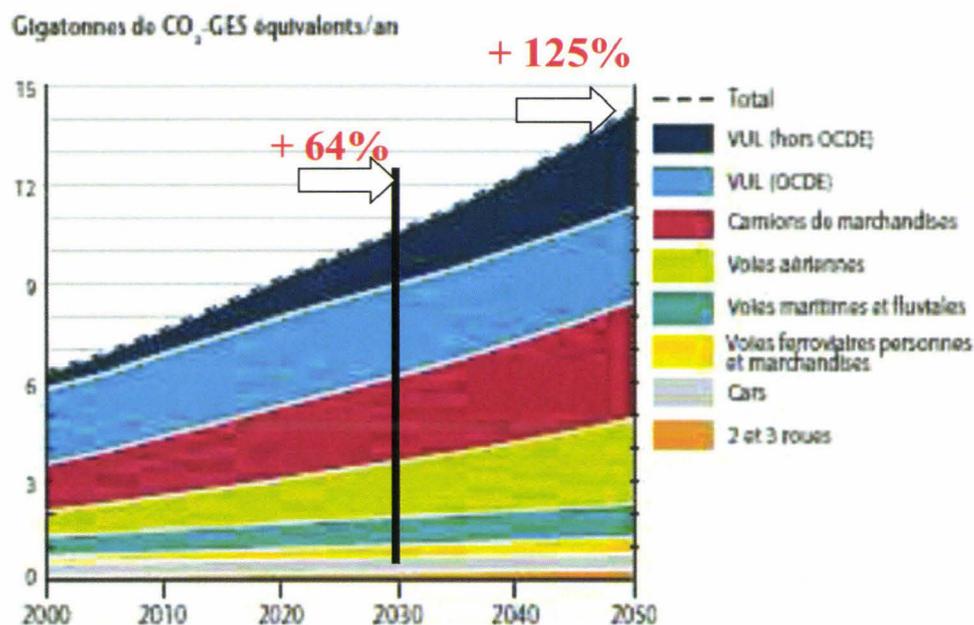


Figure 1.4: Projection WTW des émissions de  $CO_2$  par type de véhicule de 2000 à 2050, Modèle de référence (WTW : Well To Wheels, Emissions produite de Puits aux roues) [www.wbcsd.org]

L'augmentation prévue des émissions de gaz à effet de serre (figures 1.3 et 1.4) est estimée à 64 % d'ici 2030, et à 125% d'ici 2050.

Ces études font apparaître les enjeux liés au secteur des transports qui peuvent être répartis en 3 catégories :

- Diversification énergétique (biocarburant, électricité, hydrogène).
- Réduction des émissions de gaz à effet de serre et en particulier du  $CO_2$ .
- Réduction des émissions et des nuisances (HC, CO, NOx, particules, bruit, encombrement).

Des progrès notables ont été réalisés par les constructeurs et les laboratoires de recherche pour répondre à ces enjeux. Ces efforts se basent essentiellement sur des avancées technologiques [IFP].

#### - Diversification énergétique (Biocarburant, électricité, hydrogène).

Le fait d'être dépendant d'une seule source d'énergie, présente bien sûr, un élément de fragilité très important. Afin d'y remédier, il faut assurer une diversité énergétique utilisant par exemple les biocarburants, l'électricité ou l'hydrogène. Des applications ont commencé à

voir le jour utilisant ces types de source d'énergie, quelques exemples sont donnés dans les paragraphes suivants.

Parmi les véhicules fonctionnant au biocarburant comme le gaz naturel ou l'éthanol, on peut citer : la Ford Focus BioFlex, la SAAB 9/5 Berline 2.01 T BioPower et la Volvo Flexi30. Cette solution peut faire gagner jusqu'à 25 à 30 % d'émission de  $CO_2$  [Hassan 03], [Jankowski & al 03], son principal inconvénient reste un réseau de distribution insuffisant.

Les véhicules électriques à batterie ou à pile à combustible, où les motorisations utilisées sont dites « zéro Emission » du fait qu'ils ne génèrent pas, au moins de façon directe, d'émissions de  $CO_2$ , apparaissent comme d'excellentes solutions par rapport aux enjeux environnementaux. Peu de véhicules électriques sont commercialisés même si l'offre va fortement augmenter dans les années à venir, on peut tout de même citer, la Chevrolet Volt de General Motors et la Renault ZE. Cette technologie présente l'avantage que l'électricité est un vecteur d'énergie et non pas une source d'énergie, et donc il est possible de la produire à l'aide de différentes sources d'énergies favorisant ainsi la diversification énergétique. L'inconvénient majeur est que la fabrication en série des véhicules électriques risque d'être limitée pour des raisons de coût et de poids des batteries.

Pour les véhicules piles à combustible, on peut citer la Honda FCX [Honda], la Toyota Highlander FCHV [Toyota] et la Daimler Chrysler Class A F-Cell [AFH2], ce type de véhicules, présente un objectif à plus long terme. En effet, même si l'hydrogène n'est pas disponible à l'état naturel, il s'agit d'un vecteur énergétique qui peut être produit à partir de différentes sources d'énergies (dont les énergies renouvelables), y compris de l'électricité, ce qui offre des perspectives d'avenir intéressantes [Conte & al. 01].

### **- Réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) et en particulier de $CO_2$ .**

Le rejet de GES dans l'atmosphère semble être, en partie, à l'origine du réchauffement de la planète et de certains bouleversements climatiques qui en découlent. Parmi les GES se trouve en particulier le  $CO_2$ . D'après les experts du GIEC<sup>1</sup>, pour limiter l'augmentation de la température moyenne de la planète à deux degrés, il faut diviser par deux nos émissions de  $CO_2$  par rapport à 1990 [www.ipcc.ch]. Dans ce cadre, l'Association des Constructeurs Européens d'Automobiles (ACEA) s'est engagée vis-à-vis de la commission européenne à

---

<sup>1</sup> GIEC: Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat.

réduire le taux d'émission de  $CO_2$  des véhicules automobiles en 2012 à 120 g/km et à 95 g/Km en 2020 soit une **division par deux des émissions par rapport à 1990**.

Pour atteindre ces objectifs, les moyens d'action sont :

- pour les moteurs à essence : le "downsizing"<sup>2</sup>, les systèmes à distribution variable<sup>3</sup>, la suralimentation<sup>4</sup>, l'hybridation<sup>5</sup>, l'injection directe<sup>6</sup>.
- pour les moteurs diesel : l'hybridation et la réduction de la cylindrée du moteur,
- l'utilisation de carburants alternatifs : gaz naturel, biocarburant, etc...

Dans ce contexte, l'hybridation présente une solution intéressante pour le court et le moyen terme.

En attendant la validation des nouveaux types de motorisations, les industriels comptent sur les motorisations et les carburants conventionnels en tentant de réduire encore leurs émissions polluantes.

#### - Réduction des émissions et des nuisances (HC, CO, NOx, particules, bruit).

Outre le dioxyde de carbone, des normes ont été mises en place pour essayer de limiter la pollution due aux automobiles. Les normes anti-pollution traitent de trois types de polluants : les oxydes d'azote ( $NOx$ ), les hydrocarbures ( $HC$ ) et le monoxyde de carbone ( $CO$ ) pour les deux types de motorisations (Essence ou Diesel).

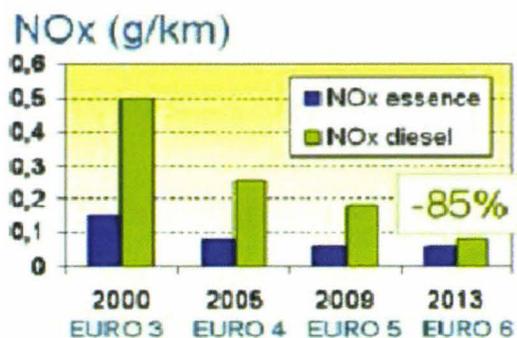


Figure 1.5 : Réglementation des polluants  $NOx$  : Diesel & essence.

---

<sup>2</sup> Downsizing: la réduction de la cylindrée

<sup>3</sup> Système permettant le contrôle des instants d'ouverture et de fermeture des soupapes

<sup>4</sup> Utilisation du Turbocompresseur

<sup>5</sup> Utilisation de deux sources d'énergie, notamment thermique et électrique

<sup>6</sup> Système permettant l'injection de carburant de façon directe à l'intérieur du cylindre

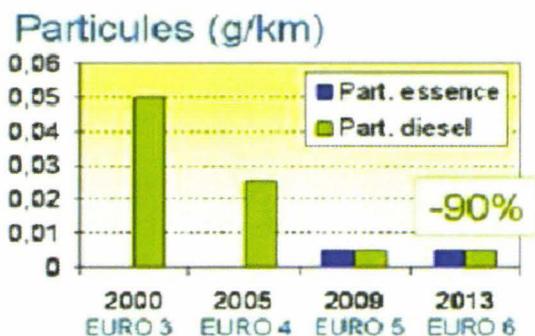


Figure 1.6 : Réglementation des particules: Diesel & essence.

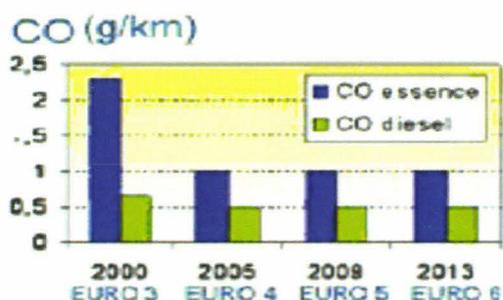


Figure 1.7 : Réglementation des polluants CO : Diesel & essence.

L'objectif global, outre la réduction des polluants, comme le montrent les figures 1.5 à 1.7, est que les futures normes vont se traduire par une convergence entre les émissions des moteurs diesel et essence. Pour réduire ces trois polluants, les industriels ont plusieurs moyens d'action qui peuvent se résumer en trois points :

➤ La combustion :

Pour les moteurs diesel, les constructeurs comptent sur les nouveaux procédés de combustion dits « HCCI<sup>7</sup> » avec un fort taux d'EGR<sup>8</sup> refroidi et une suralimentation.

Pour les moteurs à essence : les catalyseurs 3 voies<sup>9</sup>, et l'amorçage du catalyseur à froid.

➤ Le post-traitement :

Les technologies les plus envisagées sont les filtres à particules<sup>10</sup> qui doivent être généralisés à tout le parc automobile d'ici 2013. Deux technologies sont en cours de développement : les pièges à NOx<sup>11</sup> et la catalysation SCR<sup>12</sup>.

<sup>7</sup> Combustion homogène contrôlée

<sup>8</sup> Recirculation des gaz d'échappement

<sup>9</sup> Système de dépollution

<sup>10</sup> Système de dépollution

<sup>11</sup> Système de dépollution

<sup>12</sup> Système de dépollution

### ➤ **Amélioration du contrôle électronique**

Le contrôle électronique prend de plus en plus d'importance, par exemple le contrôle bouclé de la combustion, l'utilisation de modèles embarqués, le **contrôle cylindre à cylindre**, etc...

La présence du déséquilibre cylindre à cylindre et cycle par cycle a des effets considérables sur la performance du moteur et sur les taux d'émission des trois polluants *HC*, *CO* et *NOx* [Moraal & al 94, Sher & al 02, Bienvenuti & al 03, Chauvin & al 04]. La détection, la modélisation et la résolution de ce problème font l'objet de la dernière partie de ce rapport.



## Présentation de la Partie I

Cette première partie présente une étude bibliographique de chacun des sujets traités dans ce mémoire.

Le premier chapitre est dédié à l'état de l'art sur les moteurs thermiques. Tout d'abord, le principe de fonctionnement du moteur 4 temps à allumage commandé à injection indirecte multipoint est présenté, puis les différents modèles existants dans la littérature pour prendre en compte les dynamiques des variables clés du moteur sont décrits. La dernière partie s'intéresse aux architectures classiques de « contrôle moteur » utilisées dans le but d'augmenter les performances du moteur et de réduire les polluants générés par le phénomène de combustion.

Le deuxième chapitre concerne une classe particulière de modèles non linéaires sous forme quasi-LPV appelés modèles flous de type Takagi-Sugeno. Ces modèles peuvent s'interpréter comme une collection de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires. Les fonctions non linéaires sont dépendantes des variables dites de prémisses. L'espace de ces dernières représente l'espace dans lequel le modèle non linéaire est partitionné. Il ne s'agit pas ici de faire une linéarisation autour d'un point de fonctionnement, mais bien au contraire de décrire exactement un modèle non linéaire. L'approche utilisée dans notre cas nécessite donc l'existence d'un modèle du procédé.

## Chapitre I. Moteur à allumage commandé : Généralités, Modèles dynamiques et Structures de commande

|   |           |
|---|-----------|
| <b>I.1. Introduction</b>  | <b>25</b> |
| <b>I.2. Moteur à allumage commandé : MAC</b>                            | <b>26</b> |
| I.2.1. MAC : Principe et généralités                                    | 26        |
| I.2.1.1. Architecture globale   | 26        |
| I.2.1.2. Le cycle à 4 Temps   | 27        |
| I.2.1.3. Diagramme ou Epure de distribution                             | 29        |
| I.2.1.4. Ordre d'allumage dans les cylindres                            | 30        |
| I.2.1.5. Formation des polluants  | 31        |
| I.2.1.6. Variabilité cyclique : cylindre à cylindre et cycle à cycle    | 33        |
| I.2.2. MAC : modélisation   | 34        |
| I.2.2.1. Modèles à valeurs moyennes                                     | 34        |
| I.2.2.2. Modélisation cylindre à cylindre                               | 35        |
| I.2.2.3. Représentation dans le domaine angulaire                       | 35        |
| I.2.2.4. Modèles discrets   | 37        |
| I.2.2.5. Modèles hybrides   | 37        |
| I.2.2.6. Repérage des cylindres   | 37        |
| I.2.2.7. Phasage de l'injection et de l'allumage                        | 38        |
| I.2.2.8. Notion de phasage PMH  | 40        |
| <b>I.3. MAC : Architectures et Modèles dynamiques orientés contrôle</b> | <b>40</b> |
| I.3.1. Architecture du contrôle de la richesse                          | 42        |
| I.3.1.1. Compensation de la dynamique d'essence                         | 43        |
| I.3.1.2. Action anticipative (feedforward)                              | 44        |
| I.3.1.3. Contrôle en boucle fermée (feedback)                           | 45        |
| I.3.1.4. Contrôle de la richesse cylindre à cylindre                    | 46        |
| I.3.2. Architecture du contrôle de l'allumage (détection du cliquetis)  | 47        |
| I.3.3. Architecture du contrôle de la vitesse au ralenti                | 49        |
| I.3.3.1. Equilibrage des cylindres en couple                            | 51        |
| I.3.4. Etat de l'art sur les modèles orientés « contrôle »              | 52        |
| I.3.4.1. Modèle de l'admission d'air                                    | 53        |
| I.3.4.2. Modèle d'injection de carburant                                | 56        |
| I.3.4.3. Modèle du processus de combustion                              | 57        |
| I.3.4.4. Modèle de la dynamique bielle-vilebrequin                      | 60        |
| I.3.4.5. Modèle du collecteur d'échappement                             | 61        |
| <b>I.4. Conclusion</b>  | <b>63</b> |

### I.1. Introduction

La commande des moteurs à allumage commandé (MAC) à base de modèles embarqués est aujourd'hui une étape déterminante afin de maîtriser la combustion et de respecter les réglementations relatives aux émissions polluantes de plus en plus contraignantes [Jeffrey & al 06].

En effet, le moteur à combustion interne est un système dont la plupart des dynamiques présentent de fortes non linéarités, son étude fait intervenir plusieurs domaines de l'ingénierie tels que la thermodynamique, la chimie, l'électronique, la mécanique ... De plus, c'est un système à plusieurs entrées et sorties, avec un nombre important de variables non mesurées et dont le nombre d'actionneurs augmente en parallèle des évolutions technologiques et des besoins en terme de performances (consommation et pollution).

Les commandes développées jusqu'alors dans l'industrie reposent principalement sur l'utilisation de cartographies représentant le comportement du moteur en des points de fonctionnement statiques. L'utilisation de ces cartographies présente plusieurs inconvénients. Le premier est que leur développement nécessite de nombreuses heures de mise au point sur des bancs d'essais moteur, ce qui rend les étapes de calibration très coûteuses pour les industriels. Le deuxième est que les performances obtenues se dégradent dans les phases transitoires du moteur puisque les cartographies ne sont représentatives que des points de fonctionnement sur lesquels elles ont été établies. Enfin, à cause de la dispersion de fabrication entre les moteurs d'une même série, leur validité est parfois relative.

L'objectif est de proposer une alternative au "tout" cartographie et de faire la synthèse des lois de commande robustes permettant d'augmenter les performances des moteurs tout en réduisant les temps de développement et en assurant l'applicabilité à tous les moteurs d'une même série. Afin de répondre à ce défi, la commande à base de modèles semble être une réponse adaptée et dans ce cadre, les techniques de modélisation, de contrôle et d'estimation mises en œuvre s'avèrent d'une importance capitale [Jeffrey & al 06, Shenton 08].

Ce premier chapitre présente un état de l'art de la modélisation et du contrôle des MAC. Une première partie est dédiée à la présentation générale du fonctionnement d'un MAC orientée vers la problématique qui nous intéresse. Des informations complémentaires sur les moteurs sont fournies dans l'annexe A. La deuxième partie présente un état de l'art des principaux travaux sur la gestion des moteurs thermiques.

*Du fait qu'ils représentent le cadre de notre travail, une attention particulière est donnée aux structures de contrôle basées sur des modèles cylindre à cylindre formulées dans le domaine angulaire discret.*

### I.2. Moteur à allumage commandé : MAC

#### I.2.1. MAC : Principe et généralités

##### I.2.1.1. Architecture globale

L'architecture classique du MAC se présente comme sur la figure 2.1. L'ensemble est composé de plusieurs cylindres (où l'énergie chimique est transformée en énergie mécanique), de plusieurs auxiliaires et d'un calculateur électronique permettant de gérer le fonctionnement du MAC à partir de différents capteurs et actionneurs.

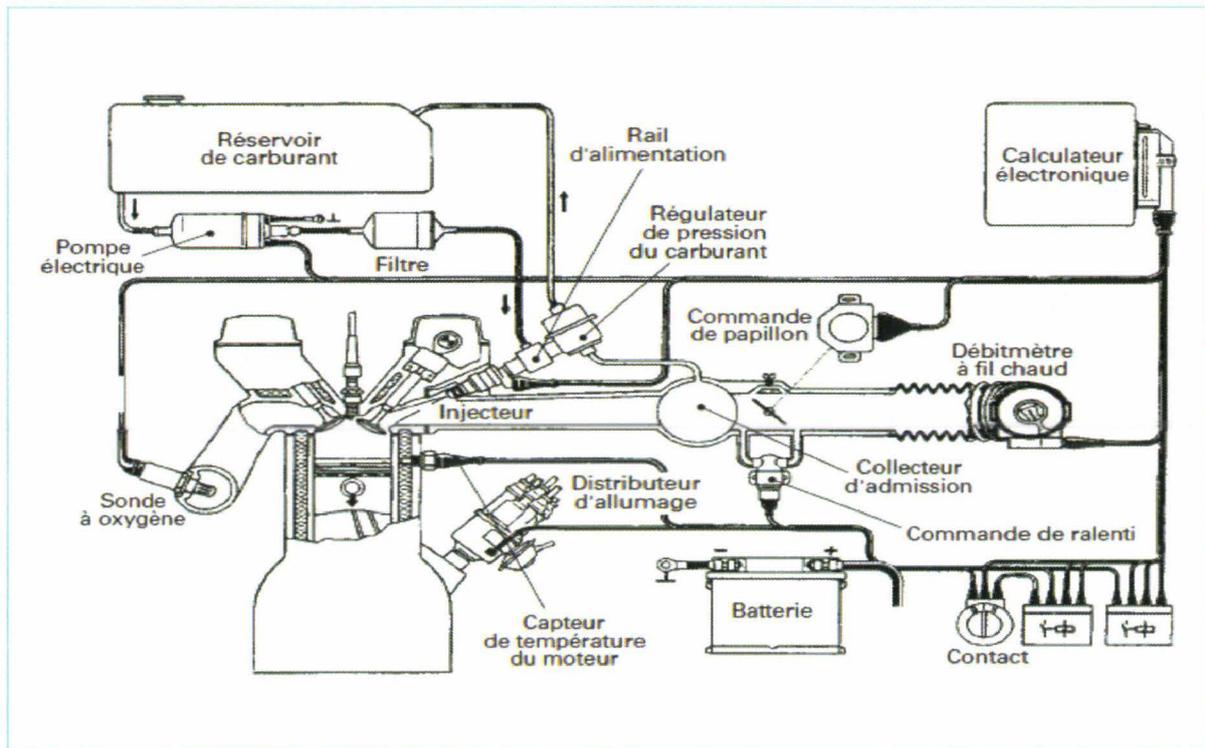


Figure 2.1: Architecture globale Moteur [TI2]

Les capteurs disponibles de série assurent des mesures de pressions, de températures, du débit d'air entrant dans le moteur, de la position du papillon, de l'angle vilebrequin, du régime moteur, de la richesse du mélange, etc... Les actionneurs principaux permettent de piloter la position du papillon, les injecteurs et les bobines d'allumages.

L'énergie mécanique est fournie par le cylindre dans lequel se déplace un piston par l'intermédiaire d'une bielle reliant le piston au vilebrequin. La chambre de combustion est délimitée par les parois du cylindre, le piston et la culasse (figure 2.2).

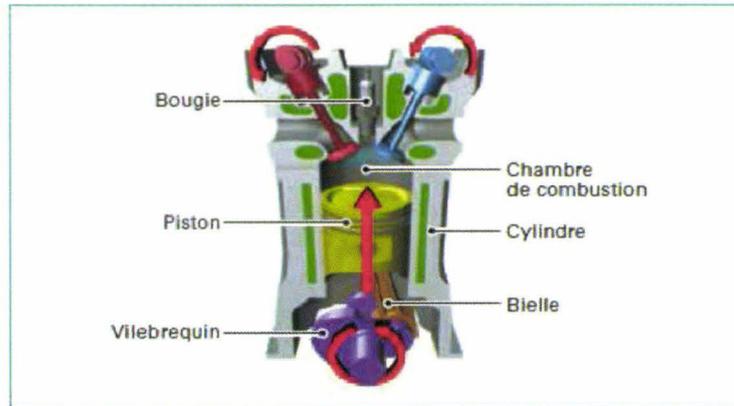


Figure 2.2: Cylindre Moteur [TII]

La culasse est munie d'au moins deux soupapes qui permettent de connecter la chambre de combustion avec respectivement le collecteur d'admission pour l'introduction du mélange air-essence et le collecteur d'échappement pour le refoulement des gaz brûlés. L'injection se fait dans la pipe d'admission par l'intermédiaire d'un injecteur (figure 2.1). La combustion du mélange air-essence est initiée par une étincelle électrique produite par la bougie d'allumage au cœur de la chambre de combustion.

En outre, le MAC dispose d'un système de dépollution, généralement il s'agit d'un pot catalytique placé à la sortie du moteur permettant de réduire le rejet des polluants nocifs dans l'atmosphère.

#### I.2.1.2. Le cycle à 4 Temps

Le fonctionnement théorique d'un MAC à 4 temps est basé sur le cycle de « Beau de Rochas » (voir section suivante I.2.1.3). La figure 2.3 montre qu'il comporte quatre phases et permet d'obtenir un travail mécanique à partir de deux sources une chaude et une froide [Heywood 88]. Ce cycle se déroule sur  $720^\circ$  Vilebrequin ( $^\circ V$ ), c'est-à-dire sur deux tours. Les quatre temps correspondent à quatre courses du piston dans le cylindre, entre les deux limites extrêmes du mouvement appelées respectivement point mort haut (PMH) et point mort bas (PMB). A chaque course est attribué un rôle bien précis dans le fonctionnement qui chronologiquement correspond à l'admission, la compression, la combustion-détente et l'échappement qui sont décrits ci-dessous.

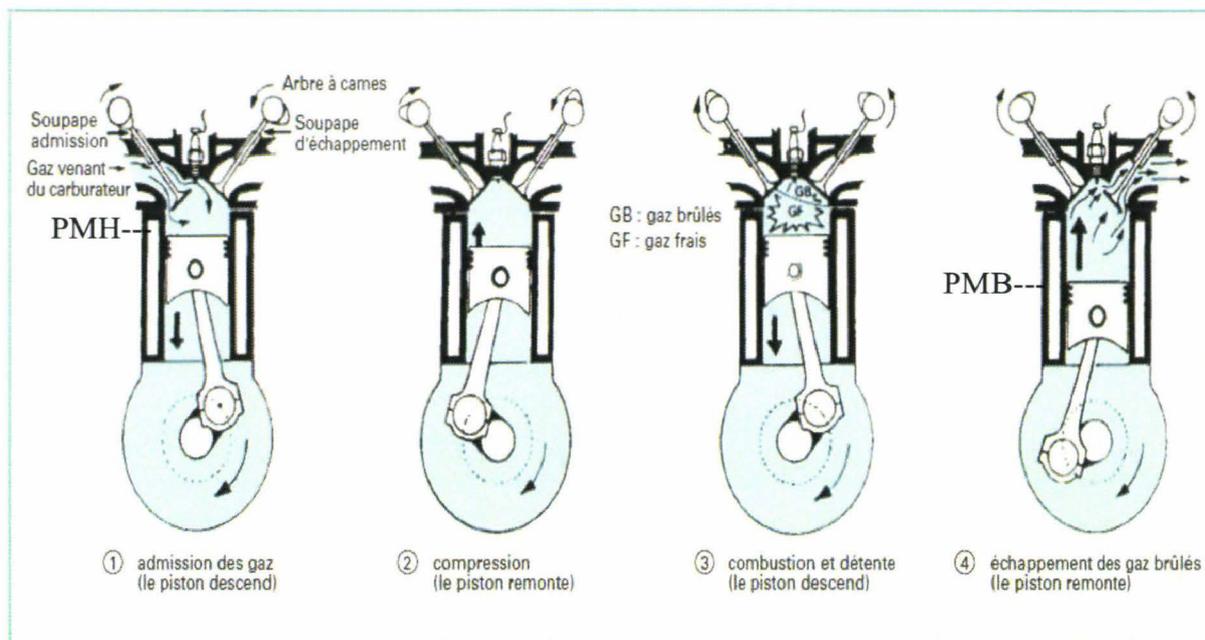


Figure 2.3: Cycle à 4 Temps [TI2]

**1<sup>er</sup> temps : Admission ( $0^\circ V < \theta < 180^\circ V$ )**

Le cycle commence quand le piston est à son point le plus élevé PMH. Pendant ce premier temps où le piston descend du PMH au PMB, la soupape d'admission est ouverte, et permet l'aspiration du mélange air carburant. Le remplissage est alors le résultat d'une dépression dans le cylindre. Les différentes pertes de charge sur le circuit d'admission (papillon, soupapes...) empêchent le remplissage théorique des cylindres de se réaliser complètement.

**2<sup>ème</sup> temps : Compression-allumage ( $180^\circ V < \theta < 360^\circ V$ )**

Pendant cette phase, la soupape d'admission se ferme puis le piston remonte du PMB au PMH et comprime le mélange air carburant. La pression dans le cylindre croît et, sans combustion, elle atteindrait 10 à 20 bars au PMH, selon le rapport volumétrique. Le mélange air-carburant est enflammé, habituellement par une bougie d'allumage, aux environs du PMH (quelques instants avant ( $10$  à  $40^\circ V$ )), afin de prendre en compte le délai nécessaire au développement de la combustion.

**3<sup>ème</sup> temps : Combustion-détente ( $360^\circ V < \theta < 540^\circ V$ )**

Une fois le mélange enflammé, la combustion se développe et la pression croît rapidement pour arriver normalement à son maximum une dizaine de degrés après le PMH, atteignant des valeurs supérieures à 90 bars à pleine charge. Les gaz sont alors très chauds

(2000 à 3000 °K) et les transferts thermiques vers les parois intenses. L'expansion des gaz portés à haute température force alors le piston à descendre du PMH au PMB pour le troisième temps. Ce mouvement est le seul temps moteur, là où l'énergie mécanique produite est transmise à l'arbre moteur via le piston et le système bielle manivelle.

**4ème temps : Echappement ( $540^\circ V < \theta < 720^\circ V$ )**

Lors du quatrième et dernier temps, la soupape d'échappement s'ouvre lorsque le piston atteint le PMB, les gaz brûlés de combustion s'évacuent, au début sous l'effet de leur propre pression, puis sous la poussée du piston qui remonte.

I.2.1.3. Diagramme ou Epure de distribution

Afin d'optimiser l'entrée et la sortie des gaz au cours du cycle moteur, il est nécessaire de fixer très précisément les instants angulaires d'ouverture et de fermeture des soupapes d'admission et d'échappement.

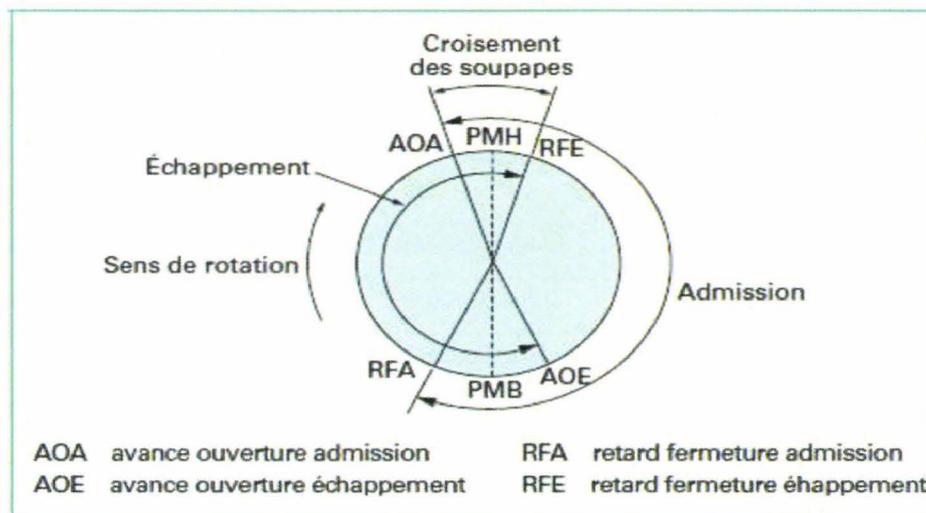


Figure 2.4: Diagramme de distribution [TI2]

Ceux-ci doivent être ajustés pour diminuer la proportion de gaz brûlés résiduels et maximiser la masse de gaz frais admis dans le cylindre. D'autres contraintes sont prises en compte, comme la nécessité de minimiser les effets d'inertie des soupapes et les phénomènes acoustiques dans les veines gazeuses lors des transvasements<sup>13</sup>. Les valeurs angulaires sont calculées pour chaque moteur et sont représentées dans l'épure de distribution (figure 2.4).

L'avance à l'ouverture de l'admission (AOA) s'effectue avant le PMH, afin de tenir compte de l'inertie des gaz frais dans les conduites d'aspiration et d'offrir une section de

<sup>13</sup> Phases d'admission et d'échappement

passage suffisante lorsque le piston débute sa phase d'aspiration. Le retard à la fermeture de l'admission (RFA) se termine après le PMB, pour profiter de l'inertie des gaz frais et optimiser le remplissage. A régime moyen, la valeur du RFA est fixée de manière à coïncider avec l'équilibre des pressions dans les conduites et dans le cylindre. Lors de la détente, l'avance à l'ouverture de l'échappement (AOE) est anticipée avant le PMB, de sorte que la pression résiduelle dans le cylindre soit mise à profit pour chasser les gaz brûlés vers l'extérieur. Finalement, le retard à la fermeture à l'échappement (FRE) profite de l'arrivée de l'air frais lorsque 'la soupape d'admission est déjà ouverte, afin de permettre de balayer le restant des gaz brûlés à l'extérieur du cylindre.

#### I.2.1.4. Ordre d'allumage dans les cylindres

Pour un moteur à quatre temps et  $n_{cyl}$  cylindres, il y a  $n_{cyl}$  combustions par cycles. Les critères qui permettent de choisir l'ordre d'allumage dans les cylindres dépendent des sollicitations induites dans le vilebrequin et de la répartition des flux d'admission dans les collecteurs. En général, le numéro 1 est attribué au cylindre le plus proche de la courroie de distribution. Alors l'ordre d'allumage retenu pour un moteur à quatre cylindres est 1-3-4-2. Mais les combinaisons 1-2-4-3 ou 1-2-3-4 sont également possibles.

Tableau 1: ordre d'allumage 1342

|                   |             |             |             |             |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <b>Cylindre 1</b> | Admission   | Compression | Combustion  | Echappement |
| <b>Cylindre 2</b> | Compression | Combustion  | Echappement | Admission   |
| <b>Cylindre 3</b> | Echappement | Admission   | Compression | Combustion  |
| <b>Cylindre 4</b> | Combustion  | Echappement | Admission   | Compression |

Les phases de combustion sont décalées et se produisent dans l'ordre imposé par la structure du vilebrequin. Les cylindres changent de phases tous les  $180^\circ V$  de rotation vilebrequin (figure 2.5).

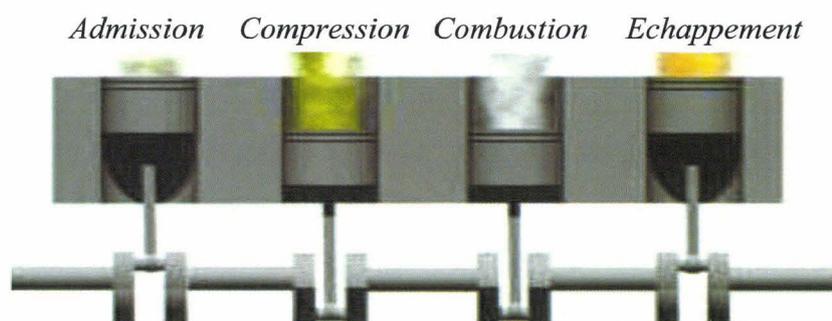


Figure 2.5: Moteur 4 cylindre en ligne

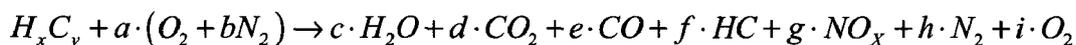
### I.2.1.5. Formation des polluants

La pollution du moteur thermique à combustion interne provient d'une combustion imparfaite. En effet, si la combustion était parfaite, les gaz d'échappement ne contiendraient que de la vapeur d'eau, du gaz carbonique et de l'azote. La qualité de la combustion est souvent caractérisée par la richesse du mélange de combustible. D'autres paramètres peuvent intervenir, comme les caractéristiques physiques et chimiques du carburant et l'homogénéité du mélange. La richesse du mélange définit le rapport entre les masses de carburant et d'air de la combustion réelle par rapport à celles de la combustion stœchiométrique.

$$\phi = \left( \frac{m_{carb}}{m_{air}} \right) / \left( \frac{m_{carb}}{m_{air}} \right)_{stoe} = \left( \frac{m_{carb}}{m_{air}} \right) \cdot PCO$$

Le pouvoir comburivore (PCO) est le rapport entre la masse d'air et celle de carburant pour brûler un mélange dans les conditions stœchiométriques. Pour un hydrocarbure, le pouvoir comburivore est de l'ordre de 14,5 grammes d'air par gramme de carburant. Lorsque la quantité de carburant dans le mélange est inférieure à la quantité contenue dans les conditions stœchiométriques, le mélange est appelé **mélange pauvre**. A l'inverse, un mélange contenant davantage de carburant que dans les conditions stœchiométriques définit un **mélange riche**.

Lors de la combustion, les hydrocarbures sont oxydés selon la formule chimique suivante :



**Monoxyde de carbone CO** : la présence de monoxyde de carbone dans les gaz d'échappement est due essentiellement à une combustion se déroulant globalement ou localement en mélange riche. Dans ces conditions, le mélange présente un excès de carburant, celui-ci est incomplètement oxydé. Le taux de monoxyde de carbone est sensiblement proportionnel à l'excès de carburant.

**Oxydes d'azote NO<sub>x</sub>** : Le processus principal de formation de NO fait intervenir l'azote et l'oxygène de l'air, réagissant l'un et l'autre sous forme atomique et moléculaire, dans la zone des gaz brûlés, en aval du front de flamme. Si le mélange présente un excès d'air (mélange pauvre), la totalité des hydrocarbures et du CO est oxydée en H<sub>2</sub>O et en CO<sub>2</sub>, mais à haute température l'oxygène en excès a pour effet d'oxyder l'azote et de ce fait, les gaz comportent une teneur en NO<sub>x</sub> sensiblement proportionnelle à l'excès d'air. Si l'excès d'air est important, la baisse de température de combustion qui en résulte a pour effet de réduire la production d'oxyde d'azote. Par conséquent, la vitesse de formation de NO augmente avec la température

de combustion et dépendra également de la concentration en oxygène, atomique et moléculaire. Ceci explique que les émissions de NO passent toujours par un maximum en mélange légèrement pauvre ( $\phi \approx 0,90-0,95$ ) et varient beaucoup en fonction des paramètres agissant sur les températures locales (charge du moteur, dilution, avance à l'allumage ou à l'injection...).

**Hydrocarbures (HC) :** ces polluants sont le plus souvent désignés par l'expression "hydrocarbures imbrûlés". Il s'agit de l'ensemble des produits hydrocarbonés retrouvés dans les gaz d'échappement et constitués à la fois des composants du carburant lui-même, non transformés lors du processus de combustion (mélange riche), et de produits obtenus par diverses réactions complexes entre hydrocarbures (craquage, cyclisations,...).

La formation de gaz toxiques d'un moteur à allumage commandé en fonction du dosage du carburant est représentée sur la figure 2.6.

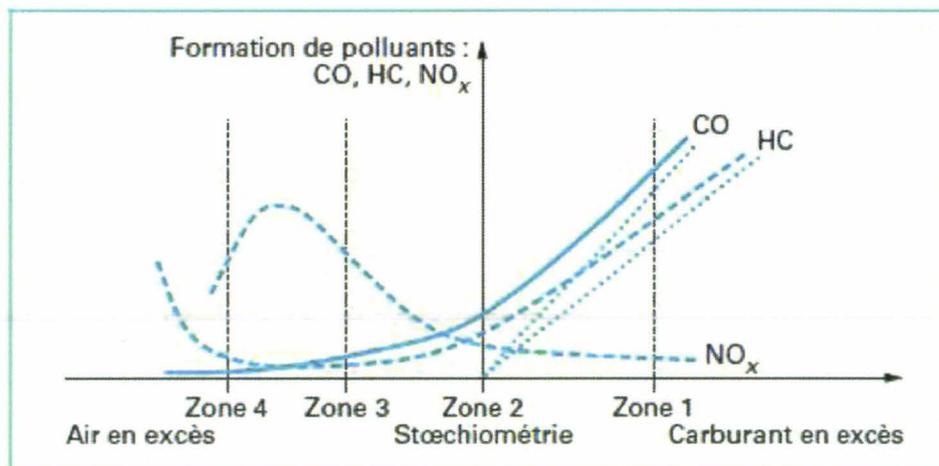


Figure 2.6: Formation des gaz toxiques en fonction du dosage de carburant [TI3]

Dans la zone 1, le CO et les HC augmentent avec l'excès de carburant tandis que la raréfaction de l'oxygène diminue le niveau de NO<sub>x</sub>.

Dans la zone 2, le mélange est stœchiométrique, mais son hétérogénéité a pour effet que la combustion produit aussi bien des composés trop oxydés (NO<sub>x</sub>) provenant des zones où le mélange est pauvre, que des composés incomplètement oxydés (CO et HC) provenant des zones de mélange riche.

Dans la zone 3, l'excès d'air a pour effet de réduire la teneur en composés non oxydés (CO et HC) et d'augmenter le niveau d'oxydes d'azote.

Dans la zone 4, l'augmentation de l'excès d'air a pour effet, d'une part, d'approcher de la limite d'inflammabilité du mélange ce qui provoque l'augmentation du niveau d'hydrocarbures imbrûlés et, d'autre part, d'abaisser la température de combustion ce qui provoque la diminution du niveau d'oxydes d'azote.

#### I.2.1.6. Variabilité cyclique : cylindre à cylindre et cycle à cycle

De nombreux facteurs font que le processus de combustion ne se réalise pas de manière identique dans chacun des cylindres du moteur, ni d'un cycle moteur à un autre dans un même cylindre. Ce phénomène, très complexe à gérer, a été largement étudié et commenté dans la littérature.

#### ***Conséquence du phénomène***

Ces différences ont une influence directe sur le rendement énergétique du moteur ainsi que sur la consommation de carburant [Li & al 09]. Plus de 10 % de la consommation de carburant est perdue à cause de ce phénomène [Vance & al 06]. En outre, le déséquilibre entre les cylindres cause des rejets supplémentaires d'émissions polluantes. Il a été montré dans [Inoue & al 93] que 30 % de ces émissions pourraient être réduites si les cylindres étaient équilibrés.

#### ***Les facteurs et/ou les raisons***

- Les caractéristiques ainsi que le comportement de chaque injecteur sont différents ; ce qui engendre des mélanges différents dans les cylindres et par conséquent, des richesses différentes.
- Le caractère asymétrique du système d'admission fait que la répartition en air n'est pas uniforme sur tous les cylindres, et par suite, le couple produit par chacun des cylindres n'est pas le même.
- Le couple produit dépend de la pression maximale à l'intérieur des cylindres. C'est la plus grande pression maximale de tous les cylindres qui définit le niveau de ravitaillement de tous les cylindres, un moteur équilibré produit donc un couple plus élevé en sortie du moteur, qu'un moteur déséquilibré [Nieuwstadt & al 99]. Les émissions pour une vitesse donnée et une charge donnée sont réduites pour la même raison.
- Le déséquilibre des cylindres engendre aussi des problèmes de nature vibratoire, ces effets peuvent être ressentis par le conducteur en particulier à bas régime et peuvent endommager la chaîne de transmission ou créer des ratés d'allumage [Li & al 07].

### *Les indicateurs*

Plusieurs paramètres du moteur sont affectés par ces phénomènes, comme par exemple, la pression dans les cylindres, la position angulaire du vilebrequin, ou la mesure de la pression dans le collecteur d'échappement et par conséquent ces variables sont des candidates pour la détection des déséquilibres entre les cylindres [Galloni & al 09].

### I.2.2. MAC : modélisation

La modélisation des moteurs à combustion interne s'est largement développée au cours des dernières années. Dans le cadre de ce travail, nous nous limitons à l'étude des techniques de modélisation adaptées à la synthèse de lois de commande pour le contrôle moteur. Différentes approches existent pour modéliser les composants et le comportement du moteur. Ces approches varient suivant l'architecture de contrôle adoptée, le type de problème à résoudre, les contraintes de développement ...

Dans un premier temps on peut distinguer deux grandes familles de modèles : des modèles empiriques, basés sur des cartographies réalisées à l'aide de mesures sur bancs d'essais moteur ; des modèles dits analytiques, basés sur des lois physiques ou des modèles dynamiques "boîte noire" permettant d'accéder aux phénomènes transitoires du moteur. On y retrouve les « *modèles à valeurs moyennes* » où l'évolution des paramètres du moteur est produite en terme de valeurs moyennes sur un intervalle temporel et les « *modèles cylindre à cylindre* » où les variations considérées sont de l'ordre du degré vilebrequin ( $^{\circ}V$ ). Les modèles moyens restent les plus utilisés dans la littérature pour la conception des lois de commandes basées modèles.

La modélisation peut également être effectuée suivant le domaine choisi : « *domaine temporel* » où les équations différentielles ordinaires sont utilisées classiquement, ou « *domaine angulaire* ». Dans ce dernier cas, les modèles sont fonction de la position angulaire du vilebrequin. L'un des intérêts de ce domaine est une prise en compte « aisée » des phénomènes se produisant au niveau de chaque cylindre.

Enfin, on peut également traiter le problème en utilisant des « *modèles continus* » ou, des « *modèles discrets* » voire des « *modèles hybrides* » permettant de rendre compte d'éventuels évènements discrets.

#### I.2.2.1. Modèles à valeurs moyennes

Ce type de modèles est le plus utilisé dans la littérature. Le pas de calcul utilisé correspond approximativement à la durée d'un cycle moteur ( $720^{\circ}V$ ). De part leur

« simplicité » relative, ces modèles présentent un intérêt majeur pour la synthèse de contrôle moteur [Kao & al 95, Jankovic & al 98]. Cependant, ils ne permettent pas d'atteindre des informations précises sur l'évolution des paramètres propres à chacun des cylindres. Ce dernier point nécessite d'adopter des « modèles cylindre à cylindre ».

### I.2.2.2. Modélisation cylindre à cylindre

Dans le but de caractériser la dynamique de chacun des cylindres et d'évaluer la variation cyclique inter et intra cylindres d'un MAC, une modélisation détaillée des dynamiques rapides des événements propres à chacun des cylindres est nécessaire. Ils sont souvent définis dans le domaine angulaire [Kao & al 95]. Ces modèles se retrouvent par exemple en couplant le modèle thermodynamique des cylindres avec un modèle dynamique non linéaire d'ensemble piston bielle vilebrequin [Filipi & al 01, Zweiri & al 01]. Ils sont surtout utilisés pour l'étude des variations de richesse et de couple entre les cylindres. A titre d'exemple, l'annulation de variations de richesse entre les cylindres se retrouve dans les travaux de [Grizzle & al 91, Hasegawa & al 94, Fekete 95, Benvenuti & al 03, Chauvin & al 05, He & al 08, Suzuki & al 09], et concernant les variations de couple inter-cylindre [Jeremiasson & al 98, Nieuwstadt & al 99, Chauvin & al 04, Li & al 08].

### I.2.2.3. Représentation dans le domaine angulaire

Le passage dans le domaine angulaire s'obtient en utilisant le changement de variable suivant :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d}{d\theta} = \omega \cdot \frac{d}{d\theta}$$

Deux propriétés principales font qu'il est intéressant de considérer les modèles du moteur dans le domaine angulaire. D'une part, les dynamiques du moteur sont moins dépendantes de la vitesse de rotation [Chin & al 86, Kao & al 95]. Il a été montré que dans le domaine angulaire, il est possible d'augmenter la plage de fonctionnement du contrôleur, en particulier à haut régime où la sensibilité aux bruits est réduite par rapport au domaine temporel [Cook & al 88]. De plus, cette augmentation de la plage de fonctionnement n'a pas d'impact négatif sur les marges de stabilité et de robustesse du système [Osburn 03].

D'autre part sur un cycle moteur, les signaux périodiques sont corrélés au cycle moteur et ont une fréquence et/ou une période fondamentale généralement fixe par rapport à la vitesse de rotation vilebrequin [Heywood 88]. Donc dans le domaine angulaire, cette période est un nombre fixe d'échantillons angulaires, ce qui n'est pas le cas avec un échantillonnage

temporel [Powell & al 98, Chang & al 95]. Cette propriété est très intéressante pour la synthèse de contrôleur et pour le diagnostic cylindre à cylindre [Citron & al 89, Shim & al 96, Kim & al 95].

L'utilisation du domaine angulaire est également avantageuse pour prendre en compte les différents retards dans les boucles de régulation du moteur, ainsi que les instants angulaires d'ouverture et de fermetures des soupapes d'admission et d'échappement qui sont des constantes dans ce domaine [Guzzella & al 04].

[Chin & al 86] ont fourni une analyse comparative entre les fonctions de transfert continues dans le domaine angulaire et dans le domaine temporel. Les auteurs proposent une transformation entre les deux domaines, en faisant l'hypothèse que la vitesse est constante et en se basant sur la relation suivante :  $\theta = N \cdot t$  où  $\theta$  est l'angle vilebrequin,  $N$  la vitesse de rotation et  $t$  le temps. Leur analyse est basée sur l'utilisation de modèles linéaire dans le domaine fréquentiel pour décrire la dynamique entre la position de papillon d'air et le couple transmis, la dynamique entre l'injection d'essence et le couple en sortie du moteur, la dynamique du vilebrequin, et la dynamique dans le collecteur d'échappement. Leur étude a montré que tous les modèles ainsi considérés varient plus lentement dans le domaine angulaire à l'exception de la fonction de transfert entre l'injection et la production qui présente un pôle singulier qui varie plus rapidement dans le domaine angulaire. De nombreux travaux traitent du problème de mise en œuvre des algorithmes de commande issus d'un développement préalable dans le domaine angulaire [Schmidt 92, Yurkovic & al 97, Grizzle & al 94\_1, Glielmo & al 00]. Les travaux de [Osburn 03] montrent qu'il est préférable de synthétiser des lois de commandes dans le domaine angulaire et de les implémenter dans le domaine temporel via des contrôleurs équivalents.

Malgré l'intérêt du domaine angulaire pour la modélisation et le contrôle moteur, peu de travaux ont repris cette idée.

D'autres approches se sont focalisés sur les aspects de traitement et filtrage des signaux moteur dans le domaine angulaire. Par exemple, dans [Hendricks & al 95], une attention particulière est portée sur les fluctuations dues au phénomène de pompage du moteur au collecteur d'admission. Les auteurs concluent qu'un filtre anti-repliement dans le domaine angulaire avec une période angulaire maximale de  $45^\circ$  vilebrequin permet d'éliminer ces fluctuations. Ce type de filtrage a été étendu à la vitesse de rotation du moteur dans [Schmidt & al 99].

### I.2.2.4. Modèles discrets

[Hazel & Flower 71] sont les premiers à avoir analysé les dynamiques du moteur comme des modèles échantillonnés dans le domaine angulaire. Leurs travaux se focalisent sur des applications du contrôle moteur à vitesse constante. La période angulaire des modèles à temps discret utilisés pour le contrôle moteur varie et la dynamique considérée aussi. Le pas élémentaire correspond à un cycle moteur  $720^\circ$ . Suivant les travaux, différents pas d'échantillonnage sont choisis, par exemple  $45^\circ$  dans [Grizzle & al 94\_2] pour la dynamique d'air, et  $180^\circ$  pour la dynamique d'essence et d'allumage dans [Powell & al 98, Chang & al 95]. Par contre, lorsqu'il s'agit de traiter des problématiques cylindre à cylindre, le choix d'une période angulaire plus petite est nécessaire pour capter les dynamiques rapides. Par exemple, dans [Chauvin & al 06], une période angulaire de  $6^\circ$  a été considérée pour le problème d'estimation de la richesse cylindre à cylindre.

### I.2.2.5. Modèles hybrides

Le moteur thermique est intrinsèquement un système hybride [Jeffrey & al 88]. L'injection de carburant et l'allumage du mélange air/carburant peuvent être considérés de façon discrète [Hazel & Flower 71]. Cependant, la dynamique de rotation et la dynamique des fluides sont des dynamiques continues par nature. Ce type de modèles est aussi utilisé pour modéliser les phénomènes cycliques du moteur [Balluchi & al 07].

### I.2.2.6. Repérage des cylindres

Généralement sur les véhicules conventionnels, le repérage angulaire du moteur se fait via une roue dentée fixée sur le vilebrequin et un capteur (effet Hall ou inductif) (figure 2.8). Le nombre de dents sur cette roue varie selon les applications (en particulier, en fonction du régime maximal du moteur et de la précision angulaire désirée). Classiquement, les roues ont 60 dents (espacées de  $6^\circ$ ) parmi lesquelles figurent une singularité (dent manquante et/ou dent plus longue). Cette singularité a pour objectif de donner un repère angulaire absolu pour le signal. Typiquement sur un moteur à 4 cylindres en ligne à 4 temps, cette singularité permet de repérer la position du PMH (point moteur haut) des cylindres. Un tel dispositif de repérage s'avère insuffisant pour récupérer la position relative de chacun des cylindres. En effet, pour un moteur à combustion interne à quatre temps, le vilebrequin exécute deux tours complet (ou  $720^\circ$  d'angle), avant qu'un piston donné se retrouve dans la même position de fonctionnement dans le cycle moteur. Il en résulte que les cylindres 1-4 et 2-3 ayant la même position, il sera nécessaire d'avoir une information additionnelle pour différencier le cylindre en combustion

du cylindre en fin d'échappement. Pour résoudre cette indétermination, il existe plusieurs solutions : un capteur de position angulaire situé sur l'arbre à came (système qui tourne deux fois moins vite que le vilebrequin), ou des fonctionnalités logicielles embarquées dans le calculateur de contrôle moteur. L'arbre à cames est donc équipé d'une cible portant un repère qui est visible via un capteur fixe délivrant un signal fréquentiel valant « 1 » pendant la première moitié du cycle et « 0 » pendant la seconde. C'est la combinaison des signaux issus du capteur vilebrequin et du capteur arbres à cames qui permet de récupérer la position propre à chacun des cylindres. La figure 2.7 en donne un exemple.

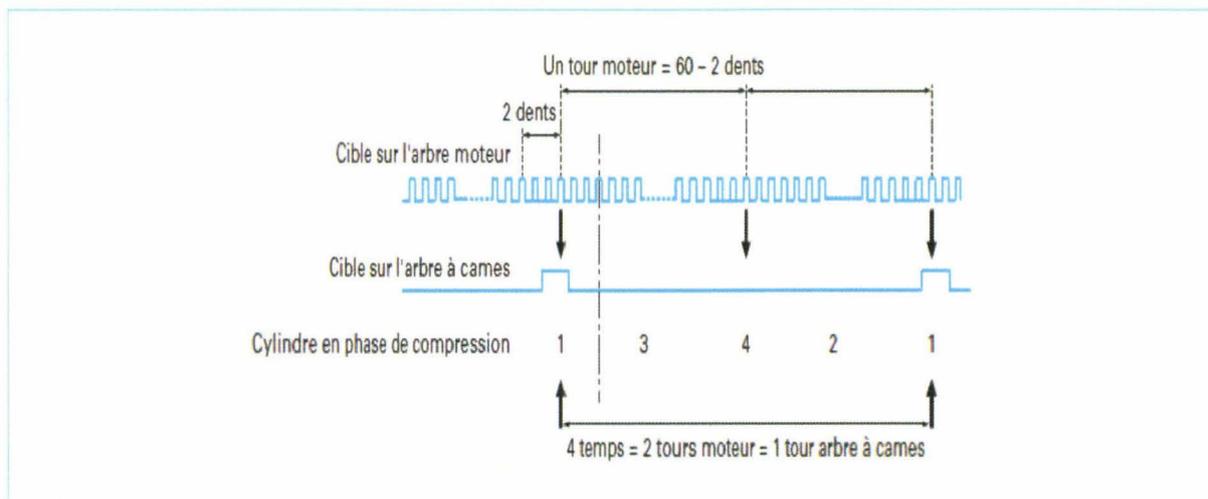


Figure 2.7: Repérage angulaire du moteur : exemple. [TI3]

Dans l'exemple présenté, le cylindre 1 est en phase de compression lorsque l'on a simultanément la présence des singularités sur l'arbre moteur et sur l'arbre à cames. Les positions angulaires des PMH sont repérées en nombre de dents par rapport à la singularité. Le séquencement des cycles se fait dans l'ordre 1, 3, 4, 2. La génération du signal indiquant la position propre à chacun des cylindres a une grande importance pour le phasage du système d'injection et d'allumage de chacun des cylindres.

#### I.2.2.7. Phasage de l'injection et de l'allumage

Le moteur considéré dans le cadre de ce travail comporte un système d'injection électronique multipoint séquentielle, et un système d'allumage à étincelle perdue. L'injection séquentielle consiste à injecter la quantité de carburant en actionnant successivement et dans un ordre donné les différents injecteurs. L'injection séquentielle est calée pour que la phase d'ouverture de chaque injecteur se termine avant l'ouverture de la soupape d'admission du cylindre correspondant (figure 2.8). L'expérience a montré que l'injection quand il y a une

soupape ouverte n'est pas souhaitable parce qu'elle entraîne une augmentation des émissions de polluants. Le temps de séjour du carburant dans la chapelle d'admission favorise son évaporation et le flux d'air à l'ouverture de la soupape favorise l'homogénéisation du mélange, réduisant ainsi la formation des hydrocarbures imbrûlés.

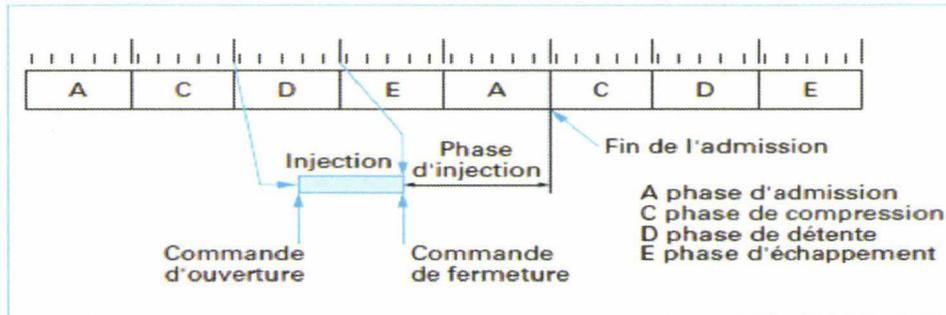


Figure 2.8 Séquençement de l'injection [TI3]

Le moment où se fait l'injection de carburant est repéré généralement par la position angulaire de la fermeture des injecteurs. Celle-ci est le résultat d'une **interpolation cartographique** en fonction du régime et de la charge du moteur.

Connaissant la vitesse de rotation du moteur  $N_e$ , l'instant d'allumage désiré  $\theta_{ign}$  (généralement quelques degrés avant le PMH correspondant à la phase de combustion associée) et le temps de mise en conduction de la bobine  $D_{wt}$ , le calculateur de contrôle moteur détermine l'instant de début de mise en conduction de la bobine. La mise en conduction s'arrête pour déclencher l'étincelle à l'instant voulu (figure 2.9). Classiquement, ceci est fait par rapport à l'instant d'avance optimale  $\theta_{opt}$ . Cette dernière est donnée par une cartographie réalisée à partir d'essais sur banc moteur en fonction du régime et de la charge.

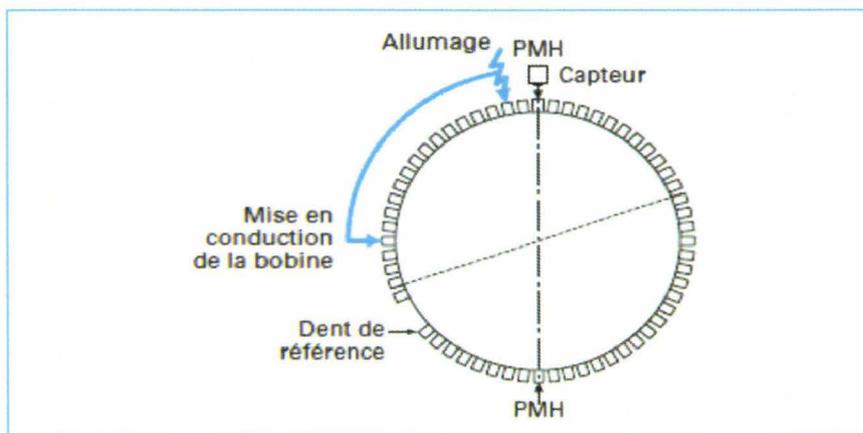


Figure 2.9: Phasage de l'allumage [TI4]

### I.2.2.8. Notion de phasage PMH

Pour chaque angle du vilebrequin, la position du piston dans chaque cylindre conditionne le volume de gaz emprisonné. Cette dernière, est fonction du nombre de cylindres et de la cinématique du moteur. De ce fait, le type de cycle moteur (2 temps ou 4 temps) et l'ordre d'allumage définissent la relation entre la position du vilebrequin et du piston dans chaque cylindre. Le PMH de combustion correspond à l'instant où le piston est à sa position la plus haute dans le tour moteur durant lequel a lieu la combustion. Il est nécessaire de « caler le PMH », c'est-à-dire de faire coïncider l'angle 0 avec le volume minimal dans la chambre de combustion (piston au point mort haut). La conséquence de ce calage est importante pour synchroniser les contrôleurs par rapport à l'acquisition des signaux de mesure. Sur un système d'acquisition classique, ces signaux du moteur sont classiquement acquis en fonction du temps. Dans le cas où des contrôleurs définis dans le domaine angulaire sont considérés, une acquisition dans le domaine angulaire est nécessaire (voir Annexe A).

## I.3. MAC : Architectures et Modèles dynamiques orientés contrôle

L'objectif du contrôle d'un moteur à allumage commandé est de fournir le couple demandé par l'utilisateur via la pédale d'accélération, tout en minimisant la consommation de carburant, les émissions polluantes, ainsi que le bruit.

Le découpage de la structure de commande est alors réalisé en utilisant trois boucles de régulation. La première est la « *boucle de contrôle en couple* » qui permet à la fois, d'assurer une combustion stable et sans cliquetis (qui correspond à une auto inflammation non souhaitée du mélange), de générer le couple demandé par le conducteur et d'assurer un compromis consommation / émissions polluantes. Le principal actionneur dans ce cas est la vanne papillon des gaz frais qui assure la boucle « lente » de contrôle sur toute la plage de variation du couple. Les bougies d'allumage sont utilisées pour assurer la boucle « rapide » de commande sur un domaine local.

La deuxième est la « *boucle de contrôle de la richesse* » qui fournit la quantité de carburant à injecter afin d'optimiser le ratio air-carburant du mélange admis dans le cylindre. Dans ce cas, les actionneurs considérés sont les injecteurs d'essence.

La dernière boucle est celle qui permet de suivre une consigne de vitesse en régime de ralenti tout en rejetant les perturbations externes appelée « *boucle de contrôle en régime* ». Le pilotage de la position du papillon des gaz frais permet d'assurer la régulation de régime.

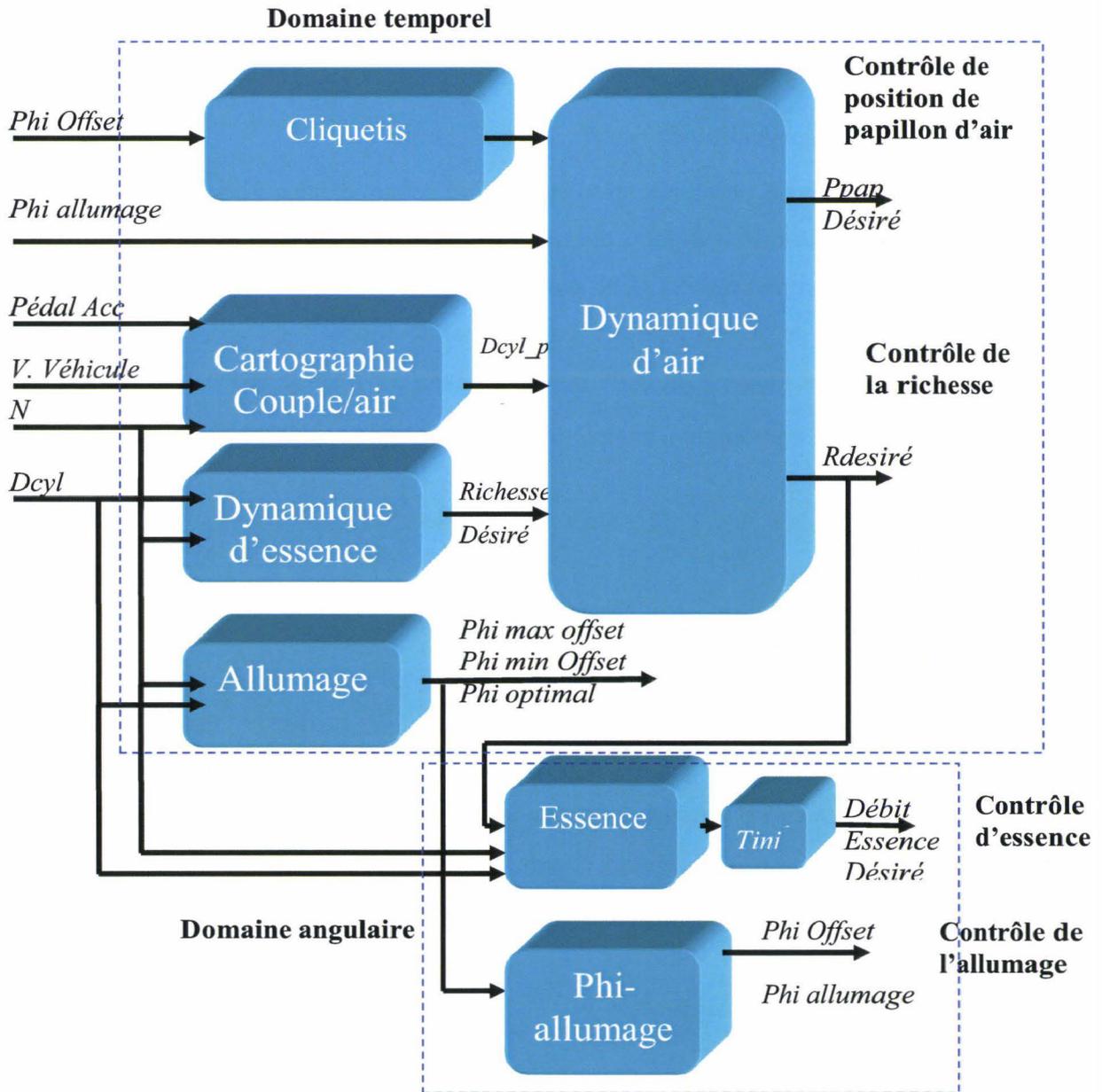


Figure 2.10: Architecture globale orientée contrôle

Evidemment suivant les technologies de MAC considérées, d'autres boucles de contrôle peuvent intervenir, telles que le contrôle des polluants au niveau du collecteur d'échappement, la boucle de recirculation des gaz brûlés (EGR), etc.

Pour réaliser les différentes boucles de régulation et déterminer l'état du moteur, plusieurs capteurs sont disponibles de série. Ces signaux sont mesurés par l'unité de commande électronique (ECM) qui calcule les actions à réaliser. De part les phénomènes mis en jeu, deux bases de calcul sont considérées, une liée au **temps** (domaine temporel), l'autre liée au **degré vilebrequin** (domaine angulaire) donc au régime du moteur (figure 2.10).

Dans la suite, les principes permettant de mettre en œuvre ces boucles de régulation sont détaillés.

### I.3.1. Architecture du contrôle de la richesse

Les émissions de polluants refoulées au collecteur d'échappement sont directement liées à la richesse dans le cylindre, du mélange air carburant entrant dans le moteur. La connaissance de ce paramètre est donc essentielle pour le contrôle moteur. Pour rappel, la définition classique de la richesse est traduite par le rapport des masses (ou des débits massiques en modèle moyen) du carburant et de l'air, normalisée par un coefficient  $\lambda_s$  qui traduit le cas d'une combustion complète d'un mélange stœchiométrique de carburant et d'air :

$$\lambda = \frac{\dot{m}_{air}}{\lambda_s \cdot \dot{m}_{fuel}} \quad (1.1)$$

Les moteurs à allumage commandé disposent d'un système de dépollution qui a pour but de transformer les gaz nocifs résultant du processus de combustion en des gaz moins polluants par l'intermédiaire d'un catalyseur 3 voies. L'efficacité de ce dernier requiert une quantité d'oxygène suffisante dans les gaz d'échappement qui correspond à maintenir la valeur de la richesse autour de 1 à  $\pm 1\%$  (figure 2.11). Le signal de richesse est classiquement fourni par une sonde lambda (UEGO) placée au niveau du collecteur d'échappement, elle délivre en sortie une tension qui représente l'image de la richesse [Ulrich & al 06].

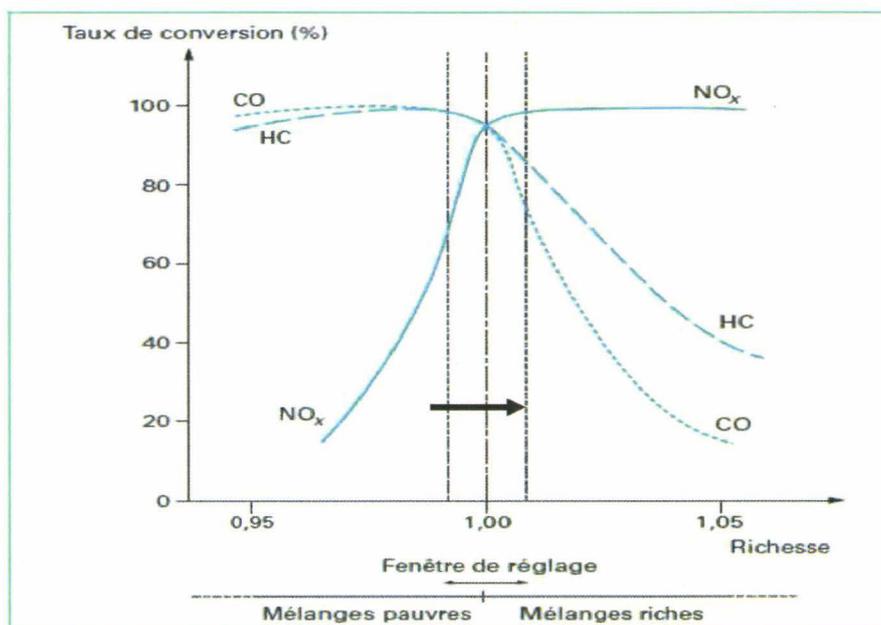


Figure 2.11 : Taux de conversion du catalyseur en fonction de la richesse du mélange

L'objectif est donc de réguler la richesse du mélange autour de 1 sur toute sa plage de fonctionnement, en régime stabilisé comme en transitoire, en agissant à la fois sur l'instant angulaire du début d'injection et sur la quantité d'essence à injecter. Pour atteindre cet objectif, plusieurs méthodes sont disponibles dans la littérature ; la plus répandue est donnée figure 2.12.

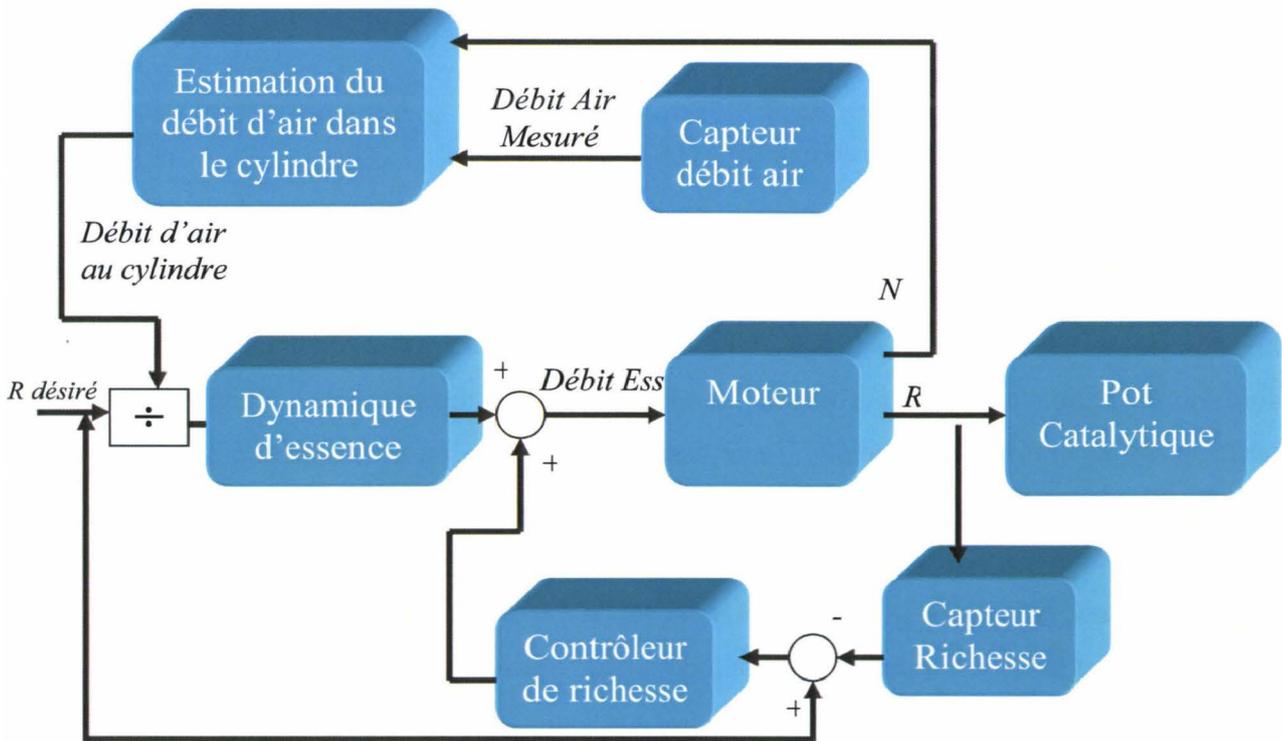


Figure 2.12 : Architecture orientée contrôle de la richesse

Cette structure se décompose en trois parties pour lesquelles différents outils sont utilisables et présentés dans les sections suivantes.

### I.3.1.1. Compensation de la dynamique d'essence

Sur un système d'injection indirecte (dans la pipe d'admission du cylindre), un phénomène important, dit « phénomène de mouillage » [Aquino 81], doit être pris en compte. En effet, La masse de carburant qui doit parvenir au moteur  $m_{fc}$  est déterminée à partir de la masse d'air aspirée  $m_{air}$  et du rapport air essence  $\lambda_{obj}$  objectif :

$$m_{fc} = m_{air} \cdot \frac{1}{\lambda_{obj}} \quad (1.2)$$

Lors de l'admission d'essence, une partie du carburant injecté se dépose sur les parois du collecteur d'admission en formant un film fluide, alors que l'autre partie de l'essence injectée arrive sous forme de vapeur. La quantité de carburant réellement injectée dans le cylindre dépend donc de l'évolution de chacune de ces deux quantités. Elles dépendent des conditions de pression et de température qui règnent dans le collecteur d'admission et de la vitesse de rotation du moteur.

Le modèle qui décrit ce phénomène est présenté dans la section I.3.4.2. La dynamique d'essence ainsi caractérisée sa régulation est explicitée ci-après.

### I.3.1.2. Action anticipative (feedforward)

La richesse est pilotée par les injecteurs situés en entrée des cylindres. Sa mesure par la sonde de richesse est effectuée en sortie du collecteur d'échappement, un retard de transport apparaît donc dans la boucle de régulation. Ce temps de retard est évidemment variable en fonction du régime moteur. Pour limiter les effets de ce retard, une action anticipative sur la richesse est généralement introduite. En se basant sur l'estimation de la quantité d'air admise dans le cylindre et en utilisant l'équation(1.2), il est possible de calculer la quantité d'essence désirée, et d'anticiper les variations de richesse de masse d'air admise [Hendricks & al 93, Takahashi & al 95, Guzzella 95]. Le problème est que la quantité d'air admise dans les cylindres d'un moteur est difficile à estimer. La méthode la plus utilisée dans la littérature se base sur la définition du rendement volumétrique [Heywood 88]. Dans la plupart des cas, ce rendement est défini par une cartographie statique qui dépend de la pression au collecteur d'admission et de la vitesse de rotation [Ericsson & al 02]. Cependant, il existe des approximations plus ou moins complexes de cette variable, basées sur des méthodes de régressions [Pieper & al 99, Hendricks 92, Andersson & al 01] utilisant la pression au collecteur et la vitesse de rotation. Le principal inconvénient est le temps de calibration de ses méthodes qui nécessitent de nombreux essais sur banc. Pour éviter ce problème, les informations des différents capteurs disponibles à l'admission peuvent être utilisées pour réaliser des estimations en ligne. Par exemple, dans [Stefanopoulou & al 04], la synthèse d'un estimateur adaptatif est réalisée à partir des mesures de pression et de température dans le collecteur d'admission combinées à la mesure de vitesse de rotation du moteur ; [Grizzle & al 94\_1, Stotsky & al 02] utilisent la mesure du débit d'air et la pression dans le collecteur d'admission ; [Magner & al 02] couplent la mesure de l'angle de l'ouverture du papillon des gaz avec la mesure de la vitesse du moteur. La précision de ces différents procédés est tout à fait acceptable en régime stabilisé de fonctionnement du moteur,

mais elle est discutable lors des régimes transitoires puisque des modèles moyens sont utilisés.

En effet, pour estimer précisément la quantité d'air entrant le cylindre en phases transitoires, il est nécessaire de tenir compte de plusieurs facteurs qui se produisent au niveau des cylindres tels que :

- Les contraintes inter-cylindres (séquence de passage d'un cylindre à un autre en fonctions des soupapes d'admission),
- Les contraintes intra-cylindres (au niveau d'un même cylindre, moment où les deux soupapes d'admission et d'échappement sont ouvertes)
- L'effet de la variation de la température au niveau du collecteur

Ces phénomènes ont des effets significatifs sur la dynamique de remplissage et sur la valeur du débit d'air entrant dans les cylindres [Yuen & al 84, Taylor 94]. Dans [Kolmanovsky & al 00], le capteur de la pression au collecteur d'échappement est aussi pris en compte pour faciliter la prédiction de la dynamique du remplissage pendant les transitoires. De même, dans [Sollic & al 07] une méthode d'estimation du débit engendré par la variation du ratio de pression collecteur-échappement utilisant un filtre de Kalman a été proposée. [Diop & al 99] ont étudié l'influence de la variation de la température au collecteur d'admission. Enfin, pour remédier au décalage de calcul dû à l'instant d'exécution de l'injection, certains travaux proposent des algorithmes de prédiction [Takahashi 95, Li & al 99, Chevalier & al 00, Cristofaro & al 05].

Faute de tenir en compte de tous les phénomènes physiques présents, l'action anticipative introduite n'est pas suffisante et par conséquent une action de correction en boucle fermée doit être utilisée.

### I.3.1.3. Contrôle en boucle fermée (feedback)

En complément de l'action anticipative, le contrôle de la richesse nécessite une régulation en boucle fermée. Cette dernière se base sur la mesure de la richesse donnée par une sonde lambda, généralement UEGO, placée au niveau du collecteur d'échappement. Ce problème a donné lieu à beaucoup de travaux utilisant des techniques variées : commande par retour d'état linéarisant [Guzzella & al 97, Alfieri & al 09], commande par mode glissant [Carnevale & al 95, Won & al 98, Souder & al 04], commande adaptative [Turin & al 94, Rupp & al 08, Yildiz & al 10], commande LQ [Onder & al 93, Ohata & al 95], commande robuste [Vigild & al 99, Mianzo & 01], ou encore la commande prédictive [Muske & al 06].

Le contrôle de la richesse doit de plus tenir compte du retard existant entre l'instant d'injection et la mesure, qui représente approximativement un cycle moteur complet. L'intégration de ce retard, se retrouve dans certains travaux [Nakagawa & al 02, Averina & al 05, Alfieri & al 07, Yildiz & al 08] qui se placent dans le cadre linéaire avec une valeur du retard connue.

De manière générale, tous les travaux cités précédemment font l'hypothèse, d'une part, que la distribution en air est uniforme dans tous les cylindres, et d'autre part, que tous les injecteurs ont le même comportement indépendamment de leur placement et de leurs caractéristiques. Par conséquent, les problèmes de déséquilibre de richesse entre les cylindres ne peuvent pas être résolus par les approches citées. Pour y remédier, un contrôle de la richesse cylindre à cylindre avec le modèle associé doit être introduit.

### I.3.1.4. Contrôle de la richesse cylindre à cylindre

Le fait de disposer d'un contrôle global de l'injection à partir de modèles moyen participe au phénomène de variations de richesse entre les cylindres. En effet, il peut y avoir des cylindres qui fonctionnent légèrement en mélange pauvre, alors que d'autres sont légèrement en mélange riche et pourtant la sortie globale est régulée autour de 1. Les principaux effets sont la surconsommation potentielle de carburant et la génération d'un surplus d'émissions polluantes [Shulman & al 80, Colvin & al 82]. Afin de contrôler de manière plus précise l'injection individuelle des masses de carburant, une reconstruction de la richesse ou d'une grandeur caractéristique de la richesse dans chacun des cylindres est indispensable. L'implantation de sondes de richesse en sortie de chaque cylindre n'étant pas envisageable sur véhicule étant donné leur prix de revient, la mise en œuvre d'un estimateur fonctionnant à partir des mesures d'une seule sonde et des mesures disponibles doit être envisagée. Un contrôle moteur pourra ainsi, à partir des richesses reconstruites, adapter les masses de carburant injectées dans chacun des cylindres afin que les richesses soient équilibrées dans tous les cylindres. Plusieurs travaux se sont focalisés sur ce problème [Grizzle & al 91, Hasegaya & al 94, Fekete 95, Yaojung & al 96, Carnevale & al 98, Fantini & al 03, Benvenuti & al 03, He & al 08, Suzuki & al 09]. Par exemple, dans [Hasegaya & al 94, Fantini & al 03, Carnevale & al 98], l'estimation des richesses est uniquement conditionnée par les coefficients d'une matrice qui doivent être identifiés hors ligne grâce à un algorithme d'optimisation. De plus, à chaque point de fonctionnement (régime/charge) correspond un réglage différent de la matrice, et donc une nouvelle identification de ses paramètres. Dans ces travaux, la description physique du phénomène cyclique du mélange qui caractérise la dynamique au collecteur

d'échappement est négligée. Par contre, dans [Grizzle & al 91, Benvenuti & al 03, Suzuki & al 09], la dynamique du collecteur d'échappement est modélisée par des modèles du premier ordre retardés intégrant la dynamique du mélange et la dynamique du capteur de richesse. Les richesses individuelles sont déduites du signal du capteur pris sur les intervalles de temps où le cylindre correspondant est activé. Ces travaux supposent que la quantité d'air admise dans les cylindres reste constante sur un cycle. Dans [Carnevale & al 98], le phénomène de mélange a été modélisé en se basant sur la géométrie du collecteur d'échappement, mettant en évidence que l'estimation des richesses individuelles varie en fonction de la géométrie du collecteur d'échappement (symétrique ou asymétrique). Dans [Yaojung & al 96], les richesses individuelles sont estimées à partir des débits d'air et d'essence au niveau des pipes d'admission qui sont eux même estimés à partir des pressions cylindres. Un travail sort du lot [Chauvin & al 05] où un modèle physique représentant en temps réel l'éjection des gaz de chacun des cylindres et leur parcours dans le circuit d'échappement est donné. Un observateur de Kalman cyclique est alors utilisé pour estimer les richesses individuelles.

La littérature n'offre pas une méthodologie standard et satisfaisante pour régler la question des disparités de richesses entre les cylindres.

Toutefois, la meilleure carburation ne suffit pas à garantir une combustion parfaite : il est aussi nécessaire d'adapter au mieux le point d'allumage par rapport à l'état de charge et au régime du moteur.

### I.3.2. Architecture du contrôle de l'allumage (détection du cliquetis)

Il est en effet fondamental que l'allumage soit effectué à un moment bien précis, qui varie avec la charge et le régime du moteur. Si l'étincelle jaillit trop tôt, il y a risque de détonation, la température en fin de compression étant trop élevée. Si elle tarde, la combustion ne commence que quand le piston redescend, et le cycle est fortement tronqué. Dans les deux cas, le rendement et la puissance du moteur chutent. L'avance à l'allumage est caractérisée par l'angle que fait le vilebrequin par rapport à sa position au PMH. Une avance de  $0^\circ$  correspond à un allumage au PMH combustion du cylindre considéré. La consigne de l'instant d'allumage est générée en tenant compte de trois paramètres distincts (figure 2.10) : l'avance optimale  $phi\_opt$ , la borne maximale et la borne minimale d'avance qui sont fournis par des cartographies. L'avance optimale correspond à l'avance garantissant un couple maximal réalisable par rapport à un remplissage donné, il est déterminé par des essais sur banc moteur. Ses valeurs sont intégrées sous forme d'une cartographie dans le calculateur du contrôle moteur. La borne maximale de l'avance correspond à la limite du phénomène de cliquetis. Ce

dernier correspond, à une combustion anormale, destructrice pour le moteur, où tout ou une partie du mélange air/carburant atteint les conditions d'auto inflammation (conditions de pression et température supérieures à un seuil sur une durée excédant le délai d'auto inflammation du mélange) avant l'arrivée du front de flamme.

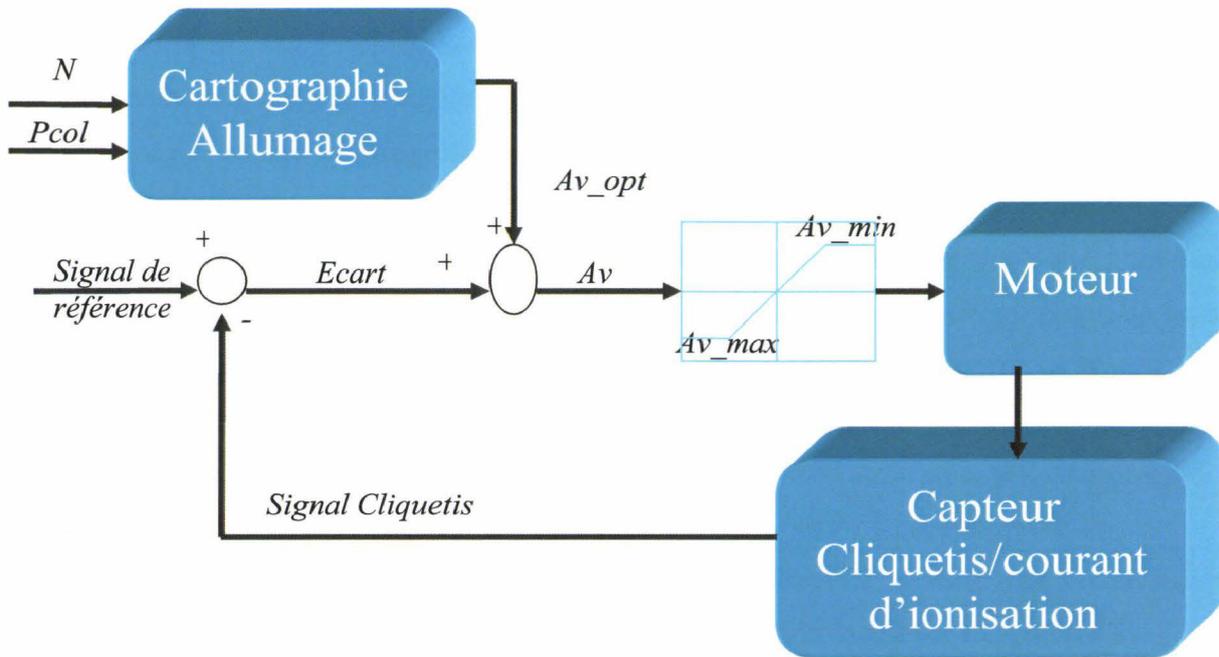


Figure 2.13: Architecture orientée contrôle de l'avance à l'allumage

Ce phénomène est généralement détecté via un accéléromètre installé sur le bloc moteur, connu sous le nom de « capteur de cliquetis ». La borne minimale quand à elle, correspond à l'instant angulaire d'allumage garantissant l'inflammation du mélange (couple limite).

Cette boucle a pour objectif d'assurer les demandes de couple rapide sur une faible plage de variation tout en permettant une combustion stable et sans cliquetis.

L'architecture globale est donnée sur la figure 2.13, la solution la plus répandue repose sur l'utilisation d'une cartographie statique qui permet de générer l'instant d'allumage par rapport à une vitesse et une charge donnée. Des commandes plus élaborées existent, utilisant des signaux comme le courant d'ionisation, ou le signal fourni par le capteur de cliquetis [Eriksson & al 97, Isao & al 97, Zhu & al 07]. Ce dernier envoie un signal de tension représentative des vibrations moteur au calculateur, qui agit alors sur la consigne d'avance à l'allumage. Enfin, certains travaux utilisent un modèle embarqué de processus combustion qui permet d'estimer l'instant angulaire où la pression est maximale à l'intérieur du cylindre et ainsi d'adapter l'avance à l'allumage [Yoon & al 00].

I.3.3. Architecture du contrôle de la vitesse au ralenti

La régulation de la vitesse de rotation du moteur en phase du ralenti est une des problématiques clés du contrôle moteur [Hrovat & al 98]. Elle consiste à suivre un régime donné malgré les perturbations de couple résistant dues à la mise en route ou à l'arrêt de certains auxiliaires. Les actionneurs généralement utilisés pour assurer cette régulation sont la commande du papillon des gaz et les avances à l'allumage de chaque cylindre. La première est plus lente puisqu'elle dépend du délai de remplissage ou de vidange du collecteur d'admission, alors que l'action sur l'avance à l'allumage a un effet immédiat sur le cycle de combustion auquel elle est appliquée. Dans [Hrovat & al 97] une étude bibliographique détaillée des structures du contrôle de cette boucle a été proposée, et une étude comparative des différents architectures utilisant les même modèle et plateforme d'essais a été étudiée dans [Yurkovic & al 97, Thornhill & al 00]. Les principaux travaux sur ce sujet depuis 1997, jusqu'à aujourd'hui sont donnés dans [Hamilton & al 97, Nicolao 99, Balluchi & al 02, Glielmo & al 00, Li & al 01, Grizzle & al 01, Jankovic & al 09]. L'architecture typique pour traiter ce problème est donnée sur la figure 2.14. Les deux sous boucles de contrôle liées à chaque type d'actionneurs y sont représentées.

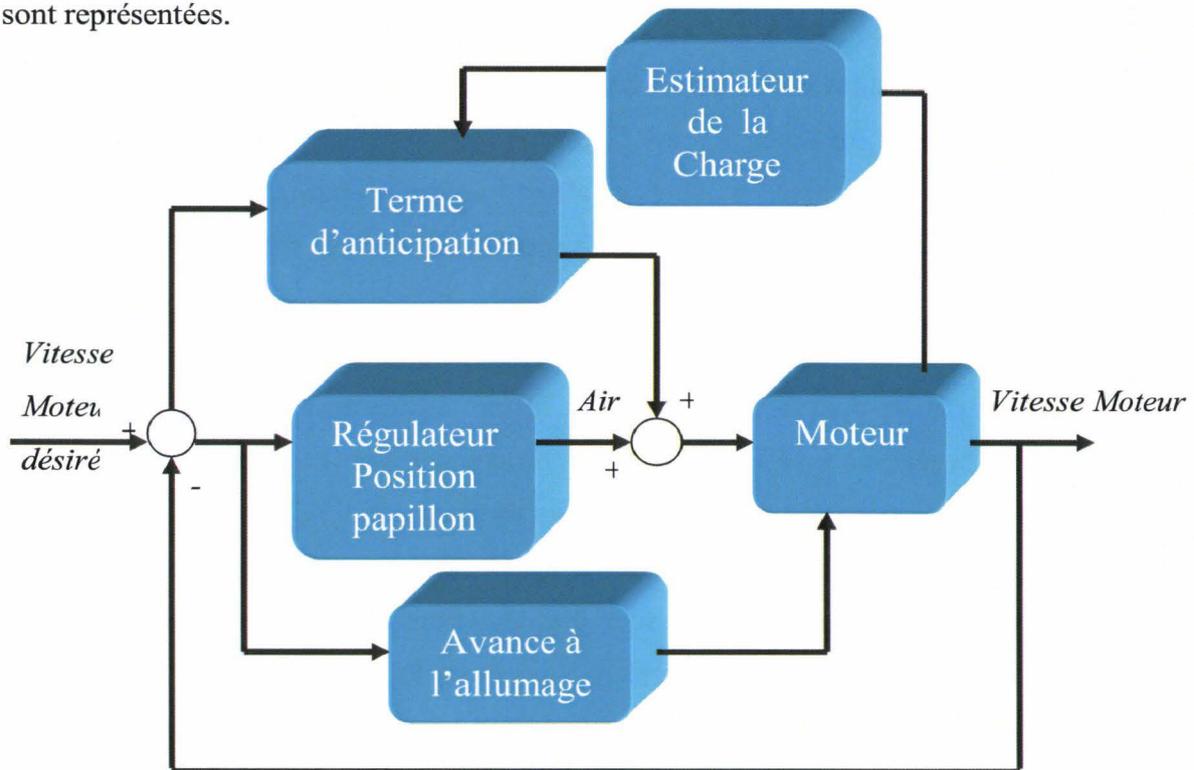


Figure 2.14 : Architecture orientée contrôle de la vitesse de rotation au ralenti

Le modèle correspondant à cette boucle fait intervenir la dynamique du vilebrequin. De ce fait, les algorithmes du contrôle associés doivent considérées à la fois le retard de

transmission du couple et l'entrée de perturbation non mesurable qui est le couple de charge.

En effet, une perturbation sur le système d'air n'apparaît sur le signal de production de couple qu'après les trois phases d'admission, de compression et de combustion. Une première approximation de ce retard pour un moteur diesel a été donnée dans [Welbourn & al 59], il vaut :

$$\tau_d = \frac{120}{N \cdot n_{cyl}} \quad (1.3)$$

avec  $N$  la vitesse de rotation du moteur en tr/min et  $n_{cyl}$  le nombre des cylindres. Une étude dans le domaine fréquentiel révèle que cette approximation n'est valable qu'à basse fréquence [Hazell & Flower 71]. Les auteurs affirment aussi que l'utilisation à la fois de l'approximation (1.3) et d'un modèle continu est adéquate seulement pour la synthèse de contrôleur à faible bande passante. Dans [Hrovat & al 98], le retard est déterminé directement en terme de déplacement angulaire qui est donc supposé constant dans le domaine angulaire et qui vaut  $360^\circ V$ . Dans [Gibson & al 06], un retard de  $450^\circ V$  a été considéré afin de prendre en compte les limitations liées à l'unité de traitement électronique.

Afin de pouvoir contrer la perturbation générée par le couple de charge, il faut avant tout l'estimer. Des méthodes d'estimation de ce paramètre utilisant principalement la mesure de vitesse de rotation ont été données dans [Azzoni & al 99, Deur & al 04, Deur & al 07, Franco & al 08]. Ces travaux utilisent des modèles à valeurs moyennes pour la synthèse des filtres de Kalman adaptatifs, d'observateurs à entrée inconnu, ou encore d'observateurs à modes glissants.

Trois temps moteur sont nécessaire afin qu'un changement de position du papillon d'air apparaisse sur le couple transmis alors qu'un changement de l'angle d'avance à l'allumage peut se réaliser à la fin de la phase de compression et juste avant la phase de combustion. Des travaux ont proposé une structure utilisant à la fois l'avance à l'allumage et la position papillon pour la régulation de vitesse [Morris & al 82, Glielmo & al 00, Alt & al 09].

Les travaux cités visent à diminuer les déviations de vitesse en présence de la perturbation due au couple de charge toute en compensant le retard de production de couple. Outre ces performances, des contraintes additionnelles peuvent être considérées comme par exemple le lissage du régime moteur au ralenti. Le principe est de réduire au maximum les fluctuations de vitesse dues à la différence du couple produit par chacun des cylindres. Il faut alors être capable d'ajuster le couple fourni par chacun des cylindres indépendamment en jouant sur leurs avances à l'allumage respectives. La littérature portant sur ce sujet indique que

cette problématique est souvent traité de façon indépendante de celui de la régulation de vitesse.

### I.3.3.1. Equilibrage des cylindres en couple

L'équilibrage des cylindres passe par l'estimation de couple individuelle générée lors des phases de combustion des cylindres, cette problématique a été déjà traitée dans la littérature. La plupart des solutions proposées utilisent la transformée de fourrier directe ou indirecte comme dans [Nieuwstadt & al 99, Jianqiu 02], ou utilisent la mesure de la vitesse de rotation comme dans [Rizzoni & al 95, Wang & al 97, Chauvin & al 04, Chauvin & al 07]. En présence d'un déséquilibre entre les différents couples produits par chacun des cylindres, la nature répétitive du cycle moteur donne lieu à des composantes périodiques sur le signal de vitesse de rotation dont la période fondamentale est toujours un cycle moteur quelles que soient la vitesse et la charge. Ce facteur a été exploité dans plusieurs travaux [Shim & al 95, Ribbens & al 97, Kim & Park 99, Chauvin & al 07].

Comme les déviations de vitesse interviennent au niveau du vilebrequin, la formulation de ce problème dans le domaine angulaire semble donc appropriée [Yurkovich & al 97]. Dans [Shim & al 95], l'algorithme proposé détermine les valeurs d'avance à l'allumage pour chacun des cylindres en se basant sur la comparaison de l'amplitude maximale des fluctuations de vitesse dues à chacun des cylindres. Dans [Kim & Park 99], un réseau de neurone a été utilisé pour extraire les fonctions périodiques du signal de mesure de la vitesse de rotation à partir duquel sont déterminées les valeurs de l'avance à l'allumage sur chacun des cylindres. Les résultats des travaux cités précédemment sont basés sur des simulations numériques utilisant un modèle non linéaire du moteur qui n'inclut ni perturbations transitoires ni bruits de mesures. Une étude expérimentale des résultats de [Shim & al 95], a été réalisée dans [Ribbens & al 97], où les auteurs ont confirmé que la méthode est valide en régime stabilisé mais pas en phases transitoires.

Le couple moteur obtenu en fonction de l'avance à l'allumage appliquée décrit une parabole. Cette parabole peut être normée par rapport au couple maximal (ou couple à l'avance optimale) et la notion de rendement de couple introduite comme étant le couple par rapport au couple à l'avance optimale. Cette variation peut être tracée en fonction de la dégradation d'avance qui correspond à l'avance optimale moins l'avance actuelle (figure 2.15). La parabole d'avance est alors unique pour chaque point de fonctionnement en régime.

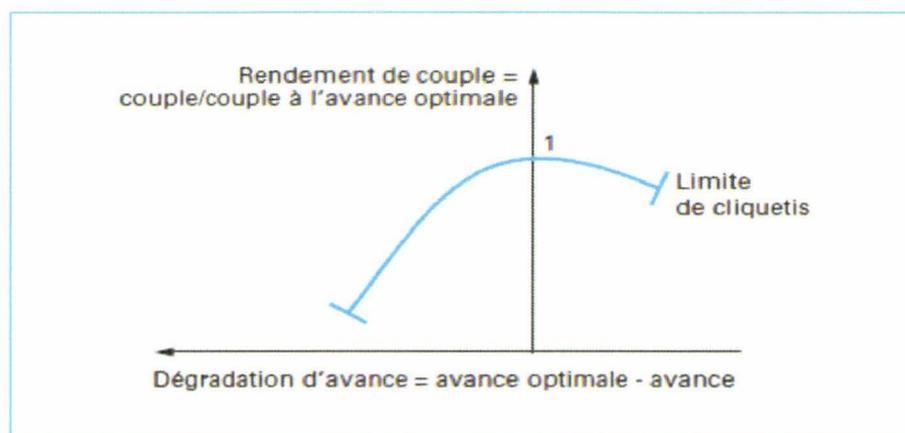


Figure 2.15 : Parabole d'avance

Après avoir présenté les différentes architectures et problématiques de commande sur un moteur à allumage commandé, la section suivante est dédiée à un état de l'art sur les modèles orientés contrôle qui sont utilisés dans les architectures précitées.

### I.3.4. Etat de l'art sur les modèles orientés « contrôle »

La modélisation des moteurs à combustion interne s'est largement développée au cours de ces dernières années. Aujourd'hui, une multitude de codes industriels dédiés à la simulation des moteurs sont disponibles sur le marché (GT-Power<sup>1</sup>, Wave<sup>2</sup>, Amesim<sup>3</sup>, Virtual 4-Stroke<sup>4</sup>, En-dyna, Simcar, etc.). Généralement, l'utilisation de ce type de logiciel présente un potentiel limité : l'accès au code source et à sa modification sont très limités pour des raisons évidentes de propriété intellectuelle et commerciale ; le paramétrage ce type de modèle nécessite la connaissance détaillée de la géométrie du moteur. Il est souhaitable de disposer d'un modèle facilement adaptable à différents moteurs et dans lequel certains sous modèles peuvent être remplacés pour les simplifier ou, au contraire, pour les affiner en fonction du degré de granularité désiré. Le problème posé se résume donc à choisir et à combiner des sous modèles adaptés à la modélisation des différents organes du moteur et des phénomènes physiques présents. Le choix des modèles est guidé par les objectifs de commande et le niveau de représentativité souhaité. Les modèles qui sont développés dans cette section répondent aux critères suivants :

- Simulation du cycle moteur complet (admission, compression, détente et échappement) et de l'évolution de la pression dans chaque cylindre
- Simulation cylindre à cylindre du MAC

- Capacité à prédire les variables qui influencent l'évolution des gaz polluants (pression, température et richesse du mélange)
- Reproduction de la vitesse instantanée du vilebrequin et du couple
- Recours à un nombre minimum de paramètres empiriques
- Simulation sur toute la plage de fonctionnement du moteur
- Temps de calculs courts (simulation en temps réel, possibilité de simuler plusieurs minutes de fonctionnement du moteur)
- Simulation des dispersions cycliques entre les cylindres

### I.3.4.1. Modèle de l'admission d'air

Sur un moteur à allumage commandé, l'air admis à travers un filtre traverse un corps de papillon avant d'arriver dans le collecteur d'admission puis entre dans la chambre de combustion via la soupape d'admission (figure 2.16). L'écoulement est considéré comme unidirectionnel dans le sens de l'admission bien qu'un faible refoulement existe au niveau de la soupape d'admission à chacune de ses ouvertures et fermetures.

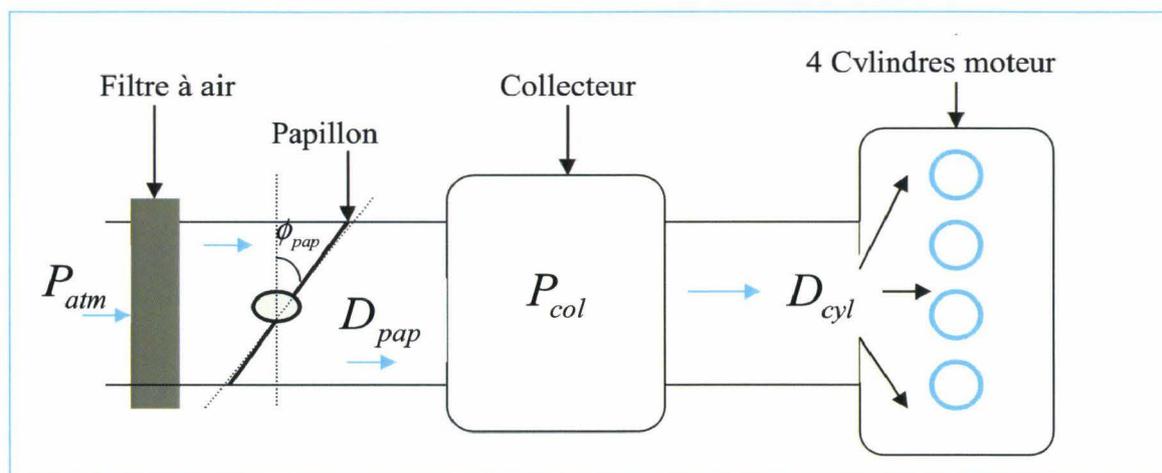


Figure 2.16 : Collecteur d'admission d'air

La grandeur choisie pour représenter la dynamique de l'écoulement à l'admission est la pression dans le collecteur. Ce dernier est considéré comme un réservoir contenant un mélange gazeux supposé parfait et en utilisant le principe de la conservation de la masse [Bidan & al 95, Bortolet & al 98], l'équation différentielle suivante [Hendricks & al 01, Andersson & al 05] est considérée :

$$\frac{dP_{col}}{dt} = \frac{RT_{col}}{V_{col}} \left( D_{pap}(t) - \sum_{i=1}^{n_{cyl}} D_{cyl_i}(t) \right) \quad (1.4)$$

où  $V_{col}$  est le volume au collecteur d'admission en  $m^3$ ,  $n_{cyl}$  est le nombre de cylindre du moteur,  $R$  la constante molaire des gaz parfaits en  $j \cdot mol^{-1} \cdot ^\circ K$ ,  $T_{col}$  la température au collecteur d'admission en  $^\circ K$ ,  $D_{pap}(t)$  représente le débit d'air au niveau de la restriction de la vanne papillon en  $kg \cdot s^{-1}$ ,  $D_{cyl_i}(t)$  représente le débit d'air entrant dans les cylindres  $kg \cdot s^{-1}$ ,  $P_{col}$  représente la pression au collecteur d'admission en  $Pa$ .

L'équation (1.4) ne prend pas en compte d'éventuelles variations de la température dans le collecteur, certains modèles introduisent la température de la manière suivante [Van Nieuwstadt & al 00] :

$$\frac{dP_{col}}{dt} = \frac{RT_{col}}{V_{col}} \left( D_{pap}(t) - \sum_{i=1}^{n_{cyl}} D_{cyl_i}(t) \right) + P_{col} \cdot \frac{\dot{T}_{col}}{T_{col}} \quad (1.5)$$

Quel que soit le modèle utilisée (1.4 où 1.5), déterminer la dynamique de la pression au collecteur revient à déterminer les deux quantités d'air entrante et sortante du collecteur d'admission  $D_{pap}(t)$  et  $D_{cyl}(t)$ .

Le modèle le plus répandu pour calculer le débit au niveau du papillon motorisé  $D_{pap}(t)$  utilise les équations de Barré Saint-Venant [Heywood 88] :

$$D_{pap}(t) = C_d \cdot A_{pap}(\phi_{pap}^\circ) \cdot \left( \frac{P_{atm}}{\sqrt{rT_{atm}}} \right) \cdot d(P_{atm}, P_{col}) \quad (1.6)$$

Avec  $C_d$  le coefficient de perte de charge,  $P_{atm}$  en  $Pa$  et  $T_{atm}$  en  $^\circ K$  sont respectivement la pression et la température en amont de la vanne du papillon,  $r$  la constante massique des gaz parfaits en  $j \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ ,  $A_{pap}(\phi_{pap}^\circ)$  représente la section d'ouverture de la vanne qui varie avec la position de la vanne  $\phi_{pap}^\circ$  et  $d(P_{atm}, P_{col})$  une fonction non linéaire qui varie en onction du rapport entre la pression dans le collecteur d'admission et la pression en amont de la vanne

du papillon  $P_r = \frac{P_{col}}{P_{atm}}$  comme suit :

$$d(P_{atm}, P_{col}) = \begin{cases} (P_r)^{1/\gamma} \cdot \sqrt{\frac{2 \times \gamma}{\gamma-1} \cdot (1 - (P_r)^{\gamma-1/\gamma})} & \text{si } P_r > \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma+1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} & \text{si } P_r \leq \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{cases} \quad (1.7)$$

avec  $\gamma$  le coefficient isentropique environ égal à 1,4. La variation du débit  $D_{pap}(t)$  par rapport à la position angulaire du papillon  $\phi_{pap}^\circ$  est donné par :

$$A_{pap}(\phi_{pap}^\circ) = \frac{\pi \cdot d_{pap}^2}{4} \left( 1 - \frac{\cos(\phi_{pap}^\circ)}{\cos(\phi_0^\circ)} \right) + A_{pap}(\phi_0^\circ) \quad (1.8)$$

où  $\phi_0^\circ$  est l'angle d'ouverture minimal de la vanne papillon en degrés,  $d_{pap}$  le diamètre de l'arbre de la vanne papillon en  $m$ .

Le débit au niveau de la vanne papillon, ainsi que la position angulaire de cette dernière sont deux variables mesurés. Cependant, le débit d'air entrant dans le cylindre à travers la soupape  $D_{cyl}(t)$  est un paramètre difficile à mesurer directement. La solution est alors d'estimer la masse d'air admise dans les cylindres à chaque cycle de fonctionnement du moteur à partir des variables mesurées. L'estimation la plus répandue dans le cas des moteurs thermiques à allumage commandé est celle basée sur la définition du rendement volumétrique [Heywood 88]. Dans la plupart des cas, ce rendement est remplacé par une cartographie [Ericsson & al 02]. Cependant, il existe quelques approximations, plus ou moins complexes de cette variable. Par exemple, dans [Hendricks & al 92, Pieper & al 99], ce débit est décrit par la relation suivante :

$$D_{cyl}(P_{col}, N_e) = \left( \frac{V_d \cdot N_e}{120 \cdot r \cdot T_{col}} \right) \cdot \eta_{vol}(P_{col}, N_e) \cdot P_{col} \quad (1.9)$$

avec  $V_d$  la cylindrée totale du moteur,  $N_e$  le régime moyen du moteur en tours/minutes et  $\eta_{vol}(P_{col}, N_e)$  le rendement volumétrique. Deux méthodes existent pour calculer ce rendement. Le rendement volumétrique par définition est le rapport entre la masse d'air qui pénètre dans le cylindre et la masse d'air qui pourrait y pénétrer en théorie compte tenu des caractéristiques des gaz dans la conduite d'admission :

$$\eta_{vol} = \frac{\text{masse d'air réelle}}{\text{masse d'air théorique}} \quad (1.10)$$

Le plus souvent, la masse d'air théorique est calculée à partir de l'équation des gaz parfaits appliquée au collecteur d'admission [Andersson & al 01] :

$$\text{masse d'air théorique}(T_{col}, P_{col}) = \frac{P_{col} \cdot V_{cyl}}{r \cdot T_{col}} \quad (1.11)$$

La masse d'air réelle est calculée en intégrant la valeur du débit mesuré au papillon d'admission.

Une autre façon de faire est de déterminer le rendement volumétrique à partir des mesures de la vitesse de rotation  $N_e$  et de la pression au collecteur d'admission  $P_{col}$  :

$$\eta_{vol}(P_{col}, N_e) = a_0 + a_1 \cdot N_e + a_2 \cdot N_e^2 + a_3 \cdot P_{col} \quad (1.12)$$

Les  $a_i, i = 0, 1, \dots, 3$  sont des paramètres constants à estimer.

La validation de ces différentes approximations est effectuée en régime statique. Pour prendre en compte d'éventuelles variations paramétriques, une incertitude  $\Delta\eta_{vol}$  est rajoutée à l'expression du rendement [Andersson & al 01] :

$$D_{cyl}(P_{col}, N_e) = \left( \frac{V_d \cdot N_e}{120 \cdot r \cdot T_{col}} \right) \cdot (\eta_{vol} + \Delta\eta_{vol}) \cdot P_{col} \quad (1.13)$$

Dans ce travail, un observateur est alors utilisé pour estimer les variations  $\Delta\eta_{vol}$  dans le cas du moteur avec suralimentation en air (turbocompresseur).

#### I.3.4.2. Modèle d'injection de carburant

Les modélisations les plus couramment utilisées dans la littérature de la dynamique d'essence prennent en compte le phénomène de mouillage (figure 2.17).

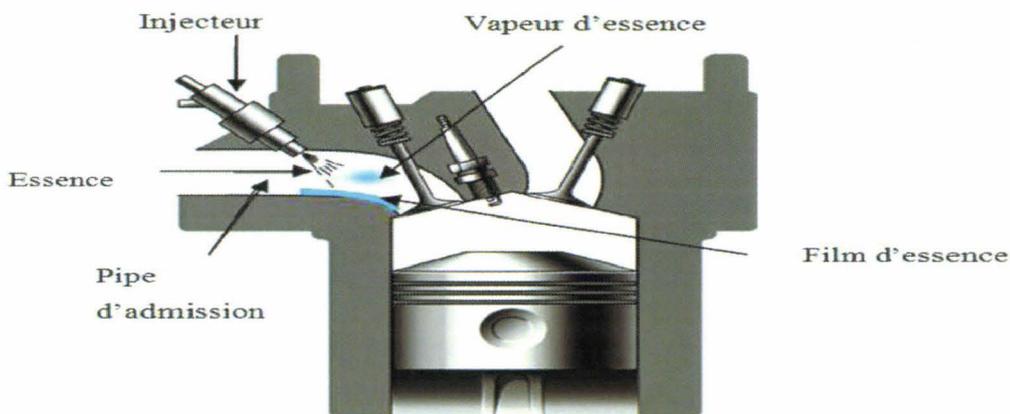


Figure 2.17: Phénomène de mouillage

Une représentation de ce phénomène est donnée dans [Aquino 89], qui consiste à décrire la dynamique de la fraction d'essence sous forme liquide par un modèle linéaire du premier ordre. Cette représentation est reformulée dans [Hendricks & al 92] telle que :

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_f(t) &= \frac{-1}{\tau_f} m_f(t) + \chi \dot{m}_{fi}(t) \\
 \dot{m}_{fv}(t) &= (1 - \chi) \dot{m}_{fi}(t) \\
 \dot{m}_f(t) &= \dot{m}_{fv}(t) + \frac{1}{\tau_f} m_f(t)
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

avec  $\dot{m}_f(t)$ ,  $\dot{m}_{fv}(t)$ ,  $\dot{m}_{fi}(t)$ ,  $\dot{m}_{fv}(t)$  en  $kg \cdot s^{-1}$ , respectivement : le débit d'essence admis dans le cylindre, le débit relatif au film d'essence, le débit de vapeur d'essence et le débit des injecteurs,  $\tau_f$  la constante de temps de l'évaporation d'essence en  $s$  et  $\chi$  représente la fraction d'essence directement admise dans le cylindre.

La relation entre la masse d'essence injectée et le temps d'injection est proportionnelle, ce qui s'exprime par le modèle suivant des injecteurs [Powell & al 98, Kiencke & al 00] :

$$m_{fi}(t) = k_{inj} \cdot (t_{f\_inj} - t_0) \tag{1.15}$$

avec  $t_0$  le temps mort des injecteurs,  $t_{f\_inj}$  le temps d'injection et  $k_{inj}$  un paramètre constant à identifier.

Des méthodes d'identification et/ou d'estimation en ligne des paramètres de ces modèles existent dans la littérature [Haluska & al 98, Arsie & al 03, Locatelli & al 06, Ahn & al 10]. Le modèle donné en (1.14) est généralement utilisée dans le contrôle d'un moteur dont le système d'injection ne nécessite pas la régulation de la pression au niveau de la rampe d'essence (Pression constante réglée à 3bars pour notre cas), pour plus d'informations sur le modèle d'injection de carburant utilisé dans le contrôle des moteurs diesel COMMON RAIL voir [Gauthier & al 07\_1, Gauthier & al 07\_2].

#### I.3.4.3. Modèle du processus de combustion

La combustion est le phénomène clé dans les moteurs à allumage commandé. Elle conditionne la puissance fournie par le moteur, les transferts de chaleur aux parois et la formation des polluants. Vu les objectifs de contrôle envisagés, une modélisation à une seule zone dans le cylindre est adoptée. Dans ce cas, la pression, la température et la composition de la charge dans le cylindre sont considérées comme uniformes. Ce modèle ne distingue pas les gaz brûlés des gaz frais. Le modèle à une zone a pour avantage d'avoir une formulation plus simple des phénomènes de transfert de masse et de chaleur. Le modèle utilisé est celui tiré des travaux de [Grondin & al 04]. Les gaz contenus dans le cylindre respectent la loi des gaz parfaits :

$$P_{cyl_i} V_{cyl_i} = m_{cyl_i} \cdot r \cdot T_{cyl_i} \quad (1.16)$$

Si on dérive l'équation de gaz parfaits dans la chambre de combustion, on obtient :

$$\frac{1}{P_{cyl_i}} \frac{dP_{cyl_i}}{dt} + \frac{1}{V_{cyl_i}} \frac{dV_{cyl_i}}{dt} = \frac{1}{T_{cyl_i}} \frac{dT_{cyl_i}}{dt} \quad (1.17)$$

Le premier principe de la thermodynamique, sous sa forme différentielle pour un gaz parfait, en considérant les chaleurs spécifiques constantes s'écrit :

$$m_{cyl_i} \cdot C_v \cdot \frac{dT_{cyl_i}}{dt} = \frac{dQ}{dt} - P_{cyl_i} \cdot \frac{dV_{cyl_i}}{dt} \quad (1.18)$$

Où le terme  $\frac{dQ}{dt}$  représente le flux de chaleur totale reçu par le système. Après division du terme de droite de (1.18) par  $m \cdot r \cdot T$  et du terme de gauche par  $P \cdot V$ , pour faire apparaître le membre de droite de l'équation (1.17), il vient alors :

$$\frac{1}{T_{cyl_i}} \cdot \frac{dT_{cyl_i}}{dt} = (\gamma - 1) \cdot \left( \frac{1}{P_{cyl_i} \cdot V_{cyl_i}} \cdot \frac{dQ}{dt} - \frac{1}{V_{cyl_i}} \cdot \frac{dV_{cyl_i}}{dt} \right) \quad (1.19)$$

En combinant les équations (1.18) et (1.19), l'équation de la pression dans le cylindre est obtenue :

$$\frac{dP_{cyl_i}}{dt} = \frac{\gamma}{V_{cyl_i}} \cdot \frac{dV_{cyl_i}}{dt} P_{cyl_i} + \frac{\gamma - 1}{V_{cyl_i}} \cdot \frac{dQ}{dt} \quad (1.20)$$

La loi de conservation de l'énergie fait que le flux de chaleur total reçu par le système est décomposé en quatre termes distincts (équation d'équilibre thermodynamique) :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_{in}}{dt} + \frac{dQ_{comb}}{dt} - \frac{dQ_{out}}{dt} - \frac{dQ_p}{dt} \quad (1.21)$$

avec  $\frac{dQ_{in}}{dt}$  flux de chaleur relatif aux gaz admis,  $\frac{dQ_{comb}}{dt}$  énergie libérée par la combustion du mélange air carburant,  $\frac{dQ_{out}}{dt}$  flux de chaleur des gaz qui s'échappent des cylindres et  $\frac{dQ_p}{dt}$  le

flux de chaleur perdu par transfert thermique.

Le flux de chaleur relatif au gaz admis dans le cylindre est donné par l'équation (1.22), utilisant le débit d'air entrant le cylindre  $\dot{m}_{a\_cyl}$  et le débit entrant dans le cylindre par la soupape d'échappement  $\dot{m}_{e\_cyl}$  :

$$\frac{dQ_{in}}{dt} = C_p \dot{m}_{a\_cyl} \cdot T_a + C_p \dot{m}_{e\_cyl} \cdot T_e \quad (1.22)$$

Le flux de chaleur des gaz qui s'échappent des cylindres quant à lui est donné dans l'équation (1.23), en fonction des débit sortants de la soupape d'admission et de la soupape d'échappement qui sont respectivement  $\dot{m}_{cyl\_a}$  et  $\dot{m}_{cyl\_e}$ .

$$\frac{dQ_{out}}{dt} = C_p (\dot{m}_{cyl\_a_i} + \dot{m}_{cyl\_e_i}) \cdot T_{cyl_i} \quad (1.23)$$

En appliquant la loi de la conservation de la masse, les évolutions de la masse et de la pression dans le cylindre sont gouvernées par le système du premier ordre suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{cyl_i}}{dt} = \frac{\gamma}{V_{cyl_i}} & \left[ (r \cdot T_a \cdot \dot{m}_{a\_cyl_i} + r \cdot T_e \cdot \dot{m}_{e\_cyl_i}) - r \cdot T_{cyl_i} \cdot (\dot{m}_{cyl\_a_i} + \dot{m}_{cyl\_e_i}) - P_{cyl_i} \frac{dV_{cyl_i}}{dt} \right] \\ & + \frac{\gamma-1}{V_{cyl_i}} \cdot \left[ \frac{dQ_{comb}}{dt} - \frac{dQ_p}{dt} \right] \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\frac{d\dot{m}_{cyl_i}}{dt} = \dot{m}_{f_i} + \dot{m}_{a\_cyl_i} + \dot{m}_{e\_cyl_i} - \dot{m}_{cyl\_a_i} - \dot{m}_{cyl\_e_i} \quad (1.25)$$

Le volume dans le cylindre ainsi que sa dérivée sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} V_{cyl_i} &= V_m + \left[ 1 + \frac{1}{2}(r_c - 1) \cdot (\beta_{bm} + 1 - \cos(\theta_i) - \sqrt{\beta_{bm}^2 - \sin^2(\theta_i)}) \right] \\ \frac{dV_{cyl_i}}{dt} &= V_m \cdot \frac{1}{2}(r_c - 1) \sin(\theta_i) \cdot \frac{d\theta_{cyl_i}}{dt} \left( 1 - \frac{\cos(\theta_i)}{\sqrt{\beta_{bm}^2 - \sin^2(\theta_i)}} \right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Le taux de dégagement de chaleur relatif à l'énergie libérée par la combustion du mélange est modélisé à l'aide d'une phase de Wiebe [Wiebe 67]. L'énergie apportée est fonction de la quantité de carburant brûlé :

$$\frac{dQ_{comb}}{dt} = 6.908 \cdot \frac{Q_{comb}}{\theta_{comb}} \cdot (f+1) \cdot \left( \frac{\alpha}{\theta_{comb}} \right)^f \cdot e^{-6.908 \cdot \left( \frac{\alpha}{\theta_{comb}} \right)^{f+1}} \quad (1.27)$$

L'énergie totale apportée par la combustion est donnée par la relation :

$$Q_{comb} = m_{carb} \cdot PCI \cdot \eta_{comb} \quad (1.28)$$

Les transferts thermiques sont modélisés par l'égalité [Woschni 67]:

$$\frac{dQ_p}{dt} = S_{cyl} \cdot h_c \cdot (T_{cyl} - T_{parois}) \quad (1.29)$$

Avec  $S_{cyl} = \alpha \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} + \pi \cdot D \cdot \frac{L}{2} \left[ \beta_{bm} + 1 - \cos(\theta) \sqrt{\beta_{bm}^2 - \sin^2(\theta)} \right]$  et le coefficient  $h_c$  est

déterminé utilisant la formule de Wochni :

$$h_c = 3.26 \cdot P_{cyl_i}^{0.8} \cdot D^{-0.2} \cdot T_{cyl_i}^{-0.53} \cdot w^{0.8} \quad (1.30)$$

Les modèles présentés permettent donc de simuler la pression dans chaque cylindre. A partir de ces pressions et du mouvement de translation qu'elles imposent à leur piston respectif, un mouvement de rotation est induit sur un arbre, appelé vilebrequin. Le paragraphe suivant présente les modèles de la dynamique de ce vilebrequin.

#### I.3.4.4. Modèle de la dynamique bielle-vilebrequin

Le schéma de la figure 2.18 représente l'ensemble piston / bielle / manivelle en mouvement dans chaque cylindre qui permet d'obtenir la rotation du vilebrequin à partir de la translation des pistons. Ces mouvements de translation proviennent de la combustion du mélange air/carburant mis sous pression dans les cylindres.

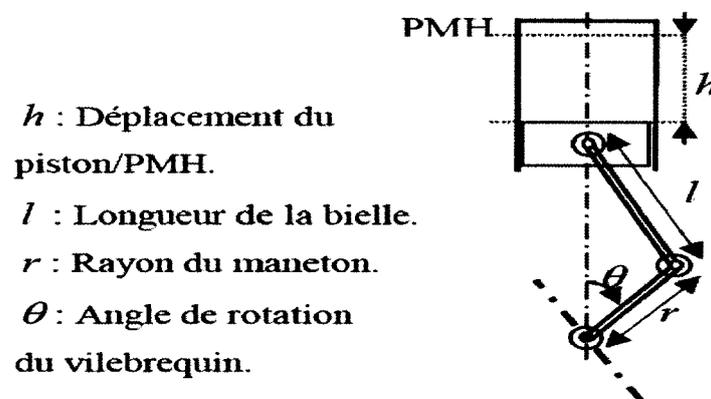


Figure 2.18 : Système bielle vilebrequin

En utilisant le principe fondamental de la dynamique, l'équation classique obtenue pour les mouvements de rotation donne une relation entre le couple indiqué du moteur  $C_{ind}$  et l'accélération angulaire du vilebrequin  $\ddot{\theta}$  :

$$J_m \cdot \ddot{\theta} = C_{ind} - C_r \quad (1.31)$$

$C_r$  représente le couple résistant du moteur (couple de charge plus le couple du frottement), et  $J_m$  le moment d'inertie de l'arbre moteur. Ce dernier est composé du moment d'inertie propre au vilebrequin  $J_{vil}$  auquel s'ajoute la contribution de la masse de la bielle. La bielle est assimilée à un axe sans masse portant à chacune de ses extrémités une masse ponctuelle relative à la position du centre de gravité :

$$J_m = J_{vil} + \left( \frac{l_1}{l} \cdot m_{bielle} \right) \cdot r^2 \quad (1.32)$$

Avec  $m_{bielle}$  la masse totale de la bielle et  $l_1$  la distance entre le centre de gravité de la bielle et son axe coté vilebrequin.

Le couple indiqué  $C_{ind}$  résulte de l'action des gaz sur le piston, il traduit le travail thermodynamique transmis au vilebrequin, il est relié à la pression dans le cylindre et à la position angulaire de la manière suivante :

$$C_{ind} = (P_{cyl} - P_{atm}) \cdot \frac{\pi \cdot D^e}{4} \cdot g(\theta) \quad (1.33)$$

$$\text{avec } g(\theta) = r \cdot \sin(\theta) \cdot \left[ 1 + \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\beta_{bm}^2 - \sin^2(\theta)}} \right]$$

Le couple de frottement est déterminé par la formule suivante :

$$C_{fr} = \frac{V_d \cdot PMF}{4 \cdot \pi} \quad (1.34)$$

avec  $PMF$  la pression moyenne de frottement calculée en fonction de la vitesse moyenne du piston :

$$PMF = \frac{r_c - 4}{14.5} + 0.45 \cdot 10^{-3} \cdot N + 3.75 \cdot 10^{-3} \cdot \bar{v}_p^2 \quad (1.35)$$

L'expression du couple indiqué (1.33) peut s'écrire aussi en fonction de la vitesse de rotation, de la masse d'air admise dans le cylindre, de la richesse du mélange et de l'instant d'allumage comme suit :

$$C_{ind} = c_1 \cdot \frac{m_{cyl}(t - \tau_1)}{\dot{\theta}(t - \tau_1)} \cdot AFR(t - \tau_1) \cdot IA(t - \tau_2) \quad (1.36)$$

$\tau_1$  représente le retard de la production de couple,  $\tau_2$  représente le retard entre l'instant d'allumage et l'instant où le couple fournie est transmis au vilebrequin. L'influence de l'instant d'allumage  $IA$  pour un couple donné s'écrit en fonction de l'instant d'avance à l'allumage  $AA$  et de l'instant d'avance optimale  $\varphi_{opt}$  de la manière suivante

$$IA = \left( \cos(AA - \varphi_{opt}) \right)^{2.875} \quad (1.37)$$

La constante  $c_1$  peut être utilisé pour représenter le couple maximale.

#### I.3.4.5. Modèle du collecteur d'échappement

Sur un moteur à allumage commandé, les gaz d'échappement sortent des chambres de combustion par des tubulures individuelles qui se raccordent en un point de confluence vers un collecteur d'échappement (figure 2.19).

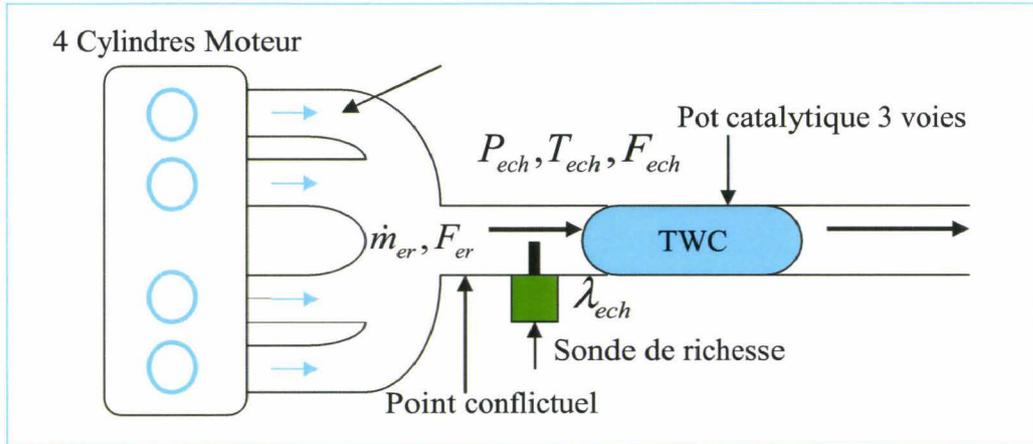


Figure 2.19 : Collecteur d'échappement

La loi des gaz parfaits au niveau du collecteur d'échappement donne :

$$P_{exh} V_{exh} = m_{exh} R T_{exh} \quad (1.38)$$

Le modèle moyen exprimant la dynamique de la pression au collecteur d'échappement est:

$$\dot{P}_{exh}(t) = \frac{R \cdot T_{exh}(t)}{V_{exh}(t)} (\dot{m}_{er_i}(t) - \dot{m}_{TWC}(t)) \quad (1.39)$$

Une autre variable importante à prendre en compte est la fraction d'air globale  $F_{ech}$  au collecteur d'échappement, sa dynamique peut s'écrire:

$$\dot{F}_{ech}(t) = \frac{R \cdot T_{ech}(t)}{P_{ech} \cdot V_{ech}} \dot{m}_{er}(t) \cdot (F_{er}(t) - F_{ech}(t)) \quad (1.40)$$

Avec  $\dot{m}_{er}(t)$  et  $F_{er}(t)$  représentent le débit et la fraction d'air au niveau des sorties des cylindres. Une façon de prendre en compte la variation de température dans le collecteur d'échappement est d'écrire:

$$\dot{F}_{exh}(t) = \frac{R \cdot T_{exh}(t)}{P_{exh} \cdot V_{exh}} \dot{m}_{er}(t) \cdot (F_{er}(t) - F_{exh}(t)) - \frac{F_{exh}(t)}{T_{exh}(t)} \left[ \frac{dP_{exh}}{dt} - \frac{P_{exh}}{T_{exh}} \cdot \frac{dT_{exh}}{dt} \right] \quad (1.41)$$

La fraction d'air moyenne en sortie des cylindres est donnée par :

$$F_{er}(t) = \frac{\dot{m}_{cyl}(t - \tau_3) - \lambda_s \dot{m}_{ess}(t - \tau_3)}{\dot{m}_{cyl}(t - \tau_3) + \dot{m}_{ess}(t - \tau_3)} \quad (1.42)$$

Avec  $\tau_3$  représente le retard entre l'instant où le mélange est injecté et l'instant où les gaz brûlés correspondant sont refoulés par la soupape d'échappement,  $\dot{m}_{cyl}$  et  $\dot{m}_{ess}$  représentent respectivement le débit d'air et d'essence admis dans le cylindre.

L'équation (1.42) peut s'écrire aussi en fonction de la richesse en sortie des cylindres  $\lambda_{er}$  :

$$F_{er}(t) = \frac{\lambda_{er} - 1}{\lambda_{er} \cdot \lambda_s + 1} \quad (1.43)$$

Alors que, la fraction d'air globale au collecteur d'échappement est reliée à la valeur de la richesse globale par la formule :

$$F_{exh}(t) = \frac{\lambda_{exh} - 1}{\lambda_{exh} \cdot \lambda_s + 1} \quad (1.44)$$

#### I.4. Conclusion

Ce premier chapitre a présenté une vue globale concernant le moteur à allumage commandé. En premier lieu, quelques généralités ont été définies, telles que, son principe de fonctionnement cyclique, son diagramme de distribution, l'ordre d'allumage des cylindres ainsi que leurs phasages, la formation des différents polluants résultats de son processus de combustion pour finir sur la problématique de cette thèse, la prise en compte des *variations cylindre à cylindre et cycle à cycle d'un MAC*.

En second lieu, les différents types de modèles capables de rendre compte du comportement statique et/ou dynamique du moteur ont été définis, une attention particulière a été mise sur les *modèles cylindre à cylindre, à temps discret*, formulés dans le *domaine angulaire*.

Enfin, un état de l'art portant sur les différentes architectures du contrôle moteur ainsi que les modèles correspondants a été proposé. Là aussi, une attention particulière a été donnée aux problèmes d'estimation et de contrôle cylindre à cylindre, telles que le problème d'estimation du débit d'air, de richesse et de couple individuels, mais aussi le contrôle de l'injection d'essence et l'avance à l'allumage cylindre à cylindre.

Le contrôle cylindre à cylindre est un réel défi pour la communauté du contrôle moteur. Ce problème est réputé difficile de par le nombre limité de capteurs permettant de remonter à des paramètres propres à chacun des cylindres. Ces variables ainsi obtenues, permettent d'introduire de *nouveaux degrés de liberté* au système de contrôle moteur afin de mieux *maîtriser le processus de combustion* dans chacun des cylindres, et par conséquent les émissions polluantes générées en sortie du moteur.

En plus du nombre limité de capteurs, le caractère non linéaire des différentes dynamiques qui caractérisent le fonctionnement du moteur complexifie son étude. Ces problématiques nécessitent le développement et l'utilisation d'outils de contrôles avancés permettant de gérer ces non linéarités. De plus, la propriété de périodicité du moteur dans le domaine angulaire joue un rôle primordial qui peut être exploité.

Il est alors possible de considérer une représentation du comportement de chacun des cylindres dans un intervalle angulaire donné d'un cycle moteur. La périodicité du moteur peut être préservée et les problèmes de contrôle cylindre à cylindre peuvent se reformuler en utilisant une représentation non linéaire à coefficients périodiques.

Pour prendre en compte les non linéarités des modèles à coefficients périodiques étudiées, la représentation floue de type Takagi-Sugeno est utilisée dans les développements proposés dans nos travaux. Le chapitre suivant présente une étude bibliographique sur cette famille de modèles.

## Chapitre II. Modèles flous discrets de type Takagi-Sugeno (TS)

|  |           |
|--|-----------|
| <b>II.1. Introduction</b>  | <b>66</b> |
| <b>II.2. Définition et problématique</b>                                 | <b>66</b> |
| II.2.1. Définition des modèles Takagi-Sugeno                             | 66        |
| II.2.2. Approche par secteur non linéaire                                | 67        |
| II.2.3. Problème à base de contraintes LMI                               | 69        |
| II.2.4. Relaxations  | 71        |
| <b>II.3. Stabilité et stabilisation des modèles TS discrets</b>          | <b>72</b> |
| II.3.1. Seconde Méthode de Lyapunov                                      | 72        |
| II.3.2. Stabilité quadratique des modèles Takagi-Sugeno                  | 73        |
| II.3.3. Stabilisation quadratique des modèles Takagi-Sugeno              | 75        |
| II.3.4. Stabilisation par observateur des modèles Takagi-Sugeno          | 76        |
| <b>II.4. Discussion sur le conservatisme des résultats obtenus</b>       | <b>79</b> |
| II.4.1. Stabilisation non quadratique des modèles Takagi-Sugeno discrets | 81        |
| <b>II.5. Conclusion</b>  | <b>84</b> |

## II.1. Introduction

Ce deuxième chapitre présente un état de l'art des résultats disponibles concernant les modèles de type Takagi-Sugeno à temps discret [Takagi & Sugeno 85]. La première partie concerne leur définition ainsi que leur construction à partir d'un modèle non linéaire. La seconde partie est dédiée à l'analyse de la stabilité ainsi qu'à la synthèse des lois de commande pour les modèles TS discrets. Le formalisme des inégalités matricielles linéaires (LMI) [Boyd & al 94] et les propriétés matricielles utilisées pour cette analyse sont rappelés. Un overview, spécifiquement dédié aux modèles TS discrets, des méthodes présentées et des résultats obtenus peut être trouvé dans [Guerra et al. 09]. Enfin, les limites de l'approche présentée et les résultats actuellement disponibles dans la littérature sont discutées.

## II.2. Définition et problématique

### II.2.1. Définition des modèles Takagi-Sugeno

Les modèles Takagi-Sugeno (TS) sont composés d'un ensemble de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires vérifiant la propriété de somme convexe (2.2) [Takagi & Sugeno 85]. Ils peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, h_i(z(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \quad (2.2)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état du modèle,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des entrées, et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des sorties. Les matrices  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  représente un ensemble de  $r$  modèles linéaires. Les fonctions d'appartenance  $h_i(\cdot)$  ont la propriété de somme convexe (2.2) et sont des fonctions d'un vecteur  $z(t) \in \mathbb{R}^z$  appelé vecteur des prémisses. Ce dernier peut dépendre linéairement ou non du vecteur d'état. Plusieurs méthodes permettent d'obtenir un modèle TS à partir d'un modèle non linéaire, soit par linéarisation autour de points de fonctionnement, soit par un découpage en secteur non linéaire [Tanaka & Wang 01]. Cette dernière méthode permet d'obtenir un représentant de type TS d'un modèle non linéaire qui est identique au modèle non linéaire dans un compact de l'espace des variables de prémisses.

De manière générale, il est possible de transformer un modèle affine en la commande (2.3), où  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  et  $h(\cdot)$  sont des fonctions non linéaires en un modèle TS de la forme (2.1).

$$\begin{cases} x(t+1) = f(z(t))x(t) + g(z(t))u(t) \\ y(t) = h(z(t))x(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

Le représentant TS (2.1) d'un modèle non linéaire (2.3) n'est pas unique [Taniguchi & al 01] et le nombre de sous-modèles linéaires qu'il contient augmente exponentiellement avec le nombre  $k$  de fonctions non linéaires distinctes du modèle (2.3) pour atteindre  $2^k$ . Cette notion de non unicité pose la question du choix du bon représentant au sens du respect des contraintes imposées pour la synthèse d'une loi de commande (robustesse/performances) [Ohtake & al 09].

**Notations:**

Soient  $Y_i, i \in \{1, \dots, r\}$ , des matrices de dimensions appropriées, et  $h_i(\cdot)$  des fonctions scalaires ayant la propriété de somme convexe, les notations suivantes sont utilisées :

$$Y_z = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) Y_i \quad (2.4)$$

$$Y_{z+} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t+1)) Y_i \quad (2.5)$$

$$Y_{z-} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t-1)) Y_i \quad (2.6)$$

$$Y_{zz} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) Y_{ij} \quad (2.7)$$

Quand il n'y a pas d'ambiguïtés possibles, le terme (\*) dans une inégalité matricielle indique

la quantité transposée, par exemple:  $\begin{bmatrix} P & (*) \\ A_z & G \end{bmatrix} < 0$  est équivalent à  $\begin{bmatrix} P & A_z^T \\ A_z & G \end{bmatrix} < 0$ ,

$G + A + (*) < 0$  est équivalent à  $G + A + A^T < 0$ .

**II.2.2. Approche par secteur non linéaire**

Considérons le modèle non linéaire (2.3), en supposant qu'il existe un compact des variables de prémisses  $z(t) \in C \subset \mathbb{R}^z$  sur lequel les non linéarités du modèle sont bornées.

Soient  $nl_i(\cdot) \in [\underline{nl}_i, \overline{nl}_i]$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  ces non linéarités, il est alors possible d'écrire sur

$C \subset \mathbb{R}^z$  [Morère 01] :  $nl_i(\cdot) = \underline{nl}_i w_0^i(\cdot) + \overline{nl}_i w_1^i(\cdot)$  avec

$$\begin{cases} w_0^i(\cdot) = (\overline{nl}_i - nl_i(\cdot)) / (\overline{nl}_i - \underline{nl}_i) \\ w_1^i(\cdot) = (nl_i(\cdot) - \underline{nl}_i) / (\overline{nl}_i - \underline{nl}_i) \end{cases} \quad (2.8)$$

Notons que de façon immédiate on a  $w_0^i(\cdot) \geq 0$ ,  $w_1^i(\cdot) \geq 0$  et  $w_0^i(\cdot) + w_1^i(\cdot) = 1$ . Les fonctions non linéaires  $h_i(z(t))$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  du modèle TS (2.1) se construisent alors directement à partir de la formule :

$$h_{1+i_0+i_1 \times 2 + \dots + i_{k-1} \times 2^{k-1}}(\cdot) = \prod_{j=1}^k w_{i_j}^j(\cdot) \quad (2.9)$$

Les fonctions d'appartenance sont donc dans ce cas une combinaison de fonctions non linéaire présentes dans le modèle (2.3). La propriété de somme convexe (2.2) se déduit directement.

**Exemple :** Soit le modèle suivant avec  $\alpha(t) \in [\underline{\alpha}(t), \overline{\alpha}(t)]$  :

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(x_1(t)) \\ \alpha(t) & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.10)$$

Un représentant TS s'obtient de la façon suivante en considérant comme vecteur des prémisses  $z^T(t) = [x_1(t) \quad \alpha(t)]$ . Les deux non linéarités s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} w_0^1(x_1(t)) &= \frac{1 - \sin(x_1(t))}{2}, & w_1^1(x_1(t)) &= \frac{1 + \sin(x_1(t))}{2} \\ w_0^2(\alpha(t)) &= \frac{\overline{\alpha}(t) - \alpha(t)}{\overline{\alpha}(t) - \underline{\alpha}(t)}, & w_1^2(\alpha(t)) &= 1 - w_0^2(\alpha(t)) \end{aligned}$$

En utilisant (2.9), on obtient :  $h_1(z) = w_0^1(x_1) \cdot w_0^2(\alpha)$ ,  $h_2(z) = w_1^1(x_1) \cdot w_0^2(\alpha)$ ,  $h_3(z) = w_0^1(x_1) \cdot w_1^2(\alpha)$  et  $h_4(z) = w_1^1(x_1) \cdot w_1^2(\alpha)$ . Un représentant TS de (2.10) s'écrit alors :

$x(t+1) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$ , où les modèles linéaires sont donnés :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \overline{\alpha}(t) & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \overline{\alpha}(t) & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \underline{\alpha}(t) & -1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \underline{\alpha}(t) & -1 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### II.2.3. Problème à base de contraintes LMI

Les conditions de stabilité et/ou de stabilisation sont généralement mises sous la forme de problème d'inégalités matricielles linéaires LMI (Linear Matrix Inequality) [Boyd et al. 94]. La description des contraintes LMI et une méthode permettant de résoudre les problèmes qui leurs sont associés sont présentés dans cette section. Différents lemmes permettant de manipuler les inégalités matricielles afin de les rendre linéaires dans leurs inconnues sont présentés en deuxième partie.

#### ◆ Utilisation du Formalisme LMI :

Les contraintes LMI (Linear Matrix Inequality) s'écrivent sous la forme :

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i < 0 \quad (2.11)$$

Avec :

- $x = [x_1, \dots, x_m]$  est un vecteur de  $m$  variables de décisions, qui sont dans notre cas, des matrices à rechercher.
- $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  sont des matrices symétriques connues.
- $F(x)$  est une fonction qui doit être affine par rapport aux variables de décisions  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  pour que le problème soit de type LMI.

Un problème de faisabilité LMI s'écrit :

$$\text{Trouver } x_i, i \in \{1, \dots, m\}, \text{ tels que } F(x) < 0 \quad (2.12)$$

Le domaine de solutions  $D = \{x \in \mathbb{R}^m, F(x) < 0\}$  qui désigne l'ensemble des variables  $x$  satisfaisant l'inégalité matricielle (2.11) étant convexe [Scherer & al 04], le problème de faisabilité (2.12) entre dans la classe des problèmes d'optimisation convexes. L'avantage majeur de ce type de problème d'optimisation est qu'il existe des algorithmes de résolutions très efficaces permettant de calculer un optimum global au problème. Nous citons par exemple, les algorithmes basés sur les méthodes du point intérieur et les solveurs associés (SeDumi, LMILab, SDPT3, SDPA) [Boyd & al 94]. Différentes boîtes à outils existent pour assurer l'interface de ces solveurs avec Matlab. Dans toute la suite, nous utiliserons la boîte à outils « LMI Toolbox » de Matlab pour résoudre les problèmes sous contraintes LMI.

Dans le cas où la fonction  $F(x)$  est une fonction non linéaire par rapport aux variables de décisions, il n'y a pas d'algorithme générique de résolution possible. Un cas classique dans le domaine de la commande ou l'observation des systèmes est de se retrouver face à des problèmes BMI (Bi-Linear Matrix Inequality). Dans certains cas il est possible de reformuler le problème de manière LMI en utilisant diverses propriétés matricielles.

♦ **Propriétés :**

**Lemme (congruence):** Soient deux matrices  $P$  et  $Q$ , si  $P$  est définie positive et si  $Q$  est de rang plein en colonne, alors la quantité  $QPQ^T$  est définie positive.

**Lemme (Complément de Schur) :** Soient  $A, \Phi, P$  et  $Q$  des matrices de taille appropriée. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

$$1. A^T P A - Q < 0, P > 0 \quad (2.13)$$

$$2. \begin{bmatrix} -Q & A^T P \\ P A & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (2.14)$$

$$3. \exists \Phi, \begin{bmatrix} -Q & A^T \Phi \\ \Phi^T A & -\Phi - \Phi^T + P \end{bmatrix} < 0, P > 0 \quad (2.15)$$

Remarque : L'équivalence entre (2.13) et (2.14) est classiquement appelée complément de Schur. La propriété (2.15) qui représente une généralisation introduisant une variable supplémentaire se retrouve dans [Oliveira & al 99]. Notons que si  $\Phi = P$ , on retrouve (2.14).

**Lemme de Finsler [De Oliveira & Skelton 01]:** Soit un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ , et des matrices  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telle que  $\text{rang}(R) < n$ . Les deux expressions suivantes sont équivalentes :

$$1. x^T Q x < 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ tels que } R x = 0 \quad (2.16)$$

$$2. \exists S \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ telle que } Q + S R + R^T S^T < 0 \quad (2.17)$$

Dû à la nature polytopique des modèles considérés, la plupart des problèmes de stabilité et de stabilisation rencontrés dans la suite se mettent sous la forme d'une simple somme :  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \Upsilon_i < 0$ , d'une double somme :  $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} < 0$ , ou de multiples sommes. Les différentes méthodes pour assurer le caractère négatif de ces inégalités sont présentées dans la partie suivante.

#### II.2.4. Relaxations

Dans toute cette partie, nous supposons que la seule connaissance disponible sur les  $h_i$  est la propriété de somme convexe. Dans le cas d'une simple somme, avec  $\Upsilon_i$  des matrices de taille appropriée, il s'agit de trouver des conditions suffisantes assurant :

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \Upsilon_i < 0 \quad (2.18)$$

Ce résultat est défini sous forme de lemme suivant.

**Lemme 1 :** Soit  $\Upsilon_i$  des matrices de taille appropriée, (2.18) est vérifiée si :

$$\Upsilon_i < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (2.19)$$

Dans le cas d'une double somme avec  $\Upsilon_{ij}$  des matrices de taille appropriée :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} < 0 \quad (2.20)$$

Dans ce cas de double somme plusieurs résultats sont proposés dans la littérature, deux exemples significatifs sont présentés lemmes 2 et 3.

**Lemme 2 [Tanaka et al. 98] :** Soient  $\Upsilon_{ij}$  des matrices de taille appropriée, (2.20) est vérifiée si :

$$\Upsilon_{ii} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (2.21)$$

$$\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0 \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 \quad i < j \quad (2.22)$$

**Lemme 3 [Tuan et al. 01] :** Soient  $\Upsilon_{ij}$  des matrices de taille appropriée est vérifiée si :

$$\Upsilon_{ii} < 0, \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (2.23)$$

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii} + \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0, \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, i \neq j \quad (2.24)$$

Remarque : Le domaine des solutions satisfaisant les conditions du lemme 3 inclut le domaine des solutions du lemme 2.

Certains problèmes traités dans la suite de ce mémoire sont sous la forme d'une triple somme avec  $h_i(\cdot)$  et  $g_k(\cdot)$  des fonctions positives scalaires ayant la propriété de somme convexe et  $\Upsilon_{ij}^k$  des matrices de tailles appropriées. Ils s'écrivent:

$$\Upsilon_{ghh} = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r g_k(\cdot) h_i(\cdot) h_j(\cdot) \Upsilon_{ij}^k < 0 \quad (2.25)$$

Les fonctions  $h_i(\cdot)$  et  $g_k(\cdot)$  étant indépendantes, il s'agit donc d'une application directe du lemme 1 pour  $g_k(\cdot)$  conjointement avec les lemmes 2 ou 3 suivant la version. On se ramène donc aux cas précédents en utilisant :

$$\Upsilon_{khh} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\cdot) h_j(\cdot) \Upsilon_{ij}^k < 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \quad (2.26)$$

**Lemme 4 :** Soient  $\Upsilon_{ij}^k$  des matrices et  $h_i(i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3$  des fonctions positives scalaires ayant la propriété de somme convexe, si les conditions (2.27) et (2.28) sont vérifiées alors (2.25) est vraie :

$$\Upsilon_{ii}^k < 0, \forall (i, k) \in \{1, \dots, r\}^2 \quad (2.27)$$

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii}^k + \Upsilon_{ij}^k + \Upsilon_{ji}^k < 0, \forall (i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3, i \neq j \quad (2.28)$$

## II.3. Stabilité et stabilisation des modèles TS discrets

### II.3.1. Seconde Méthode de Lyapunov

L'analyse de la stabilité des modèles Takagi-Sugeno s'effectue principalement en utilisant la méthode directe de Lyapunov [Lyapunov 1892]. Cette méthode s'intéresse à la convergence de l'état du système vers des points ou états d'équilibre. Par la suite, il est supposé que le point d'équilibre est unique et localisé à l'origine de l'espace d'état ( $x = 0$ ).

La seconde méthode de Lyapunov est basée sur la constatation suivante : si l'énergie du système se dissipe au cours de temps, alors le système tend vers un état d'équilibre. Elle implique le choix d'une fonction candidate dite fonction de Lyapunov. La définition de cette méthode ainsi que les conditions qui doivent être vérifiées par la fonction de Lyapunov sont formulées dans le théorème suivant.

**Théorème 1 : (Seconde méthode Lyapunov)**

L'état d'équilibre  $x = 0$  est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction scalaire  $V(x(t))$  telle que :

$$V(0) = 0 \quad (2.29)$$

$$V(x(t)) > 0, \quad \forall x(t) \neq 0 \quad (2.30)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n \quad (2.31)$$

$$V(x(t+1)) - V(x(t)) < 0, \quad \forall x(t) \neq 0 \quad (2.32)$$

Une fonction vérifiant les conditions (2.29), (2.30), (2.31) et (2.32) est appelée fonction candidate de Lyapunov, elle permet de prouver la stabilité asymptotique globale du système si la condition (2.32) est vérifiée.

La fonction candidate de Lyapunov la plus couramment utilisée est quadratique, définie par :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad P = P^T > 0 \quad (2.33)$$

L'étude de la stabilité avec ce type de fonction de Lyapunov est dite **stabilité quadratique**. Le fait d'imposer une classe ou une structure particulière de fonction de Lyapunov conduit à n'obtenir (quand il s'agit de l'étude de stabilité des modèles flous de type TS) que des *conditions suffisantes* et non pas des conditions nécessaires et suffisantes comme dans le cas des modèles LTI. Ce premier point représente la première source de conservatisme des résultats obtenus.

II.3.2. Stabilité quadratique des modèles Takagi-Sugeno

Soit le modèle Takagi-Sugeno discret en régime libre suivant :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (2.34)$$

La stabilité quadratique s'étudie en calculant la variation de la fonction de Lyapunov (2.33) :

$$\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t)) = x(t+1)^T P x(t+1) - x(t)^T P x(t) \quad (2.35)$$

En calculant (2.35) le long des trajectoires du modèle (2.34), on obtient :

$$\Delta V(x(t)) = \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right)^T P \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right) - x(t)^T P x(t) \quad (2.36)$$

Ou encore, en utilisant la notation (2.4) :

$$\Delta V(x(t)) = x(t)^T (A_z^T P A_z - P) x(t) < 0 \quad (2.37)$$

Prouver la stabilité quadratique du modèle discret revient à résoudre le problème suivant :

Trouver une matrice  $P > 0$  telle que  $A_z^T P A_z - P < 0$ ,  $\forall z(t) \in \mathbb{R}^z$ . En utilisant le complément de Schur sur  $A_z^T P P^{-1} P A_z - P$ , (2.37) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} -P & (*) \\ P A_z & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (2.38)$$

**Théorème 2:** Le modèle TS discret (2.34) est Globalement Asymptotiquement Stable (GAS) si :

$$\exists P > 0, \begin{bmatrix} -P & (*) \\ P A_i & -P \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (2.39)$$

La condition de stabilité obtenue est seulement une condition suffisante puisqu' aucune information sur les  $h_i$  n'est prise en compte.

Une façon « élégante » d'arriver au même résultat est l'utilisation du Lemme de Finsler. En effet, en utilisant l'état augmenté  $\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix}$ , le modèle (2.34) peut s'écrire sous la forme

d'une contrainte égalité de la manière suivante :

$$[A_z \quad -I] \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.40)$$

et la fonction de Lyapunov (2.35) devient :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.41)$$

L'application du lemme de Finsler (2.16) permet d'obtenir :

$$\exists S, \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} + S [A_z \quad -I] + \begin{bmatrix} A_z^T \\ -I \end{bmatrix} S^T < 0 \quad (2.42)$$

En choisissant  $S = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix}$ , on retrouve directement la condition (2.39). Cette façon de prendre en compte les problèmes est très générique et permet de nombreuses généralisations [Kruszewski 06, Guerra et al. 09].

Les preuves de stabilité rencontrées par la suite seront données en utilisant de Lemme de Finsler quand c'est nécessaire.

### II.3.3. Stabilisation quadratique des modèles Takagi-Sugeno

Soit le modèle TS discret suivant :

$$\begin{cases} x(t+1) = A_z x(t) + B_z u(t) \\ y(t) = C_z x(t) \end{cases} \quad (2.43)$$

Le problème de stabilisation du modèle (2.43) consiste à chercher la loi de commande  $u(t)$  qui permet d'assurer un certain niveau de performances souhaitées de la boucle fermée. La loi de commande la plus utilisée dans le cadre TS est appelée PDC (Parallel Distributed Compensation) [Wang & al. 96]. Cette dernière correspond à un retour d'état non linéaire qui prend en compte les mêmes fonctions positives  $h_i$  que celle du modèle sous la forme :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) = -F_z x(t) \quad (2.44)$$

En utilisant la loi de commande (2.44), la boucle fermée devient :

$$\begin{cases} x(t+1) = (A_z - B_z F_z) x(t) \\ y(t) = C_z x(t) \end{cases} \quad (2.45)$$

La variation de la fonction candidate de Lyapunov (2.33) est négative si :

$$(A_z - B_z F_z)^T P (A_z - B_z F_z) - P < 0 \quad (2.46)$$

En utilisant le complément de Schur le problème suivant est obtenu :

Trouver une matrice  $P$  définie positive et des matrices  $F_i, i \in \{1, \dots, r\}$  telles que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\begin{bmatrix} -P & (*) \\ P(A_z - B_z F_z) & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (2.47)$$

En appliquant la propriété de congruence avec  $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix}$  sur (2.47), on obtient :

$$\begin{bmatrix} -X & (*) \\ A_z X - B_z F_z X & -X \end{bmatrix} < 0 \quad (2.48)$$

En utilisant le changement de variable bijectif  $M_i = F_i X$ , il vient :

$$\begin{bmatrix} -X & (*) \\ A_z X - B_z M_z & -X \end{bmatrix} < 0 \quad (2.49)$$

$$\text{Soit } \Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -X & (*) \\ A_i X - B_i M_j & -X \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

**Théorème 3:** Soient un modèle TS discret, la loi de commande PDC et les  $\Upsilon_{ij}$  définis en (2.50), s'il existe une matrice  $X$  définie positive et des matrices  $M_i, i \in \{1, \dots, r\}$  telles que les conditions (2.23) et (2.24) soient vérifiées, alors la boucle fermée (2.45) est GAS. De plus si le problème a une solution, les gains de la PDC sont donnés par :  $F_i = M_i X^{-1}$ .

La loi de commande (2.44) nécessite la mesure de toutes les composantes du vecteur d'état, Cependant lorsque ces derniers ne sont pas accessibles, l'emploi d'un observateur flou de Type TS peut être associé à la commande. L'analyse de ce dernier est donnée dans la section suivante.

#### II.3.4. Stabilisation par observateur des modèles Takagi-Sugeno

Soit le modèle (2.43) et l'observateur d'état correspondant défini en (2.51) [Tanaka & al 96], où il est supposé que le vecteur des prémisses  $z(t)$  est mesuré, i.e.  $\hat{z}(t) = z(t)$ .

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_z x(t) + B_z u(t) + K_z (y(t) - \hat{y}(t)) \\ y(t) = C_z \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.51)$$

La dynamique de l'erreur de reconstruction  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  est donnée par :

$$\tilde{x}(t+1) = (A_z - K_z C_z) \tilde{x}(t) \quad (2.52)$$

La variation de la fonction de Lyapunov quadratique  $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T \tilde{P} \tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$  est négative si :

$$(A_z - K_z C_z)^T \tilde{P} (A_z - K_z C_z) - \tilde{P} < 0 \quad (2.53)$$

En utilisant le complément de Schur sur  $(A_z - K_z C_z)^T \tilde{P} \tilde{P}^{-1} \tilde{P} (A_z - K_z C_z) - \tilde{P} < 0$  est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P} & (*) \\ \tilde{P} (A_z - K_z C_z) & -\tilde{P} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.54)$$

Soit la quantité suivante :

$$\tilde{\Upsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} -\tilde{P} & (*) \\ \tilde{P} A_i - N_j C_i & -\tilde{P} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

**Théorème 4:** Soient un modèle TS discret (2.43), l'observateur d'état (2.51) et les  $\tilde{Y}_{ij}$  définis en (2.55), s'il existe une matrice  $\tilde{P}$  définie positive et des matrices  $N_i, i \in \{1, \dots, r\}$  telles que les conditions (2.23) et (2.24) soient vérifiées, alors le modèle dynamique de l'erreur de reconstruction (2.52) est GAS. De plus si le problème a une solution, les gains d'observation sont donnés par :  $K_i = \tilde{P}^{-1}N_i$ .

L'application théorème 3 prouve la stabilité de la boucle fermée par l'état (2.45), alors que l'application du théorème 4 prouve la convergence asymptotique de l'erreur de reconstruction d'état (2.52). Les conditions des 2 théorèmes vérifiées pour un même modèle TS ne permet pas, a priori, de garantir la stabilité du retour de sortie. Effectivement, dans ce cas on considère la loi de commande suivante (rappelons que le vecteur des prémisses est mesurable, i.e.  $\hat{z}(t) = z(t)$ ) :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t))F_i\hat{x}(t) = -F_{z(t)}\hat{x}(t) \quad (2.56)$$

La dynamique du système bouclé s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \tilde{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z - B_z F_z & B_z F_z \\ 0 & A_z - K_z C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Vue la structure particulière de la dynamique de la boucle fermée (2.57), un principe de séparation existe. La démonstration peut être énoncée de plusieurs façons, en utilisant le principe de comparaison vectorielle [Ma & al. 98] ou en utilisant des manipulations matricielles [Yoneyama & al. 00].

**Théorème 5:** Soient un modèle TS discret (2.43), la loi de commande PDC (2.56), l'observateur d'état à prémisses mesurables (2.51), les  $Y_{ij}$  définis en (2.50) et les  $\tilde{Y}_{ij}$  définis en (2.55), s'ils existent une matrice  $X > 0$  et des matrices  $M_i, i \in \{1, \dots, r\}$  telles que les conditions (2.23) et (2.24) soient vérifiées pour les  $Y_{ij}$ , et s'il existent une matrice  $\tilde{P}$  et des matrices  $N_i, i \in \{1, \dots, r\}$  telles que les conditions (2.23) et (2.24) soient vérifiées pour les  $\tilde{Y}_{ij}$  alors la boucle fermée (2.57) est GAS. De plus si le problème a une solution, les gains de la PDC sont données par  $F_i = M_i X^{-1}$ , alors que les gains d'observation sont donnés par  $K_i = \tilde{P}^{-1}N_i$ .

Dans les cas où le vecteur de prémisses  $z(t)$  n'est pas mesurable, le principe de séparation n'est plus valable et il devient très difficile d'obtenir des conditions LMI sur la boucle fermée globale. Un certain nombre de résultats existent au prix d'un conservatisme accru [Guerra et al. 06, Ichalal et al. 08] et sont en dehors des problématiques de ce mémoire.

En plus des problématiques de commande et d'observation, de nombreux travaux traitent des aspects de performances et de robustesse reliés aux modèles flous de TS. En effet, les modèles physiques sont souvent sujet à des incertitudes qui peuvent être paramétriques ou liées à des perturbations (bruits de mesures, frottements,...).

Pour traiter les incertitudes de modélisation, le modèle classiquement utilisé s'écrit comme suit en considérant des incertitudes bornées en norme (2.59):

$$\begin{cases} x(t+1) = (A_z + \Delta A_z)x(t) + (B_z + \Delta B_z)u(t) \\ y(t) = (C_z + \Delta C_z)x(t) \end{cases} \quad (2.58)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Delta A_z = H_a \Delta_{az} E_a \\ \|\Delta_{az}\|_2 < 1 \end{cases}, \begin{cases} \Delta B_z = H_b \Delta_{bz} E_b \\ \|\Delta_{bz}\|_2 < 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \Delta C_z = H_c \Delta_{cz} E_c \\ \|\Delta_{cz}\|_2 < 1 \end{cases} \quad (2.59)$$

Où  $H_a, H_b, H_c, E_c, E_b$  et  $E_a \forall i \in \{1, \dots, r\}$  sont des matrices constantes.

En utilisant le modèle incertain (2.58) associée une loi de commande de type (2.44), il est possible d'obtenir des conditions LMI au moyen de quelques transformations matricielles [Tanaka et Wang 01]. D'autres travaux proposent d'introduire les incertitudes de modélisation en considérant des fonctions d'appartenance incertaine au lieu des matrices du modèle [kerkeni & al 09, Lam & Narimani 09].

Afin de pouvoir traiter les différentes perturbations qui peuvent affecter un système physique et de synthétiser des lois de commande garantissant ou optimisant un ou plusieurs critères de performances, le modèle suivant est considéré :

$$\begin{cases} x(t+1) = A_z x(t) + B_{wz} w(t) + B_{uz} u(t), \quad x(0) = 0 \\ r(t) = C_z x(t) + D_{wz} w(t) + D_{uz} u(t) \end{cases} \quad (2.60)$$

où  $w(t) \in L_2$  est une perturbation. Le transfert ainsi défini entre l'entrée de perturbation  $w(t)$  et le vecteur de sortie contrôlée  $r(t)$  doit permettre d'analyser les performances du système de commande en terme de norme  $H_2$  et  $H_\infty$ . Dans ce dernier cas il s'agit de caractériser le

pire cas pour une collection de signaux  $w(t) \in L_2$ . La norme  $H_\infty$  correspond à un gain

$L_2 \rightarrow L_2$ , i.e. trouver la borne supérieure  $\gamma = \sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|r(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}$  du rapport signal de sortie sur

signal de perturbation. Cela revient à minimiser le critère suivant avec  $\gamma > 0$  :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \|r(t)\|_2 < \gamma^2 \sum_{t=0}^{\infty} \|w(t)\|_2 \quad (2.61)$$

Il est donc possible d'écrire les conditions LMI qui permettent de résoudre ce problème. Sans aller plus loin, de nombreux résultats existent et sont basés sur ce type de technique [Tuan & al. 01].

Pour garantir une vitesse de convergence désirée, une contrainte sur la variation de la fonction de Lyapunov appelée Decay rate [Tanaka & al 01] peut être introduite telle que  $\Delta V(x(t)) + 2\alpha V(x(t)) < 0$  avec  $\alpha > 0$ . De façon plus générale, cela correspond à une région LMI (demi-plan à gauche de  $-\alpha$ ) et peut se généraliser à des régions définies par contraintes LMI. Cela permet par exemple de placer les pôles de la boucle fermée de chaque sous modèle dans un domaine donné, on parle de D-stabilité [Boyd et al. 1994].

#### II.4. Discussion sur le conservatisme des résultats obtenus

Les conditions de stabilité ou de stabilisation données pour un modèle TS ne sont que suffisantes. Le conservatisme des résultats provient de plusieurs sources : du choix du modèle, du choix de la fonction candidate de Lyapunov, de la façon d'obtenir une mise sous forme linéaire des conditions de stabilité et enfin de la non prise en compte des fonctions  $h_i$  dans l'analyse de stabilité. Pour réduire ce conservatisme, plusieurs travaux ont été développés selon deux catégories principales.

La première catégorie concerne le choix de la relaxation, c'est-à-dire chercher une façon d'assurer que l'inégalité (2.62) est négative :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Upsilon_{ij} < 0 \quad (2.62)$$

Nous avons déjà cité les travaux de [Tuan & al 01], où des conditions de stabilité relâchées de [Tanaka & al. 96] sont proposées. D'autres méthodes [De Oliveira & al 99, Teixeira & al 03, Liu & al 03] proposent des relaxations des conditions basiques au prix de l'introduction de variables supplémentaires permettant de fournir de nouveaux degrés de liberté au problème.

Dans le même cadre aussi, des travaux comme ceux de [Sala & al 07, Bernal & al 09] introduisent des propriétés reliées aux fonctions d'appartenances et les utilisent afin de relâcher le problème. Dans [Delmotte & al 08], pour des problèmes de « grande taille », les auteurs se servent du lemme d'élimination afin de réduire à la fois le nombre des conditions LMI ainsi que les nombres de variables recherchées.

Quelle que soit la méthode de relaxation utilisée, les résultats obtenus sont fortement dépendants du choix de la fonction de Lyapunov sur laquelle se base l'analyse de stabilité [Daafouz & Bernussou 01, Lam & Narimani 09]. Ce choix fait l'objet de la deuxième catégorie de travaux. Pour sortir du cadre de la stabilité quadratique, [Johansson & al 99] ont proposé une fonction de Lyapunov définie par morceaux utilisant des régions de l'espace d'état. D'autres travaux basés sur le même type de fonctions de Lyapunov [Feng & al 03] ont permis d'obtenir des résultats satisfaisants. Néanmoins, l'efficacité de l'approche dépend de la structure du modèle, par exemple, elle n'apporte pas d'améliorations sur des modèles TS issus de l'approche par secteur non linéaire.

Une autre famille de fonctions de Lyapunov permettant de réduire le conservatisme est basée sur l'utilisation de fonctions non quadratiques. Les premiers travaux dans ce sujet ont été menés dans [Blanco 01, Guerra & al 04]. Ces fonctions prennent en compte la même partition de l'espace des prémisses que celle du modèle TS :

$$V(x(t)) = x(t)^T \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) P_i \right)^{-1} x(t), P_{z(t)} > 0 \quad (2.63)$$

Evidemment, l'utilisation d'une telle fonction de Lyapunov inclut le cas quadratique, il suffit de prendre  $P_i = P$ ,  $M_i, i \in \{1, \dots, r\}$ . La fonction de Lyapunov a été mise sous une forme plus générale dans [Guerra & al 04] comme suit :

$$V(x(t)) = x(t)^T P(z(t)) x(t), P(z(t)) = G_{z(t)}^{-T} P_{z(t)} G_{z(t)}^{-1} > 0 \quad (2.64)$$

Dans [Ding & al 06] une extension de ces derniers résultats a été proposée utilisant une fonction de Lyapunov du type :

$$V(x(t)) = x(t)^T \left( \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) P_{ij} \right) x(t) \quad (2.65)$$

Quelle que soit la fonction de Lyapunov choisie, un moyen d'améliorer le domaine de stabilité est d'utiliser une variation non pas sur un seul pas (entre deux instants), mais sur  $k$  pas [Kruszewski 07] :

$$\Delta_k V(x(t)) = V(x(t+k)) - V(x(t)) < 0, \quad \forall x(t) \neq 0 \text{ avec } k > 1 \quad (2.66)$$

Une preuve met en évidence le fait que plus le nombre de pas  $k$  est important, moins les résultats obtenus sont conservatifs. Basés sur cet outil dans [Guerra & al 09] les résultats existants dans la littérature sont améliorés de façons significatives. Cependant, toutes ces améliorations se font au « prix » d'une augmentation de complexité des problèmes LMI traités qui dépendent du nombre de variables, du nombre d'échantillons et de la taille du modèle TS utilisé.

Parmi tous ces résultats, les développements concernant les fonctions de Lyapunov non quadratiques dans [Guerra & al 04] restent à ce jour un tournant dans l'étude de la stabilité des modèles TS discrets. Les principaux résultats associés sont présentés dans la section suivante.

#### II.4.1. Stabilisation non quadratique des modèles Takagi-Sugeno discrets

En considérant la fonction de Lyapunov non quadratique suivante [Guerra & al 04] :

$$V(x(t)) = x(t)^T G_z^{-T} P_z G_z^{-1} x(t), P_z = P_z^T > 0 \quad (2.67)$$

Avec la loi de commande non PDC :

$$u(t) = - \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \right) \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) G_i \right)^{-1} x(t) = -F_z G_z^{-1} x(t) \quad (2.68)$$

La boucle fermée s'écrit :

$$x(t+1) = (A_z - B_z F_z G_z^{-1}) x(t) \quad (2.69)$$

La variation de la fonction de Lyapunov (2.67) le long de trajectoire du modèle (2.43):

$$\left( A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G_{z(t)}^{-1} \right)^T G_{z(t+1)}^{-T} P_{z(t+1)} G_{z(t+1)}^{-1} \left( A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G_{z(t)}^{-1} \right) - P_{z(t)} < 0 \quad (2.70)$$

Multipliant à gauche par  $G_{z(t)}^T$  et à droite par  $G_{z(t)}$ , (2.70) est vérifiée si :

$$\left( A_{z(t)} G_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G_{z(t)}^{-1} \right)^T G_{z(t+1)}^{-T} P_{z(t+1)} G_{z(t+1)}^{-1} \left( A_{z(t)} G_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} G_{z(t)}^{-1} \right) - P_{z(t)} < 0$$

Puis, l'utilisation de la propriété (2.15) du lemme 3, avec  $\Phi = G_{z(t+1)}$  donne :

$$\begin{bmatrix} -P_{z(t)} & (*) \\ A_{z(t)} G_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t)} & -G_{z(t+1)} - G_{z(t+1)} + P_{z(t+1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.71)$$

Soit la quantité suivante :

$$Y_{ij}^k = \begin{bmatrix} -P_i & (*) \\ A_i G_j - B_i F_j & -G_k - G_k + P_k \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

**Théorème 6:** Soient un modèle TS discret (2.43), la loi de commande non-PDC (2.68) et les  $\Upsilon_{ij}^k$  définis en (2.72), s'il existe des matrices  $P_i$  définies positives, des matrices  $G_i$  et  $F_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  telles que les conditions (2.27) et (2.28) soient vérifiées alors la boucle fermée (2.69) est GAS.

Des résultats similaires peuvent se déduire lorsqu'il s'agit d'un problème d'observation en utilisant la forme suivante d'observateur :

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_z x(t) + B_z u(t) + S_z^{-1} K_z (y(t) - \hat{y}(t)) \\ y(t) = C_z \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.73)$$

Utilisant (2.73), la dynamique de l'erreur d'estimation  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  s'écrit alors :

$$\tilde{x}(t+1) = (A_z - S_z^{-1} K_z C_z) \tilde{x}(t) \quad (2.74)$$

La fonction de Lyapunov choisie et de même forme que (2.67) :

$$V(x(t)) = x(t)^T \tilde{P}_z x(t), \tilde{P}_z = \tilde{P}_z^T > 0 \quad (2.75)$$

La variation de la fonction de Lyapunov (2.75) s'écrit :

$$(A_{z(t)} - S_{z(t)}^{-1} K_{z(t)} C_{z(t)})^T \tilde{P}_{z(t+1)} (A_{z(t)} - S_{z(t)}^{-1} K_{z(t)} C_{z(t)}) - \tilde{P}_{z(t)} < 0 \quad (2.76)$$

L'utilisation de la propriété (2.15) du lemme 3 avec  $\Phi = S_{z(t)}$  donne :

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P}_{z(t)} & (*) \\ S_{z(t)} A_{z(t)} - K_{z(t)} C_{z(t)} & -S_{z(t)} - S_{z(t)} + \tilde{P}_{z(t+1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.77)$$

Soit :

$$\tilde{\Upsilon}_{ij}^k = \begin{bmatrix} -\tilde{P}_i & (*) \\ G_j A_i - K_j C_i & -G_j - G_j + \tilde{P}_k \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

**Théorème 7 :** Soient un modèle TS discret (2.43), l'observateur flou (2.73) et les  $\tilde{\Upsilon}_{ij}^k$  définis en (2.78), s'il existe des matrices  $\tilde{P}_i$  définies positives, des matrices  $S_i$  et  $K_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  telles que les conditions (2.27) et (2.28) soient vérifiées alors la boucle fermée (2.74) est GAS.

**Discussion :**

L'utilisation de nouvelles fonctions de Lyapunov non quadratiques ainsi que des lois de commande plus complexes augmentent d'une part le nombre de variables recherchées et

d'autre part, le nombre de conditions LMI. La capacité des solveurs actuels est mise à mal lorsque le nombre de variables à rechercher dépasse quelques centaines. Un facteur important à prendre en compte est le fait que le temps de calcul augmente linéairement par rapport à la taille des conditions, alors qu'il augmente de manière cubique par rapport aux nombres de variables recherchées. A titre d'exemple, le tableau 1 montre la complexité des différentes approches citées auparavant dans le cas d'un problème de stabilisation. Le modèle (2.43) est considéré ainsi que la relaxation définie dans le Lemme 3.  $r$  représente le nombre de modèles linéaires,  $n$  la dimension de l'état et  $m$  le nombre d'entrées.

**Cas d'un problème de stabilisation :**

Tableau 2

| <i>Fonction de Lyapunov</i>   | <i>Loi de commande</i>    | <i>Nombres de variables</i>                                | <i>Taille du problème LMI</i> |
|-------------------------------|---------------------------|--|-------------------------------|
| <i>Quadratique (2.33)</i>     | <i>PDC (2.44)</i>         | $n(n+1)/2 + n \times m \times r$                           | $r^2$                         |
| <i>Non Quadratique (2.63)</i> | <i>PDC (2.44)</i>         | $n(n+1)/2 \times r + n \times m \times r$                  | $r^2$                         |
| <i>Non Quadratique (2.64)</i> | <i>PDC étendu (2.68)</i>  | $n(n+1)/2 \times r^2 + n \times m \times r + n^2 \times r$ | $r^3$                         |
| <i>Non Quadratique (2.65)</i> | <i>PDC étendue (2.68)</i> | $n(n+1)/2 \times r + n \times m \times r + n^2 \times r$   | $r^3$                         |

A titre d'exemple aussi, le tableau 2 montre la complexité des différentes approches citées auparavant dans le cas d'un problème d'observation. Le modèle (2.43) est considéré ainsi que la relaxation définie dans le Lemme 3.  $r$  représente le nombre de modèles linéaires,  $n$  la dimension de l'état et  $p$  le nombre des sorties.

**Cas d'un problème d'observation :**

Tableau 3

| <i>Fonction de Lyapunov</i>   | <i>Observateur</i>        | <i>Nombres de variables</i>               | <i>Taille du problème LMI</i> |
|-------------------------------|---------------------------|---|-------------------------------|
| <i>Quadratique (2.33)</i>     | <i>Observateur (2.51)</i> | $n(n+1)/2 + n \times p \times r$          | $r^2$                         |
| <i>Non Quadratique (2.63)</i> | <i>Observateur (2.51)</i> | $n(n+1)/2 \times r + n \times p \times r$ | $r^2$                         |

|                                  |                                     |  |       |
|----------------------------------|-------------------------------------|--|-------|
| <i>Non Quadratique</i><br>(2.64) | <i>Observateur étendu</i><br>(2.73) | $n(n+1)/2 \times r + n \times p \times r + n^2 \times r$ | $r^3$ |
| <i>Non Quadratique</i><br>(2.65) | <i>Observateur étendu</i><br>(2.73) | $n(n+1)/2 \times r + n \times p \times r + n^2 \times r$ | $r^3$ |

**Remarque :** La prise en compte d'une fonction de Lyapunov variant sur  $k$  échantillons  $\Delta_k V(x(t))$  (2.66) sur ces types d'approches augmente le nombre de conditions du problème LMI sans modifier le nombre de variables recherchées [Kruszewski 06].

## II.5. Conclusion

Ce deuxième chapitre a permis de faire un tour d'horizon rapide sur les modèles TS discrets. Il en ressort que le conservatisme des résultats est dû principalement aux conditions obtenues qui ne sont que suffisantes. Les différentes approches de la littérature permettant de réduire ce conservatisme ont été présentées et discutées. Dans le chapitre 3, une nouvelle méthode permettant de réduire le conservatisme dans le cas discret est proposée.

L'intérêt des modèles TS dans le cas de notre application est de permettre de prendre en compte les non linéarités du modèle. Pour considérer la problématique du contrôle moteur cylindre à cylindre dans sa globalité, il reste à pouvoir considérer le comportement cyclique de ce dernier.

## Présentation de la Partie II

Dans cette partie, les outils théoriques qui ont été développés dans le cadre de cette thèse sont présentés. Les principaux résultats concernent d'une part, les modèles de type TS à temps discret « classiques », et d'autre part, les modèles TS à temps discret à coefficients périodiques.

Dans un premier temps, le troisième chapitre est dédié à la diminution du conservatisme des résultats existants [Guerra & al 04] pour les modèles TS discrets via l'introduction de nouvelles fonctions de Lyapunov non quadratiques "retardées". Ces nouvelles fonctions permettent de développer des lois de commande et des observateurs plus performants que ceux existants classiquement. Des simulations numériques et des discussions sur l'apport et les limitations des approches développées sont introduites pour montrer l'utilité de l'approche et son domaine de validité.

Dans un second temps et dans le but de pouvoir résoudre les problématiques liées au contrôle et à l'estimation cylindre à cylindre d'un moteur à allumage commandé, le quatrième chapitre s'attache à l'analyse et la synthèse des modèles non linéaires périodiques pour une classe particulière des modèles de type TS à coefficients périodiques. Des outils théoriques pour la commande et l'observation de ces derniers y sont développés. Diverses simulations permettent d'apprécier l'intérêt des approches proposées.

**Chapitre III. Réduction du conservatisme des Modèles TS à temps discret : Fonction de Lyapunov retardée**

|   |            |
|---|------------|
| <b>III.1. Introduction .....</b>  | <b>87</b>  |
| <b>III.2. Nouvelles conditions de Stabilisation des Modèles TS discret.....</b> | <b>89</b>  |
| <b>III.3. Retour de sortie avec un observateur de modèles TS discrets.....</b>  | <b>94</b>  |
| <b>III.4. Discussion des résultats.....</b>                                     | <b>98</b>  |
| <b>III.5. Généralisation .....</b>  | <b>101</b> |
| <b>III.6. Conclusion.....</b>   | <b>105</b> |

### III.1. Introduction

Dans le chapitre 2, il a été rappelé que les conditions de stabilité et de stabilisation obtenues dans le cadre de la synthèse d'un contrôleur ou d'un observateur ne sont que suffisantes. Ce conservatisme provient de plusieurs sources ; l'une des principales étant liée au choix de la fonction candidate de Lyapunov. D'autres sources proviennent de la mise sous forme de contraintes LMI (Inégalités Linéaires Matricielles) des conditions de stabilité ou du choix des relaxations utilisées pour leur résolution.

Dans ce chapitre, la démarche qui a été adoptée pour améliorer les résultats existants dans la littérature est de proposer une nouvelle *fonction de Lyapunov non quadratique*. Cette dernière permet de construire des lois de commande et des observateurs dont la construction est impossible autrement – en termes de problèmes LMI associés. Enfin, une généralisation de ces travaux est proposée en utilisant une variation sur  $k$  échantillons de la fonction de Lyapunov choisie.

Pour simplifier les démonstrations qui suivent, les notations suivantes sont utilisées quand il n'y a pas d'ambiguïté possible.

$$Y_{z(t-1)} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t-1))Y_i \quad (3.1)$$

$$Y_{z(t-1)z(t)} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t-1))h_j(z(t))Y_{ij} \quad (3.2)$$

Dans la section de généralisation, l'introduction d'un nombre fini d'échantillons  $k > 1$  amène à considérer l'ensemble des échantillons entre  $t$  et  $t+k$ . Il nous faut alors étendre les notations vues au chapitre 2 à cet ensemble d'échantillons. Cela se fait par extension directe.

Par exemple avec  $Y_{i_0 i_1 \dots i_k}$ ,  $(i_0, \dots, i_k) \in \{1, \dots, r\}^{k+1}$  des matrices de taille appropriée :

$$Y_{z(t)z(t+1)\dots z(t+k)} = \sum_{i_0=1}^r \dots \sum_{i_k=1}^r h_{i_0}(z(t)) \dots h_{i_k}(z(t+k))Y_{i_0 i_1 \dots i_k} \quad (3.3)$$

Ou encore avec  $Y_{i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_k}^{i_0}$ ,  $(i_0, \dots, i_{k-1}, j_1, \dots, j_{k-1}) \in \{1, \dots, r\}^{2k-1}$  :

$$Y_{z(t-1), z(t), \dots, z(t+k-1), z(t), \dots, z(t+k-1)} \triangleq \sum_{i_0=1}^r h_{i_0}(z(t-1)) \left( \sum_{i_1=1}^r \sum_{j_1=1}^r \dots \sum_{i_k=1}^r \sum_{j_k=1}^r h_{i_1}(z(t)) h_{j_1}(z(t)) \dots h_{i_k}(z(t+k-1)) h_{j_k}(z(t+k-1)) \right) Y_{i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_k}^{i_0} \quad (3.4)$$

Finalemnt, les conditions de stabilité dépendent de la négativité des multiples sommes, par exemple :

$$\Upsilon_{z(t-1),z(t),\dots,z(t+k-1),z(t),\dots,z(t+k-1)} < 0 \quad (3.5)$$

Plusieurs manières existent pour obtenir des conditions vérifiant que l'inégalité (3.5). La relaxation que nous avons utilisée dans notre travail est donnée dans le lemme suivant.

**Lemme 5 :** Pour  $k = 2$ , soit  $\Upsilon_{i_2, j_1 j_2}^l$  des matrices de taille appropriée la condition (3.5) est vérifiée si les conditions suivantes sont vérifiées pour  $(i_1, i_2) \in \{1, \dots, r\}^2$  et  $(j_1, j_2) \in \{1, \dots, r\}^2$  avec  $i_1 \leq j_1$ ,  $i_2 \leq j_2$ ,  $l \in \{1, \dots, r\}$  :

$$\Upsilon_{i_2, j_1 j_2}^l + \Upsilon_{j_2, i_1 j_2}^l + \Upsilon_{i_1 j_2, j_1 i_2}^l + \Upsilon_{j_1 j_2, i_1 i_2}^l < 0 \quad (3.6)$$

**Preuve :**

A partir de (3.4), il est possible d'obtenir facilement l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{z(t-1),z(t),z(t+1),z(t),z(t+1)} &= \sum_{i_1=1}^r \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \geq i_1}}^r \sum_{i_2=1}^r \sum_{\substack{j_2=1 \\ j_2 \geq i_2}}^r h_{i_1}(z(t-1)) h_{i_2}(z(t)) h_{j_1}(z(t)) \dots \\ &\quad h_{i_2}(z(t+1)) h_{j_2}(z(t+1)) \times (\Upsilon_{i_2, j_1 j_2}^l + \Upsilon_{j_2, i_1 j_2}^l + \Upsilon_{i_1 j_2, j_1 i_2}^l + \Upsilon_{j_1 j_2, i_1 i_2}^l) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Avec cette reformulation, le Lemme 5 permet de donner des conditions suffisantes permettant de vérifier que l'expression  $\Upsilon_{z(t-1),z(t),z(t+1),z(t),z(t+1)} < 0$ .

**Remarque 1 :** le lemme 5 est facilement généralisable pour toute condition de la forme (3.5) pour  $k > 2$ .

Dans le cas particulier, d'une somme de la forme :

$$Y_{z(t-1),z(t),z(t)} = \sum_k h_k(z(t-1)) \left( \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \right) \Upsilon_{ij}^k < 0 \quad (3.8)$$

Rappel du lemme 4 du chapitre 2 [Tuan et al. 01] : Soient  $\Upsilon_{ij}^k$  des matrices et  $h_i$   $(i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3$  des fonctions positives scalaires ayant la propriété de somme convexe, si les conditions (2.27) et (2.28) sont vérifiées alors (3.8) est vraie :

$$\Upsilon_{ii}^k < 0, \forall (i, k) \in \{1, \dots, r\}^2 \quad (3.9)$$

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii}^k + \Upsilon_{ij}^k + \Upsilon_{ji}^k < 0, \forall (i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3, i \neq j \quad (3.10)$$

**Remarque 2** : ce résultat s'étend facilement en fonction du nombre de sommes considérées et de la possibilité ou non de regrouper les fonctions d'appartenance deux à deux.

Le modèle TS discret que nous considérons tout au long de chapitre est :

$$x(t+1) = A_{z(t)}x(t) + B_{z(t)}u(t) \quad (3.11)$$

### III.2. Nouvelles conditions de Stabilisation des Modèles TS discret

Dans cette section, des conditions relâchées de stabilisation sont proposées utilisant une fonction de Lyapunov retardée. Afin d'introduire cette fonction candidate, la nouvelle loi de commande non quadratique s'écrit de la manière suivante [Kerkeni & al 10] :

$$u(t) = -F_{z(t-1)z(t)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} x(t) \quad (3.12)$$

Avec  $H_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ . Pour la consistance des notations, on suppose également que  $z(-1) = z(0)$ . Ainsi, la dynamique de la boucle fermée devient :

$$x(t+1) = \left( A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} \right) x(t) \quad (3.13)$$

La fonction candidate de Lyapunov non quadratique retardée proposée dans cette approche est donnée par :

$$V(x, z) = x^T(t) H_{z(t-1)z(t)}^{-T} P_{z(t-1)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} x(t) \quad (3.14)$$

La discussion de la validité de la fonction, notamment  $H_{z(t-1)z(t)}^{-T} P_{z(t-1)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} > 0$  et l'existence de  $H_{z(t-1)z(t)}^{-1} \forall t$  sera discutée plus loin. La variation de la fonction de Lyapunov

(3.14) s'exprime sous la forme :

$$\Delta V(x, z) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.15)$$

$$\text{Avec } \Pi = \begin{bmatrix} -H_{z(t-1)z(t)}^{-T} P_{z(t-1)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} & 0 \\ 0 & H_{z(t)z(t+1)}^{-T} P_{z(t)} H_{z(t)z(t+1)}^{-1} \end{bmatrix}.$$

La boucle fermée (3.13) est réécrite sous forme d'une contrainte égalité comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

L'utilisation du lemme de Finsler (cf. chapitre 2, Propriétés), ramène le problème de variation de la fonction de Lyapunov négative, i.e.  $\Delta V(x, z) < 0$  le long des trajectoires de la boucle fermée (3.16) à un problème équivalent de recherche d'une matrice  $S$  telle que :

$$\begin{bmatrix} -H_{z(t-1)z(t)}^{-T} P_{z(t-1)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} & 0 \\ 0 & H_{z(t)z(t+1)}^{-T} P_{z(t)} H_{z(t)z(t+1)}^{-1} \end{bmatrix} + S \begin{bmatrix} A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} & -I \end{bmatrix} + (*) < 0 \quad (3.17)$$

L'intérêt est bien entendu de pouvoir rechercher les matrices de la fonction de Lyapunov ( $P_i$  et  $H_{ji}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ ) et celles de la loi de commande ( $F_{ji}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ ) dans le même problème. Le choix de la matrice  $S$  est donc capital pour obtenir un problème sous forme LMI sans perdre trop de solutions de (3.17). Un choix possible qui présente un bon compromis est  $S = \begin{bmatrix} 0 \\ H_{z(t)z(t+1)}^{-1} \end{bmatrix}$ . D'où, (3.17) est vérifiée si :

$$\begin{bmatrix} -H_{z(t-1)z(t)}^{-T} P_{z(t-1)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} & 0 \\ H_{z(t)z(t+1)}^{-1} A_{z(t)} - H_{z(t)z(t+1)}^{-1} B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} & -H_{z(t)z(t+1)}^{-1} - H_{z(t)z(t+1)}^{-T} + H_{z(t)z(t+1)}^{-1} P_{z(t)} H_{z(t)z(t+1)}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.18)$$

L'utilisation de la propriété de congruence avec la matrice de rang plein

$$\Omega = \begin{bmatrix} H_{z(t-1)z(t)} & 0 \\ 0 & H_{z(t)z(t+1)} \end{bmatrix} \text{ permet alors de trouver :}$$

$$\begin{bmatrix} -P_{z(t-1)} & (*) \\ A_{z(t)} H_{z(t-1)z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} & -H_{z(t)z(t+1)} - H_{z(t)z(t+1)}^T + P_{z(t)} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.19)$$

Enfin, le théorème 10 peut être énoncé en définissant les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{ij}^{kl} = \begin{bmatrix} -P_k & (*) \\ A_i H_{kj} - B_i F_{kj} & -H_{jl} - H_{jl}^T + P_j \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

**Théorème 8 :** Soient un modèle TS discret (3.11), la loi de commande Non-PDC (3.12) et les  $\Upsilon_{ij}^{kl}$  définis en (3.20), s'il existe des matrice  $P_i > 0$ ,  $H_{ij}$  et  $F_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ , telles que les conditions (3.21) et (3.22) soient vérifiées alors la boucle fermée (3.13) est GAS.

$$\Upsilon_{ii}^{kl} < 0, \forall (i, k, l) \in \{1, \dots, r\}^3 \quad (3.21)$$

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii}^{kl} + \Upsilon_{ij}^{kl} + \Upsilon_{ji}^{kl} < 0, \forall (i, j, k, l) \in \{1, \dots, r\}^4, i \neq j \quad (3.22)$$

**Remarque 3 :**

De façon similaire aux travaux proposés dans [Guerra & al 04], il est nécessaire de vérifier l'existence de  $H_{z(t-1)z(t)}^{-1}$ . Si les conditions du théorème 10 sont vérifiées, alors l'inégalité (3.19)

est vérifiée et par conséquent à partir du dernier bloc diagonal de (3.19) on peut écrire

$$H_{z(t-1)z(t)} H_{z(t-1)z(t)}^T > P_{z(t)} > 0$$

ce qui prouve l'existence de  $H_{z(t-1)z(t)}^{-1}$ . De plus,  $H_{z(t-1)z(t)}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  étant alors de rang plein on a

alors :  $P_{z(t-1)} > 0 \Rightarrow H_{z(t-1)z(t)}^{-T} P_{z(t-1)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} > 0$  et la fonction de Lyapunov est donc valide.

**Exemple Numérique :**

Afin d'illustrer l'efficacité de l'approche, on considère la famille des modèles suivants :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \text{ avec :}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.5+a & 2 \\ -1.1 & 0.5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1.5 \\ -1.5 & -1.2 \end{bmatrix} \text{ et } B_1 = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 4.8 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ b \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

$a$  et  $b$  sont deux paramètres libres et  $h_i$  des fonctions convexes ayant la propriété de somme convexe. Le but est de déterminer l'espace des modèles atteignable par la méthode proposée (DNQ) comparée à la méthode non quadratique classique (NQ) présentée dans le chapitre 2, en fonction des paramètres  $a$  et  $b$ .

La figure 4.1 donne les domaines où la stabilité de la boucle fermée est prouvée en utilisant le théorème 6 (région définie par ' $\square$ '), et en utilisant le théorème 8 (région définie par '+') dans le plan  $(a, b)$ .

L'intérêt de l'approche est donc confirmé, le domaine de solutions obtenu est augmenté de façon significative par la nouvelle approche.

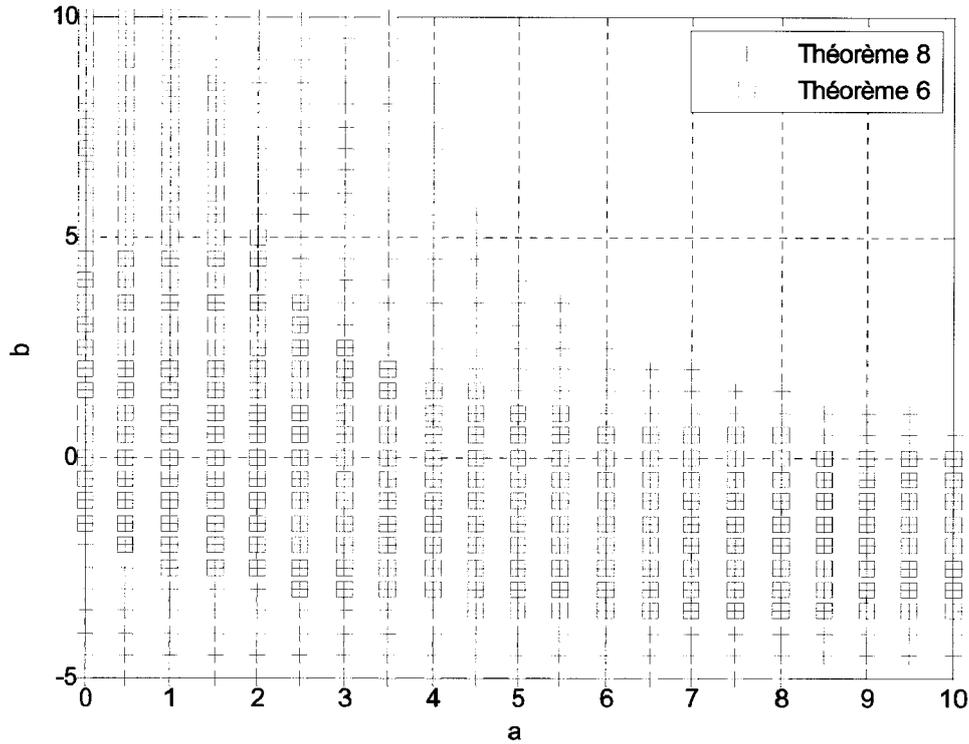


Figure 4.1: Domaines des solutions où la stabilité est prouvée par le théorème 6 ( $\square$ ) et le théorème 8 ( $+$ )

Par exemple, en considérant la simulation du modèle (3.23) pour  $a=3$  et  $b=5$ , les conditions de stabilité basées sur le théorème 6 ne sont pas faisables, par contre, les matrices obtenues par l'application du théorème 8 sont :

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \begin{bmatrix} 9,4829 & -5,0215 \\ -5,0215 & 4,8280 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 9,8173 & -3,2585 \\ -3,2585 & 10,4571 \end{bmatrix}, \quad G_{11} = \begin{bmatrix} 12,0807 & -8,6003 \\ -14,1454 & 17,9362 \end{bmatrix}, \\
 G_{12} &= \begin{bmatrix} 12,1623 & -8,9647 \\ -12,9657 & 17,0490 \end{bmatrix}, \quad G_{21} = \begin{bmatrix} 12,1083 & -5,8830 \\ -3,0816 & 5,4609 \end{bmatrix}, \quad G_{22} = \begin{bmatrix} 12,1551 & -6,2340 \\ -2,2436 & 4,8280 \end{bmatrix}, \\
 F_{11} &= [-1,6583 \quad 3,6495], \quad F_{12} = [-1,2676 \quad 3,2606], \quad F_{21} = [-3,1649 \quad 1,2072], \\
 \text{et } F_{22} &= [-3,2734 \quad 1,3562].
 \end{aligned}$$

Les figures 4.2 et 4.3 montrent respectivement l'évolution des états du modèle  $x_1$  et  $x_2$  et l'évolution du signal de commande  $u(t)$  à partir de la condition initiale  $x(0) = [10 \quad 10]$ . Dans la simulation proposée, les fonctions d'appartenances suivantes ont été utilisées :

$$h_1(x_1(t)) = 1 - h_2(x_1(t)) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x_1(t))) \quad (3.24)$$

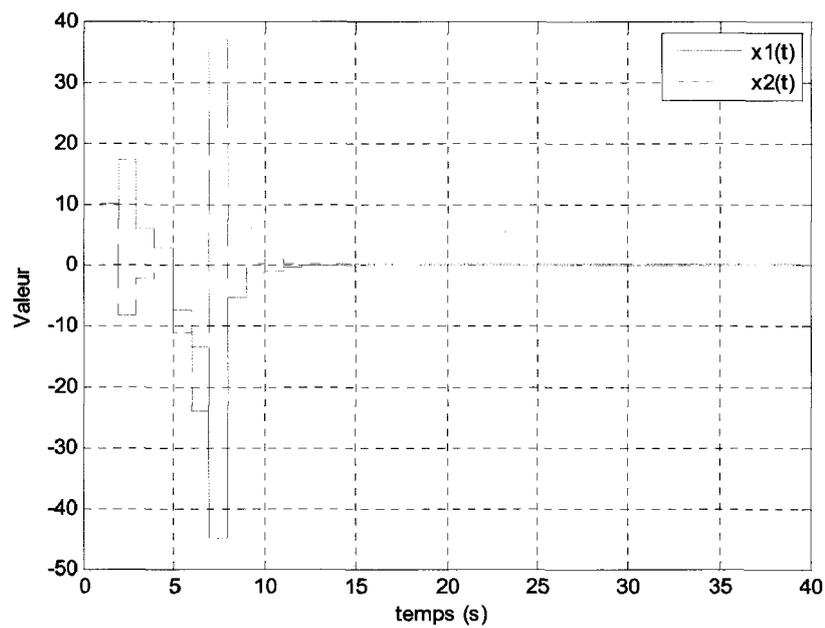


Figure 4.2: Evolution des variables du vecteur d'état  $x_1$  et  $x_2$

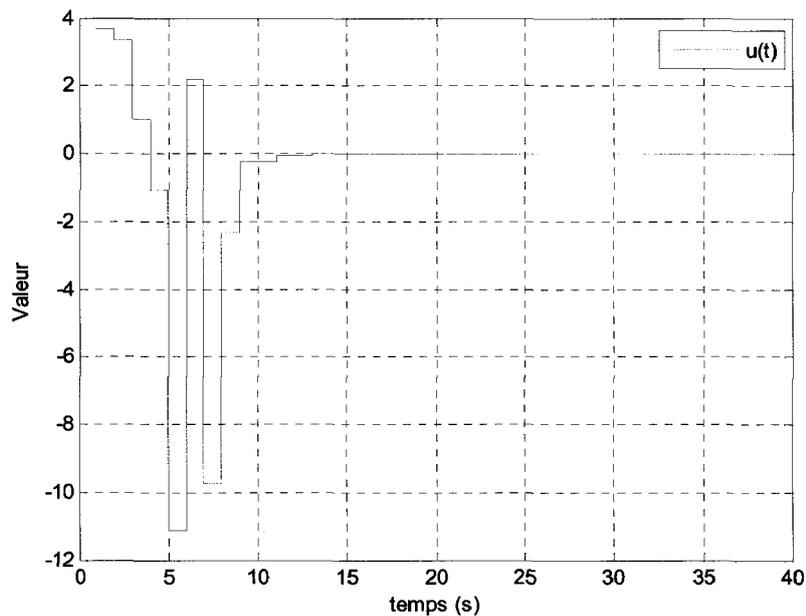


Figure 4.3: Evolution du signal de commande

La complexité des conditions des problèmes LMI doit aussi être discutée à cause des limitations dues aux capacités de résolution des solveurs LMI. Ces dernières dépendent essentiellement de la corrélation entre le nombre de variables recherchées et le nombre de contraintes LMI à considérer dans le problème. Ces nombres sont résumés dans les tableaux suivants.

**Tableau 4**

| Méthode    | Nombres de variables (a)                                     | Nombres de contraintes LMI (a) |
|------------|--|--------------------------------|
| Théorème 6 | $n(n+1)/2 \times r + n \times m \times r + n^2 \times r$     | $r^3$                          |
| Théorème 8 | $n(n+1)/2 \times r + n \times m \times r^2 + n^2 \times r^2$ | $r^4$                          |

(a) si la relaxation donnée dans le Lemme 3 est utilisée

A titre d'exemple, le tableau correspondant au modèle (3.23)  $n = 2, m = 1, r = 2$  proposé dans cette section est :

**Tableau 5**

| Méthode    | Nombres de variables (a) | Nombres de contraintes LMI (a) |
|------------|--------------------------|--------------------------------|
| Théorème 6 | 18                       | 8                              |
| Théorème 8 | 30                       | 16                             |

(a) si la relaxation donnée dans le Lemme 3 est utilisée

Pour la nouvelle approche proposée dans le cas d'un problème de stabilisation, l'accroissement du domaine des solutions se fait au prix d'une augmentation du nombre des variables recherchées ainsi que du nombre de contraintes LMI. Donc pour des problèmes de grandes tailles (nombre d'état ou nombre de sommets conséquents), la méthode développée peut atteindre rapidement les limites de calcul des solveurs actuels. L'accroissement de complexité dans le cas d'un problème d'observation est moins important, comme il est montré dans la section suivante.

### III.3. Retour de sortie avec un observateur de modèles TS discrets

Dans cette section, des conditions relâchées pour un problème d'observation sont proposées en utilisant une fonction de Lyapunov retardée [Kerkeni & al 10]. Pour rappel, on suppose que les variables de prémisses sont mesurées, i.e.  $\hat{z}(t) = z(t)$ . Dans ce cas, la structure de l'observateur est choisie de la forme :

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_{z(t)}\hat{x}(t) + B_{z(t)}u(t) + S_{z(t-1)z(t)}^{-1}K_{z(t-1)z(t)}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_{z(t)}\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.25)$$

Avec  $S_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ . Notons que l'existence de  $S_{z(t-1)z(t)}^{-1}$  est prouvée pour les mêmes raisons que celles données pour la partie commande. La dynamique de l'erreur de reconstruction  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  s'écrit alors :

$$e(t+1) = \left( A_{z(t)} - S_{z(t-1)z(t)}^{-1} K_{z(t-1)z(t)} C_{z(t)} \right) e(t) \quad (3.26)$$

La fonction de Lyapunov retardée choisie dans cette approche est :

$$V(e, z) = e^T(t) \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t-1)) \tilde{P}_i \right) e(t) = e^T(t) \tilde{P}_{z(t-1)} e(t) \quad (3.27)$$

avec  $\tilde{P}_{z(t-1)} = \tilde{P}_{z(t-1)}^T > 0$ .

De la même façon que la synthèse du problème de stabilisation, nous réécrivons la variation de la fonction de Lyapunov (3.27) comme suit :

$$\Delta V(e, z) = \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\tilde{P}_{z(t-1)} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{z(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t+1) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Et l'erreur d'estimation (3.26) s'exprime comme la contrainte égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{z(t)} - S_{z(t-1)z(t)}^{-1} K_{z(t-1)z(t)} C_{z(t)} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.29)$$

L'application du lemme de Finsler revient à chercher une matrice  $M$  telle que :

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P}_{z(t-1)} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{z(t)} \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} A_{z(t)} - S_{z(t-1)z(t)}^{-1} K_{z(t-1)z(t)} C_{z(t)} & -I \end{bmatrix} + (*) < 0 \quad (3.30)$$

Dans le but d'obtenir des conditions LMI,  $M = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{z(t-1)z(t)} \end{bmatrix}$  est choisie, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P}_{z(t-1)} & (*) \\ S_{z(t-1)z(t)} A_{z(t)} - K_{z(t-1)z(t)} C_{z(t)} & -S_{z(t-1)z(t)} - S_{z(t-1)z(t)}^T + \tilde{P}_{z(t)} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.31)$$

Enfin, le théorème 11 peut être énoncé en définissant les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{ij}^k = \begin{bmatrix} -\tilde{P}_k & (*) \\ S_{jk} A_i - K_{jk} C_i & -S_{jk} - S_{jk}^T + \tilde{P}_j \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

**Théorème 9:** Soient un modèle TS discret (3.11), l'observateur flou associé (3.25) et les  $\Upsilon_{ij}^k$  définis en (3.32), s'il existe des matrices  $\tilde{P}_i > 0$ ,  $S_{ij}$  et  $K_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ , telles que les conditions (2.27) et (2.28) soient vérifiées alors la dynamique de l'erreur d'estimation (3.26) est GAS.

**Exemple :**

Pour illustrer l'utilisation du théorème, le modèle TS à deux règles suivant est considéré, où  $a$  et  $b$  sont deux paramètres :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2.5 & 1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 2.5 & a \end{bmatrix}, C_1 = [b \quad 1], C_2 = [1 \quad 1] \quad (3.33)$$

La figure 4.4 montre les domaines des solutions dans le plan  $(a, b)$ , résultantes de l'application du théorème 7 (région définie par '□') et du théorème 9 (région définie par '+') au modèle TS défini en (3.33). De toute évidence, l'approche proposée permet de réduire le conservatisme et de surpasser les résultats précédents.

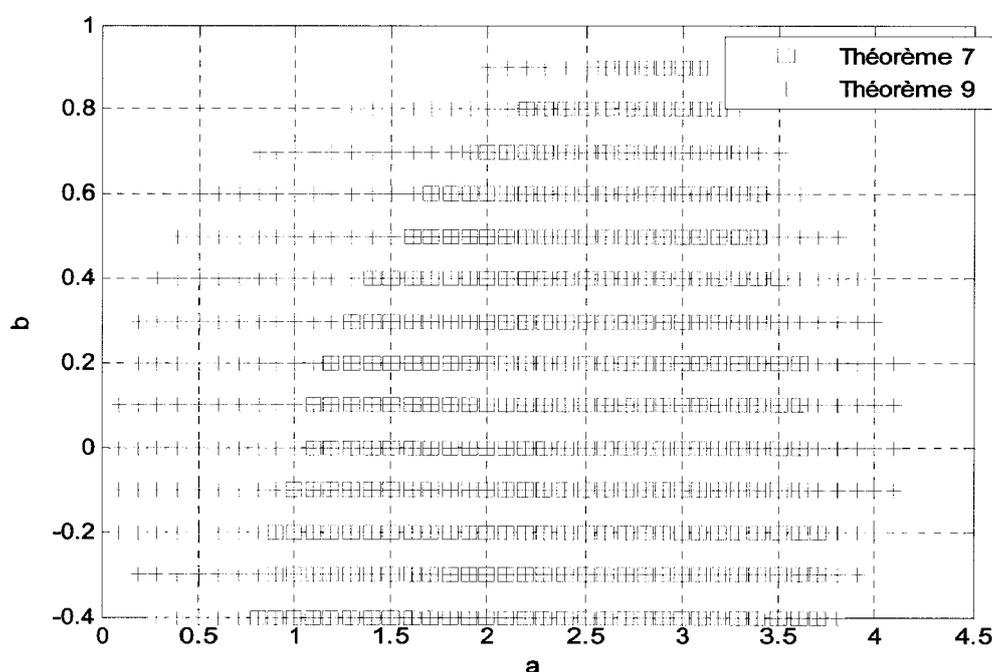


Figure 4.4: Domaines des solutions où la stabilité est prouvée par le théorème 7 (□) et le théorème 9 (+)

Par exemple, l'application du théorème 9 au modèle (3.33) avec  $a=1$  et  $b=0.4$ , donne des solutions faisables au problème LMI où le théorème 7 ne permet pas d'aboutir à une solution. Les matrices solutions trouvées sont :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,7163 & -0,3289 \\ -0,3289 & 40,9677 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 7,9509 & -4,9535 \\ -4,9535 & 11,7333 \end{bmatrix}, G_{11} = \begin{bmatrix} 1,4038 & -2,0361 \\ 2,9417 & 26,1648 \end{bmatrix},$$

$$G_{12} = \begin{bmatrix} 2,8985 & -2,3789 \\ 1,4300 & 26,3225 \end{bmatrix}, G_{21} = \begin{bmatrix} 5,8757 & 2,2541 \\ -5,1045 & 11,2489 \end{bmatrix}, G_{22} = \begin{bmatrix} 7,7551 & 0,6699 \\ -4,6010 & 11,9802 \end{bmatrix},$$

$$K_{11} = [5,65 \quad 51,04]^T, K_{12} = [3,41 \quad 48,58]^T, K_{21} = [8,85 \quad 25,19]^T, K_{22} = [4,25 \quad 19,78]^T$$

La figure 4.5 montre l'évolution de l'erreur d'estimation de l'état  $x_1(t)$  (ligne continue), ainsi que l'erreur d'estimation de l'état  $x_2(t)$  (ligne pointillée) à partir de la condition initiale  $x_0(t)=[0.2 \ 0]^T$  pour le modèle et  $\hat{x}_0(t)=[0.1 \ 0.1]^T$  pour l'observateur. Dans la simulation proposée, les fonctions d'appartenance  $h_1(y(t))=1-h_2(y(t))=\frac{1}{2}(1+\cos(y(t)))$  sont utilisées.

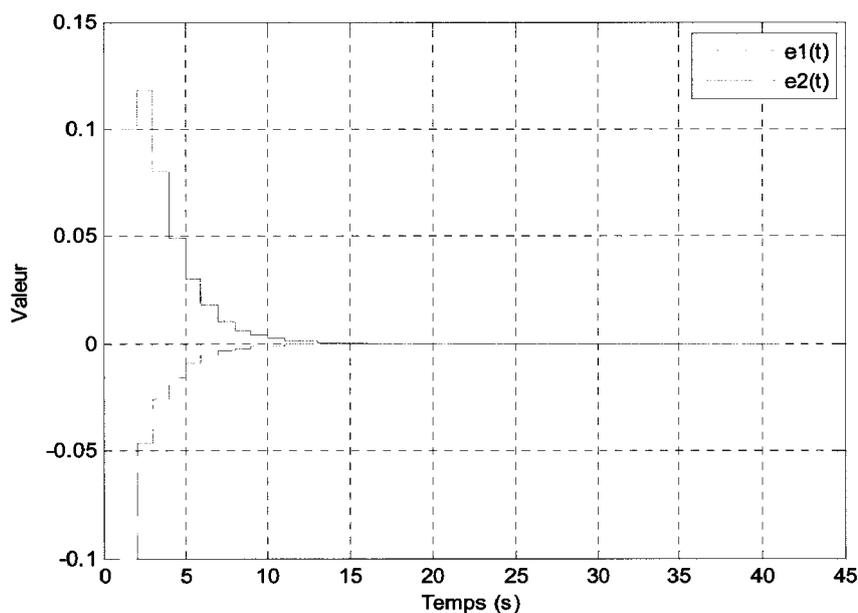


Figure 4.5: Evolution des erreurs d'estimation des deux variables d'état

La figure 4.6 représente la trajectoire de l'état et de son estimé, ainsi que les courbes d'équipotentiellles de la fonction de Lyapunov non quadratique dans le plan de l'espace d'état.

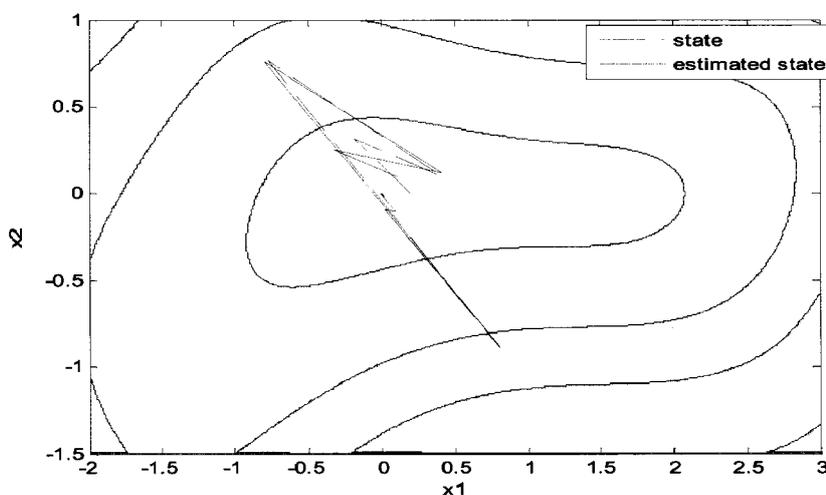


Figure 4.6: Trajectoire de l'état et de son estimé avec les équipotentiellles de Lyapunov

Sur la figure 4.6, on voit clairement le caractère non quadratique de la fonction de Lyapunov aboutissant à des équipotentielles non convexes.

De façon similaire au problème de stabilisation présenté précédemment, le tableau 6 compare le théorème 7 et le théorème 9 en termes de nombres de variables recherchées et de nombres de contraintes LMI dans le problème considéré.

**Tableau 6**

| Méthode    | Nombres de variables (a)                                     | Nombres de contraintes LMI (a) |
|------------|--|--------------------------------|
| Théorème 7 | $n(n+1)/2 \times r + n \times p \times r + n^2 \times r$     | $r^3$                          |
| Théorème 9 | $n(n+1)/2 \times r + n \times p \times r^2 + n^2 \times r^2$ | $r^3$                          |

(a) si la relaxation donnée dans le Lemme 3 est utilisée

L'application des deux théorèmes au modèle (3.33) donne lieu au tableau suivant :

**Tableau 7**

| Méthode    | Nombres de variables (a) | Nombres de contraintes LMI (a) |
|------------|--------------------------|--------------------------------|
| Théorème 7 | 18                       | 8                              |
| Théorème 9 | 27                       | 8                              |

(a) si la relaxation donnée dans le Lemme 3 est utilisée

**Remarque 4 :** Il est clair que, l'utilisation de la nouvelle fonction de Lyapunov retardée (3.27) augmente le nombre de variables recherchées mais conserve le même nombre de contraintes LMI.

### III.4. Discussion des résultats

L'idée développée au long de ce chapitre de remplacer  $P_{z(t)}$  par  $P_{z(t-1)}$  (respectivement  $\tilde{P}_{z(t)}$  par  $\tilde{P}_{z(t-1)}$ ) dans les fonctions de Lyapunov (3.14) (resp. (3.27)) permet de proposer des structures de commande et d'observation qui n'ont pas d'équivalent dans le cas NQ classique :  $H_{z(t-1)z(t)}^{-1}$  et  $F_{z(t-1)z(t)}$  remplacent  $G_{z(t)}^{-1}$  et  $F_{z(t)}$  (resp.  $S_{z(t-1)z(t)}^{-1}$  et  $K_{z(t-1)z(t)}$  pour  $S_{z(t)}^{-1}$  de  $K_{z(t)}$ ). Ces nouvelles structures apportent des degrés de liberté qui ne peuvent pas être présents dans le cas NQ classique. Effectivement, il est important de comprendre que, théoriquement parlant, il est possible d'avoir  $H_{z(t+1)z(t)}^{-1}$  et  $F_{z(t+1)z(t)}$  dans (3.13) (resp.  $S_{z(t+1)z(t)}^{-1}$  et  $K_{z(t+1)z(t)}$  dans (3.25)), et d'avoir les contraintes LMI correspondantes permettant d'obtenir des résultats similaires. On aurait donc une sorte « d'équivalence » entre les deux approches en termes de problèmes

LMI obtenus, mais pas en termes de lois de commande (resp. d'observateur) puisqu'évidemment le terme  $h_i(z(t+1))$  ne peut pas être connu à l'instant  $t$ .

D'autre part, on peut également noter que la dualité commande / observation vérifiée dans le cas quadratique n'est plus vraie dans ce contexte non quadratique. Cela est dû au fait de devoir introduire  $H_{z(t-1)z(t)}^{-1}$  dans la fonction de Lyapunov de la commande pour pouvoir aboutir à des solutions LMI. L'introduction de l'instant  $t$  impose alors  $t+1$  dans la variation de la fonction de Lyapunov, i.e. par l'apparition de  $H_{z(t)z(t+1)}^{-1}$ . Cet instant n'est pas présent dans la partie estimation ce qui permet d'expliquer les différences constatées, notamment dans le nombre de contraintes LMI.

De manière générale, quelque soit le cas considéré, observation ou contrôle, cette « légère » modification de la fonction de Lyapunov est capable d'introduire des changements considérables dans les résultats obtenus.

Enfin, une propriété intéressante que vérifie le retour de sortie issu de la commande et de l'observateur proposés est que le principe de séparation reste valable. En effet, considérons l'ensemble de la boucle fermée de l'équation (3.13) ou l'état  $x(t)$  est estimé par l'observateur défini en (3.25), la dynamique du modèle global s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\text{Avec } \Omega = \begin{bmatrix} A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} & B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} \\ 0 & A_{z(t)} - S_{z(t-1)z(t)}^{-1} K_{z(t-1)z(t)} C_{z(t)} \end{bmatrix}$$

**Corollaire :** considérons le modèle flou discret TS (3.11), la loi de commande Non-PDC (3.12) et l'observateur flou associé (3.25). Supposons qu'il existe des matrices  $P_i > 0$ ,  $H_{ij}$  et  $F_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$  telles que :

$$\begin{bmatrix} -P_{z(t-1)} & (*) \\ A_{z(t)} H_{z(t-1)z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} & -H_{z(t)z(t+1)} - H_{z(t)z(t+1)}^T + P_{z(t)} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.35)$$

et des matrices  $\tilde{P}_i > 0$ ,  $S_{ij}$  et  $K_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$  telles que :

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P}_{z(t-1)} & (*) \\ S_{z(t-1)z(t)} A_{z(t)} - K_{z(t-1)z(t)} C_{z(t)} & -S_{z(t-1)z(t)} - S_{z(t-1)z(t)}^T + \tilde{P}_{z(t)} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.36)$$

Alors la boucle fermée par retour de sortie (3.34) est GAS.

**Preuve :** si (3.35) est vérifiée, en utilisant la propriété de congruence avec la matrice rang plein en lignes  $\left[ I \left( A_{z(t)} H_{z(t-1)z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} \right)^T H_{z(t)z(t+1)}^{-T} \right]$  il vient, si (3.35) est satisfaite alors :

$$-P_{z(t-1)} + \left( A_{z(t)} H_{z(t-1)z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} \right)^T H_{z(t)z(t+1)}^{-T} P_{z(t)} H_{z(t)z(t+1)}^{-1} \left( A_{z(t)} H_{z(t-1)z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} \right) < 0$$

Ou de façon équivalente en utilisant la propriété de congruence avec la matrice de rang plein  $H_{z(t-1)z(t)}^T$  :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{z(t-1)z(t)z(t+1)} &= -H_{z(t-1)z(t)}^{-T} P_{z(t-1)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} + \\ &\left( A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} H_{z(t-1)z(t)}^T \right)^T H_{z(t)z(t+1)}^{-T} P_{z(t)} H_{z(t)z(t+1)}^{-1} \left( A_{z(t)} - B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} H_{z(t-1)z(t)}^T \right) < 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

(3.37) étant satisfaite, il existe toujours  $Q > 0$  telle que :

$$\Upsilon_{z(t-1)z(t)z(t+1)} < -Q < 0 \quad (3.38)$$

De même si (3.36) est vérifiée, en utilisant la propriété de congruence avec la matrice rang plein en lignes  $\left[ I \left( A_{z(t)} - S_{z(t-1)z(t)}^{-1} K_{z(t-1)z(t)} C_{z(t)} \right)^T \right]$

$$\tilde{\Upsilon}_{z(t-1)z(t)} = -\tilde{P}_{z(t-1)} + \left( A_{z(t)} - S_{z(t-1)z(t)}^{-1} K_{z(t-1)z(t)} C_{z(t)} \right)^T \tilde{P}_{z(t)} \left( A_{z(t)} - S_{z(t-1)z(t)}^{-1} K_{z(t-1)z(t)} C_{z(t)} \right) < 0 \quad (3.39)$$

(3.39) étant satisfaite, il existe toujours  $\tilde{Q} > 0$  telle que :

$$\tilde{\Upsilon}_{z(t-1)z(t)} < -\tilde{Q} < 0 \quad (3.40)$$

A partir de (3.38) et (3.40) la preuve suit celle de [Yoneyama et al. 01]. On considère, la fonction candidate de Lyapunov avec  $P > 0$ ,  $\tilde{P} > 0$  et un scalaire  $\gamma > 0$  :

$$V(x, \tilde{x}) = x^T(t) H_{z(t-1)z(t)}^{-T} P_{z(t-1)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} x(t) + \gamma e^T(t) \tilde{P}_{z(t-1)} e(t) \quad (3.41)$$

Sa variation le long des trajectoires de (3.34) donne :

$$\Omega^T \begin{bmatrix} H_{z(t)z(t+1)}^{-T} P_{z(t)} H_{z(t)z(t+1)}^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma \tilde{P}_{z(t)} \end{bmatrix} \Omega - \begin{bmatrix} H_{z(t-1)z(t)}^{-T} P_{z(t-1)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma \tilde{P}_{z(t-1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.42)$$

Après quelques manipulations, (3.42) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{z(t-1)z(t)z(t+1)} & H_{z(t)z(t+1)}^{-T} P_{z(t)} H_{z(t)z(t+1)}^{-1} B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1} \\ (*) & \gamma \tilde{\Upsilon}_{z(t-1)z(t)} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.43)$$

On note :  $\Psi_{(t)} = -H_{z(t)z(t+1)}^{-T} P_{z(t)} H_{z(t)z(t+1)}^{-1} B_{z(t)} F_{z(t-1)z(t)} H_{z(t-1)z(t)}^{-1}$ . Cette quantité ne dépend que des résultats de la partie « commande » (3.35) et de par sa nature polytopique est bornée en norme. En utilisant (3.38) et (3.40), (3.43) est satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} Q & \Psi_{(t)} \\ \Psi_{(t)}^T & \gamma \tilde{Q} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.44)$$

En utilisant le complément de Schur (3.44) est équivalente à :

$$\gamma \tilde{Q} > \Psi_{(t)}^T Q^{-1} \Psi_{(t)} \quad (3.45)$$

$\Psi_{(t)}$  étant bornée, il existe toujours  $\gamma > 0$  assez grand qui satisfasse (3.45), ce qui termine la preuve.

L'approche proposée (sauf le principe de séparation) peut s'étendre à des modèles à retards, avec incertitudes, et des critères de robustesse ou de performances ( $H_\infty$  et  $H_2$ ) peuvent être introduits. La section suivante est dédiée à la généralisation du problème d'observation.

### III.5. Généralisation

Afin de généraliser l'utilisation de la fonction de Lyapunov non quadratique retardée, cette section propose d'étendre le théorème 11 en prenant en compte une variation sur  $k$  échantillons [Kruszewski & al 05]. Cette dernière approche propose de remplacer la variation classique entre deux échantillons de la fonction de Lyapunov  $\Delta V = V(x(t+1)) - V(x(t))$  par une variation prise sur nombre donné  $k$  d'échantillons :  $\Delta_k V = V(x(t+k)) - V(x(t))$ . L'idée est que si un système est stable, il suffit d'attendre assez longtemps pour qu'il converge vers 0. En d'autres termes, la décroissance *à chaque instant* n'est pas nécessaire.

Considérer une variation sur  $k$  échantillons avec une fonction de Lyapunov donnée est équivalent à considérer une variation sur 1 seul échantillon utilisant un vecteur d'état étendu contenant les instants passés de l'état [Kruszewski & al 07]. En prenant en compte cette propriété, les résultats du théorème 11 peuvent être étendus.

Soit la fonction de Lyapunov (3.47) qui dépend du vecteur d'erreur d'estimation étendu suivant :

$$E_{0\dots k} = \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t+1) \\ \vdots \\ e(t+k) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$V(E_{0\dots k-1}, z) = E_{0\dots k-1}^T(t) \Pi_{z(t-1)\dots z(t+k-2)} E_{0\dots k-1}(t) \quad (3.47)$$

Où la matrice  $\Pi_{z(t-1)\dots z(t+k-2)}$  est symétrique et définie positive. Plusieurs choix sont possibles pour cette dernière matrice et dans le but de réduire le nombre de variables additionnelles, nous choisissons la forme diagonale suivante :

$$\Pi_{z(t-1)\dots z(t+k-2)} = \text{diag} \left( P_{z(t-1)} \quad P_{z(t)} \quad \dots \quad P_{z(t+k-2)} \right) \quad (3.48)$$

Notons que la généralisation de (3.48) à une matrice pleine est facile à introduire. La variation de la fonction de Lyapunov (3.47) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta V(E_{0\dots k}, z) &= E_{0\dots k}^T(t) Q_{z(t-1)\dots z(t+k-1)} E_{0\dots k}(t) \\ &= E_{0\dots k}^T(t) \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times kn} \\ 0_{kn \times n} & \Pi_{z(t)\dots z(t+k-1)} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \Pi_{z(t-1)\dots z(t+k-2)} & 0_{kn \times n} \\ 0_{n \times kn} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \end{pmatrix} E_{0\dots k}(t) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Afin d'utiliser le Lemme du Finsler, la dynamique de l'erreur d'estimation prise à différents instants est réécrite sous forme d'une contrainte égalité :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{z(t-1)z(t)} & -I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{A}_{z(t)z(t+1)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & -I & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \bar{A}_{z(t+k-2)z(t+k-1)} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t+1) \\ \vdots \\ e(t+k) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.50)$$

avec :  $\bar{A}_{z(t-1)z(t)} = A_{z(t)} - G_{z(t-1)z(t)}^{-1} K_{z(t-1)z(t)} C_{z(t)}$ . En considérant une matrice  $M$  quelconque, le problème de convergence de l'erreur d'estimation se ramène alors à :

$$Q_{z(t-1)\dots z(t+k-1)} + M \times \begin{bmatrix} \bar{A}_{z(t-1)z(t)} & -I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{A}_{z(t)z(t+1)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & -I & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \bar{A}_{z(t+k-2)z(t+k-1)} & -I \end{bmatrix} + (*) < 0 \quad (3.51)$$

Comme explicité plus avant, il est nécessaire de choisir  $M$  de manière à obtenir des contraintes sous forme LMI sans pour autant perdre trop de solutions de (3.51). Un choix répondant à ce compromis est donné par [Kruszewski & al 07] :

$$M_{z(t-1), \dots, z(t+k-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ G_{z(t-1)z(t)} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & G_{z(t)z(t+1)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & G_{z(t+k-2)z(t+k-1)} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

L'inégalité (3.51) devient alors :

$$\mathcal{Q}_{z(t-1), \dots, z(t+k-1)}^+ \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & (*) & 0 & \dots & 0 & \\ \Phi_{z(t-1)z(t)z(t)} & -G_{z(t-1)z(t)} - G_{z(t-1)z(t)}^T & (*) & \ddots & \vdots & \\ 0 & \Phi_{z(t)z(t+1)z(t+1)} & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & (*) & \\ 0 & \dots & 0 & \Phi_{z(t+k-2)z(t+k-1)z(t+k-1)} & -G_{z(t+k-2)z(t+k-1)} - G_{z(t+k-2)z(t+k-1)}^T & \end{array} \right] < 0 \quad (3.53)$$

Où  $\Phi_{z(t-1), z(t), z(t)} = G_{z(t-1), z(t)} A_{z(t)} - K_{z(t-1), z(t)} C_{z(t)}$ . Le théorème suivant peut alors être formulé.

**Théorème 10 :** l'erreur d'estimation (3.26) est globalement asymptotiquement stable s'il existe des matrices  $P_m > 0$ ,  $G_{i_m j_m}$ , et  $K_{i_m j_m}$ ,  $m \in \{0, \dots, k-1\}$  et  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ , telles que la condition (3.6) est vérifiée pour les  $\Upsilon_{i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_k}$  définies par :

$$\Upsilon_{i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_k} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times nk} \\ 0_{kn \times n} & \Pi_{j_1 \dots j_k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Pi_{i_1, j_1 \dots j_{k-1}} & 0_{kn \times n} \\ 0_{n \times kn} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} + \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & (*) & 0 & \dots & 0 & \\ \Phi_{i_1, j_1, i_1} & -G_{i_1, j_1} - G_{i_1, j_1}^T & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & & (*) & \\ \vdots & \ddots & \Phi_{j_{k-2}, j_{k-1}, i_{k-1}} & -G_{j_{k-2}, j_{k-1}} - G_{j_{k-2}, j_{k-1}}^T & (*) & \\ 0 & \dots & 0 & \Phi_{j_{k-1}, j_k, i_k} & -G_{j_{k-1}, j_k} - G_{j_{k-1}, j_k}^T & \end{array} \right] \quad (3.54)$$

avec  $\Phi_{i, j, i} = G_{i, j} A_i - K_{i, j} C_i$ .

Afin de montrer l'intérêt du théorème 10, on considère le modèle TS suivant où  $a$  et  $b$  sont deux paramètres :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -0.2 & 1.5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & -2 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}, C_1 = [-b \quad 1], C_2 = [1 \quad 1] \quad (3.55)$$

La figure 4.7 montre les domaines des solutions correspondant aux deux théorèmes 9 et 10. Le caractère (□) indique l'existence des gains d'observations stabilisants prouvés par le théorème 11, qui consiste à la première extension, le caractère (×) indique l'existence des gains d'observations stabilisants prouvés par le théorème 10 pour  $k = 2$ , enfin, le caractère (+) indique l'existence des gains d'observations stabilisants prouvés par le théorème 10 pour  $k = 3$ . L'application du théorème 10 améliore donc de façon significative le domaine des solutions lorsque  $k$  croît.

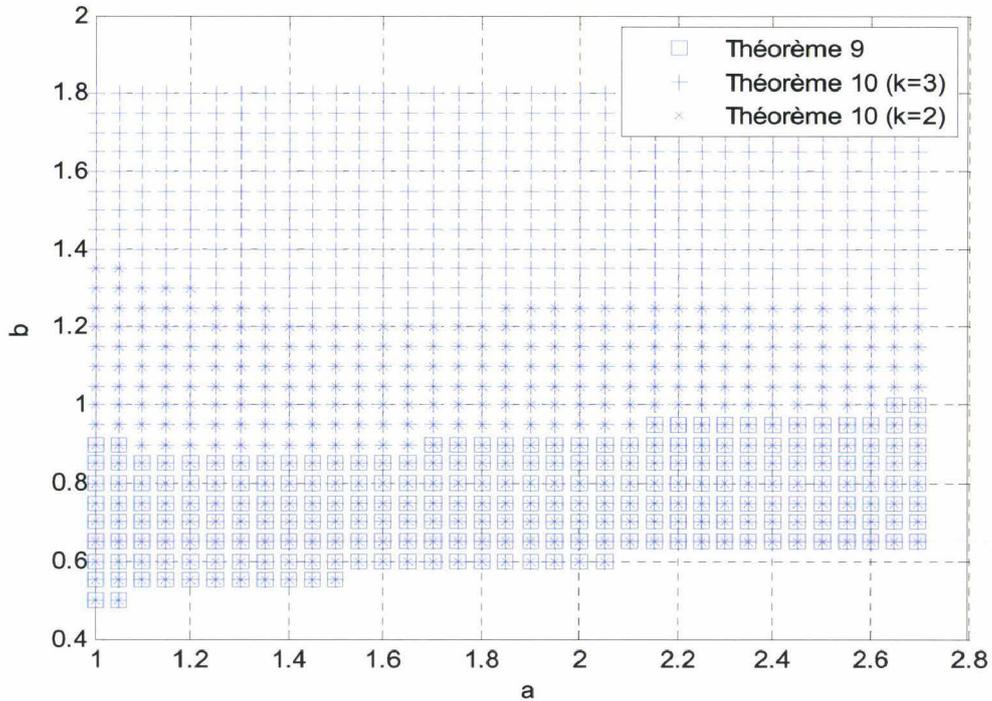


Figure 4.7: Domaines des solutions où la stabilité est prouvée par le théorème 9 (□), le théorème 10 ( $k = 2$ ) (×) et le théorème 10 ( $k = 3$ ) (+)

Pour conclure sur la complexité des différentes approches proposées, le tableau 8 est présenté.

**Tableau 8**

| Méthode     | Nombre de variables <sup>(a)</sup>                           | Nombres des contraintes LMI <sup>(a)</sup> |
|-------------|--|--|
| Théorème 7  | $n(n+1)/2 \times r + n \times m \times r + n^2 \times r$     | $r^3$                                      |
| Théorème 9  | $n(n+1)/2 \times r + n \times p \times r^2 + n^2 \times r^2$ | $r^3$                                      |
| Théorème 10 | $n(n+1)/2 \times r + n \times m \times r^2 + n^2 \times r$   | $(r(r+1)/2)^k r$                           |

(a) si la relaxation donnée dans le Lemme 3 est utilisée, et la relaxation du lemme 5 pour la dernière méthode

Dans l'exemple proposé, la complexité est résumée dans le tableau 9.

**Tableau 9**

| Méthode     | Nombre des variables <sup>(a)</sup> | Nombres des contraintes LMI <sup>(a)</sup> |
|-------------|-------------------------------------|--|
| Théorème 7  | 18                                  | 8  |
| Théorème 9  | 30                                  | 8  |
| Théorème 10 | 30                                  | 18 ( $k = 2$ )                             |

(a) si la relaxation donnée dans le Lemme 3 est utilisée, et la relaxation du lemme 5 pour la dernière méthode

Le choix entre les différentes approches proposées est relié au compromis entre le nombre de variables recherchées, le domaine des solutions obtenues (et leur qualité) et le nombre de conditions LMI considérés. Si on considère des modèles où il n'est pas possible de trouver une solution avec  $k = 1$ , le théorème 10 peut ainsi être appliqué, et comme le montre le tableau 8, l'utilisation de la nouvelle approche n'introduit pas de variables additionnelles lorsque  $k$  augmente. Cependant, lorsque  $k$  devient suffisamment grand (supérieur à 8), les conditions d'observation d'un modèle TS à 2 règles et à 2 états deviennent impossible à résoudre avec des ordinateurs standards.

### III.6. Conclusion

Ce chapitre a permis de développer à partir d'une fonction de Lyapunov non quadratique retardée, de nouveaux résultats de stabilisation et d'observation des modèles TS à temps discret. L'approche proposée permet de réduire le conservatisme des approches existantes développées dans la littérature. La réduction de conservatisme s'accompagne, dans notre cas, de l'accroissement du nombre de variables recherchées et/ou du nombre de conditions LMI.

Beaucoup de travaux peuvent être associés à ceux présentés et en représenter des extensions naturelles : introduction de performances (D-stabilité par exemple), fonctions de Lyapunov polynomiales ...



## Chapitre IV. Modèles non linéaires discrets à coefficient périodiques : Analyse et Synthèse

|   |            |
|---|------------|
| <b>IV.1. Introduction</b>   | <b>108</b> |
| <b>IV.2. Analyse des systèmes non linéaires à coefficient périodiques</b>                   | <b>108</b> |
| IV.2.1. Modélisation floue TS   | 108        |
| IV.2.2. Stabilité   | 108        |
| <b>IV.3. Synthèse de lois de commande et d'observateurs pour les modèles TS périodiques</b> | <b>110</b> |
| IV.3.1. Stabilisation par retour d'état périodique  | 111        |
| IV.3.2. Stabilisation par retour d'état périodique structuré                                | 112        |
| IV.3.3. Observation des modèles TS périodiques  | 114        |
| IV.3.4. Stabilisation des modèles TS périodiques par retour de sortie                       | 118        |
| <b>IV.4. Performances des modèles TS périodiques</b>  | <b>119</b> |
| <b>IV.5. Modèles TS discrets périodiques à retard</b>                                       | <b>121</b> |
| IV.5.1. Stabilisation des modèles TS discrets périodiques à retard                          | 121        |
| IV.5.2. Observation des modèles TS discrets périodiques à retard                            | 126        |
| <b>IV.6. Conclusion</b>   | <b>127</b> |

## IV.1. Introduction

Pour prendre en compte la nature non linéaire et périodique des problèmes considérés dans les applications par la suite, ce chapitre est dédié à l'analyse et la synthèse de commande et d'observateur pour les modèles non linéaires discrets périodiques [*Dans l'Annexe B, une étude bibliographique est fournie portant sur les systèmes périodiques linéaires*]. En particulier, la représentation utilisée dans nos travaux pour modéliser un système non linéaire périodique se base sur l'utilisation de la représentation de type Takagi-Sugeno pour prendre en compte les non linéarités du modèle périodique. Puis, les méthodes d'analyse de stabilité et de stabilisation de ce type de modèles sont présentées. Enfin, une extension au cas de modèles périodiques à retard variable est donnée en s'appuyant sur une fonction de type Lyapunov-Krasovskii périodique.

## IV.2. Analyse des systèmes non linéaires à coefficient périodiques

### IV.2.1. Modélisation floue TS

Une représentation possible d'un modèle flou à coefficients périodiques est donnée par (4.1) :

$$\begin{cases} x(t+1) = A_{z(t)}^{(c)}x(t) + B_{z(t)}^{(c)}u(t) \\ y(t) = C_{z(t)}^{(c)}x(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

La notation  $A_{z(t)}^{(c)}$ , extension de celle précédemment décrite, signifie:  $A_{z(t)}^{(c)} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i^{(c)}$ .

L'exposant ( $c$ ) est utilisé pour exprimer la périodicité du modèle :  $c = t \bmod p$  (mod pour modulo), i.e. pour  $t = 1$ , le modèle indicé 1 est considéré, pour  $t = 2$ , le modèle 2 et ainsi de suite jusqu'à  $t = p$ , où  $p$  représente la période du modèle, puis à nouveau le modèle 1.

**Remarque 1** : Seules les matrices  $A_{z(t)}^{(c)}$ ,  $B_{z(t)}^{(c)}$  et  $C_{z(t)}^{(c)}$  sont périodiques, ni le vecteur d'état  $x(t)$ , ni le vecteur des prémisses  $z(t)$  ne le sont.

### IV.2.2. Stabilité

Soit le modèle  $p$  périodique en régime libre suivant :

$$x(t+1) = A_{z(t)}^{(c)}x(t), \quad c = t \bmod p \quad (4.2)$$

L'étude de la stabilité du modèle à coefficients périodiques (4.1) est basée sur une fonction de Lyapunov périodique :

$$V_l(x) = x^T(t)P^{(l)}x(t), P^{(l)} = P^{(l+p)} > 0, \forall l \in \{0, \dots, p-1\} \quad (4.3)$$

De manière similaire aux systèmes linéaires, voir annexe 2, la condition de stabilité du modèle (4.2) exige la décroissance de la fonction de Lyapunov définie en (4.3) lors du passage d'un instant à un autre sur une période [Bolzern & al 88].

**Théorème 11 : [Bolzern & Conaleri 88],** Un modèle discret de période  $p$  est dit  $p$ -stable s'il existe  $p$  fonctions candidates de Lyapunov  $V_l(x)$ ,  $l \in \{0, \dots, p-1\}$  telles que :

$$\forall x(t), V_0(x(t)) > V_1(x(t+1)) > \dots > V_{p-1}(x(t+p-1)) > V_0(x(t+p)) \quad (4.4)$$

L'application du théorème 12 au modèle TS  $p$ -périodique (4.2) permet d'écrire le problème sous forme de contraintes LMI. Effectivement d'après la condition de stabilité (4.4), le système est stable si  $\forall l \in \{0, \dots, p-1\}$  :

$$V_{l \bmod p+1}(x(t+l+1)) - V_{l \bmod p}(x(t+l)) < 0 \quad (4.5)$$

En remplaçant  $x(t+l+1)$  par son expression (4.2), (4.5) devient :

$$x(t+l)^T \left( A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} P^{((l+1) \bmod p)} A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - P^{(l \bmod p)} \right) x(t+l) < 0 \quad (4.6)$$

Et par conséquent :

$$A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} P^{((l+1) \bmod p)} A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - P^{(l \bmod p)} < 0 \quad (4.7)$$

Avec le complément de Schur on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} -P^{(l \bmod p)} & (*) \\ P^{((l+1) \bmod p)} A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} & -P^{((l+1) \bmod p)} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.8)$$

En utilisant le fait que les fonctions d'appartenance sont des fonctions scalaires positives, on définit alors les quantités suivantes  $\forall l \in \{0, \dots, p-1\}$  :

$$Y_i = \begin{bmatrix} -P^{(l \bmod p)} & (*) \\ P^{((l+1) \bmod p)} A_i^{(l \bmod p)} & -P^{((l+1) \bmod p)} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

**Théorème 12 : [Lemme périodique] (Formulation LMI)**, le modèle flou TS à coefficients périodique est stable s'il existe  $p$  matrices de Lyapunov  $P^{(l)}$ ,  $l \in \{0, \dots, p-1\}$ , telles que les  $\Upsilon_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  définis en (4.9) soient négatifs et  $P^{(0)} = P^{(p)}$ .

**Remarque 2 :** L'analyse de stabilité du modèle (4.2) peut être aussi étudiée en utilisant une fonction candidate de Lyapunov périodique non quadratique  $V_l(x) = x^T(t)P_{z(t)}^{(l)}x(t)$ . Pour des raisons de réduction de complexité, toute l'étude qui suit est donnée en utilisant des fonctions de Lyapunov quadratique.

### IV.3. Synthèse de lois de commande et d'observateurs pour les modèles TS périodiques

Dans le cas d'un système périodique, différentes questions peuvent se poser pour déterminer une loi de commande adaptée : le correcteur doit-il nécessairement être de la même périodicité du modèle ? Comment réduire le nombre de paramètres à mémoriser ? Comment réduire le conservatisme des résultats de synthèse ?

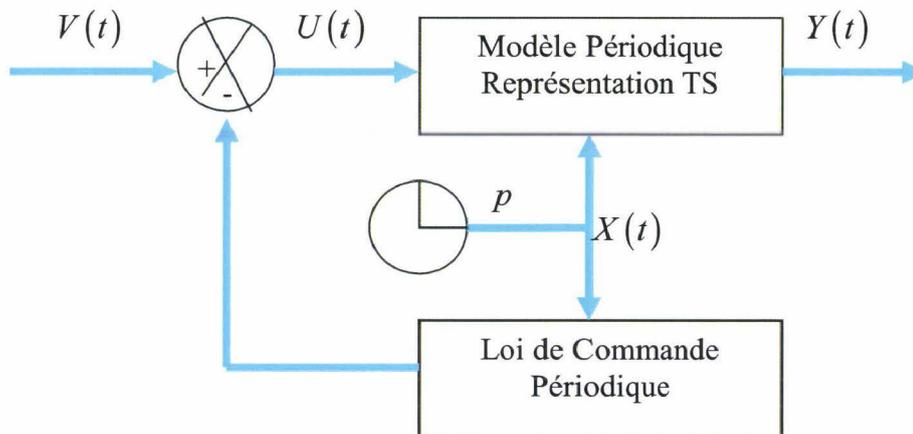


Figure 5.1: Structure d'une Loi de commande périodique

Dans cette section deux types de loi de commande sont présentés : la première, considère une loi de commande par retour d'état non linéaire dont les gains sont de même périodicité  $p$  que le modèle, alors que la deuxième, traite le cas où la période du modèle est beaucoup plus importante que la période d'échantillonnage de base.

IV.3.1. Stabilisation par retour d'état périodique

Une loi de commande possible associée au modèle (4.1) est donnée dans (4.10). Cette dernière utilise les mêmes fonctions d'appartenance que le modèle, les gains de commande sont aussi  $p$ -périodiques, de même période que le modèle :

$$u(t) = -F_{z(t)}^{(c)} G^{(c)-1} x(t) \quad (4.10)$$

La dynamique de la boucle fermée s'écrit alors :

$$x(t+1) = \left( A_{z(t)}^{(c)} - B_{z(t)}^{(c)} F_{z(t)}^{(c)} G^{(c)-1} \right) x(t) = \bar{A}_{z(t)}^{(c)} x(t) \quad (4.11)$$

En considèrent la fonction de Lyapunov périodique suivante  $\forall l \in \{0, \dots, p-1\}$  :

$$V_l(x(t)) = x^T(t) G^{(l)-T} P^{(l)} G^{(l)-1} x(t), \quad G^{(l)-T} P^{(l)} G^{(l)-1} > 0 \quad (4.12)$$

L'application du Lemme périodique sur la boucle fermée (4.11) donne alors l'inégalité suivante :

$$\bar{A}_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)T} G^{((l+1) \bmod p)-T} P^{((l+1) \bmod p)} G^{((l+1) \bmod p)-1} \bar{A}_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - G^{(l \bmod p)-T} P^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)-1} < 0 \quad (4.13)$$

La multiplication de (4.13) à gauche par  $G^{(l \bmod p)T}$  et à droite par  $G^{(l \bmod p)-T}$  donne :

$$\bar{\bar{A}}_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)T} G^{((l+1) \bmod p)-T} P^{((l+1) \bmod p)} G^{((l+1) \bmod p)-1} \bar{\bar{A}}_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - P^{(l \bmod p)} < 0 \quad (4.14)$$

avec :  $\bar{\bar{A}}_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} = A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)} - B_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} F_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)}$ . Le complément de Schur appliqué sur (4.14) permet d'obtenir l'inégalité équivalente :

$$\left[ \begin{array}{c} P^{(l \bmod p)} \\ \bar{\bar{A}}_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} \end{array} \begin{array}{c} (*) \\ G^{((l+1) \bmod p)T} P^{((l+1) \bmod p)} G^{((l+1) \bmod p)-1} \end{array} \right] > 0 \quad (4.15)$$

En utilisant la propriété :

$$(G - P)^T P^{-1} (G - P) > 0 \Leftrightarrow GP^{-1}G^T > G + G^T - P \quad (4.16)$$

Sur le dernier bloc de (4.15), on obtient :

$$\left[ \begin{array}{c} -P^{(l \bmod p)} \\ A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)} - B_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} F_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} \end{array} \begin{array}{c} (*) \\ -G^{((l+1) \bmod p)} - G^{((l+1) \bmod p)T} + P^{((l+1) \bmod p)} \end{array} \right] < 0 \quad (4.17)$$

$$\forall l \in \{0, \dots, p-1\}$$

On définit les quantités suivantes :

$$Y_{ij}^l = \begin{bmatrix} -P^{(l \bmod p)} & (*) \\ A_i^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)} - B_i^{(l \bmod p)} F_j^{(l \bmod p)} & -G^{((l+1) \bmod p)} - G^{((l+1) \bmod p)^T} + P^{((l+1) \bmod p)} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$\forall l \in \{0, \dots, p-1\}$

**Théorème 13 :** Soit le modèle discret périodique (4.1) et la loi de commande périodique (4.10), s'il existe des matrices  $P^{(c)} > 0$ ,  $G^{(c)}$  et  $F_j^{(c)}$ ,  $c \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $j \in \{1, \dots, r\}$  telles que les conditions (3.9) et (3.10) soient vérifiées pour tous les  $Y_{ij}^l$  définis en (4.18), alors la dynamique de la boucle fermée (4.11) est GAS.

#### IV.3.2. Stabilisation par retour d'état périodique structuré

Pour des problèmes dont la périodicité est grande par rapport à la période d'échantillonnage choisie, le problème LMI associé à la stabilisation et/ou à l'observation du modèle périodique peut devenir très vite difficile à résoudre. En effet, les limites des solveurs LMI seront rapidement atteintes avec le nombre de variables inconnues et le nombre d'inégalités LMI allant croissant. Dans ce cadre, une solution intéressante est de figer les paramètres du correcteur à une valeur donnée pendant plusieurs instants d'échantillonnage ce qui permet de réduire le nombre de paramètres à mémoriser.

Cette section traite le cas de modèles dont le comportement dynamique varie de façon périodique mais avec un multiple de la période d'échantillonnage  $T_e$ . L'idée est alors d'utiliser une loi de commande qui utilise le même comportement périodique et donc de figer la structure de la loi sur plusieurs périodes d'échantillonnage.

Pour ce type d'application, l'approche classique consiste à vérifier la condition pour tous les instants d'échantillonnage :

$$V_0(\tilde{x}(t)) > \dots > V_i(\tilde{x}(t+i)) > V_{i+1}(\tilde{x}(t+i+1)) > \dots > V_{n \times i + 1}(\tilde{x}(t+n \times i + 1)) > \dots > V_0(\tilde{x}(t+p)) \quad (4.19)$$

Comme la structure du modèle considéré est identique sur plusieurs périodes d'échantillonnages, une approche naturelle est de remplacer la vérification de la condition (4.19), par deux conditions complémentaires. D'une part, la décroissance de la fonction de

Lyapunov tant que la structure du modèle est identique (condition 1) et d'autre part la décroissance de la fonction de Lyapunov lors de la transition entre deux structures (condition 2). La figure 5.2 illustre ce phénomène. Si entre l'instant  $t$  et  $t+i$  la structure est la même, cela revient pour une fonction quadratique à choisir :  $P^{(t+j)} = P^{(t)}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, i\}$ .

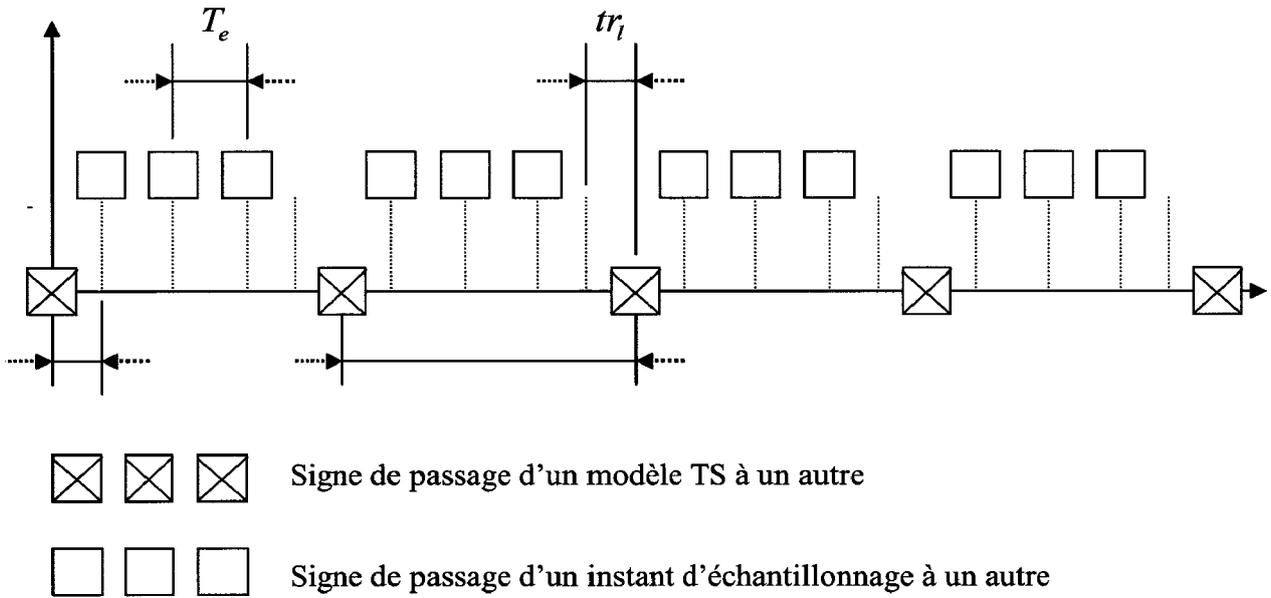


Figure 5.2 : Séquencement des phases sur une période

Afin de diminuer le nombre de paramètres à mémoriser, l'approche proposée ici est de découper le problème de stabilisation en deux phases. D'une part, considérer une même fonction de Lyapunov (avec une matrice symétrique définie positive  $P^{(m)}$ ) tant qu'il n'y a pas de changement de modèle ce qui donne des conditions de la forme (4.20) sur chacun de ces domaines indicés  $m$ .

$$\Omega_{ij}^m = \begin{bmatrix} -P^{(m)} & (*) \\ A_i^{(m)}G_j^{(m+1)} - B_i^{(m)}F_j^{(m)} & -G_j^{(m+1)} - (G_j^{(m+1)})^T + P^{(m)} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

D'autre part, pour assurer la périodicité du modèle global, il faut vérifier la condition (4.21) pour chaque transition, indicée  $l$ , de passage d'un modèle TS à un autre :

$$\Upsilon_{ij}^l = \begin{bmatrix} -P^{(l)} & (*) \\ A_i^{(l)}G_j^{(l+1)} - B_i^{(l)}F_j^{(l)} & -G_j^{(l+1)} - (G_j^{(l+1)})^T + P^{(l+1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

D'où le corollaire suivant :

**Corollaire 1** : Soit le modèle discret périodique (4.1) et la loi de commande périodique (4.10), s'il existe des matrices  $P^{(c)} > 0$ ,  $G^{(c)}$  et  $F_j^{(c)}$ ,  $c \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $j \in \{1, \dots, r\}$  tels que les conditions (3.9) et (3.10) soient vérifiées pour tous les  $\Omega_{ij}^m$  définis en (4.20) et les  $\Upsilon_{ij}^l$  définis en (4.21), alors la boucle fermée (4.11) est GAS.

**NB** : La preuve est triviale puisque une solution de ce corollaire est aussi une solution du théorème 13.

### IV.3.3. Observation des modèles TS périodiques

Pour passer de la commande de retour d'état à une commande par retour de sortie, un observateur est rajouté. Pour rappel, on suppose que les variables de prémisses sont mesurées, i.e.  $\hat{z}(t) = z(t)$ . Dans ce cas, un observateur périodique pour le modèle (4.1) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_{z(t)}^{(c)} \hat{x}(t) + B_{z(t)}^{(c)} u(t) + S_{z(t)}^{(c)-1} K_{z(t)}^{(c)} (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_{z(t)}^{(c)} \hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.22)$$

L'observateur ainsi défini, l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\tilde{x}(t+1) = \left( A_{z(t)}^{(c)} - S_{z(t)}^{(c)-1} K_{z(t)}^{(c)} C_{z(t)}^{(c)} \right) \tilde{x}(t) = \bar{A}_{z(t)}^{(c)} \tilde{x}(t) \quad (4.23)$$

La variation de la fonction de Lyapunov périodique :  $V_l(\tilde{x}) = \tilde{x}^T(t) \tilde{P}^{(l)} \tilde{x}(t)$ ,  $l \in \{0, \dots, p-1\}$

donne :

$$\bar{A}_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} \tilde{P}^{((l+1) \bmod p)} \bar{A}_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - \tilde{P}^{(l \bmod p)} < 0 \quad (4.24)$$

avec  $\bar{A}_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} = A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - S_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)-1} K_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} C_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)}$

En utilisant la même façon de faire que pour la commande l'inégalité (4.24) est vérifiée si :

$$\left[ \begin{array}{cc} -\tilde{P}^{(l \bmod p)} & (*) \\ S_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - K_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} C_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} & -S_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - S_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)T} + \tilde{P}^{((l+1) \bmod p)} \end{array} \right] < 0 \quad (4.25)$$

$\forall l \in \{0, \dots, p-1\}$

Soient les quantités :

$$\tilde{\Upsilon}_{ij}^l = \left[ \begin{array}{cc} -\tilde{P}^{(l \bmod p)} & (*) \\ S_j^{(l \bmod p)} A_i^{(l \bmod p)} - K_j^{(l \bmod p)} C_i^{(l \bmod p)} & -S_j^{(l \bmod p)} - S_j^{(l \bmod p)T} + \tilde{P}^{((l+1) \bmod p)} \end{array} \right] < 0 \quad (4.26)$$

$\forall l \in \{0, \dots, p-1\}$

**Théorème 14 :** Soit le modèle discret périodique (4.1) et l'observateur correspondant (4.22), s'il existe des matrices  $\tilde{P}^{(c)} > 0$ ,  $S_j^{(c)}$  et  $K_j^{(c)}$ ,  $c \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $j \in \{1, \dots, r\}$  telles que les conditions (3.9) et (3.10) soient vérifiées pour tous les  $\tilde{Y}_{ij}^l$  définis en (4.26), alors la dynamique de l'erreur d'estimation (4.23) est GAS.

**Remarque :** L'approche proposée de réduction de conservatisme dans le cas particulier de stabilisation des modèles dont la période est suffisamment importante par rapport à la période d'échantillonnage de base est valable aussi pour le cas de l'observation, le résultat est donné dans le corollaire suivant [Kerkeni & al 08].

**Corollaire 2 :** Soient le modèle flou périodique (4.1), l'observateur flou périodique associé (4.22), la dynamique de l'erreur d'estimation (4.23) est globalement asymptotiquement stable s'il existe des matrices  $P^{(l)} > 0$ ,  $S_i^l$  et  $K_i^l$ ,  $l \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  telles que les conditions (3.9) et (3.10) soient vérifiées pour les matrices  $\Omega_{ij}^m$  définies en (4.27) pour chaque phase ( $m$  indiquant un indice par phase) et les matrices  $\Upsilon_{ij}^l$  définies en (4.28) pour chaque transition ( $l$  indiquant le dernier indice d'une phase)

$$\Omega_{ij}^m = \begin{bmatrix} -\tilde{P}^{(m)} & (*) \\ S_j^{(m+1)} A_i^{(m)} - K_j^{(m)} C_i^{(m)} & -S_j^{(m)} - (S_j^{(m)})^T + \tilde{P}^{(m)} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.27)$$

$$\Upsilon_{ij}^l = \begin{bmatrix} -\tilde{P}^{(l)} & (*) \\ S_j^{(l)} A_i^{(l)} - K_j^{(l)} C_i^{(l)} & -S_j^{(l)} - (S_j^{(l)})^T + \tilde{P}^{(l+1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.28)$$

**Exemple:**

On considère le problème d'observation d'un modèle TS 12-périodique composé de 4 phases chacune durant 3 périodes d'échantillonnage et d'une seule non linéarité décrit dans l'espace d'état par les matrices suivantes :

Première phase:  $\forall k \in \{1, 2, 3\}$

$$A_1^k = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}, A_2^k = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 \\ 2 & 0.3 \end{bmatrix}, B_1^k = B_2^k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1^k = C_2^k = [1 \quad 1]$$

Deuxième phase:  $\forall k \in \{4, 5, 6\}$

$$A_1^k = \begin{bmatrix} 0.3 & 1.3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2^k = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1^k = B_2^k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1^k = C_2^k = [1 \quad 1]$$

Troisième phase:  $\forall k \in \{7, 8, 9\}$

$$A_1^k = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}, A_2^k = \begin{bmatrix} 1.1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1^k = B_2^k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1^k = C_2^k = [1 \quad 0]$$

Quatrième phase:  $\forall k \in \{10, 11, 12\}$

$$A_1^k = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, A_2^k = \begin{bmatrix} 2.1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, B_1^k = B_2^k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1^k = C_2^k = [1 \quad 0]$$

Les résultats obtenus avec l'observateur 12-périodique et l'application des conditions du corollaire 2 sont :

$$\forall k \in \{1, 2, 3\} : K_1^k = [4.72 \quad -1.07], K_2^k = [4.75 \quad -1.09].$$

$$\forall k \in \{4, 5, 6\} : K_1^k = [11.84 \quad 0.37], K_2^k = [12.66 \quad 0.29].$$

$$\forall k \in \{7, 8, 9\} : K_1^k = [4.11 \quad 1.15], K_2^k = [4.43 \quad 0.79].$$

$$\forall k \in \{10, 11, 12\} : K_1^k = [2.19 \quad -0.61], K_2^k = [2.22 \quad -0.65].$$

Les fonctions d'appartenance choisies sont  $h_1(x_1(t)) = 1 - h_2(x_1(t)) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x_1(t)))$ .

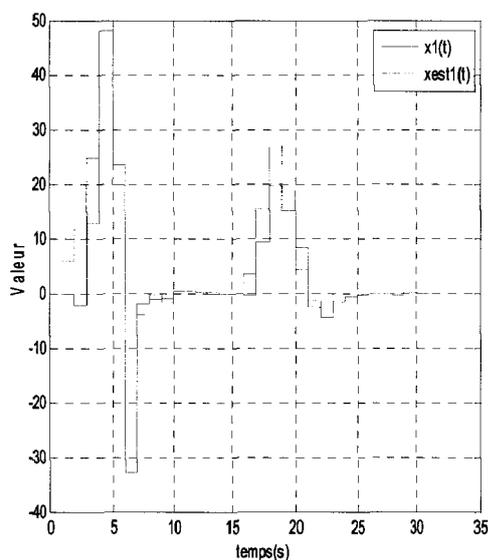


Figure 5.3: Evolution de  $x_1(t)$  et  $x_{1\_est}(t)$

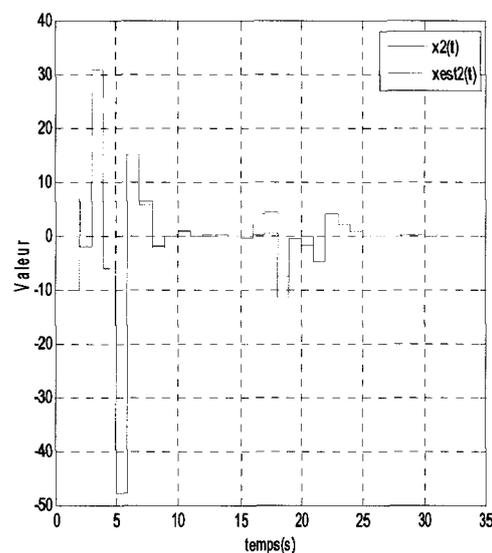


Figure 5.4: Evolution  $x_2(t)$  et  $x_{2\_est}(t)$

Avec pour conditions initiales  $x_0 = [6 \quad -10]^T$  pour le système et  $x_{0\_obs} = [0 \quad 0]^T$  pour l'observateur, les figures 5.3 et 5.4 montrent la convergence des deux variables estimées vers

l'état du système. Une perturbation de type échelon est ajoutée sur l'état du modèle entre l'instant  $t=15s$  et  $t=17s$ . On remarque que l'estimateur diverge pendant ces instants là, pour redevenir stable une fois que la perturbation disparaît. De même pour les erreurs d'estimation respectives qui sont données sur les figures 5.5 et 5.6.

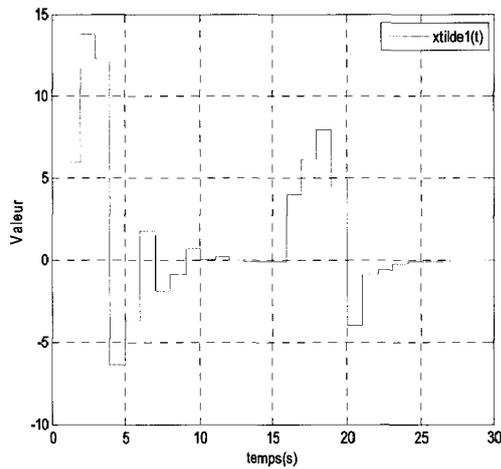


Figure 5.5: Evolution de  $\tilde{x}_1(t)$

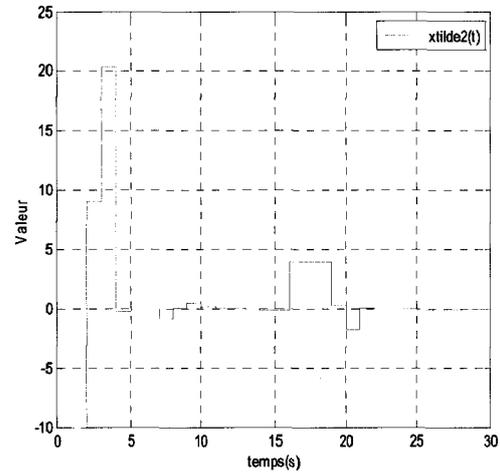


Figure 5.6: Evolution de  $\tilde{x}_2(t)$

La figure 5.7 montre l'évolution des fonctions de Lyapunov correspondantes à chaque phase du modèle. Ces dernières ne sont décroissantes que sur leurs phases respectives.

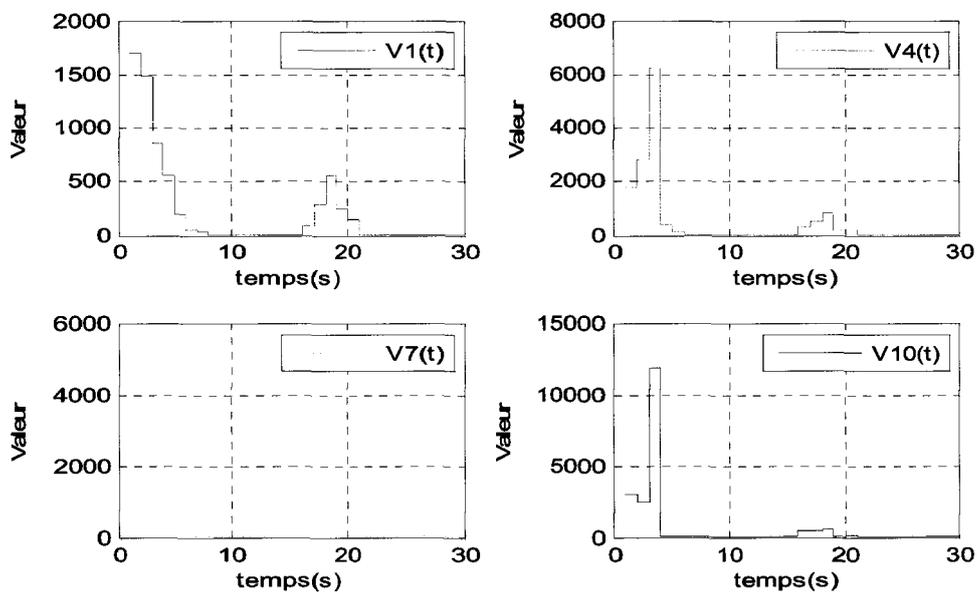


Figure 5.7 : Evolution des fonctions de Lyapunov correspondante à chaque phase

Par contre, la fonction de Lyapunov globale du modèle périodique qui est donnée sur la figure 5.8, est globalement décroissante.

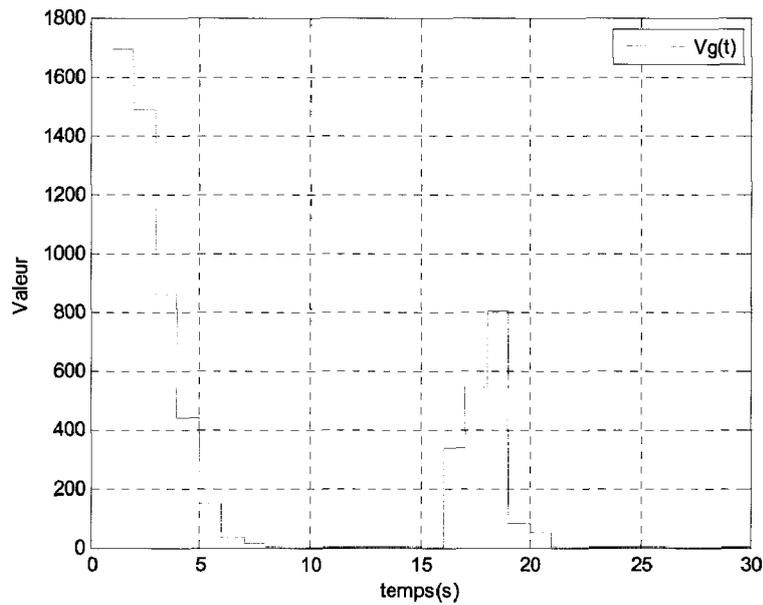


Figure 5.8 : Evolution de la fonction de Lyapunov globale du modèle

Afin de montrer l'intérêt de cette approche, le théorème 14 et le corollaire 2 sont comparés en termes de nombres de variables recherchées ainsi qu'en temps CPU nécessaire pour obtenir une solution au problème LMI. Le tableau 10 permet de récapituler les performances des deux approches.

Tableau 10

| Méthodes     | Nombre de Variables recherchées | Temps d'exécution CPU |
|--------------|---------------------------------|-----------------------|
| Théorème 14  | 600                             | $\approx 6h$          |
| Corollaire 2 | 20                              | 49.09s                |

#### IV.3.4. Stabilisation des modèles TS périodiques par retour de sortie

Toujours dans le cas des prémisses mesurées,  $\hat{z}(t) = z(t)$ , en considérant la dynamique de l'erreur d'estimation (4.23), la dynamique du retour de sortie avec observateur devient :

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \tilde{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{z(t)}^{(c)} - B_{z(t)}^{(c)} F_{z(t)}^{(c)} G_{z(t)}^{(c)-1} & B_{z(t)}^{(c)} F_{z(t)}^{(c)} G_{z(t)}^{(c)-1} \\ 0 & A_{z(t)}^{(c)} - S_{z(t)}^{(c)-1} K_{z(t)}^{(c)} C_{z(t)}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Vu la structure particulière de la matrice dynamique du système bouclé, un principe de séparation peut être énoncé en s'inspirant de [Yoneyama & al 00].

Soient les quantités :

$$\Omega_{ij}^l = \begin{bmatrix} -P^{(l \bmod p)} & (*) \\ A_i^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)} - B_i^{(l \bmod p)} F_j^{(l \bmod p)} & -G^{((l+1) \bmod p)} - G^{((l+1) \bmod p)T} + P^{((l+1) \bmod p)} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$\forall l \in \{0, \dots, p-1\}$

$$\tilde{Y}_{ij}^l = \begin{bmatrix} -\tilde{P}^{(l \bmod p)} & (*) \\ S_j^{(l \bmod p)} A_i^{(l \bmod p)} - K_j^{(l \bmod p)} C_i^{(l \bmod p)} & -S_j^{(l \bmod p)} - S_j^{(l \bmod p)T} + \tilde{P}^{((l+1) \bmod p)} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.31)$$

$\forall l \in \{0, \dots, p-1\}$

**Thorme 15 :** Soient le mdle TS piodique (4.1), la loi de commande piodique (4.10), l'observateur à prmisses mesurables (4.22), les  $\Omega_{ij}^l$  dfinis en (4.30) et les  $\tilde{Y}_{ij}^l$  dfinis en (4.31), s'il existe des matrices  $P^l > 0$ ,  $G^l$ ,  $F_i^l$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $l \in \{0, \dots, p-1\}$  telles que les conditions (3.9) et (3.10) soient vrifies pour les  $\Omega_{ij}^l$ , et s'il existe des matrices  $\tilde{P}^l > 0$ ,  $S_i^l$ ,  $K_i^l$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $l \in \{0, \dots, p-1\}$  telles que les conditions (3.9) et (3.10) soient vrifies pour les  $\tilde{Y}_{ij}^l$ , alors la boucle fermee (4.29) est GAS.

**Remarque 3:** la preuve suit la mme structure que celle de la section 4 du chapitre 3 (cf. section III.4 discussion des rsultats), à partir d'une fonction candidate de Lyapunov avec  $P > 0, \tilde{P} > 0$  :  $V(x, \tilde{x}) = x(t)^T G^{(l)T} P^{(l)} G^{(l)-1} x(t) + \gamma \tilde{x}(t)^T \tilde{P}^{(l)} \tilde{x}(t)$ ,  $\gamma > 0$  (4.32)

#### IV.4. Performances des mdles TS piodiques

Soit le mdle TS piodique :

$$x(t+1) = A_{z(t)}^{(c)} x(t) + B_{wz(t)}^{(c)} w(t) + B_{uz(t)}^{(c)} u(t), \quad x(0) = 0 \quad (4.33)$$

Le but est de trouver une borne suprieure au gain  $L_2 \rightarrow L_2$  :  $\gamma = \sup_{w(t) \neq 0} \frac{\|x(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}$  du rapport

signal de l'tat sur signal de perturbation. Cela revient à minimiser le critre suivant avec  $\gamma > 0$  :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \|x(t)\|_2 < \gamma^2 \sum_{t=0}^{\infty} \|w(t)\|_2 \quad (4.34)$$

Si on considere la loi de commande suivante :

$$u(t) = -F_{z(t)}^{(c)} G^{(c)-1} x(t) \quad (4.35)$$

La dynamique de la boucle fermée s'écrit :

$$x(t+1) = \left( A_{z(t)}^{(c)} - B_{uz(t)}^{(c)} F_{z(t)}^{(c)} G^{(c)-1} \right) x(t) + B_{wz(t)}^{(c)} w(t) \quad (4.36)$$

la fonction de Lyapunov périodique

$$V_l(x(t)) = x^T(t) G^{(l)-T} P^{(l)} G^{(l)-1} x(t), \quad G^{(l)-T} P^{(l)} G^{(l)-1} > 0. \quad (4.37)$$

On considère la variation de cette fonction de Lyapunov qui intègre le critère  $H_\infty$  donné en (4.34) :

$$\Delta V_l(x(t)) + x^T(t)x(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \leq 0 \quad (4.38)$$

à partir de (4.38), on obtient :

$$\sum_{t=0}^{T_f} (\Delta V_l(x(t)) + x^T(t)x(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)) \leq 0 \quad (4.39)$$

et avec  $x(0) = 0$  :

$$V_l(x(t_f)) + \sum_{t=0}^{T_f} (x^T(t)x(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)) \leq 0 \quad (4.40)$$

comme  $V_l(x(t_f)) \geq 0$ , ceci prouve la condition (4.34).

La condition (4.38) peut être transformée comme suit :

$$\Delta V_l(x(t)) + \gamma^{-1} \cdot x^T(t)x(t) - \gamma \cdot w^T(t)w(t) \leq 0 \quad (4.41)$$

Ce qui donne  $\forall l \in \{0, \dots, p-1\}$  :

$$\begin{bmatrix} (*)^T \\ (*)^T \end{bmatrix} G^{((l+1) \bmod p)-T} P^{((l+1) \bmod p)} G^{((l+1) \bmod p)-1} \begin{bmatrix} A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - B_{uz(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} F_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)-1} & B_{wz(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} G^{(l \bmod p)-T} P^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)-1} & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.42)$$

En utilisant la propriété de congruence avec  $\begin{bmatrix} G^{(c)} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  et la même propriété (4.16) que

précédemment, il vient directement :

$$\left[ \begin{array}{cccc} -P^{(l \bmod p)} & (*) & (*) & (*) \\ G^{(l \bmod p)} & -\gamma I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I & (*) \\ \left( \begin{array}{c} A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)} \\ -B_{uz(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} F_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} \end{array} \right) & 0 & B_{wz(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} & \left( \begin{array}{c} -G^{((l+1) \bmod p)} - G^{((l+1) \bmod p)^T} \\ +P^{((l+1) \bmod p)} \end{array} \right) \end{array} \right] < 0 \quad (4.43)$$

On définit alors les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{ij}^l = \left[ \begin{array}{cccc} -P^{(l)} & (*) & 0 & (*) \\ G^{(l)} & -\gamma I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I & (*) \\ A_i^{(l)} G^{(l)} - B_{u_i}^{(l)} F_j^{(l)} & 0 & B_{w_i}^{(l)} & -G^{(l+1)} - G^{(l+1)^T} + P^{(l+1)} \end{array} \right] \quad (4.44)$$

**Théorème 16 :** Soient le modèle TS périodique (4.33), la loi de commande périodique (4.35), s'il existe des matrices  $P^l > 0$ ,  $G^l$ ,  $F_i^l$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $l \in \{0, \dots, p-1\}$  telles que les conditions (3.9) et (3.10) soient vérifiées pour les  $\Upsilon_{ij}^l$  définie en (4.44), alors la dynamique de la boucle fermée (4.36) est GAS.

## IV.5. Modèles TS discrets périodiques à retard

### IV.5.1. Stabilisation des modèles TS discrets périodiques à retard

Considérons le modèle TS périodique avec un retard variable  $\sigma(t) \in \mathbb{N}$  suivant :

$$\begin{cases} x(t+1) = A_{z(t)}^{(c)} x(t) + A_{1z(t)}^{(c)} x(t - \sigma(t)) + B_{z(t)}^{(c)} u(t) \\ y(t) = C_{z(t)}^{(c)} x(t) \end{cases} \quad (4.45)$$

Le retard est supposé borné  $\sigma_1 \leq \sigma(t) \leq \sigma_2$ , entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux valeurs connues. Soit la loi de commande périodique :

$$u(t) = -F_{z(t)}^{(c)} G^{(c)-1} x(t) \quad (4.46)$$

Et la fonction de Lyapunov-Krasovski périodique de la forme [Kerkeni & al 09] :

$$V_l = x^T(t) G^{(l)^T} P^{(l)} G^{(l)-1} x(t) + \bar{V}_l \quad (4.47)$$

$$\text{avec : } \bar{V}_l = \sum_{\alpha=t-\sigma(t)}^{t-1} x^T(\alpha) S^{-T} Z S^{-1} x(\alpha) + \sum_{j=-\sigma_2+1}^{-\sigma_1+1} \sum_{l=t+j-1}^{t-1} x^T(l) S^{-T} Z S^{-1} x(l).$$

Après quelques calculs, il est possible d'écrire [Xu & Chen 04], que :

$$\Delta \bar{V}_t \leq (\sigma_2 - \sigma_1 + 1) x^T(t) S^{-T} Z S^{-1} x(t) - x_\sigma^T S^{-T} Z S^{-1} x_\sigma \quad (4.48)$$

Notons  $\bar{\sigma} = \sigma_2 - \sigma_1 + 1$ , la dynamique de la boucle fermée du modèle (4.45) s'écrit :

$$x(t+1) = \left( A_{z(t)}^{(c)} - B_{z(t)}^{(c)} F_{z(t)}^{(c)} G^{(c)-1} \right) x(t) + A_{1z(t)}^{(c)} x(t - \sigma(t)) \quad (4.49)$$

La variation de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du modèle périodique (4.45) correspond à :  $\forall l \in \{0, \dots, p-1\}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta V_l = & \begin{bmatrix} x \\ x_\sigma \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left( A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - B_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} F_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)-1} \right)^T \\ A_{1z(t+l \bmod p)}^T \end{bmatrix} G^{((l+1) \bmod p)-T} P^{((l+1) \bmod p)} G^{((l+1) \bmod p)-1} \\ & + \begin{bmatrix} A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - B_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} F_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)-1} & A_{1z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\sigma \end{bmatrix} \\ & - x^T G^{(l \bmod p)-T} P^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)-1} x + \Delta \bar{V}_t \end{aligned} \quad (4.50)$$

Puis,  $\Delta V_l < 0$  si :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \left( A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - B_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} F_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)-1} \right)^T \\ A_{1z(t+l \bmod p)}^T \end{bmatrix} G^{((l+1) \bmod p)-T} P^{((l+1) \bmod p)} G^{((l+1) \bmod p)-1} \begin{bmatrix} (*) & (*) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -G^{(l \bmod p)-T} P^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)-1} + \bar{\sigma} S^{-T} Z S^{-1} & 0 \\ 0 & -S^{-T} Z S^{-1} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Appliquant la propriété de congruence avec  $\begin{bmatrix} G^{(l \bmod p)T} & 0 \\ 0 & S^T \end{bmatrix}$  donne :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} G^{(l \bmod p)} A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} - B_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} F_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} \\ S^T A_{1z(t)}^{(l \bmod p)T} \end{bmatrix} G^{((l+1) \bmod p)-T} P^{((l+1) \bmod p)} G^{((l+1) \bmod p)-1} \begin{bmatrix} (*) & (*) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -P^{(l \bmod p)} + \bar{\sigma} G^{(l \bmod p)T} S^{-T} Z S^{-1} G^{(l \bmod p)} & 0 \\ 0 & -Z \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Avec la propriété (4.16), il vient directement :

$$\begin{bmatrix} -P^{(l \bmod p)} + \bar{\sigma} G^{(l \bmod p)T} S^{-T} Z S^{-1} G^{(l \bmod p)} & 0 & (*) \\ 0 & -Z & (*) \\ A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)} - B_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} F_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} & A_{1z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} S & \begin{pmatrix} -G^{((l+1) \bmod p)} - G^{((l+1) \bmod p)T} \\ +P^{((l+1) \bmod p)} \end{pmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.53)$$

Enfin, en utilisant la propriété (2.15) avec  $\Phi = S$  sur le premier terme de la diagonale, la condition suivante est obtenue :

$$\left[ \begin{array}{ccc} -P^{(l \bmod p)} & (*) & 0 & (*) \\ G^{(l \bmod p)} & -S - S^T + \bar{\sigma}Z & 0 & (*) \\ 0 & 0 & -Z & (*) \\ \left( \begin{array}{c} A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} G^{(l \bmod p)} \\ -B_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} F_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} \end{array} \right) & 0 & A_{1z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} S & \left( \begin{array}{c} -G^{((l+1) \bmod p)} - G^{((l+1) \bmod p)^T} \\ +P^{((l+1) \bmod p)} \end{array} \right) \end{array} \right] < 0 \quad (4.54)$$

En définissant alors les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{ij}^{(l)} = \left[ \begin{array}{ccc} -P^{(l)} & (*) & 0 & (*) \\ G^{(l)} & -S - S^T + \bar{\sigma}Z & 0 & (*) \\ 0 & 0 & -Z & (*) \\ \left( \begin{array}{c} A_{z(i)}^{(l)} G^{(l)} \\ -B_{z(i)}^{(l)} F_{z(j)}^{(i)} \end{array} \right) & 0 & A_{1z(i)}^{(l)} S & \left( \begin{array}{c} -G^{(l+1)} - G^{(l+1)^T} \\ +P^{(l+1)} \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (4.55)$$

**Théorème 17:** Soient le modèle discret périodique (4.1) à retard variable et la loi de commande périodique (4.46), s'il existe des matrices  $P^{(l)} > 0$ ,  $G^{(l)}$ ,  $S$ ,  $Z > 0$  et  $F_i^{(l)}$ ,  $l \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $i \in \{1, \dots, r\}$  telles que les conditions (3.9) et (3.10) soient vérifiées pour tous les  $\tilde{Y}_{ij}^{(l)}$  définis en (4.55), alors la dynamique de la boucle fermée (4.49) est  $p$ -stable.

**Exemple :**

Soit le modèle TS 2-périodique à retard variable suivant :

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ -0.1 & -0.5 \end{bmatrix}, A_1^2 = \begin{bmatrix} -0.9 & 2 \\ -0.1 & -1 \end{bmatrix}, A_2^1 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.2 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}, B_1^1 = B_1^2 = B_2^1 = B_2^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_{11}^1 &= \begin{bmatrix} 0.07 & 0 \\ 0 & 0.08 \end{bmatrix}, A_{11}^2 = \begin{bmatrix} 0.06 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}, A_{12}^1 = \begin{bmatrix} 0.07 & 0 \\ 0 & 0.08 \end{bmatrix}, A_{12}^2 = \begin{bmatrix} 0.06 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Les fonctions d'appartenance utilisées pour la simulation du modèle sont  $h_1(x_1) = (1 - \cos(x_1))/2$  et  $h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1)$ . L'application du théorème 17 donne les solutions suivantes pour les matrices recherchées :

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \begin{bmatrix} 25.9281 & 3.9608 \\ 3.9608 & 3.5258 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 4.8228 & 0.3667 \\ 0.3667 & 3.9227 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 24.8376 & 4.0191 \\ 3.8603 & 2.8280 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 8.1472 & -0.9172 \\ 1.4152 & 2.7730 \end{bmatrix} \\
 F_1^1 &= \begin{bmatrix} -2.6318 \\ -0.9879 \end{bmatrix}^T, F_1^2 = \begin{bmatrix} -5.1513 \\ -1.7478 \end{bmatrix}^T, F_2^1 = \begin{bmatrix} 5.9842 \\ -1.2804 \end{bmatrix}^T \text{ et } F_2^2 = \begin{bmatrix} -1.6318 \\ -4.8008 \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

Un exemple de résultat de simulation est donné dans la figure 1 et 2, à partir de la condition initiale  $x^T(0) = [10 \quad -20]$ ,  $x(-3) = x(-2) = x(-1) = x(0)$  et les bornes du retard  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 2$ .

La figure 5.9 montre l'évolution du vecteur d'état, La figure 5.10 montre l'évolution du vecteur de commande et la figure 5.11 montre l'évolution du retard.

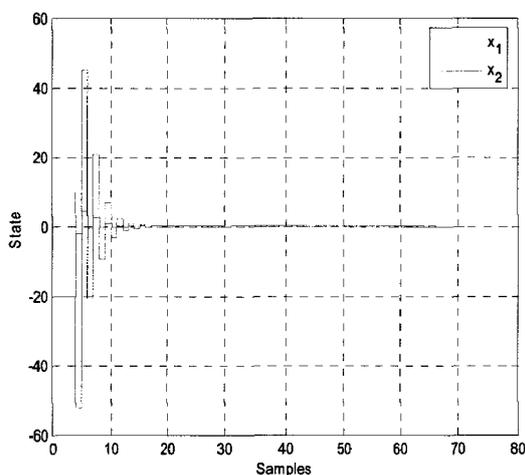


Figure 5.9: Evolution du vecteur d'état

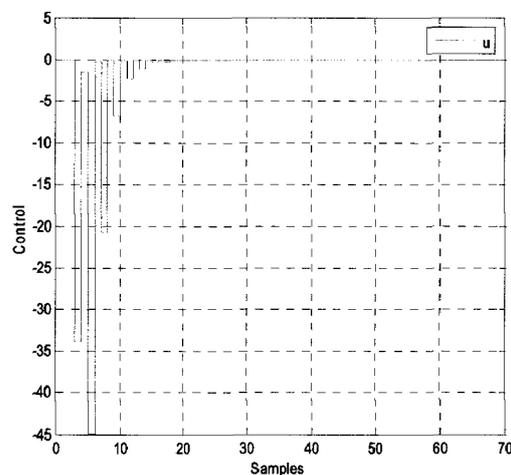


Figure 5.10: Evolution du vecteur de commande

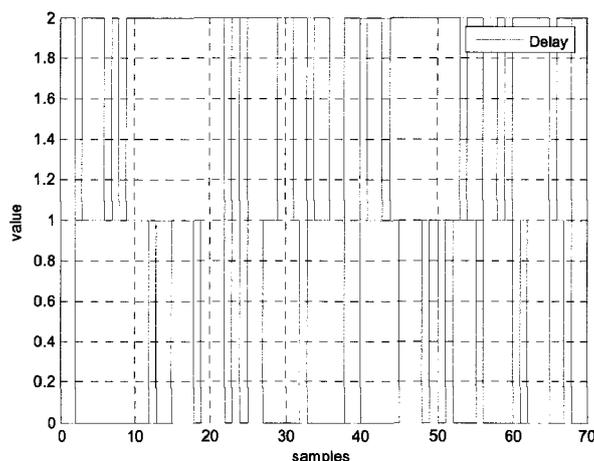


Figure 5.11: Evolution du retard

Sur les figures 5.12 et 5.13, un deuxième essai a été réalisé utilisant les mêmes solutions, mais en modifiant la borne maximale du retard (3 au lieu de 2, voir figure 5.11) de manière à avoir un retard plus grand que la période du modèle. Ce changement a comme conséquence, la divergence du système, figure 5.12. En recalculant les solutions du problème LMI pour cette nouvelle borne, une nouvelle commande stabilisante est trouvée, figure 5.14.

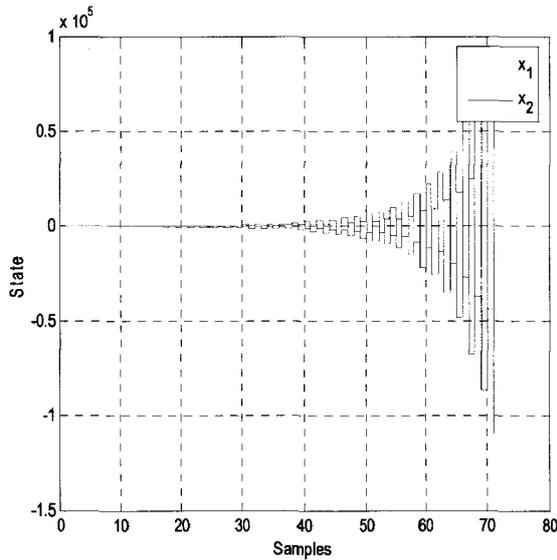


Figure 5.12: Evolution du vecteur d'état (Essai 2)

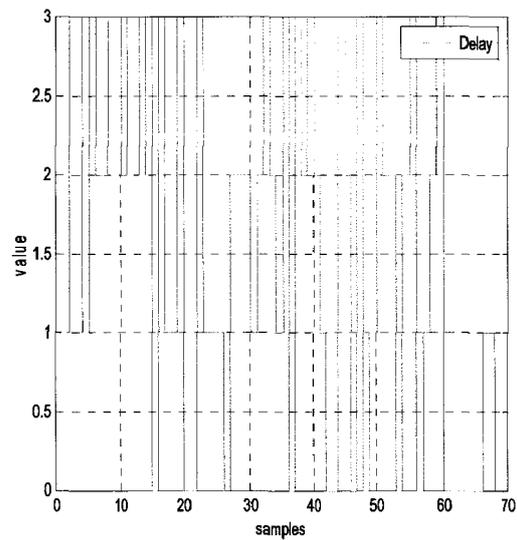


Figure 5.13 : Evolution de retard modifié

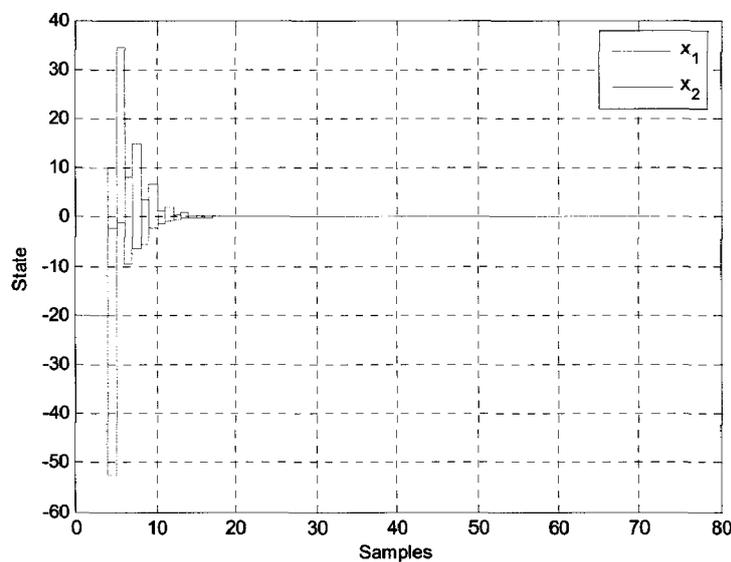


Figure 5.14: Evolution du vecteur d'état (Essai 3)

## IV.5.2. Observation des modèles TS discrets périodiques à retard

Considérons le modèle TS périodique à retard suivant :

$$\begin{cases} x(t+1) = A_{z(t)}^{(c)} x(t) + A_{1z(t)}^{(c)} x(t-\sigma(t)) \\ y(t) = C_{z(t)}^{(c)} x(t) \end{cases} \quad (4.58)$$

Et l'observateur d'état périodique correspondant :

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_{z(t)}^{(c)} \hat{x}(t) + S_2^{(c)-1} K_{z(t)}^{(c)} (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_{z(t)}^{(c)} \hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.59)$$

Les deux dynamiques correspondantes à l'état du système  $x(t)$  et à l'erreur d'estimation  $e(t)$  s'écrivent sous une forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{z(t)}^{(c)} & 0 \\ 0 & A_{z(t)}^{(c)} - S_2^{(c)-1} K_{z(t)}^{(c)} C_{z(t)}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{dz(t)}^{(c)} & 0 \\ A_{dz(t)}^{(c)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\tau) \\ e(t-\tau) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

La fonction de Lyapunov-Krasovski périodique choisie pour la synthèse de l'observateur définie en (4.59) est :

$$V_l = X^T(t) G^{(l)-T} \begin{bmatrix} P_1^{(l)} & 0 \\ 0 & P_2^{(l)} \end{bmatrix} G^{(l)-1} X(t) + \bar{V}_l \quad (4.61)$$

$$\text{avec } \bar{V}_l = \sum_{\alpha=t-\sigma(t)}^{t-1} x^T(\alpha) Z_1 x(\alpha) + \sum_{j=-\sigma_2+1}^{-\sigma_1+1} \sum_{l=t+j-1}^{t-1} x^T(l) Z_1 x(l) \text{ et } X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}.$$

Après quelques manipulations semblables au problème de stabilisation vue précédemment, on obtient la condition suivante :

$$\left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} -P_1^{(l \bmod p)} \\ +\bar{\sigma} Z_1 \end{pmatrix} & 0 & 0 & (*) & (*) \\ 0 & -P_2^{(l \bmod p)} & 0 & (*) & (*) \\ 0 & 0 & -Z_1 & (*) & (*) \\ S_1^{(l \bmod p)} A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} & 0 & S_1^{(l \bmod p)} A_{1z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} & \begin{pmatrix} -S_1^{(l \bmod p)} - S_1^{(l \bmod p)T} \\ +P_1^{((l+1) \bmod p)} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} S_2^{(l \bmod p)} A_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} \\ -K_{z(t+l \bmod p)}^{(l \bmod p)} C \end{pmatrix} & S_2^{(l \bmod p)} A_{1z(t)}^{(l \bmod p)} & 0 & \begin{pmatrix} -S_2^{(l \bmod p)} - S_2^{(l \bmod p)T} \\ +P_2^{((l+1) \bmod p)} \end{pmatrix} \end{array} \right] < 0 \quad (4.62)$$

En définissant alors les quantités suivantes :

$$\Upsilon_{ij}^{(l)} = \begin{bmatrix} -P_1^{(l)} + \bar{\sigma}Z_1 & 0 & 0 & (*) & 0 \\ 0 & -P_2^{(l)} & 0 & 0 & (*) \\ 0 & 0 & -Z_1 & (*) & (*) \\ S_1^{(l)}A_i^{(l)} & 0 & S_1^{(l)}A_{ii}^{(l)} & -S_1^{(l)} - S_1^{(l)T} + P_1^{(l+1)} & 0 \\ 0 & S_2^{(l)}A_i^{(l)} - K_j^{(l)}C & S_2^{(l)}A_{ii}^{(l)} & 0 & -S_2^{(l)} - S_2^{(l)T} + P_2^{(l+1)} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

**Théorème 18 :** Soient le modèle discret périodique (4.58) à retard variable et l'observateur périodique (4.59), s'il existe des matrices  $P^{(l)} > 0$ ,  $S_1^{(l)}$ ,  $S_2^{(l)}$ ,  $Z_1 > 0$  et  $K_i^{(l)}$ ,  $l \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $i \in \{1, \dots, r\}$  telles que les conditions (3.9) et (3.10) soient vérifiées pour tous les  $\Upsilon_{ij}^{(l)}$  définis en (4.63), alors la dynamique de l'erreur d'estimation (4.60) est  $p$ -stable.

**Remarque :** Il est important de mentionner ici que la technique proposée permettant d'utiliser des paramètres structurés afin de diminuer le nombre des paramètres à mémoriser est valable aussi pour tous les cas traités dans ce chapitre.

## IV.6. Conclusion

Dans ce chapitre, des méthodes d'analyses et de synthèse pour des modèles non linéaires périodique de Type Takagi-Sugeno à temps discret ont été développées. Les conditions de stabilité et de stabilisation obtenues, ont été mises sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Afin de réduire le pessimisme des résultats obtenus, nous nous sommes interrogés sur la possibilité de réduire à la fois le nombre de paramètres de la commande à mémoriser et le nombre de conditions LMI à vérifier. Dans ce cadre, des conditions de stabilité ont été proposées dans le cas où la période du modèle est importante par rapport à la période d'échantillonnage de base. Afin de tenir compte aussi des retards dans l'étape de modélisation, le problème de stabilisation des modèles périodiques à retard a été traité où des conditions LMI sont obtenues. Ces derniers sont valables dans le cas où le retard est plus petit ou plus grand que la période du modèle.



## Présentation de la Partie III

Les normes anti-pollution et les objectifs de faible consommation sont des enjeux incontournables pour les constructeurs automobiles. Il est donc nécessaire de maîtriser au mieux le comportement des moteurs thermiques. En particulier, la combustion au niveau de chacun des cylindres du moteur doit être gérée de manière optimale.

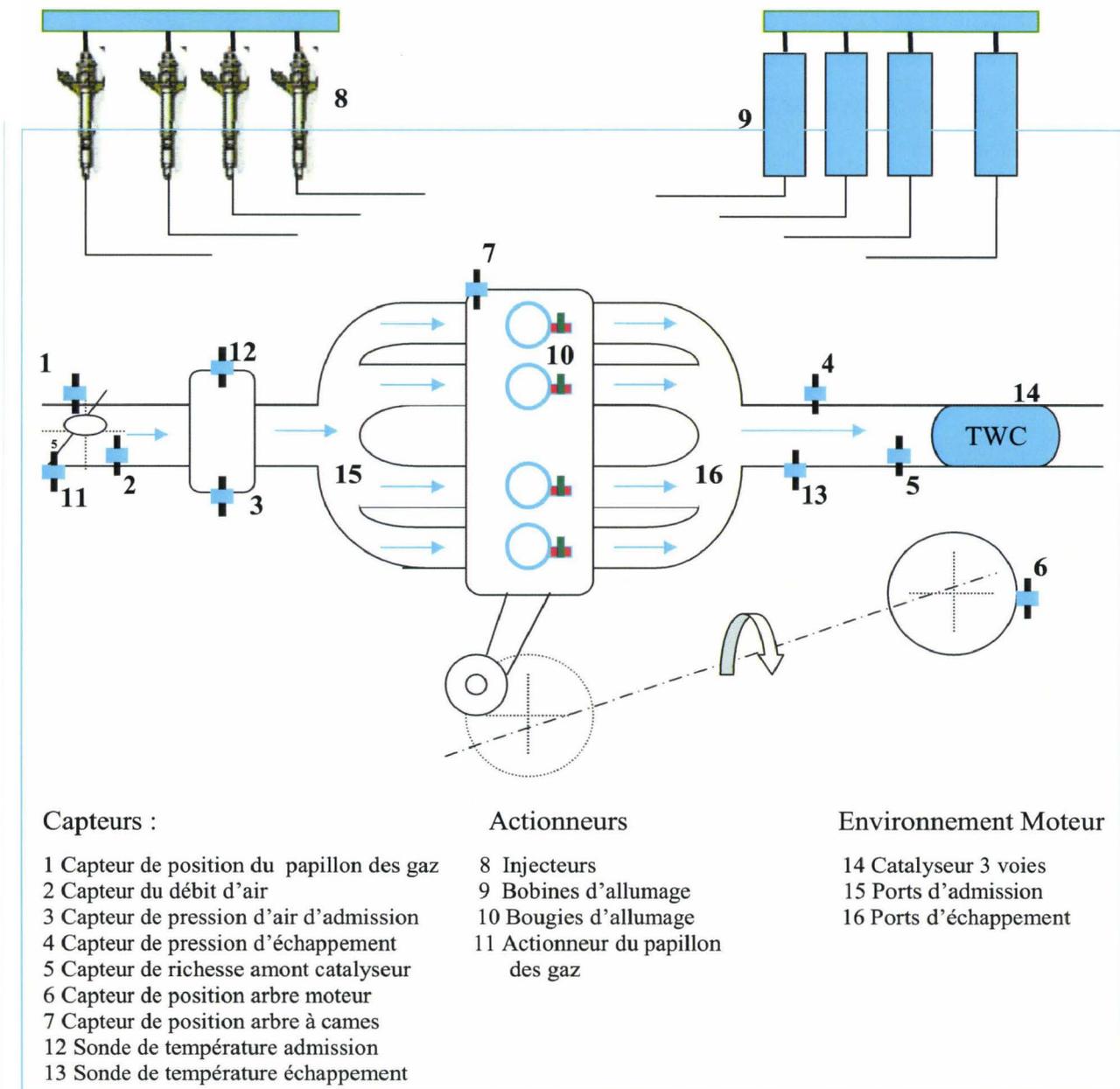


Figure 6 : Architecture Moteur

Pour réaliser cette gestion au niveau des cylindres, il est nécessaire de connaître les grandeurs suivantes :

- Les débits de gaz entrant et sortant de chacun des cylindres
- La masse de carburant introduite à chaque injection
- La richesse du mélange au niveau de chacun des cylindres
- Le couple produit par chacun des cylindres
- Le couple de charge
- Les différents polluants au collecteur d'échappement
- ...

Grâce à l'estimation de ces grandeurs, il est possible d'envisager de contrôler le moteur en boucle fermée indépendamment sur chaque cylindre sans ajouter de nouveaux capteurs, donc sans surcoût.

Le but de cette partie est de proposer des estimateurs permettant d'augmenter le niveau de performances du contrôle moteur et de s'affranchir par exemple de la conception préalable de certaines cartographies et donc de diminuer les temps de mise au point.

Des perspectives quant aux résultats sont proposées pour mettre en oeuvre des lois de commande cylindre à cylindre sont proposées pour terminer cette partie.

## Chapitre V. Estimation des variables caractéristiques par cylindre

|   |            |
|---|------------|
| <b>V.1. Introduction</b>  | <b>132</b> |
| <b>V.2. Estimation du débit individuel d'air frais pour chaque cylindre</b>           | <b>132</b> |
| V.2.1. Dynamique de l'admission d'air   | 133        |
| V.2.2. Modèle non linéaire de remplissage des cylindres                               | 135        |
| V.2.3. Transformation dans le domaine angulaire                                       | 136        |
| V.2.4. Méthode d'estimation individuelle des débits d'air frais                       | 136        |
| <b>V.3. Estimation du débit individuel des gaz d'échappement pour chaque cylindre</b> | <b>146</b> |
| V.3.1. Dynamique du collecteur d'échappement  | 147        |
| V.3.2. Méthode d'estimation individuelle des débits des gaz brûlés                    | 149        |
| <b>V.4. Estimation des fractions d'air individuelle à l'échappement</b>               | <b>152</b> |
| V.4.1. Modèle dynamique des fractions d'air à l'échappement                           | 153        |
| V.4.2. Structure d'estimation cylindre à cylindre                                     | 156        |
| <b>V.5. Conclusion</b>  | <b>161</b> |

## V.1. Introduction

Ce chapitre est dédié à l'estimation des débits massiques des gaz entrant et sortant de chacun des cylindres, ainsi qu'à l'estimation des richesses individuelles via les fractions d'air sortant des cylindres. Ces trois informations sont capitales pour le contrôle global du moteur à allumage commandé.

Les débits aux soupapes sont généralement calculés suivant des hypothèses d'écoulement quasi stationnaire, adiabatique et compressible. Dans ce chapitre, les formulations mathématiques modélisant deux types de débits sont considérées : débit à la jonction entre deux volumes voisins (figure 6.1) et débits traversant les soupapes (figure 6.2).

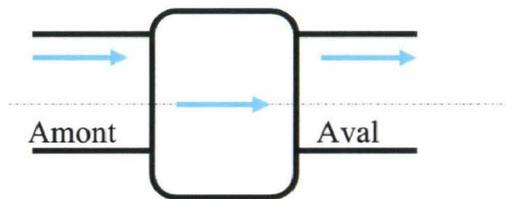


Figure 6.1: Ecoulement aux collecteurs

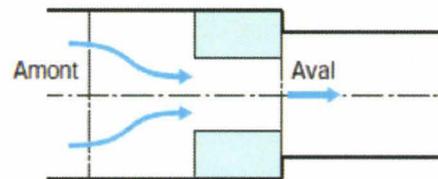


Figure 6.2 : Ecoulement aux soupapes

Dans une première partie, nous présentons un observateur d'état non linéaire périodique qui permet l'estimation des débits massiques entrants dans chacun des cylindres. Ce dernier se base sur les mesures de pression et du débit massique prises au collecteur d'admission. L'observateur développé prend en compte les non linéarités du modèle exprimant la variation de la température et de vitesse de rotation. Cette technique est reprise dans la deuxième partie pour la reconstruction des débits sortant vers le collecteur d'échappement où seules les mesures de la pression et de la température sont utilisées pour la synthèse.

Dans chaque cas, une première version est donnée dans le cas simplifié de non chevauchement entre les soupapes puis une seconde où le chevauchement est pris en compte. Sans perte de généralité, nous considérons un moteur à 4 cylindres dont chacun est muni d'une unique soupape d'admission et d'échappement. L'ordre d'allumage des cylindres du moteur considéré est : 1-3-4-2.

## V.2. Estimation du débit individuel d'air frais pour chaque cylindre

Cette section présente une structure d'estimation cyclique qui permet d'utiliser les mesures des paramètres considérés (pression, débit) dans des intervalles correspondant à

l'ouverture de chaque soupape d'admission de chaque cylindre. Pour ce faire, l'information de la position du vilebrequin combinée à celle de l'arbre à cames sont utilisées pour réaliser d'une part le phasage entre les cylindres, et d'autre part pour calculer les débits selon ce phasage. La discrétisation du modèle continu ainsi que sa transformation du domaine temporel au domaine angulaire sont alors développées. A partir de ce modèle, les outils proposés dans le chapitre précédent concernant les modèles TS périodiques sont appliqués.

### V.2.1. Dynamique de l'admission d'air

La dynamique au collecteur d'admission est souvent décrite par la variation de la pression dans le collecteur d'admission sous la forme :

$$\frac{dP_{col}(t)}{dt} = \frac{RT_{col}}{V_{col}} \left( D_{pap}(t) - \sum_{i=1}^{n_{cyl}} D_{cyl_i}(t) \right) \quad (5.1)$$

Où le débit traversant le papillon des gaz est:

$$D_{pap}(t) = C_{d\_col} \cdot A_{col} \cdot \left( \frac{P_{atm}}{\sqrt{r \cdot T_{atm}}} \right) \cdot d(P_{atm}, P_{col}) \quad (5.2)$$

Le terme  $d(P_{atm}, P_{col})$  est fonction de la pression en amont du collecteur  $P_{atm}$  et de la pression en aval du collecteur  $P_{col}$ , tel que :

$$d(P_{atm}, P_{col}) = \begin{cases} (P_r)^{1/\gamma} \cdot \sqrt{\frac{2 \times \gamma}{\gamma - 1} \cdot (1 - (P_r)^{\gamma-1/\gamma})} & \text{if } P_r > \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma + 1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} & \text{if } P_r \leq \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \end{cases} \quad (5.3)$$

Avec la constante  $\lambda = 1.4$ , le ratio de pression  $P_r$ , correspond au rapport entre la pression au collecteur d'admission et la pression atmosphérique qui règne en amont du collecteur, i.e.

$$P_r = \frac{P_{col}}{P_{atm}}.$$

Les débits entrant chacun des cylindres  $D_{cyl_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, n_{cyl}\}$  sont définis de la même manière que le débit d'entrée  $D_{pap}$ , à la différence que le ratio de pression est définie entre la pression au collecteur d'admission et la pression à l'intérieur du cylindre correspondant :

$$D_{cyl_i}(t) = C_{d\_sa} A_{sa\_i} (Lift_{sa\_i}(\theta)) \cdot \left( \frac{P_{col}}{\sqrt{r \cdot T_{col}}} \right) \cdot d(P_{col}, P_{cyl_i}) \quad (5.4)$$

Dans ce cas  $d(P_{col}, P_{cyl_i})$  s'écrit :

$$d(P_{col}, P_{cyl_i}) = \begin{cases} (P_{r_i})^{1/\gamma} \cdot \sqrt{\frac{2 \times \gamma}{\gamma - 1} \cdot (1 - (P_{r_i})^{\gamma-1/\gamma})} & \text{if } P_{r_i} > \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma+1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} & \text{if } P_{r_i} \leq \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{cases}, \gamma = 1.4 \quad (5.5)$$

Afin de construire un observateur et de s'affranchir de la mesure de la pression dans chacun des cylindres, le débit (5.4) est considéré en supposant seulement la deuxième condition de l'écoulement (5.5). Ce qui donne :

$$D_{cyl_i}(t) = C_{d\_sa} A_{sa} (Lift_{sa\_i}(\theta)) \cdot \left(\frac{P_{col}}{\sqrt{r \cdot T_{col}}}\right) \cdot \sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma+1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (5.6)$$

**Remarque :** Cette hypothèse permet de garder la valeur maximum de  $d(P_{col}, P_{cyl_i})$ .

Les aires effectives de l'ensemble conduit/soupape d'admission  $C_{d\_sa} A_{sa\_i} (Lift_{sa\_i}(\theta))$  sont modélisées par des fonctions linéaires et les levées de soupapes correspondantes à chacun des cylindres  $A_{sa\_i} = \alpha_i \cdot Lift_{sa\_i}(\theta)$  (les scalaires  $\alpha_i$  correspondent à la surface d'ouverture maximale qui est la même pour toutes les soupapes). Une manière intéressante de calculer les levées de soupapes en fonction de l'angle vilebrequin est donnée dans [Jun-Mo & Grizzle 03], sous la forme :

$$Lift_{sa\_i}(\theta) = \sin^2 \left( \frac{180}{DOA_i} (\theta - 90(i-1) - OSA_i) \right), i \in \{1, \dots, n_{cyl}\} \quad (5.7)$$

Les fonctions « LIFT » définies en (5.7) sont caractérisées par les instants angulaires d'ouverture des différentes soupapes d'admission  $OSA_i$  et des durées d'ouverture angulaire de ces dernières  $DOA_i$  pour le cylindre  $i$ .

Afin de représenter la variation des débits massiques d'air à estimer, nous utilisons une version filtrée de (5.6), ce qui donne :

$$\dot{D}_{cyl_i}(t) = \left(\frac{-1}{\tau_{fil_i}}\right) \cdot D_{cyl_i}(t) + \left(\frac{1}{\tau_{fil_i}}\right) \cdot C_{d\_sa} A_{sa} (Lift_{sa\_i}(\theta)) \cdot \left(\frac{P_{col}}{\sqrt{r \cdot T_{col}}}\right) \cdot \sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma+1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (5.8)$$

Avec  $\tau_{fil_i}$  la constante du temps du filtre choisie en fonction de la dynamique du phénomène mis en jeu.

D'autre part, il est important de prendre en compte les dynamiques des capteurs considérés. La mesure du débit d'air est fournie par un débitmètre massique placé en amont

du collecteur d'admission et la mesure de la pression dans le collecteur par un capteur piézoélectrique. Dans ce cadre, la dynamique du capteur du débit d'air frais est modélisée par une dynamique de premier ordre de constante de temps  $\tau_{pap} = 20 \text{ ms}$  :

$$\tau_{pap} \frac{dD_{pap_m}(t)}{dt} + D_{pap_m}(t) = D_{pap}(t) \quad (5.9)$$

Où  $D_{pap_m}(t)$  est le débit d'air frais mesuré en  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . De même pour le capteur de pression, une dynamique du premier ordre de constante de temps  $\tau_{col} = 20 \text{ ms}$  est considérée :

$$\tau_{col} \frac{dP_{col_m}(t)}{dt} + P_{col_m}(t) = P_{col}(t) \quad (5.10)$$

Où  $P_{col_m}(t)$  le signal de pression mesuré au collecteur d'échappement exprimé en  $\text{Pa}$ .

### V.2.2. Modèle non linéaire de remplissage des cylindres

A partir des équations précédentes (5.1), (5.2), (5.8), (5.9) et (5.10), un modèle non linéaire continu peut être synthétisé. En utilisant, un vecteur d'états comprenant 7 variables :

$x^T(t) = [P_{col} \quad P_{col_m} \quad D_{pap_m} \quad D_{cyl_1} \quad D_{cyl_2} \quad D_{cyl_3} \quad D_{cyl_4}]^T$ , une représentation d'état est :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -nl_1 & -nl_1 & -nl_1 & -nl_1 \\ c_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl_2 & 0 & 0 & -c_3 & 0 & 0 & 0 \\ nl_3 & 0 & 0 & 0 & -c_3 & 0 & 0 \\ nl_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 & 0 \\ nl_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} nl_1 \\ 0 \\ c_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} D_{pap}(t) \quad (5.11)$$

$$\begin{bmatrix} P_{col_m}(t) \\ D_{pap_m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (5.12)$$

Avec les constantes  $c_1 = \frac{1}{\tau_{col}}$ ,  $c_2 = \frac{1}{\tau_{pap}}$ ,  $c_3 = \frac{1}{\tau_{fi}}$ , et les fonctions non linéaires :

$$nl_1 = \frac{RT_{col}}{V_{col}}, \quad nl_i = c_3 \cdot C_{d_{sa}} \cdot A_{sa} \left( Lift_{sa\_i}(\theta) \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma + 1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\sqrt{r \cdot T_{col}}} \right), \quad i \in \{2, \dots, n_{cyl} + 1\}.$$

Le modèle défini en (5.11) et (5.12) n'est pas à état entièrement observable. Pour résoudre ce problème de non observabilité et afin de pouvoir estimer chacun des débits

individuellement, une représentation périodique définie dans le domaine angulaire et équivalente au modèle (5.11) est proposée.

### V.2.3. Transformation dans le domaine angulaire

Les instants d'ouverture et de fermeture des soupapes d'admission de chacun des cylindres se produisent de manière périodique sur chaque cylindre. Ces instants varient dans le domaine temporel en fonction de la vitesse de rotation. Cependant, dans le domaine angulaire, l'ouverture et la fermeture des soupapes d'admission se produisent toujours aux mêmes instants angulaires. Le modèle est réécrit dans le domaine angulaire en utilisant la transformation suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(\theta)}{d\theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{dx(\theta)}{d\theta} \dot{\theta} \quad (5.13)$$

### V.2.4. Méthode d'estimation individuelle des débits d'air frais

La discrétisation du modèle non linéaire (5.11) dans le domaine angulaire s'obtient en utilisant à la fois la transformation (5.13) et la discrétisation d'Euler :

$$x(\theta+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -nl'_1 & -nl'_1 & -nl'_1 & -nl'_1 \\ c'_1 & 1-c'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl'_2 & 0 & 0 & 1-c'_3 & 0 & 0 & 0 \\ nl'_3 & 0 & 0 & 0 & 1-c'_3 & 0 & 0 \\ nl'_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-c'_3 & 0 \\ nl'_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-c'_3 \end{bmatrix} x(\theta) + \begin{bmatrix} nl'_1 \\ 0 \\ c'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} D_{pap}(\theta) \quad (5.14)$$

$$\begin{bmatrix} P_{col_m}(\theta) \\ D_{pap_m}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(\theta)$$

Avec  $\theta_s$  le pas d'échantillonnage du modèle et  $N_e$  la vitesse de rotation du moteur en

$tr \cdot \min^{-1}$ , les trois constantes deviennent  $c'_1 = \frac{\theta_s}{\tau_{col} \cdot N_e}$ ,  $c'_2 = \frac{\theta_s}{\tau_{pap} \cdot N_e}$ ,  $c'_3 = \frac{\theta_s}{\tau_{fil_1} \cdot N_e}$  et les

fonctions non linéaires :

$$nl'_1 = \frac{RT_{col}}{V_{col}} \cdot \frac{\theta_s}{N_e} \quad (5.15)$$

$$nl'_i = c'_3 \cdot C_{d\_sa} \cdot A_{sa} \left( Lift_{sa\_i}(\theta) \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma + 1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\sqrt{r \cdot T_{col}}} \right), \quad i \in \{2, \dots, n_{cyl} + 1\} \quad (5.16)$$

**Remarque :**

Le terme " $\theta+1$ " désigne par abus le terme  $(k+1) \cdot \theta_s$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . Cette notation est conservée dans la suite.

Afin de prendre en considération les fonctions non linéaires (5.15), (5.16) et pour résoudre le problème d'observabilité du modèle (5.14), ce dernier est réécrit sous la forme d'un modèle TS discret périodique. Deux approches sont prises en compte, la première ne prend pas en considération les chevauchements entre les soupapes d'admission de deux cylindres alors que la seconde les prend en compte.

**A- Sans chevauchement**

Comme les non linéarités définies en (5.15) et (5.16) sont bornées  $nl'_i \in \left[ \underline{nl'_i}, \overline{nl'_i} \right]$ ,  $i \in \{1, \dots, n_{cyl} + 1\}$ , une représentation TS équivalente au modèle non linéaire discret défini en (5.14) composé de 32 sous- modèles peut être donnée sous la forme :

$$\begin{cases} x(\theta+1) = \sum_{i=1}^{32} h_i(z(\theta)) (A_i x(\theta) + B_i D_{pap}(\theta)) \\ y(\theta) = C \cdot x(\theta) \end{cases} \quad (5.17)$$

On rappelle que le nombre de modèles linéaires impacte directement sur le nombre de LMI et de variables à rechercher dans les problèmes LMI. 32 modèles avec un système d'ordre 7 est incompatible avec les solveurs de LMI actuels. Il est alors nécessaire de réduire le nombre de modèles. Pour ce faire, en utilisant le fait qu'il n'y a pas de croisement entre les cylindres (figure 6.3), les fonctions non linéaires définies en (5.16) peuvent se regrouper en une seule fonction non linéaire :

$$nl'_2 = c'_3 \cdot C_{d\_sa} \cdot \left( \sum_{i=1}^4 \alpha_i Lift_{sa\_i}(\theta) \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma + 1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\sqrt{r \cdot T_{col}}} \right) \quad (5.18)$$

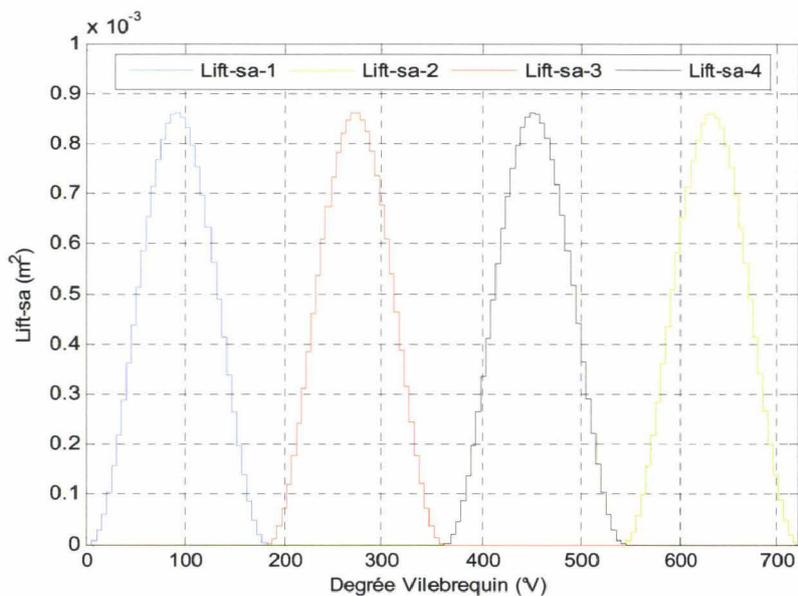


Figure 6.3 : Levée de soupape d'admission de chaque cylindre

Pour résoudre le problème de non observabilité du modèle défini en (5.14), nous proposons une approche basée sur la préservation du caractère cyclique des événements du moteur. En effet, dans ce cas, la séquence des événements de remplissage des chambres de combustion se fait en 4 phases qui sont synchronisées par rapport à la position angulaire du vilebrequin et phasées selon un ordre d'allumage défini à l'avance selon le graphe suivant:

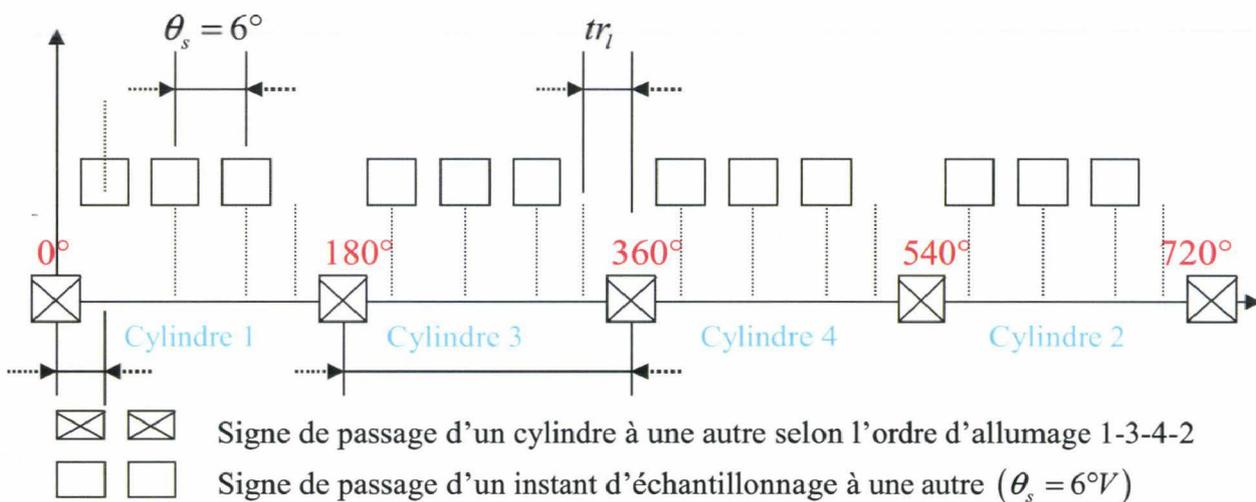


Figure 6.4 : Séquence des événements sur un cycle moteur

En suivant la même logique de séquence donnée sur la figure 6.4 et en prenant en compte le fait que ce cycle se répète tous les deux tours de rotation du vilebrequin  $720^\circ V$ , le modèle TS 120-périodique suivant s'écrit:

$$\begin{cases} x(\theta+1) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(\theta)) \left( A_i^{(c)} x(\theta) + B_i^{(c)} D_{pap}(\theta) \right), & c = \theta \bmod 120 \\ y(\theta) = C \cdot x(\theta) \end{cases} \quad (5.19)$$

avec  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Les différentes matrices des modèles linéaires qui correspondent à chacune des 4 phases du modèle sont obtenues en faisant un découpage par secteur non linéaire des non linéarités (5.15) et (5.18) correspondantes ; elles sont notées  $A^i(\theta, nl'_1, nl'_2)$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$ . Ces dernières sont regroupées dans le tableau 11.

**Remarque :** la période est de  $p=120$ , ce qui correspond à 120 phases de transition. En considérant que les débits ne varient pas d'un instant d'échantillonnage à un autre ( $\theta_s = 6^\circ$ ) mais au bout de  $180^\circ$ , on aura seulement 4 phases.

Tableau 11

| $\theta \in [0, \dots, 180^\circ]$ (cylindre 1 activé)   | $\theta \in [180, \dots, 360^\circ]$ (cylindre 3 activé)   |
|--|--|
| $A^1(\theta, nl'_1, nl'_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -nl'_1 & 0 & 0 & 0 \\ c'_1 & 1-c'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl'_2 & 0 & 0 & 1-c'_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | $A^2(\theta, nl'_1, nl'_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -nl'_1 & 0 \\ c'_1 & 1-c'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-c'_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ |
| $B^1(\theta, nl'_1) = [nl'_1 \quad 0 \quad c'_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$  | $B^2(\theta, nl'_1) = [nl'_1 \quad 0 \quad c'_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$  |
| $A_1^1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl}'_1, \underline{nl}'_2), A_2^1(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl}'_1, \overline{nl}'_2)$   | $A_1^2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl}'_1, \underline{nl}'_2), A_2^2(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl}'_1, \overline{nl}'_2)$   |
| $A_3^1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl}'_1, \overline{nl}'_2), A_4^1(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl}'_1, \underline{nl}'_2)$   | $A_3^2(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl}'_1, \underline{nl}'_2), A_4^2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl}'_1, \overline{nl}'_2)$   |
| $B_1^1(\theta) = B_2^1(\theta) = B^1(\theta, \underline{nl}'_1), B_3^1(\theta) = B_4^1(\theta) = B^1(\theta, \overline{nl}'_1)$  | $B_1^2(\theta) = B_2^2(\theta) = B^2(\theta, \underline{nl}'_1), B_3^2(\theta) = B_4^2(\theta) = B^2(\theta, \overline{nl}'_1)$  |
| $\theta \in [540, \dots, 720^\circ]$ (cylindre 2 activé)   | $\theta \in [360, \dots, 540^\circ]$ (cylindre 4 activé)   |

|  |  |
|--|--|
| $A^4(\theta, nl_1', nl_2') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -nl_1' & 0 & 0 \\ c_1' & 1-c_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl_2' & 0 & 0 & 0 & 1-c_3' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B^4(\theta, nl_1') = [nl_1' \ 0 \ c_2' \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $A_1^4(\theta) = A^4(\theta, \underline{nl_1'}, \underline{nl_2'}), A_2^4(\theta) = A^4(\theta, \underline{nl_1'}, \overline{nl_2'})$ $A_3^4(\theta) = A^4(\theta, \overline{nl_1'}, \underline{nl_2'}), A_4^4(\theta) = A^4(\theta, \overline{nl_1'}, \overline{nl_2'})$ $B_1^4(\theta) = B_2^4(\theta) = B^4(\theta, \underline{nl_1'}), B_3^4(\theta) = B_4^4(\theta) = B^4(\theta, \overline{nl_1'})$ | $A^3(\theta, nl_1', nl_2') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -nl_1' \\ c_1' & 1-c_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl_2' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-c_3' \end{bmatrix}$ $B^3(\theta, nl_1') = [nl_1' \ 0 \ c_2' \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $A_1^3(\theta) = A^3(\theta, \underline{nl_1'}, \underline{nl_2'}), A_2^3(\theta) = A^3(\theta, \underline{nl_1'}, \overline{nl_2'})$ $A_3^3(\theta) = A^3(\theta, \overline{nl_1'}, \underline{nl_2'}), A_4^3(\theta) = A^3(\theta, \overline{nl_1'}, \overline{nl_2'})$ $B_1^3(\theta) = B_2^3(\theta) = B^3(\theta, \underline{nl_1'}), B_3^3(\theta) = B_4^3(\theta) = B^3(\theta, \overline{nl_1'})$ |
|--|--|

La synthèse d'un observateur 120-périodique correspondant au modèle 120-périodique défini en (5.19) s'obtient par l'application du théorème 14 (Corollaire 2 du chapitre 4). Les matrices solutions du problème LMI associé sont :

$\forall \theta \in \{0, \dots, 180^\circ\}$ :

$$S_1^{-1}K_1^\theta = \begin{bmatrix} 5.48 & 2.06 & 0 & -0.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, S_1^{-1}K_2^\theta = \begin{bmatrix} 4.22 & 2.07 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$S_1^{-1}K_3^\theta = \begin{bmatrix} 5.42 & 3.25 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.62 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, S_1^{-1}K_4^\theta = \begin{bmatrix} 4.43 & 5.66 & 0 & -1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$\forall \theta \in \{180^\circ, \dots, 360^\circ\}$ :

$$S_2^{-1}K_1^\theta = \begin{bmatrix} 5.48 & 2.06 & 0 & 0 & 0 & -0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, S_2^{-1}K_2^\theta = \begin{bmatrix} 4.22 & 2.07 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$S_2^{-1}K_3^\theta = \begin{bmatrix} 5.42 & 3.25 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.62 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, S_2^{-1}K_4^\theta = \begin{bmatrix} 4.43 & 5.66 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$\forall \theta \in \{360^\circ, \dots, 540^\circ\}$ :

$$S_3^{-1}K_1^\theta = \begin{bmatrix} 5.48 & 2.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.03 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, S_3^{-1}K_2^\theta = \begin{bmatrix} 4.22 & 2.07 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 \\ 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$S_3^{-1}K_3^\theta = \begin{bmatrix} 5.42 & 3.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0.62 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, S_3^{-1}K_4^\theta = \begin{bmatrix} 4.43 & 5.66 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$\forall \theta \in \{540^\circ, \dots, 720^\circ\}$  :

$$S_4^{-1}K_1^\theta = \begin{bmatrix} 5.48 & 2.06 & 0 & 0 & -0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, S_4^{-1}K_2^\theta = \begin{bmatrix} 4.22 & 2.07 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$S_4^{-1}K_3^\theta = \begin{bmatrix} 5.42 & 3.25 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.62 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, S_4^{-1}K_4^\theta = \begin{bmatrix} 4.43 & 5.66 & 0 & 0 & -1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Les résultats réels obtenus sur banc d'essais moteur sont donnés dans les figures ci-après. Les figures 6.5 et 6.6 représentent respectivement l'évolution de la vitesse de rotation et de la position du papillon des gaz considérés dans cet essai. Les estimations des sorties mesurées sont données sur la figure 6.7 pour la pression et la figure 6.9 pour le débit. Les erreurs d'estimation correspondantes sont fournies sur les figures 6.8 et 6.10.

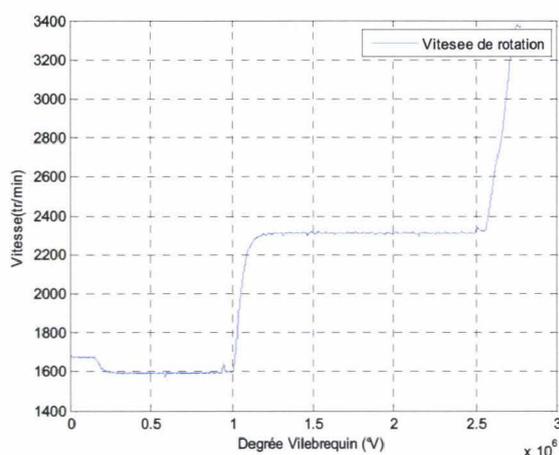


Figure 6.5 : Evolution de la vitesse de rotation

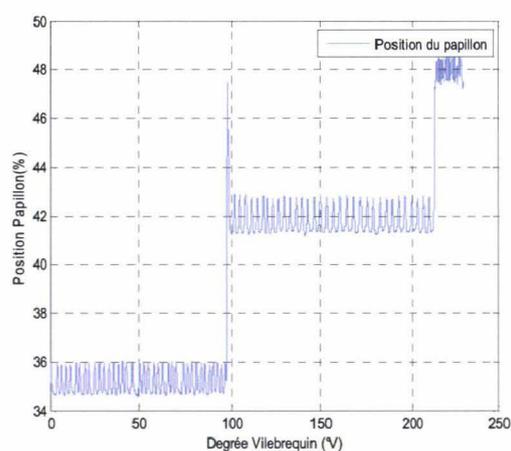


Figure 6.6 : Evolution de la position de papillon

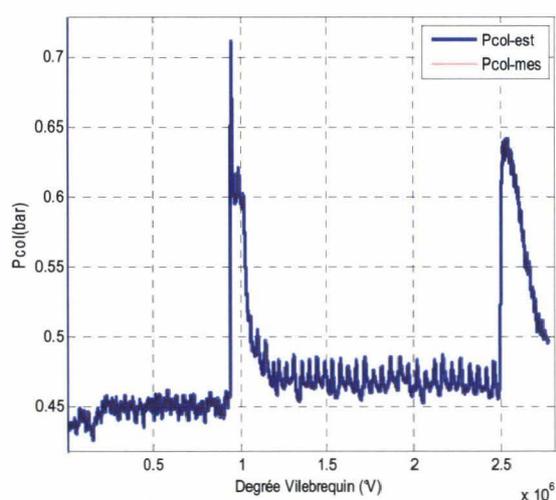


Figure 6.7 : Pression collecteur estimée et mesurée

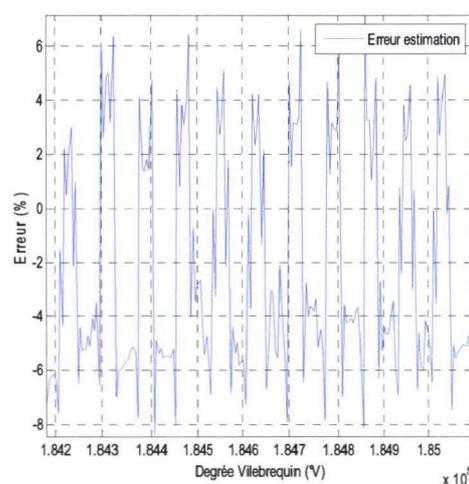


Figure 6.8 : Erreur d'estimation de pression

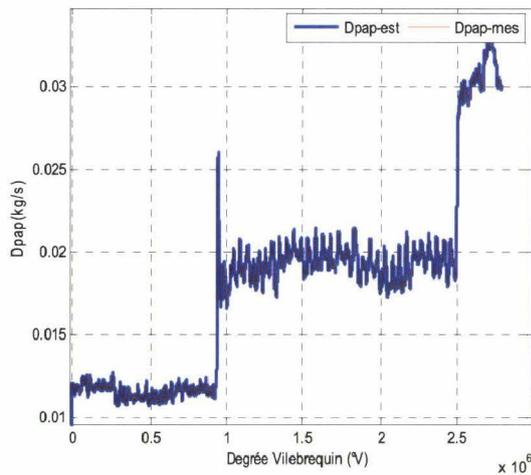


Figure 6.9 : Débit papillon estimé et mesuré

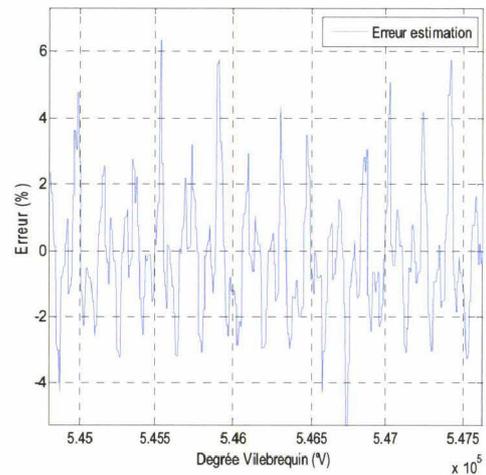


Figure 6.10 : Erreur d'estimation du débit

La figure 6.11 donne l'évolution des débits d'air frais estimés au niveau de chacun des cylindres alors que la figure 6.12 montre l'évolution du débit d'air estimé au niveau du cylindre 1 par rapport au débit global venant du collecteur d'admission.

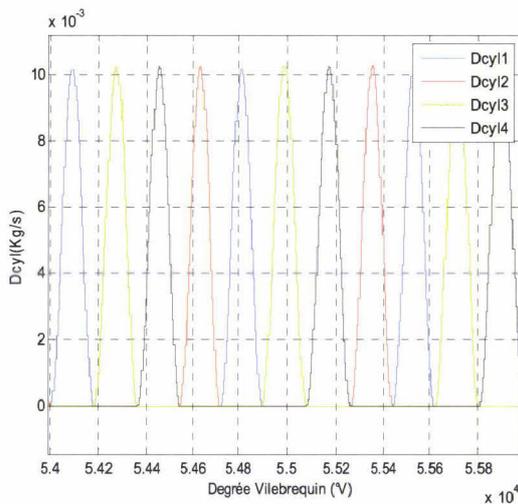


Figure 6.11 : Débit d'air frais estimées

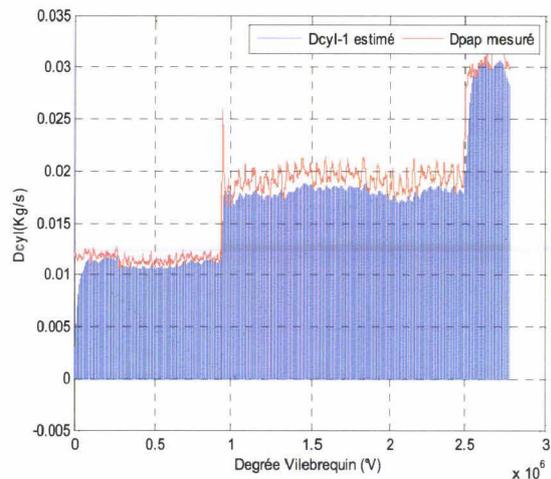


Figure 6.12 : Débit d'air au cylindre 1 estimé/Dpap

Comme ces figures le montrent, l'observateur d'état périodique développé permet d'estimer les débits d'air frais correspondant à chacun des cylindres pour des régimes moteur variant de 1500 à 3500  $tr \cdot min^{-1}$ . Ces débits changent de valeurs maximales de façon instantanée avec le régime moteur. Ces résultats sont obtenus sans considérer les phases où les soupapes d'admissions de deux cylindres successifs sont ouvertes en même temps. Ce cas est traité dans la section suivante.

B- Avec chevauchement

Pour des vitesses élevées, fonctionner avec une durée d'ouverture des soupapes d'admission  $DOA > 180^\circ$  est nécessaire pour atteindre un couple maximal. Pendant ces phases avancer l'ouverture et de retarder la fermeture des soupapes permet également d'améliorer les performances. Dans le cas de notre application, les instants d'avance à l'ouverture  $AOA_i$  et de retard à la fermeture  $RFA_i$  des soupapes d'admission sont fixés à :  $AOA_i = 6^\circ V$  (avant  $PMH$ ) et  $RFA_i = 46^\circ V$  (Après  $PMB$ ) . Ces événements font que les admissions d'air dans les cylindres se chevauchent deux à deux. De ce fait des phases vont apparaître où deux chambres de combustion se remplissent au même temps. On obtient alors dans ce cas, les lois de levée de soupapes de la figure suivante.

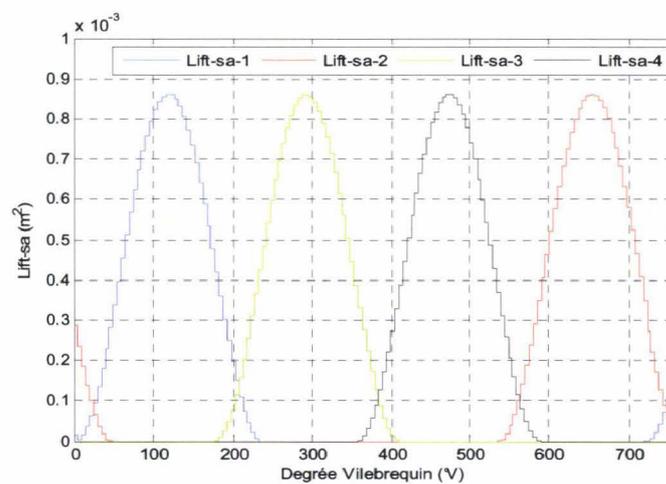


Figure 6.13 : Levée de soupape d'admission de chaque cylindre

Afin de pouvoir prendre en compte les phases de chevauchement entre les cylindres, nous proposons de décomposer les événements de remplissage des chambres de combustion, cette fois-ci en 9 phases, qui sont synchronisées par rapport à la position angulaire du vilebrequin et phasées selon un ordre d'allumage défini à l'avance selon le graphe suivant.

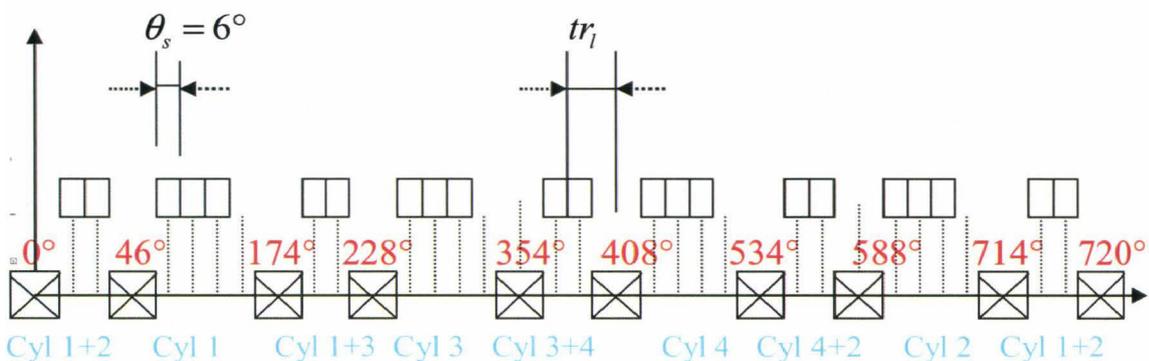


Figure 6.14 : Séquence des événements sur un cycle moteur

Vu que seulement deux cylindres différents peuvent se chevaucher, les fonctions non linéaires définies en (5.16) se réduisent à deux fonctions non linéaires :

$$nl'_2 = c_3 \cdot C_{d\_sa} \cdot (\alpha_1 Lift_{sa\_1}(\theta) + \alpha_4 Lift_{sa\_4}(\theta)) \cdot \left( \frac{\sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma + 1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\sqrt{r \cdot T_{col}}} \right) \cdot \frac{\theta_s}{N_e} \quad (5.20)$$

$$nl'_3 = c_3 \cdot C_{d\_sa} \cdot (\alpha_2 Lift_{sa\_2}(\theta) + \alpha_3 Lift_{sa\_3}(\theta)) \cdot \left( \frac{\sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma + 1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\sqrt{r \cdot T_{col}}} \right) \cdot \frac{\theta_s}{N_e} \quad (5.21)$$

On obtient alors dans ce cas, le modèle flou 120-périodique à 8 modèles suivant :

$$\begin{cases} x(\theta+1) = \sum_{i=1}^8 h_i(z(\theta)) (A_i^{(c)} x(\theta) + B_i^{(c)} D_{pap}(\theta)), c = \theta \bmod 120 \\ y(\theta) = C \cdot x(\theta) \end{cases} \quad (5.22)$$

où la matrice de sortie  $C$  reste constante :  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Les différentes

matrices non linéaires de ce modèle qui correspondent à chacune des 9 phases, ainsi que leur découpage flou par rapport aux trois fonctions non linéaires (5.15), (5.20) et (5.21) sont données en annexe D-1.

La synthèse d'un observateur d'état correspondant au modèle 120-périodique défini en (5.22) s'obtient par l'application du théorème 16 (Corollaire 2 du chapitre 4). les résultats d'essais temps réel sont donnés dans les figures ci-après.

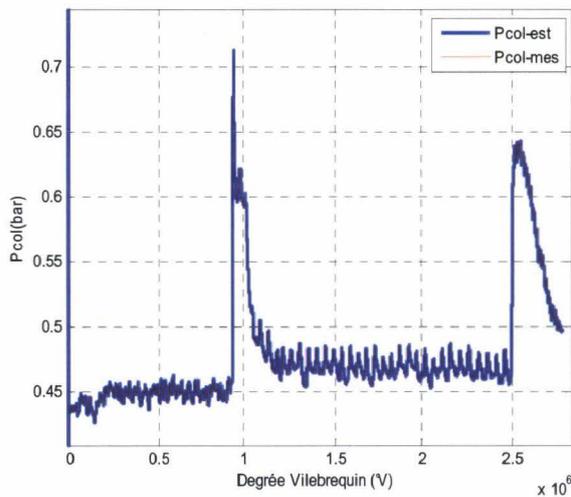


Figure 6.15 : Pression collecteur estimée et mesurée

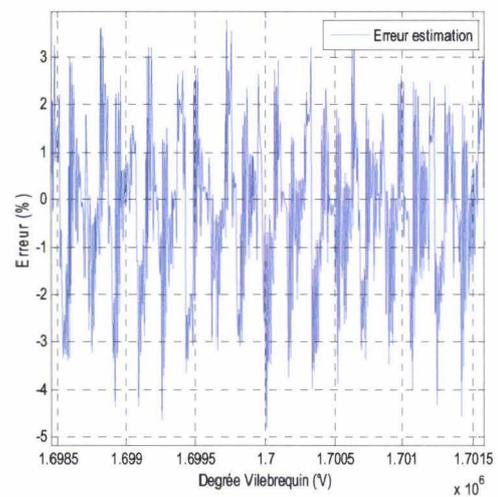


Figure 6.16 : Erreur d'estimation de pression

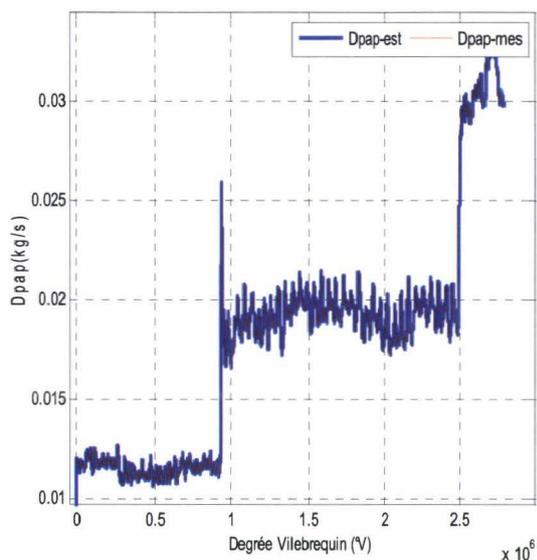


Figure 6.17 : Débit papillon estimé et mesuré

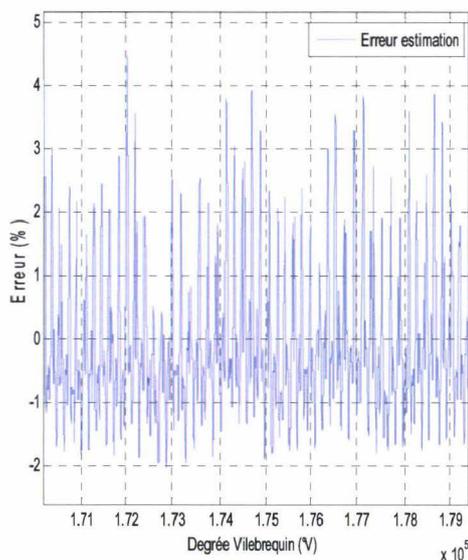


Figure 6.18 : Erreur d'estimation du débit

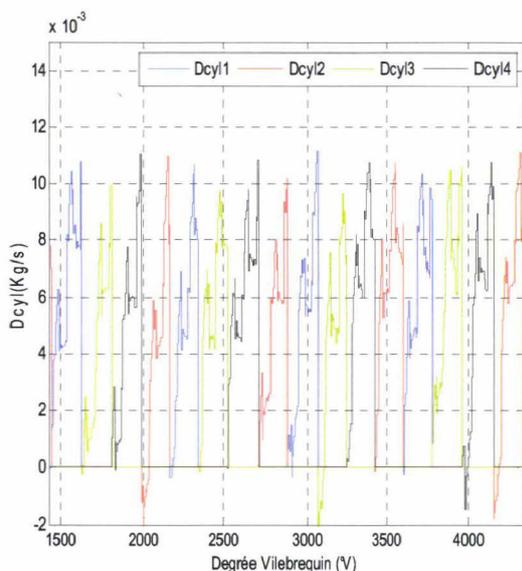


Figure 6.19 : Débit d'air frais estimé

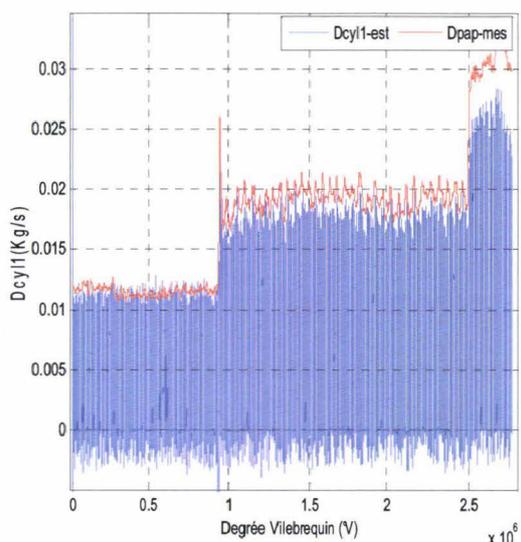


Figure 6.20 : Débit d'air au cylindre 1 estimé / Dpap

Le fait de prendre en compte le chevauchement entre les cylindres permet de détecter les portions de débits négatifs qui correspondent à des phases où la pression dans le cylindre est supérieure à celle du collecteur. Dans ce cas, la distribution en air ne se fait pas de manière uniforme dans tous les cylindres et par conséquent il existe des disparités plus ou moins importantes entre les différents débits dues aux phénomènes acoustiques dans les ports d'admission. Les résultats obtenus tous les  $6^\circ V$  permettent d'avoir une information haute fréquence et précise du phénomène de remplissage sans pour autant tomber dans le bruit de mesure.

### V.3. Estimation du débit individuel des gaz d'échappement pour chaque cylindre

La dynamique au collecteur d'échappement est caractérisée principalement par le phénomène de mélange produit par le mouvement périodique du refoulement des gaz brûlés sortant de chacun des cylindres. Une fois refoulés, ces gaz brûlés traversent un catalyseur (TWC) (figure 6), placé au plus près de la soupape d'échappement du moteur afin d'assurer une température suffisamment élevée pour garantir une bonne efficacité de conversion des polluants.

Cette section présente une approche similaire à celle de la section précédente, et permet l'estimation des débits qui passent à travers la soupape d'échappement de chaque cylindre en utilisant un observateur périodique. A la différence des débits qui traversent les soupapes d'admission, ceux qui traversent les soupapes d'échappement ont, a priori, une forme particulière. En effet, les débits passeront d'une valeur élevée, lors de l'ouverture de la soupape, à une valeur plus faible lorsque les pressions cylindres et collecteur d'échappement s'égaliseront, pour enfin ré-augmenter lorsque le piston commencera à remonter pour éjecter les gaz d'échappement (figure 6.21).

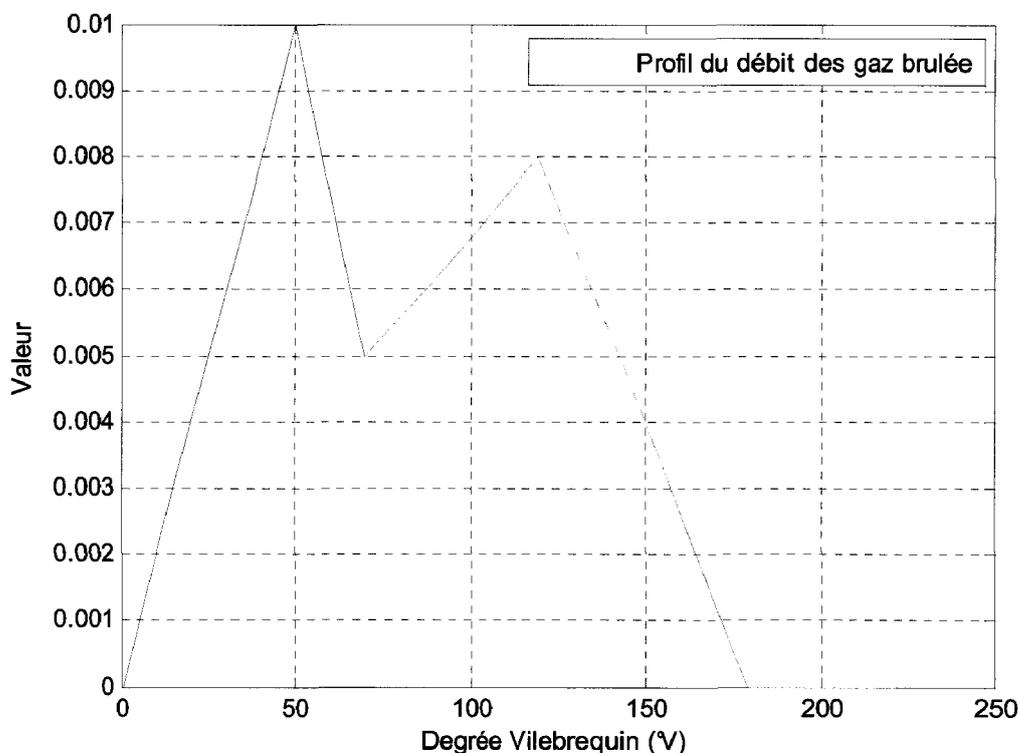


Figure 6.21: Profil simplifié des débits des gaz brûlés qui sortent des cylindres

### V.3.1. Dynamique du collecteur d'échappement

La variation de pression au collecteur d'échappement s'écrit en appliquant la loi de conservation de masse :

$$\frac{dP_{ech}(t)}{dt} = \frac{RT_{ech}(t)}{V_{ech}} \left( \sum_{i=1}^{n_{cyl}} D_{ech_i}(t) - D_{tvc}(t) \right) \quad (5.23)$$

Le débit en aval du collecteur  $D_{tvc}$  peut être calculé utilisant les équations de Saint-Venant, avec d'un coté la pression en amont du collecteur qui est égale à celle qui règne au collecteur d'échappement, et de l'autre, la pression en aval du collecteur qui est égale à la pression atmosphérique.

$$D_{tvc}(t) = C_{d_{exh}} \cdot A_{exh} \cdot \left( \frac{P_{exh}(t)}{\sqrt{r \cdot T_{exh}(t)}} \right) \cdot d(P_{exh}, P_{atm}) \quad (5.24)$$

avec :

$$d(P_{exh}, P_{atm}) = \begin{cases} (P_r)^{1/\gamma} \cdot \sqrt{\frac{2 \times \gamma}{\gamma - 1} \cdot (1 - (P_r)^{\gamma - 1/\gamma})} & \text{if } P_r > \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma + 1)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} & \text{if } P_r \leq \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \end{cases} \quad (5.25)$$

Où  $\gamma = 1.4$  , la pression critique  $P_r$  est définie par le ratio entre la pression atmosphérique et

la pression d'échappement  $P_r = \frac{P_{atm}}{P_{exh}}$  et l'aire de référence est égale à  $A_{exh} = \frac{\pi \cdot d_{exh}^2}{4}$  où  $d_{exh}$

représente le diamètre du collecteur d'échappement en  $m$  .

En supposant que la pression et la température des gaz dans le cylindre sur la phase d'échappement sont égales à la pression et la température dans le collecteur d'échappement, les débits des gaz à la sortie de chaque pipe d'échappement  $D_{exh_i}$  peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$D_{exh_i}(t) = C_{d_{se}} \cdot A_{se} (Lift_{se_i}(\theta)) \cdot \left( \frac{P_{ech}(t)}{\sqrt{r \cdot T_{ech}(t)}} \right) \cdot \sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma + 1)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (5.26)$$

De façon réciproque au cas de l'admission, les aires effectives de l'ensemble conduit soupapes d'échappement  $C_{d_{se}} A_{se} (Lift_i(\theta))$  sont modélisées par des fonctions non linéaires et les levées de soupapes correspondantes à chacun des cylindres  $A_{se_i} = \alpha_i \cdot Lift_{se_i}(\theta)$ , avec :

$$Lift_{se\_i}(\theta) = \sin^2\left(\frac{180}{DOE_i}(\theta - 90(i-1) - OSE_i)\right), \quad i \in \{1, 2, \dots, n_{cyl}\} \quad (5.27)$$

Où  $OSE_i$  et  $DOA_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n_{cyl}\}$  représentent respectivement les instants angulaires d'ouverture des différentes soupapes d'échappement et les durées d'ouverture angulaires de ces dernières,  $\theta$  représente la position angulaire du vilebrequin. Le même type de filtrage de (5.26) que précédemment est utilisé et mène à :

$$\dot{D}_{ech_i}(t) = \frac{-1}{\tau_{fil_2}} \cdot D_{ech_i}(t) + \frac{1}{\tau_{fil_2}} \cdot C_{d\_se} \cdot A_{se}(Lift_{se\_i}(\theta)) \cdot \frac{P_{ech}(t)}{\sqrt{r \cdot T_{ech}(t)}} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma + 1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (5.28)$$

La constante de temps du filtre  $\tau_{fil_2}$  doit être choisie suffisamment rapide.

La dynamique du capteur de pression utilisée pour l'estimation, est choisie sous la forme d'un modèle du premier ordre avec une constante du temps  $\tau_{ech} = 20 \text{ ms}$  :

$$\tau_{ech} \frac{dP_{ech_m}(t)}{dt} + P_{ech_m}(t) = P_{ech}(t) \quad (5.29)$$

où  $P_{ech_m}(t)$  représente le signal de pression des gaz au collecteur d'échappement donné par le capteur exprimé en  $Pa$ .

Finalement, un modèle non linéaire continu décrivant la dynamique de refoulement des gaz d'échappement est obtenu sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} nl_2 & 0 & nl_1 & nl_1 & nl_1 & nl_1 \\ d_1 & -d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl_3 & 0 & -d_2 & 0 & 0 & 0 \\ nl_4 & 0 & 0 & -d_2 & 0 & 0 \\ nl_5 & 0 & 0 & 0 & -d_2 & 0 \\ nl_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_2 \end{bmatrix} x(t) \quad (5.30)$$

$$P_{ech_m}(t) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] x(t)$$

avec le vecteur d'état  $x^T(t) = [P_{ech} \ P_{ech_m} \ D_{ech_1} \ D_{ech_2} \ D_{ech_3} \ D_{ech_4}]^T$ , et les constantes

$d_1 = \frac{1}{\tau_{ech}}$  et  $d_2 = \frac{1}{\tau_{fil_2}}$ . Les fonctions non linéaires du modèle s'écrivent :

$$nl_1 = \frac{RT_{ech}(t)}{V_{ech}} \quad (5.31)$$

$$nl_2 = -\frac{RT_{ech}(t)}{V_{ech}} \cdot C_{d_{exh}} \cdot A_{exh} \cdot \left( \frac{d(P_{exh}, P_{atm})}{\sqrt{RT_{ech}(t)}} \right) \quad (5.32)$$

$$nl_i = \left( \frac{1}{\tau_{fl_2}} \right) \cdot C_{d\_se} \cdot A_{se} \left( Lift_{se\_i}(\theta) \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{\gamma} \cdot (2/\gamma + 1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\sqrt{RT_{ech}(t)}} \right), \quad i \in \{3, \dots, n_{cyl} + 2\} \quad (5.33)$$

### V.3.2. Méthode d'estimation individuelle des débits des gaz brûlés

La transformation du modèle (5.30) dans le domaine angulaire discret s'obtient comme précédemment. Deux cas sont considérés avec et sans chevauchement.

#### A- Sans chevauchement

Un modèle TS périodique à huit règles est obtenu:

$$\begin{cases} x(\theta+1) = \sum_{i=1}^8 h_i(z(\theta)) A_i^{(c)} x(\theta) \\ y(\theta) = C \cdot x(\theta) \end{cases}, \quad c = \theta \bmod 120 \quad (5.34)$$

Avec  $C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , et les différentes matrices des sous modèles linéaires qui correspondent à chacune des 4 phases sont données en annexe D.

La synthèse d'un observateur 120-périodique correspondant au modèle 120-périodique défini en (5.34) s'obtient par l'application du théorème 14 (Corollaire 2 du chapitre 4. les résultats temps réel sont présentés ci-après. La figure 6.22 montre l'évolution de la pression d'échappement mesurée ainsi que celle estimée par l'observateur. L'erreur d'estimation de pression est donnée dans la figure 6.23.

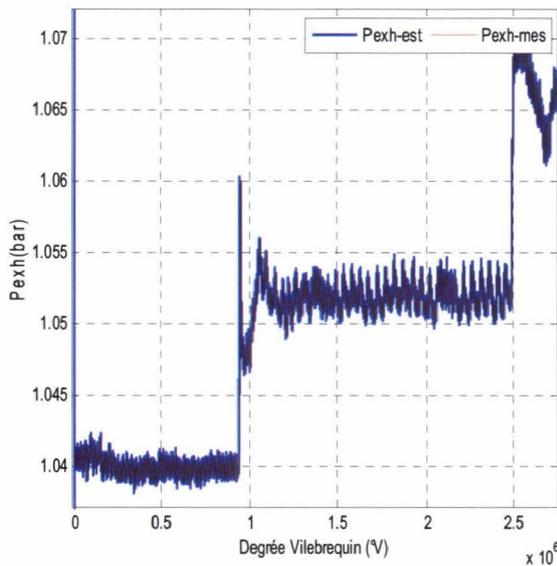


Figure 6.22 : Pressions échappement estimée et mesurée

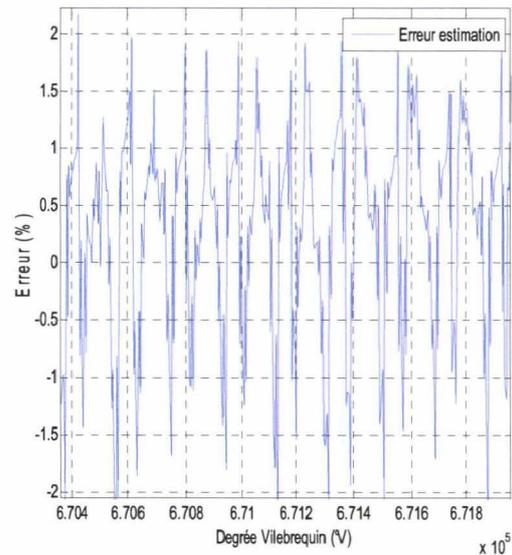


Figure 6.23 : Erreur d'estimation de pression

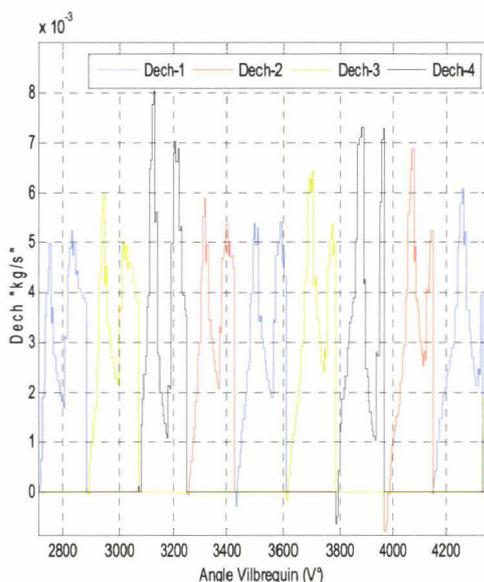


Figure 6.24 : Débits des gaz brûlés estimés sur chaque cylindre

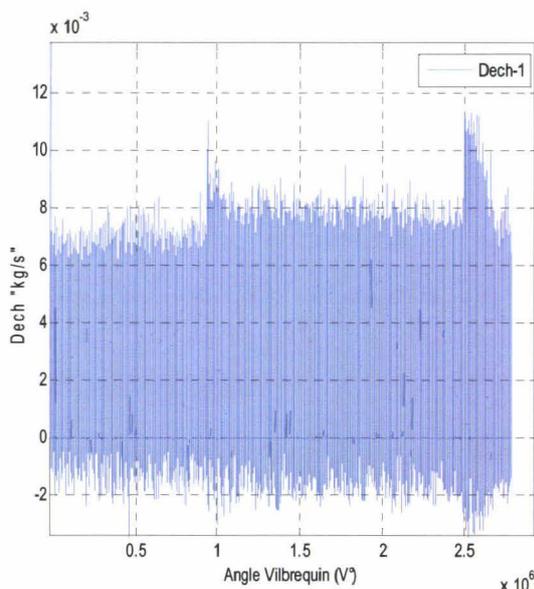


Figure 6.25 : Débit estimé des gaz brûlés au cylindre 1

Les résultats obtenus de l'estimation des débits des gaz brûlés qui sortent des différentes pipes d'échappement donnés sur la figure 6.24 confirment la forme de la figure 6.21. En effet, les débits passeront d'une valeur élevée, lors de l'ouverture de la soupape, à une valeur plus faible lorsque les pressions cylindres et collecteur d'échappement s'égalisent, pour enfin ré-augmenter lorsque le piston commencera à remonter pour éjecter les gaz d'échappement. Ceci montre l'utilité de la structure cyclique proposée dans la détection de ce phénomène. Afin d'être plus précis sur ces dynamiques de débits, le chevauchement entre les cylindres est considéré.

### B- Avec Chevauchement

Un modèle flou TS 120-périodique à 16 modèles linéaires est cette fois-ci obtenue :

$$\begin{cases} x(\theta+1) = \sum_{i=1}^{16} h_i(z(\theta)) A_i^{(c)} x(\theta) \\ y(\theta) = \sum_{i=1}^r h_i(z(\theta)) C_i^{(c)} x(\theta) \end{cases}, c = \theta \bmod 120 \quad (5.35)$$

$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Les différentes matrices des modèles linéaires qui correspondent à chacune des 8 phases sont données dans l'Annexe D-3. les résultats obtenus dans ce cas sont présentées dans les figures qui suivent.

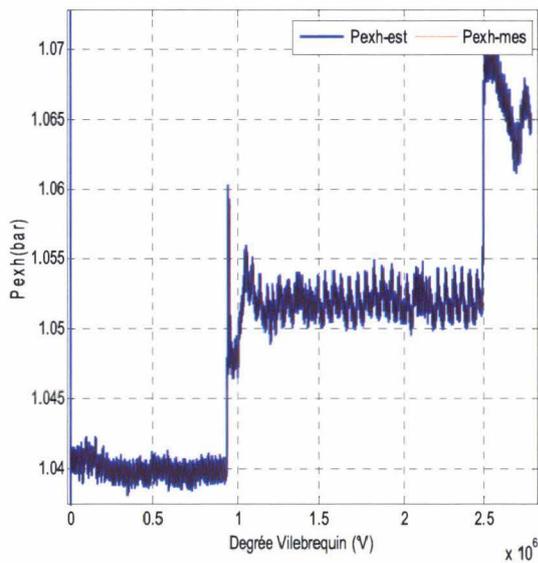


Figure 6.26 : Pression collecteur estimée et mesurée

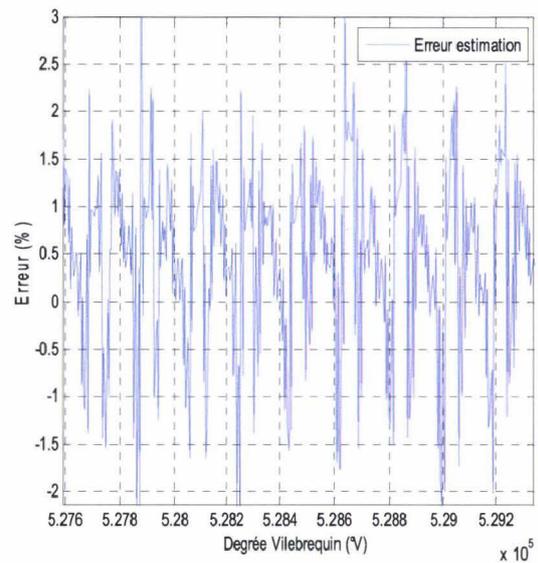


Figure 6.27 : Erreur d'estimation de pression

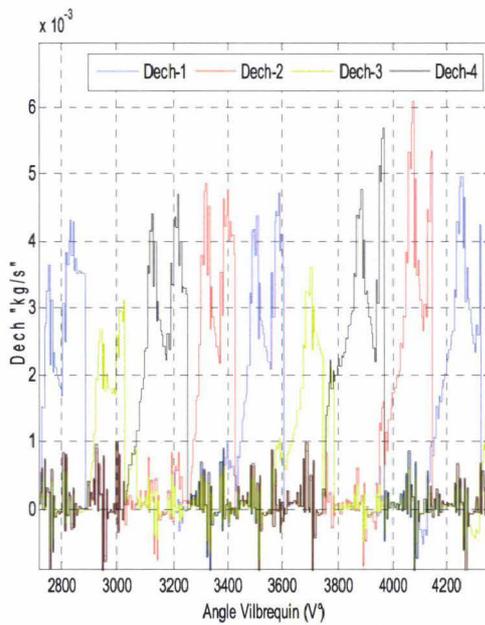


Figure 6.28 : Débits des gaz brûlés estimés sur chaque cylindre

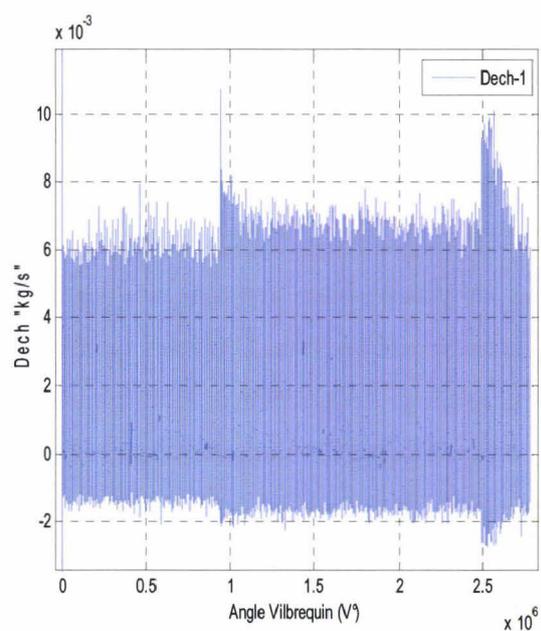


Figure 6.29 : Débit des gaz brûlés au cylindre 1

Il est à noter que les estimations des débits d'échappement données sur la figure 6.28 ont les mêmes formes que celles données dans la figure 6.24. Cependant, les valeurs maximales de ces dernières ne sont pas les mêmes. En particulier le débit estimé au niveau du cylindre 3 diffère légèrement par rapport aux autres débits. En plus de la détection de ces différences, l'estimation des débits qui reviennent dans les cylindres (débit négatif) est plus explicite en prenant en compte les chevauchements.

#### V.4. Estimation des fractions d'air individuelle à l'échappement

Les émissions de polluants refoulées au collecteur d'échappement sont directement liées à la richesse dans le cylindre du mélange air carburant entrant dans le moteur. La connaissance de ce paramètre donc essentielle pour le contrôle moteur. La définition classique de la richesse est traduite par le rapport des masses (ou des débits massiques) du carburant et de l'air :  $\lambda = \frac{\dot{m}_{air}}{\lambda_s \cdot \dot{m}_{ess}}$  (6.1)

normalisée par un coefficient  $\lambda_s$  qui traduit ce même rapport déterminé dans le cas d'une combustion complète d'un mélange stœchiométrique de carburant et d'air. Ce dernier est calculé en faisant une hypothèse sur la composition moyenne du carburant et de l'air qui conduit à  $\lambda_s \approx 14.7$ .

Pour déterminer la valeur de richesse lors du fonctionnement du moteur, une sonde proportionnelle est implantée dans la conduite d'échappement du moteur de façon à prendre en compte le phénomène de mélange des gaz brûlés qui sortent des cylindres. Dans notre cas, une sonde proportionnelle appelée « UEGO » (Universal Exhaust Gaz Oxygen) sensibles aux pressions partielles des oxydants (principalement l'oxygène) et des réducteurs (le monoxyde de carbone, les hydrocarbures imbrûlés) présents dans les gaz d'échappement du moteur est placée juste avant le catalyseur. Le signal délivré par cette sonde peut être capté sous forme d'une tension. Des essais spécifiques permettent de construire une relation entre la tension de sortie de la sonde et la valeur de la richesse.

Du fait du positionnement de cette sonde et du mélange au collecteur d'échappement, l'erreur entre la valeur de richesse mesurée et entre la valeur de richesse au niveau de chacun des cylindres peut s'avérer importante. Pour remédier à ce problème, une solution possible mais très coûteuse donc inenvisageable d'un point de vue industriel, est de placer une sonde au niveau de chaque pipe d'échappement.

De nos jours, les stratégies de la régulation de la richesse les plus utilisées consistent à réguler la richesse du moteur autour de 1 (mélange stœchiométrique), en agissant sur la quantité d'essence à injecter à partir de la seule mesure disponible en supposant le comportement des cylindres identiques. D'autre part, la commande appliquée est souvent la même pour tous les cylindres alors que leur contribution au mélange n'est pas forcément équivalente. Pour améliorer les performances, une gestion cylindre par cylindre serait plus judicieuse, puisqu'un actionneur indépendant par cylindre est disponible.

A cet effet, dans cette section, nous proposons une méthode qui permet l'estimation indirecte des richesses individuelles en sortie des cylindres, via l'estimation des fractions d'air frais individuelles i.e. les portions d'air frais présentement dans les gaz brûlés refoulés par les soupapes d'échappement. L'approche développée permet de prendre en compte la variation de la température, de la pression et de la richesse dans le collecteur d'échappement. Ensuite, le problème d'obtention d'un mélange stoechiométrique dans chacune des chambres de combustion du moteur revient alors à ajuster localement les quantités d'essence à injecter dans chaque cylindre afin d'annuler ces fractions d'air (indicateur que tout l'air admis dans les chambres de combustion a été brûlé). Cette stratégie permet d'assurer l'équilibrage des richesses entre les différents cylindres et ainsi de maîtriser au mieux la consommation et la formation des polluants.

#### V.4.1. Modèle dynamique des fractions d'air à l'échappement

Cette section présente le modèle cylindre à cylindre choisie pour l'estimation des fractions d'air au niveau de chaque pipe d'échappement  $F_{er_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, n_{cyl}\}$  utilisant la mesure fournie par la sonde de richesse. Le débit global des gaz brûlés sortant de la pipe d'échappement du cylindre 1,  $D_{ech_1}$  contient une quantité d'air  $D_{air_1}$ . La fraction d'air frais  $F_{er_1}$  correspondante peut être définie par le rapport entre ces deux paramètres :

$$F_{er_1} = \frac{D_{air_1}}{D_{ech_1}} \quad (6.2)$$

La connaissance de cette quantité permet un calcul précis des différents paramètres qui caractérisent la composition chimique des gaz en sortie des cylindres et peut être utilisée comme un indicateur de la qualité de la combustion qui s'est déroulée. En effet, si la fraction d'air est négative, le mélange introduit était un mélange riche (excès d'essence). Par contre, si cette quantité est positive, le mélange introduit était un mélange pauvre (excès d'air). La figure 6.30 illustre les différentes variables utilisées dans ce modèle ainsi que leurs emplacements dans les conduites d'échappement.

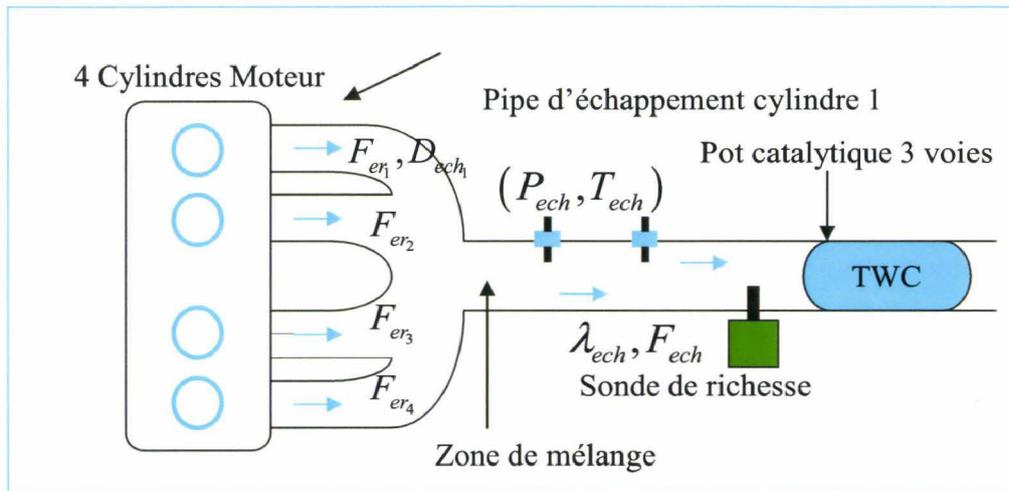


Figure 6.30: Collecteur d'échappement

Comme dans les cas précédents, la conservation de la masse dans le collecteur d'échappement est utilisée pour établir un modèle. Notons  $D_{ech_i}(t), i \in \{1, \dots, n_{cyl}\}$  les différents débits qui s'acheminent vers le collecteur d'échappement (au niveau de la zone de mélange) et  $D_{twc}(t)$  le débit qui en sort et va vers le catalyseur. La dynamique de la fraction d'air frais globale  $F_{ech}$  prenant en compte le retard variant  $\tau(N_e, t)$  dû au transport des gaz des différents pipes d'échappement jusqu'à la sonde s'écrit [Alfieri 09] :

$$\frac{dF_{ech}(t)}{dt} = \frac{R \cdot T_{ech}}{P_{ech} \cdot V_{ech}} \left( \sum_{i=1}^{n_{cyl}} D_{ech_i} F_{er_i}(t - \tau(N_e, t)) - D_{twc}(t) F_{ech}(t) \right) \quad (6.3)$$

Où  $T_{ech}, P_{ech}$  et  $V_{ech}$  représentent respectivement la température, la pression et le volume dans le collecteur d'échappement.

La fraction d'air globale  $F_{ech}$  peut être reliée à la valeur de la richesse globale dans le collecteur par la formule [Alfieri & al 09] :

$$F_{ech}(t) = \frac{\lambda_{ech}(t) - 1}{\lambda_{ech}(t) \cdot \lambda_s + 1} \quad (6.4)$$

Le signal  $F_{ech}(t)$  peut être obtenu à travers la mesure de richesse  $\lambda_{ech}(t)$  fournie par une sonde placée en amont du catalyseur. La dynamique de la sonde est considérée du premier ordre reliant  $F_{ech}(t)$  au signal mesuré  $F_{ech\_m}(t)$  :

$$\frac{dF_{ech\_m}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_{EGO}} (F_{ech}(t) - F_{ech\_m}(t)) \quad (6.5)$$

$\tau_{EGO}$  est la constante de temps du capteur de richesse, le signal  $F_{ech\_m}(t)$  représente l'image du signal de mesure de la richesse  $\lambda_{ech\_m}(t)$  :

$$F_{ech\_m}(t) = \frac{\lambda_{ech\_m}(t) - 1}{\lambda_{ech\_m}(t) \cdot \lambda_s + 1} \quad (6.6)$$

Pour compléter le modèle physique temps réel du collecteur d'échappement, on suppose que les fractions d'air en sortie des cylindres sont constantes sur un intervalle de temps de  $T_s + \tau$ ,

et par conséquent : 
$$\frac{dF_{er_i}(t - \tau)}{dt} = 0 \quad (6.7)$$

En utilisant les équations (6.3), (6.5) avec la sortie  $y(t) = F_{ech\_m}(t)$  et le vecteur d'état  $x^T(t) = [F_{ech}(t) \ F_{ech\_m}(t) \ F_{er_1}(t) \ F_{er_2}(t) \ F_{er_3}(t) \ F_{er_4}(t)]^T$ , la représentation d'état non linéaire du modèle global s'écrit:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -nl_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau_{EGO}} & \frac{-1}{\tau_{EGO}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & nl_2 & nl_3 & nl_4 & nl_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t - \tau) \quad (6.8)$$

$$y(t) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] x(t)$$

Avec  $nl_1 = \frac{R \cdot T_{ech}}{P_{ech} \cdot V_{ech}} D_{tvc}(t)$  et  $nl_i = \frac{R \cdot T_{ech}}{P_{ech} \cdot V_{ech}} \sum_{i=1}^{n_{cyl}} D_{er_i}(t)$ ,  $i \in \{2, \dots, n_{cyl} + 1\}$ . (6.9)

En discrétisant l'hypothèse (6.7) dans le domaine angulaire, il vient :

$$F_{er_i}(\theta + 1) = F_{er_i}(\theta - \tau_d) \quad (6.10)$$

**Remarque :**

Le terme " $\theta - \tau_d$ " désigne par abus de notation le terme  $k \cdot \theta_s - \tau_d$  avec  $\tau_d = \alpha \cdot \theta_s$ ,  $(k, \alpha) \in \mathbb{N}^2$ . Cette notation est conservée dans ce qui suit pour exprimer un terme retardé.

De ce fait, la discrétisation du modèle (6.8) et sa transformation dans le domaine angulaire donne le modèle suivant :

$$x(\theta+1) = \begin{bmatrix} 1-nl_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(\theta) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & nl_2 & nl_3 & nl_4 & nl_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(\theta - \tau_d) \quad (6.11)$$

$$y(\theta) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]x(\theta)$$

Où la constante  $c_1 = \frac{\theta_s}{\tau_{EGO} \cdot N_e}$ , et les non linéarités sont données par :

$$nl_1 = \frac{R \cdot T_{ech}(t) \cdot \theta_s}{P_{ech}(t) \cdot V_{ech} \cdot N_e} D_{twc}(t) \text{ et } nl_i = \frac{R \cdot T_{ech}(t) \cdot \theta_s}{P_{ech}(t) \cdot V_{ech} \cdot N_e} D_{eri}(t), i \in \{2, \dots, n_{cyl+1}\}.$$

Le modèle (6.11) est utilisé pour développer des observateurs qui sont détaillés dans le paragraphe suivant.

#### V.4.2. Structure d'estimation cylindre à cylindre

##### A- Sans chevauchement

En considérant un modèle qui ne prend pas en compte les chevauchements entre les différents cylindres, une structure périodique à 4 phases peut être déduite du modèle (6.11). Le modèle flou TS 120-périodique à 4 règles suivant est alors obtenu :

$$\begin{cases} x(\theta+1) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(\theta)) A_i^{(c)} x(\theta) + A_d^{(c)} x(\theta - \tau_d), c = \theta \bmod 120 \\ y(\theta) = Cx(\theta) \end{cases} \quad (6.12)$$

Avec la matrice de sortie  $C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , et les différentes matrices impliquées sont données dans le tableau 12 où  $A^{(c)}$  et  $A_d^{(c)}$ ,  $c \in \{1, \dots, 4\}$  sont des matrices non linéaires périodiques permettant d'obtenir les matrices constantes du modèle.

Les deux fonctions non linéaires  $nl_1$  et  $nl_2$  s'écrivent dans ce cas de la manière suivante :

$$\begin{aligned} nl_1 &= \frac{R \cdot T_{ech}(t)}{P_{ech}(t) \cdot V_{ech}} \cdot \left( \frac{\theta_s}{N_e} \right) D_{twc}(t) \\ nl_2 &= \frac{R \cdot T_{ech}(t)}{P_{ech}(t) \cdot V_{ech}} \cdot \left( \frac{\theta_s}{N_e} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{n_{cyl}} D_{eri}(t) \right) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Tableau 12

| $\theta \in [0, \dots, 180^\circ]$ (cylindre 1 actif)  | $\theta \in [180, \dots, 360^\circ]$ (cylindre 2 actif)  |
|--|--|
| $A^1(\theta, nl_1, nl_2) = \begin{bmatrix} 1-nl_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_d^1(\theta, nl_1, nl_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & nl_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_1^1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_2^1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2})$ $A_3^1(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_4^1(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2})$ $A_{d_1}^1(\theta) = A_d^1(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_{d_2}^1(\theta) = A_d^1(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2})$ $A_{d_3}^1(\theta) = A_d^1(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_{d_4}^1(\theta) = A_d^1(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2})$ | $A^2(\theta, nl_1, nl_2) = \begin{bmatrix} 1-nl_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_d^2(\theta, nl_1, nl_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & nl_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A_1^2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_2^2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2})$ $A_3^2(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_4^2(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2})$ $A_{d_1}^2(\theta) = A_d^2(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_{d_2}^2(\theta) = A_d^2(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2})$ $A_{d_3}^2(\theta) = A_d^2(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_{d_4}^2(\theta) = A_d^2(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2})$ |
| $\theta \in [540, \dots, 720^\circ]$ (cylindre 1 actif)  | $\theta \in [360, \dots, 540^\circ]$ (cylindre 2 actif)  |
| $A^4(\theta, nl_1, nl_2) = \begin{bmatrix} 1-nl_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_d^4(\theta, nl_1, nl_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & nl_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_1^4(\theta) = A^4(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_2^4(\theta) = A^4(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2})$ $A_3^4(\theta) = A^4(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_4^4(\theta) = A^4(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2})$ $A_{d_1}^4(\theta) = A_d^4(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_{d_2}^4(\theta) = A_d^4(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2})$ $A_{d_3}^4(\theta) = A_d^4(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_{d_4}^4(\theta) = A_d^4(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2})$                          | $A^3(\theta, nl_1, nl_2) = \begin{bmatrix} 1-nl_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_d^3(\theta, nl_1, nl_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & nl_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_1^3(\theta) = A^3(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_2^3(\theta) = A^3(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2})$ $A_3^3(\theta) = A^3(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_4^3(\theta) = A^3(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2})$ $A_{d_1}^3(\theta) = A_d^3(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_{d_2}^3(\theta) = A_d^3(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2})$ $A_{d_3}^3(\theta) = A_d^3(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_{d_4}^3(\theta) = A_d^3(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2})$                          |

La synthèse d'un observateur 120-périodique correspondant au modèle 120-périodique défini en (6.12) s'obtient par l'application du théorème 18 (cf. chapitre 4). Les bornes du retard sont choisies de manière à prendre en compte le retard de transport des gaz qui peut être différent

d'un cylindre à un autre,  $\tau_d \in [45^\circ V, 180^\circ V]$ . Les gains d'observation correspondant à la résolution du problème LMI associé sont :

$\forall \theta \in \{0^\circ, \dots, 180^\circ\}$  :

$$S_1^{-1}K_1^\theta = [3.67 \quad 1.97 \quad 0 \quad 0 \quad 0.19 \quad 0]^T, S_1^{-1}K_2^\theta = [2.44 \quad 2.02 \quad 0 \quad 0 \quad 0.3 \quad 0]^T$$

$$S_1^{-1}K_3^\theta = [3.53 \quad 1.62 \quad 0 \quad 0 \quad 0.13 \quad 0]^T, S_1^{-1}K_4^\theta = [5.32 \quad 6.28 \quad 0 \quad 0 \quad 0.2 \quad 0]^T$$

$\forall \theta \in \{180^\circ, \dots, 360^\circ\}$  :

$$S_2^{-1}K_1^\theta = [3.17 \quad 1.06 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.2]^T, S_2^{-1}K_2^\theta = [4.16 \quad 2.02 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.11]^T$$

$$S_2^{-1}K_3^\theta = [3.59 \quad 0.74 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.14]^T, S_2^{-1}K_4^\theta = [2.28 \quad 6.45 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.2]^T$$

$\forall \theta \in \{360^\circ, \dots, 540^\circ\}$  :

$$S_3^{-1}K_1^\theta = [3.22 \quad 1.29 \quad 0 \quad 0.17 \quad 0 \quad 0]^T, S_3^{-1}K_2^\theta = [3.35 \quad 2.54 \quad 0 \quad 0.3 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$S_3^{-1}K_3^\theta = [3.47 \quad 1.62 \quad 0 \quad 0.12 \quad 0 \quad 0]^T, S_3^{-1}K_4^\theta = [4.88 \quad 6.11 \quad 0 \quad 0.2 \quad 0 \quad 0]^T$$

$\forall \theta \in \{540^\circ, \dots, 720^\circ\}$  :

$$S_4^{-1}K_1^\theta = [3.46 \quad 1.97 \quad 0.18 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, S_4^{-1}K_2^\theta = [5.12 \quad 2.02 \quad 0.32 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$S_4^{-1}K_3^\theta = [3.73 \quad 1.62 \quad 0.17 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, S_4^{-1}K_4^\theta = [4.97 \quad 6.28 \quad 0.18 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (6.14)$$

Les résultats obtenus sur banc d'essais moteur à partir de l'observateur développé sont donnés dans les figures ci-après. La figure 6.31 montre l'évolution de la fraction d'air globale  $F_{ech}$  estimée par l'observateur par rapport à celle mesurée  $F_{ech\_m}$ . La figure 6.32 montre l'évolution de l'erreur de cette estimation qui est relativement faible.

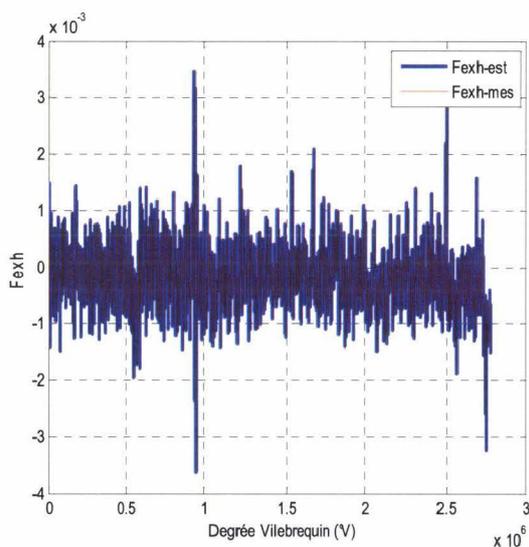


Figure 6.31: Fraction d'air globale estimée et mesurée globale

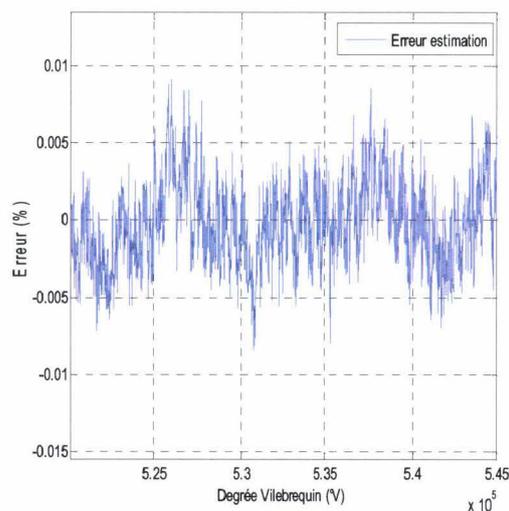


Figure 6.32: Erreur d'estimation Fraction d'air

La figure 6.33 montre l'évolution des différentes fractions d'air estimées en sortie de chacun des cylindres alors que la figure 6.34 montre l'évolution de seulement la fraction d'air en sortie du cylindre 1 par rapport à la fraction d'air globale au collecteur d'échappement.

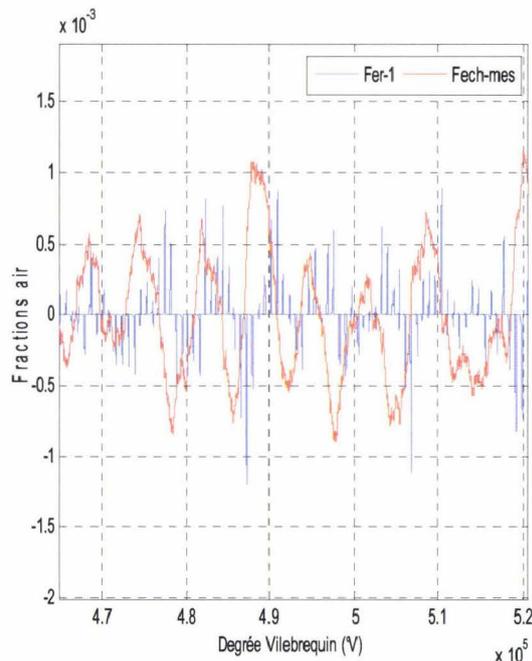
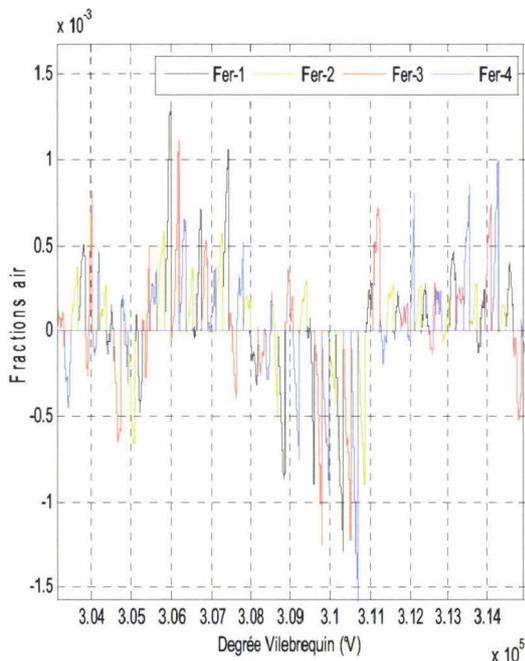


Figure 6.33: Fraction d'air estimée en sortie des cylindres Figure 6.34 : Fraction d'air estimée au cylindre 1 et fraction d'air globale

Bien qu'une bonne estimation de la fraction d'air globale au collecteur d'échappement (figure 6.31) ait été obtenue, les estimations des fractions d'air individuelle ne correspondent pas toujours aux informations données par la mesure (apparition d'un décalage de l'estimation par rapport à la mesure sur la figure 6.34). Une raison probable est que lorsque les chevauchements ne sont pas pris en compte, l'influence du mélange entre les différents cylindres est négligée.

### B- Avec chevauchement

Dans ce cas où le chevauchement dans les cylindres est pris en compte, un modèle 120-périodique à huit phases est défini :

$$\begin{cases} x(\theta+1) = \sum_{i=1}^8 h_i(z(\theta)) A_i^{(c)} x(\theta) + A_{d_i}^{(c)} x(\theta - \tau_d) , c = \theta \bmod 120 \\ y(\theta) = Cx(\theta) \end{cases}$$

Avec la matrice de sortie  $C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , les différentes matrices impliquées dans le modèle sont données dans l'annexe. Les non linéarités permettant d'obtenir les 8 sous modèles

$$\text{sont : } nl_1 = \frac{R \cdot T_{ech}(t)}{P_{ech}(t) \cdot V_{ech}} \cdot \left( \frac{\theta_s}{N_e} \right) D_{rvc}(t) \quad , \quad nl_2 = \frac{R \cdot T_{ech}}{P_{ech} \cdot V_{ech}} \cdot \left( \frac{\theta_s}{N_e} \right) \cdot (D_{ech_1}(t) + D_{ech_4}(t)) \quad \text{et}$$

$$nl_3 = \frac{R \cdot T_{ech}}{P_{ech} \cdot V_{ech}} \cdot \left( \frac{\theta_s}{N_e} \right) \cdot (D_{ech_2}(t) + D_{ech_3}(t)) .$$

Dans ce cas les résultats sur banc d'essais suivants ont été obtenus. Sur les quatre figures ci-après, l'évolution de l'estimation de la fraction d'air correspondante à chacun des cylindres par rapport à celle de la fraction d'air globale dans le collecteur d'échappement sont respectivement représentées.

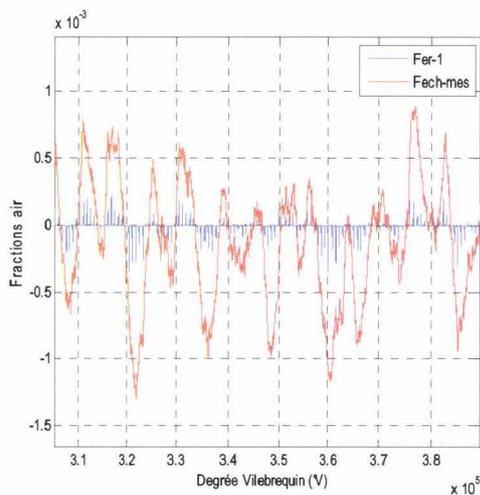


Figure 6.35: Fraction d'air estimée au cylindre 1

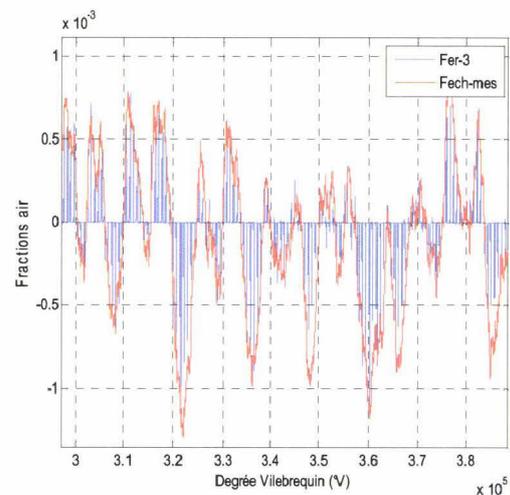


Figure 6.36: Fraction d'air estimée au cylindre 3

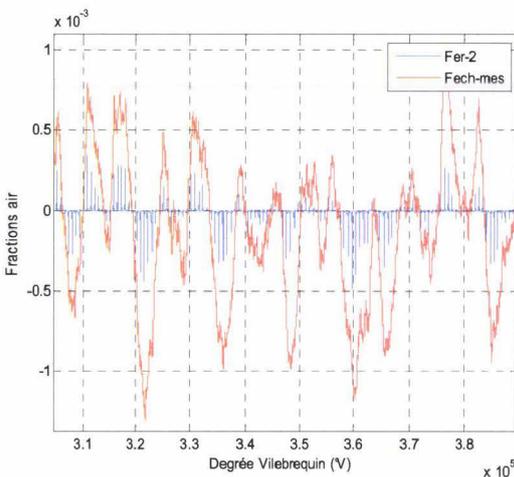


Figure 6.37 Fraction d'air estimée au cylindre 2

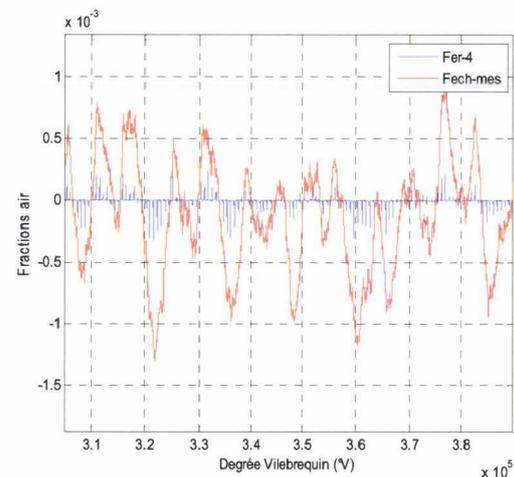


Figure 6.38: Fraction d'air estimée au cylindre 4

Les résultats obtenus confirme bien que la mesure de la richesse donne une mesure moyennée pour tous les cylindres et qu'il est important de prendre en considération les phases où les cylindres se chevauchent dans la modélisation du phénomène de mélange afin d'obtenir des résultats cohérents (plus de décalage avec la fraction d'air globale). D'autre part, d'après la figure 6.38, le cylindre 4 représente la fraction d'air la plus faible et donc il est le cylindre le

mieux contrôlé par rapport aux autres. Deux raisons peuvent justifier cela : d'une part le contrôle utilisé donne la même injection pour tous les cylindres à chaque cycle et n'est donc pas adapté à tous les cylindres, et d'autre part à cause du retard et du phénomène de mélange la richesse globale ne peut pas être l'image d'un seul cylindre. Afin d'améliorer les performances, un contrôle individuel de la richesse de chacun des cylindres doit être introduite pour minimiser la dispersion inter-cylindre.

### V.5. Conclusion

Dans ce chapitre, l'application d'observateurs périodiques pour l'estimation cylindre à cylindre d'un MAC a été réalisée. Le premier était dédié à l'estimation des débits d'air frais entrant dans chacun des cylindres, le deuxième portait sur l'estimation des gaz brûlés refoulés de chacun des cylindres et le troisième sur celle des richesses individuelles.

Ces observateurs sont basés sur une modélisation non linéaire en temps discret et dans le domaine angulaire des dynamiques au collecteur d'admission et au collecteur d'échappement. Pour prendre en compte les fonctions non linéaires des modèles obtenus et pour préserver le caractère cyclique des dynamiques considérées, une représentation périodique floue de Type TS a été introduite. La période angulaire de  $6^\circ$  a été choisie afin de pouvoir capter les phénomènes physiques mis en jeu.

Ces observateurs ont été testés sur banc d'essais moteur et les résultats obtenus sont très prometteurs et ont démontré l'efficacité des approches proposées.

De nombreuses perspectives pour le management du moteur découlent des approches proposées dans ce chapitre et certaines sont développées dans le suivant.



## Chapitre VI. Perspectives

|  |            |
|--|------------|
| <b>VI.1. Introduction .....</b>  | <b>164</b> |
| <b>VI.2. Equilibrage des cylindres par commande des injecteurs .....</b> | <b>164</b> |
| <b>VI.3. Estimation des couples de combustion.....</b>                   | <b>167</b> |

## VI.1. Introduction

Ce chapitre propose des perspectives complémentaires aux travaux présentés dans le chapitre précédent. Tout d'abord, le problème de l'équilibrage des cylindres en terme de richesse est abordé. Puis, la section suivante est dédiée à l'estimation du couple de combustion produit par chacun des cylindres en se basant sur la mesure instantanée de la vitesse de rotation. La synthèse d'une loi commande permettant d'équilibrer les cylindres en couple en agissant à la fois sur la position du papillon des gaz et sur les instants d'allumages respectifs de chacun des cylindres peut alors être envisageable.

## VI.2. Equilibrage des cylindres par commande des injecteurs

Cette section propose une méthode pour la régulation de la richesse à l'intérieur de chacun des cylindres. La figure 7.10 illustre la stratégie proposée.

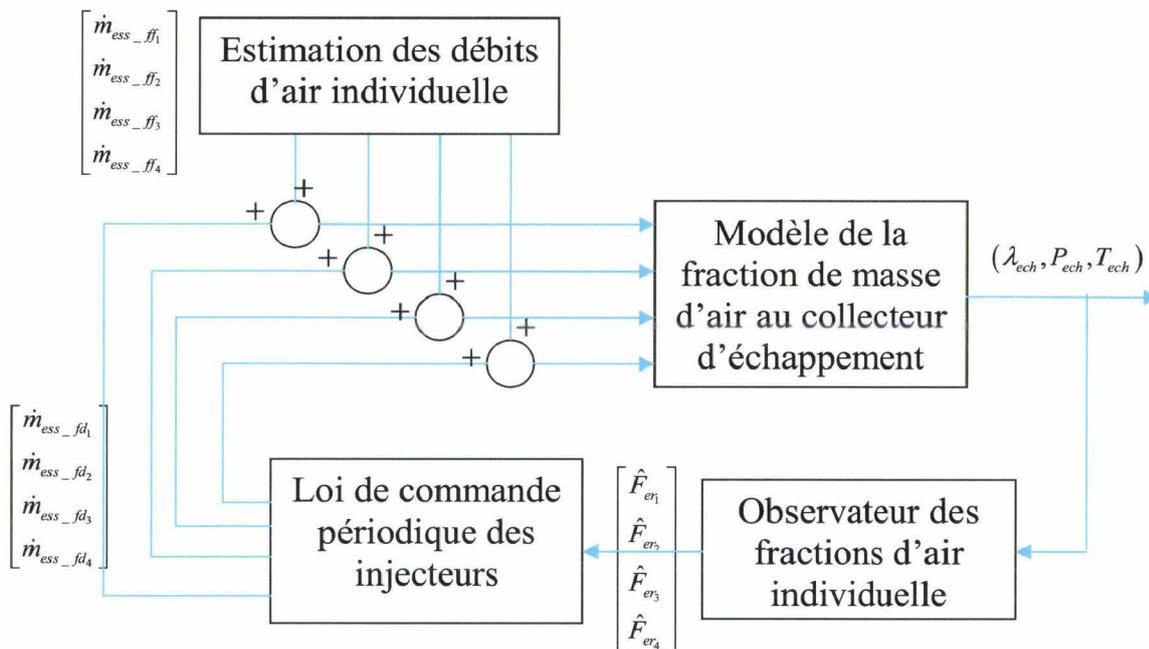


Figure 7.1: Boucle de régulation de la richesse via les fractions des masses d'air dans le collecteur d'échappement

Les fractions d'air individuelles au niveau des pipes d'échappement de chacun des cylindres sont reliées principalement à la quantité d'air frais  $\dot{m}_{cyl}(t)$  et à la quantité d'essence  $\dot{m}_{ess}(t)$  admises dans les cylindres:

$$F_{er_i}(\theta) = \frac{\dot{m}_{cyl_i}(\theta) - \lambda_s \dot{m}_{ess_i}(\theta)}{\dot{m}_{cyl_i}(\theta) + \dot{m}_{ess_i}(\theta)} \quad (6.15)$$

D'après la loi de conservation de masse, on peut faire l'hypothèse que le débit du mélange d'air et d'essence admis dans chacune des chambres de combustion du moteur par les soupapes d'admission est égal à celui qui sort par les soupapes d'échappement, on a alors :

$$D_{ech_i}(\theta) = \dot{m}_{cyl_i}(\theta) + \dot{m}_{ess_i}(\theta) \quad (6.16)$$

De ce fait, on peut réécrire l'équation définie en (6.15) comme suit :

$$\dot{m}_{ess_i}(\theta) = \frac{1}{\lambda_s} (\dot{m}_{cyl_i}(\theta) - F_{er_i}(\theta) \cdot D_{er_i}(\theta)) \quad (6.17)$$

Ainsi, une première action anticipative  $\dot{m}_{ess\_ff}$  peut se calculer en se basant sur l'équation (6.17). Cette dernière utilise les estimations des débits d'air et des débits gaz brûlés au niveau de chacun des cylindres ainsi que les estimations des fractions d'air développées (vues dans le chapitre précédent). Notons ici qu'un mélange stœchiométrique dans les chambres de combustion, permet d'obtenir des fractions de masses d'air nulles en sortie des cylindres.

La deuxième action, se fait en boucle fermée  $\dot{m}_{ess\_fd}$  et se base sur l'ajustement des quantités d'essence à injecter dans chacun des cylindres afin d'annuler les fractions d'air estimées en utilisant la mesure de la richesse globale. Cette dernière peut se synthétiser en intégrant l'équation (6.17) dans le modèle d'état du système, ce qui donne :

$$F_{er_i}(\theta+1) = F_{er_i}(\theta - \tau_d) = \frac{\dot{m}_{cyl_i}(\theta)}{D_{er_i}(\theta)} - \frac{\lambda_s}{D_{er_i}(\theta)} \cdot \dot{m}_{ess_i}(\theta) \quad (6.18)$$

Puis, en choisissant une loi de commande de la forme :

$$\dot{m}_{ess_i}(\theta) = \frac{1}{\lambda_s} (\dot{\hat{m}}_{cyl_i}(\theta) + \Delta U_i) \quad (6.19)$$

avec  $\dot{\hat{m}}_{cyl_i}(\theta)$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$ , les débits d'air estimés en entrée de chaque cylindre.

L'équation (6.18) devient alors :

$$F_{er_i}(\theta+1) = \frac{[\dot{m}_{cyl_i}(\theta) - \dot{\hat{m}}_{cyl_i}(\theta)]}{D_{er_i}(\theta)} - \frac{1}{D_{er_i}(\theta)} \cdot \Delta U_i \quad (6.20)$$

La représentation d'état discrète suivante est alors obtenue :

$$\begin{cases} x(\theta+1) = A(\theta)x(\theta) + A_d(\theta)x(\theta - \tau_d) + B(\theta)u(\theta) + B_w(\theta)W(\theta) \\ F_{ech\_m}(\theta) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]x(\theta) \end{cases} \quad (6.21)$$

avec le vecteur d'état :  $x^T(\theta) = [F_{ech}(\theta) \ F_{ech\_m}(\theta) \ F_{er_1}(\theta) \ F_{er_2}(\theta) \ F_{er_3}(\theta) \ F_{er_4}(\theta)]^T$ ,  
 le vecteur de commande  $U^T(\theta) = [\dot{m}_{ess_1} \ \dot{m}_{ess_2} \ \dot{m}_{ess_3} \ \dot{m}_{ess_4}]^T$  et le vecteur de perturbation  
 $W^T(\theta) = [\dot{m}_{air_1} \ \dot{m}_{air_2} \ \dot{m}_{air_3} \ \dot{m}_{air_4}]^T$  et les matrices non linéaires suivantes :

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1-nl_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\theta_s}{\tau_{EGO} \cdot N_e}\right) & 1-\left(\frac{\theta_s}{\tau_{EGO} \cdot N_e}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_d(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & nl_2 & nl_2 & nl_2 & nl_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -nl_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -nl_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -nl_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -nl_3 \end{bmatrix}, B_w(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & nl_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & nl_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & nl_3 \end{bmatrix}.$$

En considérant qu'il y a pas de chevauchement entre les cylindres, les non linéarités du modèle s'écrivent :  $nl_1 = \frac{R \cdot T_{ech}(t)}{P_{ech}(t) \cdot V_{ech}} \cdot \left(\frac{\theta_s}{N_e}\right) D_{nvc}(t)$  ,  $nl_2 = \left(\frac{R \cdot T_{ech}}{P_{ech} \cdot V_{ech}} \cdot \left(\frac{\theta_s}{N_e}\right)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_{cyl}} D_{er_i}(t)\right)$  et  $nl_3 = \left(\sum_{i=1}^{n_{cyl}} D_{er_i}(t)\right)$ .

Le modèle global ainsi défini, le problème revient alors à calculer une loi de commande, à appliquer au niveau de chaque cylindre afin d'annuler les fractions d'air individuelles en considérant les variations des débits d'air comme des entrées de perturbations.

A partir de ces équations, une structure périodique à 4 phases peut être déduite du modèle (6.21). Le modèle flou TS 120-périodique à 4 règles suivant est alors obtenu :

$$\begin{cases} x(\theta+1) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(\theta)) (A_i^{(c)} x(\theta) + A_{d_i}^{(c)} x(\theta-\tau)) + B_u^{(c)} u(\theta) + B_w^{(c)} w(\theta) \\ y(\theta) = Cx(\theta) \end{cases}, c = \theta \bmod 120 \quad (6.22)$$

avec  $y(t) = F_{ech\_m}(\theta)$  le vecteur de sortie,  $u^T(\theta) = [\dot{m}_{ess_1} \quad \dot{m}_{ess_2} \quad \dot{m}_{ess_3} \quad \dot{m}_{ess_4}]^T$  le vecteur de commande et  $w^T(\theta) = [\dot{m}_{cyl_1} \quad \dot{m}_{cyl_2} \quad \dot{m}_{cyl_3} \quad \dot{m}_{cyl_4}]^T$  le vecteur de perturbation. Il est alors possible d'utiliser les méthodes proposées dans les chapitres précédents à ce problème de commande.

### VI.3. Estimation des couples de combustion

L'estimation du couple instantané produit par chaque cylindre est évidemment importante. En effet, l'intérêt de connaître ce couple permet d'équilibrer l'apport de chaque cylindre pour obtenir un fonctionnement optimum. En particulier, les catalyseurs utilisant un piège à NOx perdent de leur efficacité avec le temps. Afin de conserver une efficacité optimale, les couples fournis par chacun des cylindres doivent être similaires. La dépollution par catalyse de NOx nécessite donc un pilotage précis du couple cylindre par cylindre qui n'est pourtant pas mesuré. L'idée proposée est d'estimer ces derniers à partir du capteur de régime instantané placé en bout de transmission. Cette mesure est très déformée et bruitée par la transmission. La propriété qui nous intéresse dans ce contexte, est que le couple de combustion a un comportement typiquement périodique par rapport à la position angulaire du vilebrequin.

Le modèle de la dynamique de vilebrequin s'écrit [Kiencke & al 00] :

$$J(\theta, \dot{\theta}) \cdot \ddot{\theta} = \sum_{i=1}^{n_{cyl}} T_{comb_i}(\theta) - \frac{dJ(\theta, \dot{\theta})}{d\theta} \dot{\theta}^2 - T_{charge}^{(*)}(\theta) \quad (7.1)$$

Où  $\theta$  représente la position angulaire du vilebrequin,  $T_{comb}$  le couple de combustion,  $T_{charge}^{(*)}$  le couple de charge étendu qui est égal au couple de frottement plus le couple de charge :

$$T_{charge}^{(*)}(\theta) = T_{charge}(\theta) + T_{frot}(\theta) \quad (7.2)$$

L'inertie du moteur est calculée comme suit :

$$J(\theta, \dot{\theta}) = m_{rot} \cdot r^2 + m_{osc} \cdot \sum_{j=1}^{n_{cyl}} \left( \frac{ds_j}{d\theta} \right)^2 \quad (7.3)$$

avec  $m_{rot}$  et  $m_{osc}$  respectivement les masses de la partie en rotation et de la partie oscillante du

système bielle Vilebrequin et  $r$  le rayon du Vilebrequin.  $\frac{dJ(\theta, \dot{\theta})}{d\theta}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{dJ(\theta, \dot{\theta})}{d\theta} &= 2 \cdot m_{osc} \cdot \sum_{j=1}^{n_{cyl}} \left( \frac{ds_j}{d\theta} \right) \cdot \left( \frac{d^2s_j}{d\theta^2} \right) \\
 \frac{ds_j}{d\theta} &= \frac{ds}{d\theta} \left( \theta - (j-1) \cdot \frac{4\pi}{n_{cyl}} \right) \\
 \frac{d^2s_j}{d\theta^2} &= \frac{d^2s}{d\theta^2} \left( \theta - (j-1) \cdot \frac{4\pi}{n_{cyl}} \right) \\
 \frac{ds}{d\theta}(\theta) &= r \left( \sin(\theta) + \frac{r}{l} \cdot \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2(\theta)}} \right) \\
 \frac{d^2s}{d\theta^2}(\theta) &= r \left( \cos(\theta) + \frac{\frac{r}{l} \cdot (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) - \frac{r^2}{l^2} \sin^4(\theta)}{\left( \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2(\theta)} \right)^3} \right)
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

L'objectif ici est de pouvoir estimer à la fois les couples de combustion de chacun des cylindres  $T_{comb_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, n_{cyl}\}$  et le couple de charge étendu  $T_{charge}^{(*)}(\theta)$ . Pour ce faire, l'équation (7.1) peut se reformuler comme suit :

$$\dot{\theta} \cdot \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{J(\theta, \dot{\theta})} \left( T_{comb}(\theta) - \frac{dJ(\theta, \dot{\theta})}{d\theta} \dot{\theta}^2 - T_{charge}^{(*)}(\theta) \right) \tag{7.5}$$

En utilisant l'approximation du premier ordre et en intégrant l'équation précédente, il vient :

$$\dot{\theta}^2(n+1) - \dot{\theta}^2(n) = \frac{2 \cdot \theta_s}{J(\theta, \dot{\theta})} \left( T_{comb}(\theta) - \frac{dJ(\theta, \dot{\theta})}{d\theta} \dot{\theta}^2 - T_{charge}^{(*)}(\theta) \right) \tag{7.6}$$

avec  $\theta_s = 6^\circ V$ . Pour compléter le modèle global, nous supposons que le couple de combustion individuel est constant sur un cycle.

Il vient alors :

$$T_{comb_i}(\theta+1) = T_{comb_i}(\theta), \quad i \in \{1, \dots, n_{cyl}\} \tag{7.7}$$

En utilisant les équations (7.6) et (7.7), le modèle non linéaire discret suivant peut se déduire

avec le vecteur d'état :  $x^T(\theta) = [\dot{\theta}^2(\theta) \quad T_{comb_1}(\theta) \quad T_{comb_2}(\theta) \quad T_{comb_3}(\theta) \quad T_{comb_4}(\theta)]^T$ .

$$x(n+1) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2 \cdot \theta_s}{J(\theta, \dot{\theta})} \cdot \frac{dJ(\theta, \dot{\theta})}{d\theta}\right) & \frac{2 \cdot \theta_s}{J(\theta, \dot{\theta})|_{j=1}} & \frac{2 \cdot \theta_s}{J(\theta, \dot{\theta})|_{j=2}} & \frac{2 \cdot \theta_s}{J(\theta, \dot{\theta})|_{j=3}} & \frac{2 \cdot \theta_s}{J(\theta, \dot{\theta})|_{j=4}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(n) + T_{charge}^{(*)}(n) \quad (7.8)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] x(n)$$

avec  $J(\theta, \dot{\theta})|_{j=i}$  l'inertie correspondant au cylindre  $i$ . Une représentation floue TS à coefficients périodiques à deux non linéarités équivalentes au modèle (7.8) est obtenue :

$$\begin{cases} x(\theta+1) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(\theta)) A_i^{(c)} x(\theta) + T_{load}^{(*)}(\theta), c = \theta \bmod p \\ y(\theta) = C \cdot x(\theta) \end{cases} \quad (7.9)$$

$$\text{avec : } nl_1 = \frac{1}{J(\theta, \dot{\theta})} \cdot \frac{dJ(\theta, \dot{\theta})}{d\theta} \text{ et } nl_2 = \sum_{j=1}^{n_{cyl}} \left( \frac{ds_j}{d\theta} \right)^2.$$

La synthèse d'un observateur à entrée inconnue périodique correspondant au modèle défini en (7.9) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \hat{x}(\theta+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(\theta)) [A_i^{(c)} \hat{x}(\theta) - L_i^{(c)} (y(\theta) - \hat{y}(\theta))] + \hat{T}_{load}^{(*)}(\theta) \\ \hat{y}(\theta) = C \cdot \hat{x}(\theta) \\ \hat{T}_{load}^{(*)}(\theta+1) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(\theta)) K_i^{(c)} (y(\theta) - \hat{y}(\theta)) \end{cases} \quad (7.10)$$

L'objectif revient alors à calculer les deux gains périodiques  $L_i^{(c)}$  et  $K_i^{(c)}$  prouvant la stabilité de la dynamique de l'erreur d'estimation afin d'obtenir les estimations voulues. Une manière de vérifier les estimations du couple de combustion obtenues est d'utiliser les signaux mesurés des pressions cylindres.

## Conclusion Générale

L'objectif général de cette thèse était de développer des outils d'analyse et de synthèse des systèmes non linéaires périodiques, afin de les utiliser pour résoudre des problématiques d'estimation et de contrôle cylindre à cylindre d'un moteur à allumage commandé.

De nouvelles conditions de stabilité pour des modèles TS discrets et périodiques discrets ont été développées. L'analyse de la stabilité est basée sur la théorie de Lyapunov, et l'utilisation d'outils de résolution numérique de type LMI.

En particulier, nos premiers travaux se sont focalisés sur la problématique de réduction du conservatisme des résultats de synthèse des modèles TS à temps discret. Des exemples numériques ont montré l'efficacité des approches proposées par rapport aux différents travaux existants dans la littérature. Ces différentes propositions amènent à des perspectives nouvelles. On peut aisément envisager l'extension des résultats du chapitre trois à d'autres types de modèles TS en introduisant par exemple des notions de performances et/ou de robustesse.

La problématique de la commande et de l'observation des modèles TS discrets périodiques a ensuite été abordée permettant de proposer des résultats. Plusieurs structures ont été validées, par exemple pour diminuer la complexité des approches dans certains cas.

Afin de montrer l'intérêt des outils théoriques développées dans cette thèse, trois applications principales liées à l'estimation cylindre à cylindre d'un moteur à allumage commandé ont été proposées. Ces applications se basent sur l'utilisation des modèles à temps discret définis dans le domaine angulaire.

En premier lieu, une nouvelle méthode d'estimation des débits d'air frais admis dans les différentes chambres de combustion du moteur a été développée. L'application d'un observateur périodique pour résoudre cette problématique a donné des résultats prometteurs. En effet, les résultats réels obtenus confirment le fait que le remplissage ne se fait pas de manière uniforme sur tous les cylindres. Ceci est dû principalement à la disposition géométrique des ports d'admission et aux phénomènes de résonance acoustique présents dans le collecteur. De plus, l'observateur développé permet de détecter aussi les fractions des gaz brûlés refoulées dans le collecteur.

En deuxième lieu, une nouvelle approche semblable à celle utilisée pour l'estimation des débits d'air qui traversent les soupapes d'admission a été développée pour l'estimation des débits des gaz brûlés qui traversent cette fois les soupapes d'échappement du moteur. Due à la structure particulière qui a été adoptée, la forme décrite ci-dessus a été détectée avec succès en utilisant seulement le capteur de pression à l'échappement.

Puis, nous avons proposé une approche originale pour l'estimation des fractions d'air individuelles présentes au niveau des ports d'échappement prenant en compte le retard dû au transport des gaz. Ces fractions représentent des indicateurs importants sur la qualité de la combustion dans les cylindres respectifs puisqu'elles indiquent si tout l'air a été brûlé. Une loi de commande peut être synthétisée pour annuler ces fractions d'air en pilotant indépendamment les quantités d'essence à injecter dans chaque cylindre. Les premiers résultats obtenus sont très prometteurs à la fois pour une application en commande et/ou en diagnostic.

Enfin, quelques pistes et orientations à partir des résultats déjà obtenus ont été présentées dans le dernier chapitre.

Globalement, ce travail a montré l'intérêt de préserver le caractère cyclique du moteur pour réaliser la synthèse de commande et d'observateur afin d'améliorer les performances globales du moteur. Les travaux proposés sont des travaux préliminaires puisqu'ils restent à valider et à améliorer dans différents cas de fonctionnement mais le principe de la méthode nous semble être une solution possible pour optimiser la gestion cylindre à cylindre du moteur. De plus, les outils développés peuvent facilement être étendus au cas des distributions pilotées.



## Références

### A

**[Aquino 89]**

C. F. Aquino (1989). Transient A/F ratio characteristics of 5 litre central fuel injection system. SAE paper, SP-487, 810494.

**[Arduini & al 97]**

C. Arduini, P. Baiocco, Active magnetic damping attitude control for gravity gradient stabilized space-craft, *Journal of Guidance and Control*, Vol. 20, No. 1, p 117–122, 1997.

**[Azzoni & al 99]**

Azzoni, P.M., et al., "Indicated and Load Torque. Estimation using Crankshaft Angular Velocity. Measurement". SAE Technical Paper Series, 1999.

**[Arcara & al 00]**

P. Arcara, S. Bittanti, M. Lovera, Periodic control of helicopter rotors for attenuation of vibrations in forward flight, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 8, No. 6, p 883–894, 2000.

**[Andersson & al 01]**

P. Andersson and L. Erikson, Air-to-cylinder observer on a turbocharged SI engine with wastegate. *SAE paper*, 2001-01-0262, 2001.

**[AFH2]**

Association Française de l'hydrogène, Le programme Daimler & Chrysler, Mémento de l'hydrogène, *Fiche 9.1.1*, Novembre 2004, <http://www.afh2.org/>.

**[Arsie & al 03]**

Arsie, C. Pianese, G. Rizzo, V. Cioffi (2003). An adaptive estimator of fuel film dynamics in the intake port of a spark ignition engine. *Control Engineering Practice*, Vol. 11, pp. 303-309.

**[Averina & al 05]**

V. Averina, I.V. Kolmanovsky, A. Gibson, G. Song and E. Bueler, Analysis and control of delay-dependent behavior of engine air-to-fuel ratio, *Proceedings of IEEE Conference on Control Applications, Toronto, Canada*, p 1222-1227, 2005.

**[Andersson 05]**

P. Andersson (2005). Air Charge Estimation in Turbocharged Spark Ignition Engines (thèse). Department of Electrical Engineering Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden

**[Arzelier & al 05]**

D. Arzelier, D. Peaucelle and C. Farges, Robust analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems via LMIs, *proceedings of Conference on Decision and Control, Seville, Spain*, December 2005.

**[Alfieri & al 07]**

E. Alfieri, A. Amstutz, L. Guzzella, Automatic Design and Parametrization of a Model-Based Controller Applied to the AF-Ratio Control of a Diesel Engine, *IFAC Symposium Advances in Automotive Control, Monterey (CA)*, 2007.

**[Alfieri & al 09]**

E. Alfieri, A. Amstutz., L. Guzzella, Gain-Scheduled Model-Based Feedback Control of the Air/Fuel Ratio in Diesel Engines, *IFAC Journal of Control Engineering Practice*, Vol. 17, No. 12, p1417-1425, 2009.

## Références

---

### [Alfieri 09]

E. Alfieri, Emissions-Controlled Diesel Engine. Diss., Eidgenössische Technische Hochschule ETH Zürich, Nr. 18214, 2009.

### [Alt & al 09]

B. Alt, J.P. Blath, F. Svaricek and M. Schultalbers: Multiple Sliding Surface Control of Idle Engine Speed and Torque Reserve with Dead Start Assist Control. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 56, No. 9, S. 3580-3592, 2009

### [Ahn & al 10]

K. Ahn, A.G. Stefanopoulou, and M. Jankovic. Puddle dynamics and air-to-fuel ratio compensation for gasoline-ethanol blends in flex-fuel engines. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2010.

## B

### [Brockett 70]

R. W. Brockett, Finite-Dimensional Linear Systems, *Wiley, New York*, 1970.

### [Bailey 72]

J. E. Bailey, Improvement of an optimal steady-state process by dynamic periodic optimization, *A. Marzollo Ed., Springer-Verlag*, p153–182, 1972.

### [Brockett & a 83]

R. W. Brockett, Asymptotic stability and feedback stabilization, in *Differential Geometry Control Theory, Progress in Mathematics, Vol. 27, Birkäuser*, p181–208, 1983.

### [Bittanti & al 85]

S. Bittanti, P. Bolzern, Reachability and controllability of discrete-time linear periodic systems, *IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 30, No. 4, p 399–401*, 1985.

### [Bittanti & al 86]

S. Bittanti, P. Bolzern, Stabilizability and detectability of linear periodic systems, *Systems and Control Letters: Vol. 6, p 141–145, 1985, with an addendum Systems and Control Letters, Vol. 7, p. 73, 1986.*

### [Bolzern & al 88]

P. Bolzern, P. Colaneri, “The periodic Lyapunov equation”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Application*, No. 4, pp. 499–512, 1988.

### [Bamieh & al 92]

B. Bamieh and J. Pearson, The H<sub>2</sub> problem for sampled data systems, *Systems & Control Letters*, vol. 19, p1-12, 1992.

### [Bittanti & al 94]

S. Bittanti, L. Moiraghi, Active control of vibrations in helicopters via pole assignment techniques, *IEEE Trans. on Control Systems Technology, Vol. 2, pp. 343–351*, 1994.

### [Blondel & al 94]

V. Blondel, Simultaneous Stabilization of Linear Systems, *Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin, Vol. 191*, 1994.

### [Boyd & al 94]

S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron, V. Balakrishnan, Linear matrix inequalities in system and control theory. *Studies in Applied Mathematics, Philadelphia*, 1994.

### [Bidan 95]

P. Bidan (1995). Modélisation et commande d'un moteur à allumage commandé d'automobile Thèse préparée au LAAS.

## Références

---

**[Bittanti & al 96 a]**

S. Bittanti, F. Lorito, S. Strada, An LQ approach to active control of vibrations helicopters, *ASME Transactions on Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 118, No. 3, p482–488, 1996.

**[Bittanti & al 96 b]**

S. Bittanti, M. Lovera, On the zero dynamics of helicopter rotors loads, *European Journal of Control*, Vol. 2, No. 1, p 57–68, 1996.

**[Bortolet 98]**

P. Bortolet (1998). Modélisation et commande multivariables floues : application à la commande d'un moteur thermique. Thèse de l'Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse.

**[Bittanti & al 00]**

S. Bittanti and P. Colaneri, Invariant representations of discrete-time periodic systems, *Automatica*, vol. 36, p1777–1793, 2000.

**[Bittanti & al 01]**

S. Bittanti and P. Colaneri, Stabilization of periodic systems: overview and advances, *1st IFAC Workshop on Periodic Control Systems*, Cernobbio - Como, Italy, p 157–164, 2001.

**[Blanco & al 01]**

Y. Blanco, W. Perruquetti, and P. Borne, Nonquadratic stability of non linear systems in the Takagi–Sugeno form. In *Proceedings of the ECC*, 2001.

**[Bacciotti & al 01]**

A. Bacciotti, L. Rosier, Lyapunov functions and stability in control theory, *Springer-Verlag: Vol. 267*, 2001.

**[Balluchi & al 02]**

L. Balluchi, M. D. Benvenuti, Di Benedetto, and A. L. Sangiovanni-Vincentelli. Idle Speed Controller Synthesis Using an Assume--Guarantee Approach. In *Nonlinear and Hybrid Control in Automotive Applications*, Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 2002.

**[Benvenuti & al 03]**

L. Benvenuti, M.D. Di Benedetto, S. Di Gennaro, A. Sangiovanni-Vincentelli, Individual Cylinder Characteristic Estimation for a Spark Injection Engine, *Automatica*, 39, p1157–1169, 2003.

**[Bonnardot 04]**

F. Bonnardot, Comparaison Entre les Analyses Angulaire et Temporelle des Signaux Vibratoires de Machines Tournantes. Etude du Concept de Cyclostationnarité Floue. *Thèse de doctorat, Ecole Doctorale EEATS*, 2004.

**[Bolzern & al 04]**

P. Bolzern, P. Colaneri, G. De Nicolao, On discrete-time  $H^\infty$  fixed-lag smoothing, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 52, pp. 132–141, 2004.

**[Balluchi & al 07]**

A. Balluchi, A. Bicchi, E. Mazzi, A. Sangiovanni-Vincentelli, and G. Serra, Hybrid Modeling and Control of the Common-Rail Injection System. *Int. J. Control*, 80(11), p1780 - 1795, 2007.

**[Bittanti & Colaneri 09]**

S. Bittanti, P. Colaneri, Periodic Systems: Filtering and Control, *Sprinter-Verlag*, 2009.

**[Bernal & al 09]**

M. Bernal, T-M. Guerra, A. Kruszewski, A membership-function-dependent approach for stability analysis and controller synthesis of Takagi-Sugeno models, *Fuzzy Sets and Systems* 160, p2776–2795, 2009.

## C

**[Colvin & al 82]**

A. D. Colvin, J. W. Butler, and J. E. Anderson, Catalytic effects on ZrO, oxygen sensors exposed to non-equilibrium gas mixtures, *J. Electroanal. Chem.*, vol. 136, p179–183, 1982.

## Références

---

### [Chin & al 86]

Y. K. Chin and F. E. Coats, Engine dynamics: Timebased versus crank-angle based, in *SAE Technical Paper Number 860412*, 1986.

### [Cook & al 88]

J. A. Cook, and B. K. Powell, Modeling of an internal combustion engine for control analysis. *IEEE. Control Systems Magazine* 8, 4, p20–26,1988.

### [Citron & al 89]

S.J. Citron,, J.E. O'Higgins, and L.Y. Chen, Cylinder by Cylinder Engine Pressure and Pressure Torque Waveform Determination Utilizing Speed Fluctuations, *SAE 8900486*, 1989.

### [Chang & al 95]

C-F. Chang, N. P. Fekete, A. Amstutz, and J. D. Powell, Air-Fuel ratio control in spark-ignition engines using estimation theory, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 3, No. 1, p22-31, 1995.

### [Carnevale & al 95]

C. Carnevale, D. Coin, M. Secco and P. Thbetti. A/F ratio control with sliding mode technique. *SAE Paper, No. 950838*, 1995.

### [Colaneri & al 95]

P. Colaneri, G. De Nicolao, Multirate LQG control of continuous-time stochastic systems, *Automatica*, Vol. 31, No. 4, p 591–596, 1995.

### [Colaneri & al 98]

P. Colaneri, V. Kucera, C. E. de Souza, Output stabilization for periodic systems: necessary and sufficient conditions, *American Control Conference, Philadelphia, USA*, p2795–2796, 1998.

### [Carnevale & al 98]

C. Carnevale and M. Hadji. Cylinder to cylinder AFR control with an asymmetrical exhaust manifold in a GDI system. In *Proc. of the SAE Conference*, number 981064, 1998.

### [Coron & al 99]

J. M. Coron, On the stabilization of some non-linear control systems: results, tools and applications, in *Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control*, F. H. Clarke , G. Sabidussi, R. J. Stern (Eds.), *Kluwer Academic Publication, Dordrecht, The Netherlands*, p307–363, 1999.

### [Cavina & al 99]

N. Cavina, F. Ponti, G. Rizzoni, Fast algorithm for on-board torque estimation, *SAE Technical Paper 1999-01-0541*, 1999.

### [Colaneri 00]

P. Colaneri, State-feedback problems in  $H_2$  and  $H_\infty$  for continuous-time periodic systems, Part I: theoretical aspects, *Kybernetika*, Vol. 36, No. 2, p 211–242, 2000.

### [Colaneri & al 00]

P. Colaneri, Continuous-Time Periodic Systems in  $H_2$  and  $H_\infty$ . Part I : Theoretical Aspects, *Kybernetika*, vol. 36, No. 2, p 211-242, 'UTIA, AV ~ CR, Prague', 2000.

### [Chevalier & al 00]

A. Chevalier, C. W. Vigild, and E. Hendricks, Predicting the Port Air Mass of SI Engines in Air/Fuel Ratio Control Applications, *SAE Technical Paper No. 2000-01-0260*, 2000.

### [Conte & al. 01]

M. Conte, A. Iacobazzi, M. Ronchetti, R. Vellone, *Hydrogen economy for a sustainable development: state-of-the-art and technological perspectives*, *Journal of Power Sources*, Vol. 100, p171–187, 2001.

## Références

---

### [Chauvin & al 04]

J. Chauvin, G. Corde, P. Moulin, M. Castagné, N. Petit, and P. Rouchon, Observer design for torque balancing on a DI engine, in *Proc. of the SAE Conference*, 2004.

### [Chauvin & al 05]

J. Chauvin, P. Moulin, G. Corde, N. Petit, and P. Rouchon, Real-time nonlinear individual cylinder Air-Fuel Ratio observer on a Diesel engine test bench. In *Proc. of the IFAC World Congress*, 2005.

### [Cristofaro & al 05]

F.D. Cristofaro, A. Petrella, M. Cardone, G. Lanzilli, A. Senatore, Air Mass Flow Prediction Algorithm, June 20-23, *Volume: 1*, p265–268, 2005.

### [Chai & al 05]

L. Chai, L. Qiu, Multirate periodic systems and constrained analytic function interpolation problems, *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 43, No. 6, p1972–1986, 2005.

### [Colaneri & al 06]

P. Colaneri and D. Henrion, Switching and periodic control of the Belgian chocolate problem, *Proceedings of ROCOND - 5th IFAC Symposium on Robust Control Design, Toulouse, France*, July 2006.

### [Chauvin & al 06]

J. Chauvin, P. Moulin, G. Corde, N. Petit, and P. Rouchon, Six degrees crankshaft individual air fuel ratio estimation of Diesel engines for cylinder balancing purpose, in *Proc. of the SAE Conference*, no. 2006-01-0013, 2006.

### [Chauvin & al 07]

J. Chauvin, G. Corde, N. Petit, and P. Rouchon. Periodic input estimation for linear periodic systems: Automotive engine applications. *Automatica*, 43:971–980, 2007.

## D

### [Drakunov & al 95]

S. Drakunov, G. Rizzoni, and Y. Wang, “Estimation of engine torque using nonlinear observers in the crank angle domain,” in *Proc. of the 5th ASME symposium on Advanced Automotive Technologies*, 1995.

### [Daw & al 96]

C. S. Daw, C. E. Finney, J. B. Green Jr., et al., A simple model for cyclic variations in a spark ignition engine, *SAE International Fall Fuels and Lubricants Meeting and Exposition. Warrendale: SAE Press, No.962086*, 1996.

### [Diop & al 99]

S. Diop, PE. Moral, IV. Kolmanovsky, M. Van Nieuwstadt, Intake oxygen concentration estimation for DI diesel engines. *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications, Kohala Coast, Hawaii, vol. 1*, p852–857, 1999.

### [De Oliveira & Skelton 01]

M. C. De Oliveira and R. E. Skelton, Stability Tests for Constrained Linear Systems, Perspectives in Robust Control, *Lecture Notes in Control and Information Sciences 268 edited by S. O. Reza Moheimani, Springer*, 2001.

### [Daafouz & Bernussou 01]

J. Daafouz, J. Bernussou, Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties, *Systems & Control Letters* 43, 355-359, 2001.

### [Deur & al 04]

J. Deur, D. Pavkovic, D. Hrovart, Estimation of SI engine load torque: adaptive Kalman filter vs. Luenberger estimator, in: *ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition, Anaheim, CA, November 2004*.

## Références

---

### [Ding & al 06]

B. C. Ding, H. X. Sun, and P. Yang, "Further study on LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form," *Automatica*, vol. 42, no. 3, pp. 503-508, 2006.

### [Deur & al 07]

J. Deur, I. Kolmanovsky, D. Hrovat, "An SI Engine Load Torque Observer Based on Combined Input and Parameter Estimation", Proc. of 5th IFAC Symposium on Advances in Automotive Control, pp. 79-86, Monterey Coast, CA, 2007.

### [Delmotte & al 08]

F. Delmotte, T.M. Guerra, A. Kruszewski, Discrete Takagi-Sugeno's Fuzzy Models: Reduction of the Number of LMI in Fuzzy Control Techniques, *IEEE Trans Syst, Man Cybern part B*, 38 (5), p1423- 1427, 2008.

## E

### [Eriksson & al 97]

Lars Eriksson and L. Nielsen. Closed Loop Ignition Control by Ionization Current Interpretation, *SAE paper 970854*, 1997.

### [Ericsson & al 02]

L. Ericsson, L. Nielsen, J. Bergström, F. Pettersson, and P. Andersson, Modeling of a turbocharged SI engine, *Annual Review in control*, Vol.26, p129-137, 2002.

## F

### [Fjeld 71]

M. Fjeld, Stability and Control of Periodic Processes, *PhD thesis, University of Trondheim, Sweden*, 1971.

### [Floquet 83]

G. Floquet, Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, Vol. 12, 47-89, 1883.

### [Freudenberg & al 89]

J. S. Freudenberg, J.W. Grizzle, An observation on the parametrization of causal stabilizing controllers for lifted systems, *Control Theory and Advanced Tech. Vol. 5, No. 3, p 367-372*, 1989.

### [Flamm 91]

D. S. Flamm, A new shift-invariant representation for periodic systems, *Systems and Control Letters*, Vol. 17, No. 1, p 9-14, 1991.

### [Fekete 95]

N. P. Fekete. Model-Based Air-Fuel Ratio Control of a Multi-Cylinder Leanburn Engine. *PhD thesis, Stanford University, Stanford, CA*, 1995.

### [Feuer & al 96]

A. Feuer, G. C. Goodwin, Sampling in Digital Signal Processing and Control, *Birkhäuser*, 1996.

### [Ford & al 00]

R. Ford, and K. Glover, Spark ignition engine idle speed control using a novel framework and enabling control of the tradeoff between fuel consumption and load rejection capability In: The 5th International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC '00), April 2000, Ann Arbor, MI, US, 2000.

## Références

---

### [Filipi & al 01]

Z. S. Filipi and D. N. Assanis, A nonlinear, transient, single-cylinder Diesel engine simulation for predictions of instantaneous engine speed and torque, *Journal of Engineering for Gas Turbine and Power* 123, p951-959, 2001.

### [Fantini & al 03]

J. Fantini, and J.F. Burq, Exhaust-intake manifold model for estimation of individual cylinder air fuel ratio and diagnostic of sensor-injector. *In Proc. of SAE Conference, number 2003-01-1059*, 2003.

### [Feng 03]

G. Feng, Controller synthesis of fuzzy dynamical systems based on piecewise Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 11(5)*, p605-612, 2003.

### [Farges & al 05]

C. Farges, D. Peaucelle, D. Arzelier and J. Daafouz, Robust H2 performance analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems, *Systems & Control Letters*, 2005.

### [Farges & al 05]

C. Farges, D. Peaucelle and D. Arzelier, Méthodes LMI de stabilisation des systèmes linéaires périodiques, *Proceedings of JDMACS, Lyon, France*, September, 2005.

### [Farges & al 06]

C. Farges, D. Peaucelle and D. Arzelier, LMI formulation for the resilient dynamic output feedback stabilization of linear periodic systems, *Proceedings of CAO - 13th IFAC Symposium on Control Applications of Optimisation, Paris, France*, April 2006.

### [Farges 07]

C. Farges, Méthode d'Analyse et de Synthèse Robustes pour les Systèmes Linéaires Périodiques, *PhD thesis, LAAS-CNRS Toulouse, France*, 2007.

### [Franco & al 08]

Franco, J., Franchek, M.A., and Grigoriadis, K.M., "Real-time brake torque estimation for internal combustion engines", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 22, No. 2, pp. 338-361, 2008.

## G

### [Grizzle & al 91]

J. Grizzle, K. Dobbins, and J. Cook, Individual cylinder air-fuel ratio control with a single EGO sensor, *Proc. in the IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 40(1):p357-381, February 1991.

### [Grizzle & al 94\_1]

J.W. Grizzle, J.A. Cook and W.P. Milam, Improved Transient Air-Fuel Ratio Control using Air Charge Estimation. *Reprint, 1994 Proceedings of The American Control Conference, 1994 - American Automatic Control Council, Baltimore, June 1994.*

### [Grizzle & al 94\_2]

J.W. Grizzle, J.A. Cook and W.P. Milam, "Improved Cylinder Air Charge Estimation for Transient Air Fuel Ratio Control". *Reprint, 1994 Proceedings of The American Control Conference, 1994 - American Automatic Control Council, Baltimore, June 1994.*

### [Guzzella 95]

L. Guzzella, Models and model based control of IC-engines – a nonlinear approach, *SAE Paper No. 950844*, 1995.

### [Guzzella & al 97]

L. Guzzella, S. Simons and H.P. Geering, Feedback linearizing air/fuel-ratio controller, *Control Engineering Practice Volume 5, Issue 8, p1101-1105*, August 1997.

## Références

---

### [Glielmo & al 00]

L. Glielmo, S. Santini and I. Cascella, "Idle Speed Control: Output Feedback Stabilization for Finite Time Delay Systems", Proceedings 2000 American Control Conference, Chicago, Illinois, USA, 28-30 June 2000, pp. 45--49.

### [Grizzle al 01]

J. W Grizzle, J. Buckland, J. Sun, Idle speed control of a direct injection spark ignition stratified charge engine, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 11(11): p1043-1071, 2001.

### [Guerra & al 04]

T. M. Guerra and L. Vermeiren, LMI-based relaxed non-quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi–Sugeno's form. *Automatica*, 40(5), p823–829, 2004.

### [Grondin & al 04]

O. Grondin, J. Maquet, R. K. Stobart, and H. Chafouk, Compression ignition engine simulator for instantaneous pressure and torque generation, International Symposium on Vehicular Power and Propulsion (Paris, France), IEEE, 6-8 October 2004.

### [Guzzella & al 04]

L. Guzzella and C.H. Onder, Introduction to Modeling and Control of Internal Combustion Engine Systems, by, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ISBN 3-450-22274, 2004.

### [Gibson & al 06]

A. Gibson, I.V. Kolmanovsky and D. Hrovat, Application of Disturbance Observers to Automotive Engine Idle Speed Control for Fuel Economy Improvement, *Proceedings of the 2006 American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, USA*, June 2006.

### [Guerra & al 06]

T-M. Guerra, A. Kruszewski, L. Vermeiren, H. Rago-Tirmant, Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form. *Fuzzy Sets & Systems*, 157 (9), p 1248-1259, 2006.

### [Gauthier & al 07\_1]

Gauthier C., Sename O., Dugard L., Meissonnier G., An LFT approach to Hinf control design for diesel engine common rail injection system, *Oil & Gas Science and Technology*, vol 62, nb 4, pp 513-522, 2007.

### [Gauthier & al 07\_2]

Gauthier C., Sename O., Dugard L., Meissonnier G., An Hinf Linear Parameter-Varying (LPV) Controller for a Diesel Engine Common Rail Injection System, European Control Conference, ECC'07, Kos Grèce, July 2-5, 2007.

### [Guerra & al 09]

T.M. Guerra, A. Kruszewski, J. Lauber, Discrete Tagaki–Sugeno models for control: Where are we?, *Annual Reviews in Control*, 33 (1), p37-47, 2009.

### [Galloni & al 09]

E. Galloni, Analyses about parameters that affect cyclic variation in a spark ignition engine, *Applied Thermal Engineering Vol 29, Issues 5-6*, p 1131-1137, April 2009.

### [Gawande & al 10]

S.H. Gawande, L.G. Navale, M.R. Nandgaonkar and D. Butala, Detecting power imbalance in multi-cylinder inline diesel engine generator set, *Computer and Automation Engineering (ICCAE), Singapore, vol., p218–223*, 2010.

## H

### [Hazell & Flower 71]

P. A. Hazell and J. O. Flower, Discrete Modeling of Spark Ignition Engines for Control Purposes, *International Journal of Control*, 13, p625-632, 1971.

**[Ham 87]**

D. Ham, Helicopter individual blade control research at MIT: 1977–1985, *Vertica*, Vol. 11, No. 1/2, p109–122, 1987.

**[Heywood, 88]**

J. B. Heywood, Internal Combustion Engine Fundamentals, *McGraw - Hill, New York*, 1988.

**[Hendricks & al 92]**

E. Hendricks, T. Vesterholm and S. C. Sorenson. Nonlinear, closed loop, SI engine control observers. *SAE technical paper series, international congress and exposition, Detroit, Michigan*, 1992.

**[Hendricks & al 93]**

E. Hendricks, M. Jensen, P. Kaidantzis, P. Rasmussen, and T. Vesterholm, Transient A/F Ratio Errors in Conventional SI Engine Controller, *SAE Technical Paper No. 930856, in SP-955*, 1993.

**[Hasegawa & al 94]**

Y. Hasegawa, A. Shusuke, I. Komoriya, H. Maki, Y. Nishimura and T. Hirota, Individual cylinder air-fuel ratio feedback control using an observer, *SAE Technical, Paper 940376*, 1994.

**[Hendricks & al 95]**

E. Hendricks, A. Chevalier, and M. Jensen, Event Based Engine Control: Practical Problems and Solutions, *SAE Technical Paper No. 950008*, 1995.

**[Hrovat & al 97]**

D. Hrovat and J.Sun,. Models and control methodologies for IC engine idle speed control design. *Control Engineering Practice*, 5(8),1093}1100,1997.

**[Hamilton & al 97]**

G. K. Hamilton and M. A. Franchek, , "Robust Controller Design and Experimental Verification of I.C. Engine Speed Control," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Invited Journal Paper, Vol. 7, pp. 609-627, 1997.

**[Haluska & al 98]**

Haluska P., Guzzella L. (1998), Control Oriented Modeling of Mixture Formation Phenomena in Multi-Port Injection SI Gasoline Engines, *SAE Paper 980628*.

**[Hrovat & al 98]**

D. Hrovat, D. Colvin and B. K. Powell, Comments on applications of some new tools to robust stability analysis of spark ignition engine: A case study, *IEEE Trans. on Control Systems Technology* 6(3), p435–436, 1998.

**[Hendricks 01]**

E. Hendricks (2001). Isothermal vs. adiabatic mean value engine models. IFAC workshop on advances in automotive control. Karlsruhe, Germany.

**[Hassan 03]**

M. Al-Hasan, Effect of ethanol–unleaded gasoline blends on engine performance and exhaust emission Energy, *Conversion and Management* 44, p1547–1561, 2003.

**[He & al 05]**

P. He and S. Jagannathan, Neuro-controller for reducing cyclic variation in lean combustion spark ignition engines[J]. *Automatica*, 41(7): p1133 – 1142, 2005.

**[He & al 08]**

B. He, T. Shen, J. Kako, M. Ouyang, Input Observer-Based Individual Cylinder Air-Fuel Ratio Control: Modelling, Design and Validation, *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, p1057 – 1065, Issue: 5, Sept. 2008.

## Références

---

### [Honda]

Honda, Honda Fuel Cell Vehicle, <http://world.honda.com/FuelCell/>.

## I

### [Inoue & al 93]

T. Inoue, S. Matsushita, K. Nakanishi, et al., Toyota lean combustion system: the third generation system [M], *International Congress & Exposition Technical Papers*. Warrendale: SAE Press, No.930873, 1993.

### [Isao & al 97]

F. Isao, et al. "MBT Feedback Control System in Spark Ignition Engines, *Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan*, Vol. 28, No.3, July 1997.

### [Ichalal & al 08]

D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot and D. Maquin, Design of observers for Takagi- ueno systems with immeasurable premise variables: an L2 approach. In *IFAC World Congress, Seoul, Korea, 2008*.

### [IFP]

<http://www.ifpenergiesnouvelles.fr/>

## J

### [Jacklin & al 94]

S. A. Jacklin, K. Q. Nguyen, A. Blaas, P. Richter, Full-scale wind tunnel test of an helicopter IBC system, *50th Annual Forum American Helicopter Society, Washington DC, p579-596, 1994*.

### [Jankovic & al 98]

M. Jankovic and I. Kolmanovsky, Robust nonlinear controller for turbocharged Diesel engine, *Proceedings of the American Control Conference (Philadelphia, Pensilvania), p1389-1394, June 1998*.

### [Jeremiasson & al 98]

J. Jeremiasson, and C. Wallin, Balancing of Individual Cylinders in a V8 Diesel Engine *Based on Crankshaft Torque Measurement, SAE Technical Paper, No. 981063, 1998*.

### [Johansson & al 99]

M. Johansson, A. Rantzer, K. Arzen, Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.7, p713-722, 1999*.

### [Jianqiu & al 02a]

Jianqiu, L., Y. Minggao, Z. Ming and L. Xi- hao (2002a). Advanced torque estimation and control algorithm of diesel engines. In: Proc. of SAE Conference.

### [Jun-Mo Kang & al 03]

Jun-Mo Kang and J.W. Grizzle, Dynamic Control of a SI Engine with Variable Intake Valve Timing. *Reprint, International Journal of Robust and Nonlinear Control, April 2003, pp. 399-420*.

### [Jankowski & al 03]

A. Jankowski, A. Sandel, Exhaust emission reduction problems of internal combustion engines fueled with biofuels, *Journal of KONES Internal Combustion Engines, vol. 10, p 3-4, 2003*.

### [Jeffrey & al 06]

A. Jeffrey, J.S. Cook, H. Julia, Buckland, Ilya V. Kolmanovsky, P. Huei, and J.W. Grizzle. Automotive power train control-A Survey. *Asian Journal of Control, Vol. 8, No.3, p 237-260, 2006*.

## Références

---

### [Jankovic & al 09]

M. Jankovic, I. Kolmanovsky, Developments in control of time-delay systems for automotive powertrain applications, *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*, Springer, Berlin, 2009.

## K

### [Kalman 60]

R. Kalman, Contributions to the theory of optimal control, *Bolet'in de la Sociedad Matem'atica*, vol. 5, p102-119, 1960.

### [Kao & al 95]

M. Kao and J. J. Moskwa, Turbocharged Diesel engine modeling for nonlinear engine control and state estimation, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 117 no. 1, pp 20-30, 1995.

### [Kao & al 95]

M. Kao and J. J. Moskwa, Turbocharged Diesel engine modeling for nonlinear engine control and state estimation, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 117, no. 1, p20-30, 1995.

### [Kim & al 95]

Y.W. Kim, G. Rizzoni, and Y.Y. Wang, Analysis and processing of shaft angular velocity signals in rotating machinery for diagnostic applications. *In Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-95*, 1995.

### [Kim & al 99]

Kim, D., and Park, J., 1999, "Neural Network Control for Reducing Engine Speed Fluctuations at Idle," in Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, 4, Tokyo, Japan, October 12–15, pp. 629–634.

### [Kiencke & al 00]

U. Kiencke, L. Nielsen(2000). Automotive control systems. SAE, Springer, Berlin. ISBN 3-540-66922-1.

### [Kolmanovsky & al 00]

I.V. Kolmanovsky, M. Jankovic, M.Van Nieuwstadt, P.E. Moraal, Method of estimating mass air flow in turbocharged engines having exhaust gas recirculation. *U.S. Patent 6.035.639*, 2000.

### [Kruszewski & al 05]

A. Kruszewski and T. M. Guerra, New approaches for the stabilization of discrete Takagi–Sugeno fuzzy models, *44th IEEE CDC/ECC'05*, 2005.

### [Kruszewski 06]

A. Kruszewski, Lois de commande pour une lasse de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno :Mise sous forme LMI, Thèse de doctorat, Université de Valenciennes, 2006.

### [Kruszewski & al 07]

A. Kruszewski, T. M. Guerra, and S. Labiod, Stabilization of Takagi-Sugeno discrete models: Towards a unification of the results. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2007.

## L

### [Lyapunov 1892]

A. Lyapunov, Problème général de la stabilité du mouvement, *Annales de la faculté de sciences de Toulouse* 1907, 1892, traduit de l'ouvrage original.

### [Li & al 99]

X. Li, and S. Yurkovich, I–C Engine Air/Fuel Ratio Prediction and Control Using Discrete-Time Nonlinear Adaptive Techniques, *Proceedings of the American Control Conference, San Diego, CA, Vol. 1*, p212–216, 1999.

## Références

---

### [Li & al 01]

X. Li and S. Yurkovich, Sliding mode control of delayed systems with application to engine idle speed control, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 9, no. 6, pp. 802–810, Nov. 2001.

### [Liu & al 03]

X. Liu and Q. Zhang, New approaches to controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI, *Automatica*, Vol.39(9), p1571-1582, 2003.

### [Locatelli & al 06]

Locatelli, M., Alfieri, E., Onder C. H., Geering, H.P., 2006 “Identification of the Relevant Parameters of the Wall- Wetting System by Extended Kalman Filter”, *Control Engineering Practice*, Volume: 14, Issue: 3, March, 2006, pp. 235-241.

### [Li & al 07]

Po. Li, T. Shen, O. Yasufumi, Experimental Analysis and Control-Oriented Modeling for Cyclic Variation of Cylinder Pressure in IC Engines, *Chinese*, p 613- 617, 2007.

### [Li & al 08]

P. Li, S.Tielong, L. Kaipei, J. Kako, S. Yoshida, Modeling and balancing control for torque generation in combustion event scale for multi-cylinder SI engines. *Control, Automation and Systems*, 2008. ICCAS 2008. International Conference on, pp 1254 – 1259, 14-17 Oct. 2008,seoul.

### [Li & al 09]

P. Li, T. She, J. Kako, K. Liu, Cyclic moving average control approach to cylinder pressure and its experimental validation, *J Control Theory Appl* 7(4), p345–351, 2009.

### [Lam & Narimani 09]

H K Lam, M. Narimani, Stability Analysis and Performance Design for Fuzzy-Model-Based Control System Under Imperfect Premise Matching *IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS*, 17 (4), pp. 949-961, 2009.

### [Lam & Leung 11]

H.K. Lam, F.H.F. Leung, *Stability analysis of fuzzy-model-based control systems*, Springer Ed., 2011.

## M

### [Meyer & al 75]

R. A. Meyer, C. S. Burrus, A unified analysis of multirate and periodically time-varying digital filters, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 22, p162–167, 1975.

### [Morris & al 82 ]

R. L. Morris, M. V. Warlick and R. H. Borcherts: *Engine Idle Dynamics and Control: A 5.81 Application*. SAE Technical Paper No. 820778, 1982

### [Moraal & al 94]

P.E. Moraal, J.A. Cook, and J.W. Grizzle, [Modeling the Induction Process of an Automobile Engine](#), *Control Problems in Industry*, I. Lasiecka and B. Morton, Eds., Birkhauser, pp. 253-270, 1994.

### [Morin & al 95]

P. Morin, C. Samson, J. B. Pomet, Z. P. Jiang, Time-varying feedback stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls, *Systems and Control Letters*, Vol. 25, p375–385, 1995.

### [Muller & al 98]

N. Muller, O. Nelles, R. Isermann. Closed-loop ignition control using on-line learning of locally-tuned radial basis function networks, *Proceedings of American Control Conference*. New York: IEEE Press p1356–1360, 1999.

## Références

---

### [Ma & al 98]

X.J. Ma, Z.Q. Sun, Y.Y. He, Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.6 (1), p41-50*, 1998.

### [Mianzo & al 01]

L. Mianzo, H. Peng, I. Haskara, Transient air-fuel ratio Hinf preview control of a drive-by-wire internal combustion engine. *In: Proc. Amer. Control Conf. p2867-2871*, 2001.

### [Magner & al 02]

S. Magner and M. Jankovic, Delta air-charge anticipation for mass air flow and electronic throttle control based systems, *American Control Conference, vol. 20743-1619, p 1407-1412*, 2002.

### [Moreau & al 04]

L. Moreau, D. Aeyels, Periodic output-feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree, *Systems and Control Letters, Vol. 51,p395-406*, 2004.

### [Muske & al 06]

K. R. Muske, C. P. J. Jones, A model-based si engine air fuel ratio controller. *In: Proc. Amer. Control Conf. p3284-3289*, 2006.

## N

### [Nir & al 94]

O. Nir, D. Mark, S. Eran. Cyclic variability in spark ignition engines: A literature survey, *International Congress& Exposition Technical Papers. Warrendale: SAE Press, No 940987*, 1994.

### [Nicolao & al 99]

G. De Nicolao, C. Rossi, R. Scattolini, and M. Suffritti. Identification and idle speed control of internal combustion engines. *Control Engineering Practice, 7:1061-1069*, 1999.

### [Nieuwstadt & al 99]

### [Nieuwstadt & al 99]

M.J. V. Nieuwstadt, and I. Kolmanovsky, Cylinder balancing of direct injection engines. *In: Proc. of the IEEE Conf. American Control Conference, vol.1, p202 -206*, 1999.

### [Nakagawa & al 02]

S. Nakagawa, K. Katogi, M. Oosuga, A new air-fuel ratio feedback control for ulev/sulev standard. *SAE Paper 2002-01-019*, 2002.

## O

### [Onder & al 93]

C. H. Onder, H. P. Geering, Model-based multivariable speed and air-to-fuel ratio control of an si engine. *SAE Paper 930859*, 1993.

### [Ohata & al 95]

A. Ohata, M. Ohashi, M. Nasu, T. Inoue, Crank-angle domain modeling and control for idle speed. *SAE Paper 950075*, 1995.

**[Oliveira & al 99]**

J. V. De Oliveira, J. Bernussou, J. C. Geromel, A new discrete-time robust stability condition, *Systems & Control Letters*, 37, pp. 261-265, 1999.

**[Osburn 03]**

A.W. Osburn, Performance enhancement of internal combustion engines using crank-angle domain control, *Ph.D., Purdue University*, December 2003.

**[Ohtake & al 09]**

H. Ohtake, K. Tanaka, H. O. Wang, Switching fuzzy model construction based on an optimal dividing plane *Fuzz'IEEE, Jeju, Korea*, August 2009.

## P

**[Park & al 89]**

B. Park, E. I. Verriest, Canonical forms for discrete-linear periodically time-varying systems and a control application, *28th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, USA*, p1220-1225, 1989.

**[Powell 93]**

J. D. Powell, Engine Control using Cylinder Pressure: Past, Present, and Future, *ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, Vol. 115*, 1993.

**[Powell & al 94]**

J. D. Powell, Engine control using cylinder pressure: past, present, and future [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, Control, 115(2B)*, p343 – 350, 1993.

**[Powell & al 98]**

J. D. Powell, N. P. Fekete, C. F. Chang, Observer based air-fuel ratio control, *IEEE Control Systems Magazine, 18 (5)*, p72-83, 1998.

**[Pieper & al 99]**

J. K. Pieper and R. Mehrotra. Air/Fuel ratio control using sliding mode methods. *Proceeding of the American Control Conference, San Diego, California*, 1999.

**[Park & al 01]**

S. Park, P. Yoon, M. Sunwoo. Cylinder pressure-based spark advance control for SI engines. *JSME International Journal-Series B, 44(2): p305 –312*, 2001.

**[Peaucelle 05]**

D. Peaucelle and D. Arzelier, Ellipsoidal Sets for Resilient and Robust Static Output-Feedback, *IEEE Trans. on Automat. Control, vol. 50, no. 6*, p 899-904, 2005.

**[Po Li & al 08]**

Po Li, K. Liu, T. Shen, J. Kako, Torque balancing control in ignition event based scale for multi-cylinder SI engines, *International Journal of Advanced Mechatronic Systems- Vol. 1, No.2* pp. 137 - 145,2008.

## R

**[Rizzoni & al 95]**

Rizzoni, Giorgio; Drakunov, Sergey; Wang, Yue-Yun. On-line estimation of indicated torque in IC engines via sliding mode observers *Proceedings of the American Control Conference. Vol. 3. (1995)*.

## Références

---

### [Ribbens & al 97]

Ribbens, W., and Badalament, M., 1997, "Balancing of IC Engine Torque via Individual Cylinder Spark Control," SAE Technical Paper, No. 970026.

### [Rizzoni & al 98]

G. Rizzoni, Estimation of instantaneous indicated torque in multicylinder engines, US Patent Number 5,771,482, June 1998.

### [Rizzoni & al 99]

G. Rizzoni, Y. Kim, and Y. Wang, "Design of an IC engine torque estimator using unknown input observer," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 121, 1999.

### [Rupp & al 08]

D. Rupp, C. Onder, L. Guzzella, Iterative adaptive air/fuel ratio control. In: Proc. Advances in Automotive Control. Seascape Resort, USA, 2008.

## S

### [Shulman & al 80]

M. A. Shulman and D. R. Hamburg, Non-ideal properties of ZrO<sub>2</sub> and T<sub>2</sub>O<sub>2</sub> exhaust gas oxygen sensors, SAE Tech. Paper Series, no. 800018, 1980.

### [Sandberg & al 83]

H. Sandberg, E. Mollerstedt and B. Bernhardsson, "Frequency-Domain Analysis of Linear Time-Periodic Systems", IEEE Trans. on Automat. Control, vol 50, no. 12, 2005, pages 1971- 1983.

### [Serruys 88]

M. Serruys, Cycles et problèmes de rendement dans les machines à combustion interne. Tech. de l'Ing., Fascicule B 1225, 1988.

### [Stevens & al 92]

S. P. Stevens, P. J. Shayler. A basis for the predictive control of cyclic dispersion in a spark ignition engine, *Proceeding of ImechE International Conference on Combustion in Engines Technology, Applications and the Environment*. 1992: 175 – 179.

### [Schmidt 92]

CH. Schmidt, non linear time invariant modeling Technique to be Used in Driveline and Engine Control and Observation, Proceedings of the American Control Conference, pp. 505-509. pp.20-25, 1992.

### [Samson 93]

C. Samson, "Time-varying feedback stabilization of car-like wheeled mobile robot", International Journal of Robotics Research, Vol. 12, No. 1, 1993.

### [Shim & al 95]

Shim, D., Park, J., Khargonekar, P., and Ribbens, W., 1995, "Engine Idle Speed Control," in Proceedings of the American Control Conference, 4, Seattle, WA, June, pp. 2582–2586.

### [Shim & al 96]

D. Shim, J. Park, P. P. Khargonekar, and W. B. Ribbens, Reducing automotive engine speed fluctuation at idle. IEEE Trans. on Control Systems Technology, Vol. 4, pp. 404-410, 1996.

### [Schmidt & al 99]

M. Schmidt, A. Kessel, CASMA-Crank Angle Synchronous Moving Average Filtering in: *American Control Conference*, San Diego, 1999.

### [Souza & al 00]

C. E. de Souza, A. Trofino, "An LMI approach to the stabilization of linear discrete-time periodic systems", International Journal of Control, Vol. 73, No. 8, pp. 696–703, 2000.

## Références

---

### [Sagfors 00]

M. Sagfors, H. Toivonen and B. Lennartson, "State-space solution to the periodic multirate  $H^\infty$  control problem : a lifting approach", *IEEE Trans. On Automat. Control*, vol. 45, no. 12, 2000, pages 2345-2350.

### [Sher & al 02]

E. Sher, E. Frenkel, B. Rivin, I. Henig, B. Cumming, and M. Watts. Online Detection of Cylinder-to-Cylinder Variations by a Vibration Analysis System, SAE 2002 World Congress & Exhibition, Detroit, MI, USA, March 2002.

### [Stotsky & al 02]

A. Stotsky and I.V. Kolmanovskiy, Application of input estimation techniques to charge estimation and control in automotive engines; *Control Engineering Practice* 10, pp 1371–1383, 2002

### [Shaver & al 03]

G. Shaver, and J.C. Gerdes. Cycle-to-cycle control of HCCI engines through variable valve actuation. *Submitted for consideration to: IEEE Trans. on Control Sys. Tech*, 2003.

### [Scherer & al 04]

C. Scherer and S. Weiland, *Linear Matrix Inequalities in Control*, 2004 (presentation).

### [Souder & al 04]

J. S. Souder, J. K. Hedrick, Adaptive sliding mode control of air-fuel ratio in internal combustion engines. *Int. J. Robust Nonlin. Cont.* 14 (6), 525–541, Apr. 2004.

### [Stefanopoulou & al 04]

A. G. Stefanopoulou, O. F. Storset, R. Smith. Pressure and temperature-based adaptive observer of air charge for turbocharged diesel engines. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 14(6): 543-560, 2004.

### [Sala & al 07]

A. Sala, C. Ariño, Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya's theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 158 (24), 2671-2686, 2007.

### [Sollic & al 07]

G. Le Sollic, F. Le Berr, G. Colin, G. Corde et Y. Chamailard. Engine control of a downsized spark ignited engine: From simulation to vehicle. *Oil and Gas Science and Technology*, 62 (4), pp. 555-572, 2007

### [Shenton & al 08]

A.T. Shenton. New Research Directions in Gasoline Powertrain Control. UK Automatic Control Conference. UKACC2008. UKACC, Manchester pp 1-6, 2008.

### [Suzuki & al 09]

K. Suzuki, T. Shen, J. Kako, S. Yoshida, Individual A/F Estimation and Control With the Fuel–Gas Ratio for Multicylinder IC Engines, *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, Issue:9, 4757 - 4768, nov. 2009

## T

### [Takagi & Sugeno 85]

T. Takagi and M. Sugeno, Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE transactions on System, Man and Cybernetics*, volume 15, issue 1, pp.116-132, 1985.

### [Turin & al 94]

R. Turin, and H.P. Geering. Model-based adaptive fuel control in an SI-engine. SAE Paper, No. 940374, 1994.

### [Taylor & al 94]

C.F. Taylor. The Internal-Combustion Engine in Theory and Practice, volume 1. The M.I.T. Press, 2 edition, 1994.

## Références

---

### [Teves & al 95]

D. Teves, G. Niesl, A. Blaas, S. Jacklin, "The role of active control in future rotorcraft", 21st European Rotorcraft Forum, St. Petersburg, Russia, III.10.1–17, 1995.

### [Takahashi & al 95]

S. Takahashi, and T. Sekozawa, Air–Fuel Ratio Control in Gasoline Engines Based on State Estimation and Prediction Using Dynamic Models, Proceedings-of the 1995 IEEE 21st International Conference on Industrial Electronics, Control, and Instrumentation, Orlando, FL, pp. 217–222, 1995.

### [Tanaka & al 98]

K. Tanaka, T. Ikeda, H.O. Wang, *Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs*, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.4(2), pp1-16, 1998.

### [Thornhill & al 00]

M. Thornhill, S. Thompson, and H. Sindano, A comparison of idle speed control schemes, Control Eng. Practice, vol. 8, no. 5, pp. 519–530, May 2000.

### [Tanaka & al 01]

K. Tanaka et H.O. Wang, *Fuzzy control systems design and analysis. A linear matrix inequality approach*. John Wiley and Sons, New York, , 2001.

### [Taniguchi & al 01]

T. Taniguchi, K. Tanaka, H.O. Wang, *Model construction, rule reduction and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.9(4), pp525-537, 2001.

### [Tuan & al 01]

H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, Y. Yamamoto, *Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design*. IEEE Trans. on Fuzzy Systems Vol.9, pp324-332, 2001.

### [Taniguchi & al 03]

T. Taniguchi, K. Tanaka, H.O. Wang. Model construction, rule reduction and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, " *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, volume 9, issue 4, pp. 525-537, 2001.

### [Teixeira & al 03]

M. Teixeira, R. Assunção, E. Avellar, *On relaxed LMI-based design for fuzzy regulators and fuzzy observers*. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.11(5), pp613-623, 2003.

### [Toyota]

Toyota, Toyota's Fuel-Cell Hybrid Vehicles (FCHV), <http://www.toyota.com/>.

### [TI1]

V. Pecron, A. Mocrette, I. Maggartou, C. Rochette, Allumage commandé pour moteur à prémélange : nécessité et principe, traité technique de l'ingénieur, BM 2 570.

### [TI2]

J. Trappy, Moteur à allumage commandé, traité Technique de l'ingénieur, BM 2 540.

### [TI3]

H. Mazet, Moteur à allumage commandé: Fonctionnalité de contrôle, traité technique de l'ingénieur, BM 2 971.

### [TI4]

V. Pecron, A. Mocrette, I. Maggartou, C. Rochette, Allumage commandé pour moteur à prémélange : technique, traité technique de l'ingénieur, BM 2 571.

### U

**[Ulrich & al 06]**

G.A.Ulrich; B. Schumann , Engines and exhaust after treatment systems for future automotive applications”, Solide state ionix, vol. 177, no26-32, pp. 2291-2296, 2006.

### V

**[Vecchia & 85]**

A. V. Vecchia, “Maximum likelihood estimation for periodic autoregressive moving average models”, Technometrics, Vol. 27, pp. 375–384, 1985.

**[Vaidyanathan & al 93]**

P. Vaidyanathan, Multirate Systems and Filter Banks, Prentice Hall, Englewoods Cliffs, NJ, 1993.

**[Van Dooren & al 94]**

P. Van Dooren, J. Sreedhar, “When is a periodic discrete-time system equivalent to a time invariant one?”, Linear Algebra and its Applications, Vol. 212/213, pp. 131–151, 1994.

**[Vigild & al 99]**

C. W. Vigild, K. P. H. Andersen, E. Hendricks, M. Struwe, Towards robust H-infinity control of an SI engine's air/fuel ratio. SAE Paper (1999-01-0854), 1999.

**[Van Nieuwstadt & al 00 ]**

M.J. Van Nieuwstadt, I.V. Kolmanovsky, P.E. Moraal, A. Stefanopoulou, M. Jankovic (2000). EGR-VGT control schemes : experimental comparison for a high-speed diesel engine IEEE Control Systems Magazine.

**[Vance & al 06]**

J. Vance, P. He, J. Sarangapani, Neural network-based output feedback controller for lean operation of spark ignition engines[C], *Proceedings of American Control Conference*. New York: IEEE Press, 1898 – 1905, 2006.

### W

**[Welbourne & al 59]**

D.B. Welbourne, D.K. Roberts and R.A. Fuller, Governing of compression ignition oil engines. Proc Inst Mech Engrs 173, pp. 575–591, 1959.

**[WIEBE 67]**

I. WIEBE. Heat Transfer in the Cylinders of Reciprocating Internal Combustion Engines. Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moscow, 1967.

**[Woschni 67]**

G. Woschni. A universally applicable equation for the instantaneous heat transfer coefficient in the internal combustion engine. SAE Technical Paper, (670931), 1967.

**[Wertz 78]**

J. Wertz, Spacecraft Attitude Determination and Control, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1978.

## Références

---

**[Wereley & al 90]**

N. M. Wereley, S. R. Hall, "Frequency response of linear time periodic systems", 29th IEEE Conference on Decision and Control, Honolulu, USA, pp. 3650–3655, 1990.

**[Wang & al 96]**

H.O. Wang, K. Tanaka, M. Griffin, *An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and Design Issues*, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.4(1), pp14-23, 1996.

**[Wang & al 97]**

Wang, Y. Y.; Krishnaswami, V.; Rizzoni, G. Event-based estimation of indicated torque for IC engines using sliding-mode observers *Control Engineering Practice*. Vol. 5, no. 8. (1997).

**[Won & al 98]**

M. Won, S. B. Choi, J. K. Hedrick, Air-to-fuel ratio control of spark ignition engines using gaussian network sliding control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 6 (5), 678-687, Sep. 1998.

**[www.iea.org]**

Agence International d'énergie [www.iea.org](http://www.iea.org).

**[www.wbcsd.org]**

Sustainable Mobility Project, Projet de mobilité durable.

**[www.ipcc.ch]**

Intergovernmental panel on climate change.

## Y

**[Yuen & al 84]**

W.W. Yuen, and H. Servati, A mathematical engine model including the effect of engine emissions. SAE Technical Paper 840036, 1984.

**[Yaojung & al 96]**

S. Yaojung, J.J. Moskwa, Model-based cylinder-by-cylinder air-fuel ratio control for SI engines using sliding observers. *Control Applications, Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on*, pp 347 – 354, Dearborn, MI, USA, 1996.

**[Yurkovic & al 97]**

S. Yurkovich and M. Simpson, Crank-angle domain modeling and control for idle speed. *SAE Journal of Engines*, 106(970027), pp. 34-41, 1997.

**[Yoon & al 00]**

P. Yoon, P. Park, M. Sunwoo, I. Ohm, and K. J. Yoon, Closed-loop Control of Spark Advance and Air-Fuel Ration in SI Engines Using Cylinder Pressure, SAE 2000-01-0933, 2000.

**[Yoneyama & al 00]**

J. Yoneyama, M. Nishikawa, H. Katayama, A. Ichikawa, Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 111, pages 253-266, 2000.

**[Yildiz & al 08]**

Y. Yildiz, A. Annaswamy, D. Yanakiev, I. Kolmanovsky, Automotive Powertrain Control Problems Involving Time Delay: An Adaptive Control Approach, ASME Dynamic Systems and Control Conference, October 2008.

## Références

---

**[Yildiz & al 10]**

Y. Yildiz, A. Annaswamy, D. Yanakiev, I. Kolmanovsky, Spark Ignition Engine Fuel-to-Air Ratio Control: An Adaptive Control Approach, *Control Engineering Practice*, vol. 18, no. 12, p1369-1378, Dec. 2010.

## Z

**[Zhang & al 96]**

C. Zhang, J. Zhang, K. Furuta, "Performance analysis of periodically time-varying controllers", *13th IFAC World Congress, San Francisco, USA, pp. 207-212, 1996.*

**[Zweiri & al 01]**

Y. H. Zweiri, J.F. Whidborne and L D. Seneviratne, Detailed analytical model of a single-cylinder Diesel engine in the crank-angle domain, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D, Journal of automobile Engineering*, 215, no. D11, p1197-1216, 2001.

**[Zhu & al 07]**

G.G. Zhu, I.B.Haskara, and J. Winkelmann, Closed loop ignition timing control for SI engines using ionization current feedback. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*: 15(3), p416-427, 2007.

## Références personnelles

### Revue internationale avec comité de lecture (1)

Guerra T-M., Kerkeni H., Lauber J., Vermeiren L. (2009). "An efficient Lyapunov function for discrete TS models: observer design". IEEE Transactions on Fuzzy Systems, (Revue en relecture)

### Conférence internationale avec actes et comité de lecture (9)

Kerkeni H., Guerra T-M. Lauber J. (2011). Individual Exhaust gas mass flow estimation using a periodic observer Design. the 18th IFAC World Congress, Milan, Italy.

Kerkeni H., Guerra T-M. Lauber J. (2010). Estimation of Individual In-cylinder air mass flow via Periodic Observer in Takagi-Sugeno form. EPEEA, Ghardaia, Algeria.

Kerkeni H., Guerra T-M. Lauber J. (2010). Controller and observer designs for discrete TS models using an efficient Lyapunov function. FUZZ-IEEE, Espagne.

Kerkeni H., Lauber J. Guerra T-M. (2010). Estimation of Individual In-cylinder air mass flow via Periodic Observer in Takagi-Sugeno form. VPP IEEE, LILLE.

Kerkeni H., Lauber J., Guerra T-M. (2009). Robust Takagi-Sugeno observer with immeasurable premises variables: a Type 2 approach. ICONS, Turquie

Kerkeni H., Lauber J., Guerra T-M. (2009). Some results about stabilization of periodic Takagi-Sugeno models. FUZZ-IEEE, Jeju, Korea, août.

Kerkeni H., Lauber J., LENDEK Z., Guerra T-M. (2008). Estimation de la richesse par cylindre d'un moteur à combustion interne. IEEE CIFA, Bucarest, Roumanie, septembre.

Kerkeni H., Lauber J., LENDEK Z., Guerra T-M. (2008). Individual cylinder air/fuel ratio observer on IC engine using Takagi-Sugeno's fuzzy model. IEEE VPP, Harbin, Chine, septembre.

Kerkeni H., Lauber J., Guerra T-M., KRUSZEWSKI A. (2008). Periodic observer design for non-linear model with periodic parameters via Takagi-Sugeno form. IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, MED, Ajaccio (France), juin.

### Conférence nationale avec actes et comité de lecture (3)

Kerkeni H., Lauber J., Guerra T-M., Kruszewski A. (2008). Conditions relâchées de stabilité pour des modèles flous périodiques sous la forme TS. LFA, Lens, France, septembre.

Kerkeni H., Lauber J., Guerra T-M., (2010). Estimation du débit d'air entrant dans chaque cylindre via un observateur périodique discret sous la forme Takagi-Sugeno. LFA, Lannion, France, Novembre.

Kerkeni H., Lauber J., Guerra T. (2010). Estimation du débit d'air entrant dans chaque cylindre via un observateur périodique discret sous la forme Takagi-Sugeno. Groupe de Travail Automatique et Automobile du GDR MACS, Mulhouse, mai.



## ANNEXES

|  |            |
|--|------------|
| <b>ANNEXE A. Généralités sur les moteurs Thermiques.....</b>             | <b>196</b> |
| <b>ANNEXE B. Généralités sus les systèmes périodiques linéaires.....</b> | <b>202</b> |
| <b>ANNEXE C. Moyens Expérimentaux .....</b>                              | <b>219</b> |
| <b>ANNEXE D. Modèles utilisés .....</b>                                  | <b>222</b> |

## ANNEXE A. Généralités sur les moteurs Thermiques

## A.1. Cycle thermodynamique

Sur un moteur à allumage commandé, les transformations subies par le fluide au cours des quatre temps sont représentés généralement, dans un diagramme thermodynamique construit dans le plan pression volume, connu sur le nom de « diagramme de Clapeyron ». Le cycle théorique ou idéal se distingue du cycle réel [Serruys 88].

## a) Cycle Théorique :

Beau de Rochas a formulé les conditions idéales de fonctionnement d'un moteur à allumage commandé. Le cycle idéal de « Beau de Rochas » (figure 2.4) est constitué de deux évolutions isentropiques<sup>14</sup> ( $1 \rightarrow 2$  et  $3 \rightarrow 4$ ) et de deux évolutions isochores<sup>15</sup> ( $2 \rightarrow 3$  et  $4 \rightarrow 1$ ) que subit un mélange d'air et d'essence. L'admission et l'échappement quant à eux sont modélisés par deux évolutions isobares<sup>16</sup> ( $0 \rightarrow 1$  et  $1 \rightarrow 0$ ). Le système est fermé entre un volume minimale  $V_m$  (au PMH) et un volume maximal  $V_M$  (au PMB).

Cette modélisation du cycle parfait se base sur des hypothèses simplificatrices telles que :

- Le fluide est assimilé à un gaz parfait. C'est à dire que les paramètres thermodynamiques comme les chaleurs massiques à pression constante  $C_p$  et à volume constant  $C_v$  ont des valeurs fixes ne dépendant ni de la température, ni de la pression.
- Les transformations du cycle dynamique sont réversibles<sup>17</sup>.
- Le fluide de travail ne subit pas de pertes de charge.

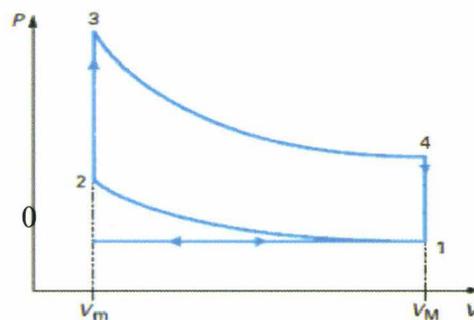


Figure 8.1 : Cycle Beau de Rochas idéal: Moteur Essence

<sup>14</sup> Processus isentropique au cours de quel l'entropie du système reste constante.

<sup>15</sup> La transformation est dite isochore si le volume du système ne change pas au cours de cette formation

<sup>16</sup> La transformation est dite isobare si la pression du système ne change pas au cours de cette formation.

<sup>17</sup> Une transformation réversible est un **modèle idéal** pour lequel les échanges de grandeurs extensives sont quasi statiques.

Cependant, ces hypothèses ne sont jamais respectées en fonctionnement réel.

### b) Cycle Réel :

La principale différence vient du fait que les transformations subies par le fluide de travail ne sont jamais réversibles. D'autres facteurs peuvent aggraver l'écart entre cycles théorique et réel. Premièrement, le moteur est réglé de telle sorte que la synchronisation des différentes phases ne correspond pas exactement au cycle à quatre temps décrit plus haut. Compte tenu de l'inertie des gaz, l'ouverture et la fermeture des soupapes peuvent être avancées ou retardées afin d'améliorer le remplissage et la vidange du cylindre. D'autre part, la combustion dans le cylindre ne se fait pas de manière instantanée, ainsi que les échanges de chaleur avec les parois de la chambre de combustion qui ne peuvent être négligés.

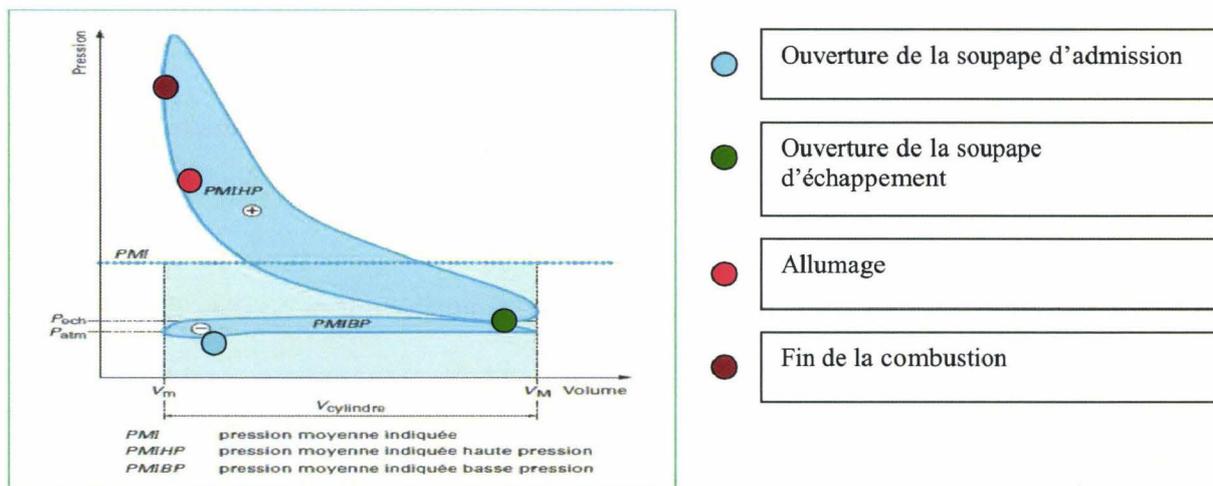


Figure 8.2 : Cycle beau de Rochas Réel: Moteur Essence

Le travail par cycle du moteur (où travail indiqué) est représenté par la surface fermée de ce diagramme. Il est donné par la relation suivante:

$$W_i = - \int_{\theta=0^\circ}^{720^\circ} p dV$$

Par convention, le travail est considéré comme positif lorsque le système cède de l'énergie et comme négatif quand il s'agit de pertes. Dans l'équation précédente, le travail est négatif car le moteur produit du travail. Pour un moteur à 4 temps, deux boucles sont distinguées dans le plan PV : la surface du haut sur la figure 2.5, correspond à la boucle haute pression, elle représente le travail fourni par le moteur. La surface du bas est la boucle basse pression, elle correspond au travail nécessaire pour introduire le mélange frais dans le cylindre. L'étude de ce diagramme permet le calcul des pressions et des températures atteintes lors d'un cycle. Il est utilisé par les motoristes surtout pour calculer les indicateurs de performance du moteur en comparant le cycle réel au cycle théorique. Par exemple, afin de comparer les performances

de moteurs de cylindrées différentes, les motoristes utilisent des grandeurs relatives appelées pressions moyennes. Elles sont calculés, en divisant le travail par le volume déplacé  $V_d$ . Une pression moyenne n'a bien évidemment pas de réalité physique puisqu'elle correspond théoriquement à la pression constante qu'il faudrait appliquer à la surface du piston tout au long d'une course motrice afin d'obtenir le même travail que celui fourni par le moteur.

La différence entre la  $PMI$  et la  $PME$  est conséquente aux pertes par frottement, on introduit la pression moyenne par frottement :  $PMF = PMI - PME$ .

### A.2. Paramètres caractéristiques de la performance du moteur

Quelques grandeurs essentielles à l'évaluation de performances d'un moteur à combustion interne sont définies dans cette section.

#### **Cylindrée unitaire**

Elle correspond au volume balayé entre le PMH et le PMB, si  $d$  est le diamètre du cylindre (ou alésage), et  $C$  représente la course du piston (figure 2.6), la cylindrée  $V$  s'écrit :

$$V = C \cdot \pi \cdot (d^2/4)$$

Le cylindrée totale s'obtient en multipliant la cylindrée unitaire par le nombre de cylindres :

$$n_{cyl} \cdot V_d = n_{cyl} \cdot V$$

#### **Rapport de compression**

Au point mort haut, le volume résiduel est appelé volume mort, il s'apparente à la portion du volume limité par la culasse, le haut de chemise et la partie supérieure du piston (figure 2.6). Du volume mort  $v$  et de la cylindrée unitaire  $V$ , se déduit le rapport volumétrique de compression (où taux de compression), qui s'écrit :  $\tau = (V + v)/v$ .

Sa valeur est déterminante pour les performances du moteur, les valeurs les plus usuelles varient actuellement entre 9 et 12 pour les MAC.

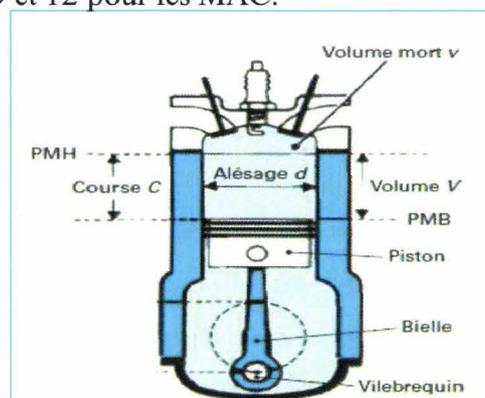


Figure 8.3 : Cylindre Moteur



### **Rendement**

Comme toutes les machines thermiques, le MAC ne restitue pas intégralement en énergie mécanique l'énergie contenue dans le carburant. De plus, une partie de l'énergie chimique disponible est perdue par frottement des ensembles mécaniques alors qu'une autre partie de cette énergie est perdue par dissipation thermique (liquide de refroidissement, huile, gaz d'échappement). Différents rendements partiels existent pour décrire les différentes pertes d'énergie à savoir :

- **Le rendement global du moteur** : aussi appelé rendement effectif, il inclut toutes les pertes, qu'elles soient d'origine mécanique ou thermique. Il est égal au rapport du travail mécanique effectif  $W_e$ , sur la quantité de chaleur  $Q_{comb}$ , susceptible d'être générée par la combustion complète du carburant introduit dans le cylindre :

$$\eta_e = \frac{|W_e|}{Q_{comb}}$$

Si  $m_f$  est la masse de combustible injectée pour un cycle et  $PCI$  le pouvoir calorifique du combustible, alors la quantité de chaleur  $Q_{comb}$  est donnée par la relation :

$$Q_{comb} = m_f \cdot PCI$$

- **Le rendement mécanique** : c'est le rapport entre le travail disponible sur le vilebrequin  $W_e$  et le travail indiqué des gaz sur le piston  $W_i$  :

$$\eta_{mec} = \frac{W_e}{W_i}$$

- **Le rendement indiqué** : afin de comparer les performances de moteurs différents, il est utile d'isoler les pertes d'origines mécaniques, ce qui mène à définir le rendement indiqué  $\eta_i$ , qui renseigne uniquement sur la qualité de conversion du carburant. Son expression est donnée par le rapport du travail indiqué et de l'énergie chimique introduite dans le moteur  $Q_{comb}$  :

$$\eta_i = \frac{W_i}{Q_{comb}}$$

- **Le rendement théorique** : rendement du cycle thermodynamique idéal. Il caractérise la différence entre l'énergie introduite,  $Q_{comb}$  et le travail du cycle thermodynamique de référence  $W_{ref}$ .

$$\eta_i = \frac{W_i}{Q_{comb}}$$

- **Le rendement thermodynamique** : Nous avons vu précédemment que la transformation thermodynamique subie par le fluide de travail dans le moteur ne suit pas exactement le cycle théorique. La surface représentative de l'énergie du cycle réel est inférieure à celle du cycle idéal. Le rendement thermodynamique, aussi appelé rendement de cycle ou rendement de diagramme,  $\eta_{thermo}$  traduit l'écart entre le cycle réel et son cycle de référence. Il est égal au rapport du travail indiqué,  $W_i$ , sur le travail théorique :

$$\eta_{thermo} = \frac{W_i}{W_{réf}}$$

**La puissance** : La puissance d'un moteur se définit par l'énergie (en joules) que le moteur fournit par unité de temps (secondes). Deux puissances sont définies, la puissance effective qui correspond à la puissance recueillie sur l'arbre moteur et la puissance indiquée fournie à l'intérieur du cylindre.

$$P_e = \frac{W_e \cdot N}{2} \quad \text{et} \quad P_i = \frac{W_i \cdot N}{2}$$

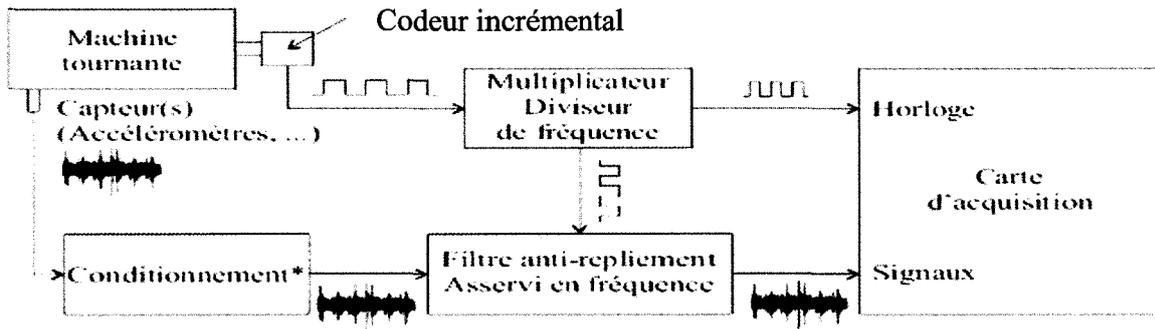
**La consommation spécifique** : La consommation spécifique *CSP* renseigne sur la capacité d'un moteur à convertir l'énergie du carburant en travail. Elle est égale à la masse de combustible consommée,  $\dot{m}_f$  par unité de puissance :  $CSP = \frac{\dot{m}_f}{P}$ .

### A.3. Procédés d'acquisition en fonction de l'angle vilebrequin

Dans le cadre de ce travail, le domaine angulaire a été adopté, il est important alors de rappeler les procédés d'acquisition des signaux moteur en fonction de l'angle vilebrequin : nous distinguerons entre les méthodes d'échantillonnage directes et entre les méthodes de re-échantillonnage en fonction de l'angle à partir des signaux à variable générique temporelle, appelée aussi re-échantillonnage angulaire a posteriori.

#### a) Méthode d'échantillonnage directe :

Le principe d'une chaîne d'acquisition angulaire est présenté sur la figure 8.4. Un codeur angulaire fixé à un arbre de la machine tournante permet d'obtenir une information de position relative. Le codeur délivre un signal carré dont la fréquence est un multiple de la fréquence de rotation. Un top tour (ou top PMH) permet d'obtenir une position de référence utile pour la localisation. Comme dans toute chaîne d'acquisition classique, les signaux issus



\* Sauf le filtre anti-repliement

Figure 8.4: Chaîne d'Acquisition angulaire direct [Bonnardot 04]

des capteurs sont conditionnés, amplifiés, puis préalablement filtrés. La vitesse de la machine tournante peut varier au cours du temps, aussi la fréquence d'échantillonnage ainsi que la fréquence de Shannon/Nyquist varient également. Il est donc nécessaire de pouvoir changer la fréquence du filtre anti-repliement au cours de l'acquisition pour suivre ces variations de fréquence. Pour cela, il est possible d'utiliser un filtre anti-repliement à capacités commutées dont la fréquence de coupure dépend d'une fréquence externe.

Cette méthode donne de très bons résultats mais sa mise en œuvre est peu courante, car elle nécessite un système d'acquisition spécifique, très coûteux, et présente plusieurs contraintes du point de vue expérimental. Une alternative à ce problème, est de faire un ré-échantillonnage angulaire a posteriori.

**b) Ré-échantillonnage angulaire a posteriori ou « order-tracking » :**

Cette méthode permet d'estimer le signal échantillonné angulairement à partir d'un signal échantillonné temporellement avec ou sans l'aide d'un capteur de. Il n'est plus nécessaire d'investir dans une instrumentation coûteuse, et il est possible de travailler à la fois dans le domaine angulaire et dans le domaine temporel. Le principe de cette méthode est présenté sur la figure 8.5. Pour des informations complémentaires, voir. [Bonnardot 04]

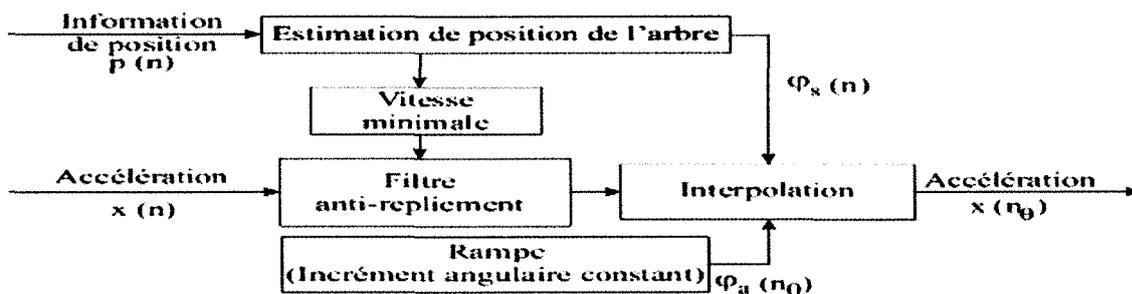


Figure 8.5 : Chaîne d'Acquisition angulaire à posteriori [Bonnardot 04]

## ANNEXE B. Généralités sus les systèmes périodiques linéaires

### B.1. Introduction

Dans le but de résoudre les problématiques liées au contrôle et à l'estimation cylindre à cylindre d'un moteur à allumage commandé, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'étude des modèles périodiques. Plusieurs applications sont apparues prenant en compte des modèles périodiques dans des domaines tels que l'aérospatiale et l'aéronautique, la télécommunication voire dans la finance et l'économie [Bittanti & Colaneri 09]. A titre d'exemple dans le domaine aérospatial le contrôle actif pour l'atténuation des vibrations des hélicoptères [Ham 87, Jacklin & al 94, Teves & al 95] en se basant sur un contrôle individuel des hélices a été réalisé [Bittanti & al 94, Bittanti & al 96 a, Bittanti & al 96 b, Arcara & al 00]. Une autre application est la régulation de la position relative des satellites autonomes en orbite elliptique autour de la terre [Wertz & al 78, Arduini & al 97, Farges 07]. En plus des aspects intéressants offerts par la structure des modèles périodiques, l'application des lois de commande périodiques sur des systèmes linéaires et/ou non linéaires qui ne sont pas périodiques a permis de résoudre des problèmes réputés difficiles [Brockett 83, Bacciotti 01, Colaneri & al 06], et dans certains cas, d'augmenter les performances des systèmes contrôlés [Bailey 72, Fjeld 71].

Cette section présente un état de l'art sur la modélisation, l'analyse et la synthèse des modèles linéaires périodiques. Dans la première partie, nous définissons les classes particulières de ce type de modèles ainsi que les différentes méthodes pour les obtenir. La deuxième partie est consacrée à l'étude de stabilité, de stabilisation et à l'introduction de critères de performances pour ce type de modèles.

### B.2. Modèles périodiques

#### a) Définition :

Les systèmes linéaires périodiques constituent une classe particulière des systèmes linéaires à temps variant (LTV) présentant la propriété suivante :

#### **Propriété de Périodicité**

Soient  $x(t)$  l'état et  $y(t)$  la sortie d'un système en réponse à une entrée  $u(t)$ . Ce système est dit périodique si :

$\forall u(t), \exists T \geq 0$  tel que la même entrée décalée d'un temps  $T$  :

$$u_d(t) = u(t+T) \quad (8.1)$$

Produit les même sorties et états décalées de  $T$  :

$$y_d(t) = y(t+T) \text{ et } x_d(t) = x(t+T) \quad (8.2)$$

$T$  est alors appelée période du système et le système résultant est dit T-Périodique.

**Remarque :** un système LTI peut être considéré comme un cas particulier d'un système périodique dont la période  $T$  tend vers 0 .

**b) Représentation d'état discrète :**

Différentes type de modèles mathématiques sont capables de prendre en compte le comportement des systèmes linéaires périodiques. Dans [Van Dooren & al 94], la matrice de réponse impulsionnelle a été utilisée comme représentant du comportement d'un système périodique. L'étude du comportement fréquentiel de ce type de modèle basé sur l'utilisation de la matrice de transfert harmonique se retrouve dans [Colaneri & al 00].

Dans le cadre de ce mémoire, la représentation d'état à temps discret est choisie pour décrire un système linéaire T-périodique de la manière suivante [Kalman 60]:

$$\begin{cases} x(t+1) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t) \\ y(t) = C(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t) \end{cases} \quad (8.3)$$

Où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du modèle,  $A(t), B(t), C(t)$  et  $D(t)$  sont des matrices de taille appropriées, qui dépendent périodiquement du temps sous la forme :

$$A(t+T) = A(t), B(t+T) = B(t), C(t+T) = C(t) \text{ et } D(t+T) = D(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (8.4)$$

**Remarque :** Un nombre fini de matrices suffit donc à décrire le comportement dynamique d'un système discret périodique.

La représentation d'état du système périodique ainsi définie en (8.3), la matrice de transition d'état de l'instant  $i$  à l'instant  $j$  notée  $\Phi_A(j, i)$  avec  $j \geq i$ , est définie par :

$$\Phi_A(j, i) = \begin{cases} A(j-1) \cdots A(i+1) A(i), & j > i \\ \mathbf{I} & , j = i \end{cases} \quad (8.5)$$

La matrice de transition d'état définit après une période  $T$  et commençant à l'instant  $t$ , connue sous le nom de « matrice monodromique » s'écrit alors :

$$\Phi_A(t+T, t) = A(t+T-1) \cdots A(t+2) \cdot A(t+1) \cdot A(t) \quad (8.6)$$

La solution de l'équation d'état du modèle (8.3) à l'instant  $t$ , ayant comme condition initiale l'état  $x(\tau)$  est donnée par :

$$x(t) = \Phi_A(t, \tau) x(\tau) + \sum_{j=\tau}^{t-1} \Phi_A(t, j+1) B(j) u(j) \quad (8.7)$$

Plusieurs méthodes permettent d'obtenir des modèles linéaires périodiques à partir d'une application (satellites, hélicoptères, machines tournantes ...) et font l'objet des sections suivantes.

### c) Périodicité introduite par linéarisation :

Pour analyser la trajectoire d'un système donné autour d'un mouvement périodique, la technique la plus utilisée se base sur une linéarisation par rapport à ce mouvement. Par exemple, considérons le système non linéaire (8.8), avec  $v(t)$  le vecteur des entrées,  $\xi(t)$  l'état du système et  $\eta(t)$  le vecteur des sorties :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = f(\xi(t), v(t)) \\ \eta(t) = g(\xi(t), v(t)) \end{cases} \quad (8.8)$$

Considérons  $\tilde{v}(t)$ ,  $\tilde{\xi}(t)$  et  $\tilde{\eta}(t)$  le régime périodique de période  $T$ . Cela implique que,  $\tilde{\xi}(t)$  est une solution périodique de période  $T$  avec l'entrée périodique  $\tilde{v}(t)$  et la sortie  $\tilde{\eta}(t)$  correspondante. Ensuite, le résultat de la linéarisation du modèle (8.8) est un système linéaire continu avec:  $u(t) = v(t) - \tilde{v}(t)$ ,  $x(t) = \xi(t) - \tilde{\xi}(t)$  et  $y(t) = \eta(t) - \tilde{\eta}(t)$  et les matrices :

$$A(t) = \left. \frac{\delta f(\xi, v)}{\delta \xi} \right|_{\substack{\xi=\tilde{\xi} \\ v=\tilde{v}}}, \quad B(t) = \left. \frac{\delta f(\xi, v)}{\delta v} \right|_{\substack{\xi=\tilde{\xi} \\ v=\tilde{v}}}, \quad C(t) = \left. \frac{\delta g(\xi, v)}{\delta \xi} \right|_{\substack{\xi=\tilde{\xi} \\ v=\tilde{v}}}, \quad D(t) = \left. \frac{\delta g(\xi, v)}{\delta v} \right|_{\substack{\xi=\tilde{\xi} \\ v=\tilde{v}}}$$

Ces matrices sont périodiques de période  $T$ . La même méthode est appliquée quand il s'agit d'un modèle à temps discret.

**d) Périodicité introduite par multi échantillonnage :**

Une structure d'échantillonnage utilisant des périodes d'échantillonnages différentes apparaît naturellement dans les systèmes commandés numériquement, à chaque fois qu'il est nécessaire d'échantillonner les sorties et/ou de mettre à jour les entrées à des instants différents [Feuer & al 96]. Afin de comprendre ce mécanisme de multi-échantillonnage de manière simple, et voir comment une telle structure peut aboutir à un modèle périodique, considérons un système à temps invariant comportant deux entrées et deux sorties.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Cx(t) \end{cases} \quad (8.9)$$

Avec  $i \in \{1,2\}$ , les deux signaux de sorties  $y_i(t)$  sont échantillonnés avec deux périodes d'échantillonnage  $\tau_{y_i}(t)$ . Alors que les deux entrées  $u_i(t)$  sont mises à jour à deux instants différents  $\tau_{u_i}(t)$  et restent constantes entre les deux. Les instants d'échantillonnage et de mise à jour sont donnés respectivement par  $t_{y_i}(k)$  et  $t_{u_i}(k)$ ,  $i \in \{1,2\}$  avec  $k \in \mathbb{R}$  un réel donné. Ces instants sont des multiples de la période d'échantillonnage de base  $\Delta$ . Pour des raisons de simplicité, nous considérons que :

$$t_{y_i}(k) = k \cdot \tau_{y_i}, \quad t_{u_i}(k) = k \cdot \tau_{u_i} \quad (8.10)$$

Le comportement global du système obtenu est régi par les variables de sorties discrètes  $\tilde{y}_i(t)$  et les variables des entrées discrètes  $\tilde{u}_i(t)$ ,  $i \in \{1,2\}$  définies comme suit :

$$\tilde{y}_i(k) = y_i(k \cdot \tau_{y_i}), \quad i \in \{1,2\} \quad (8.11)$$

$$\tilde{u}_j(k) = u(t), \quad t \in [k \cdot \tau_{u_j}, k \cdot \tau_{u_j} + \tau_{u_j}], \quad j \in \{1,2\} \quad (8.12)$$

Pour la modélisation, on définit les signaux dits « rapides » :

$$\hat{y}(k) = \hat{y}(k \cdot \Delta), \quad \hat{u}(k) = \hat{u}(k \cdot \Delta) \quad (8.13)$$

Contrairement à (8.13),  $\tilde{y}(k)$  et  $\tilde{u}(k)$  peuvent être considérés comme des signaux « lents ».

La sélection de passage du mode d'échantillonnage des sorties « rapides » à celui des sorties « lentes » est décrite par l'équation linéaire suivante :

$$\tilde{y}(k) = N(k) \cdot \hat{y}(k) \quad (8.14)$$

$$\text{avec : } N(k) = \begin{bmatrix} n_1(k) & 0 \\ 0 & n_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\text{et : } n_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est un multiple de } \frac{\tau_{yi}}{\Delta} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que la matrice  $N(\cdot)$  est une matrice périodique avec une période donnée par le réel  $T_y$ , définie par le plus petit multiple commun ente  $\frac{\tau_{y1}}{\Delta}$  et  $\frac{\tau_{y2}}{\Delta}$ .

De même pour les entrées, nous introduisons la matrice de sélection :  $S(k) = \begin{bmatrix} s_1(k) & 0 \\ 0 & s_2(k) \end{bmatrix}$

$$\text{avec } s_j(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est un multiple de } \frac{\tau_{uj}}{\Delta} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, le signal de commande analogique  $u(\cdot)$  est donné par :

$$u(t) = \hat{u}(k), \quad t \in [k \cdot \Delta, (k+1) \cdot \Delta] \quad (8.15)$$

où la mise à jour du signal rapide  $\hat{u}(k)$  est obtenue à partir du signal lent  $\tilde{u}(k)$  selon le mécanisme de la sélection suivant :

$$\begin{cases} v(k+1) = S(k)v(k) + (I - S(k))\tilde{u}(k) \\ \hat{u}(k) = S(k)v(k) + (I - S(k))\tilde{u}(k) \end{cases} \quad (8.16)$$

La matrice  $S(k)$  est une matrice périodique de période  $T_u$  donnée par le plus petit multiple commun entre  $\frac{\tau_{u1}}{\Delta}$  et  $\frac{\tau_{u2}}{\Delta}$ .

Le système de données multi échantillonnées global est un système périodique à temps discret où le vecteur d'état est défini comme suit :

$$\hat{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k \cdot \Delta) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

Et la représentation d'état associée :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}(k)\hat{x}(k) + \hat{B}(k)\hat{u}(k) \\ \hat{y}(k) = \hat{C}(k)\hat{x}(k) + \hat{D}(k)\hat{u}(k) \end{cases} \quad (8.18)$$

Avec dans le cas linéaire, les matrices du modèle (8.18) donnés par :

$$\hat{A}(k) = \begin{bmatrix} e^{A\Delta} & \int_0^\tau e^{A\xi} d\xi BS(k) \\ 0 & S(k) \end{bmatrix}, \quad \hat{B}(k) = \begin{bmatrix} \int_0^\tau e^{A\xi} d\xi B(I-S(k)) \\ I-S(k) \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

$$\hat{C}(k) = N(k) \cdot C, \quad \hat{D}(k) = N(k) \cdot D$$

Le système résultant obtenu est périodique de période  $T$ , donnée par le plus petit multiple commun entre  $T_u$  et  $T_y$ .

Cette méthode a été appliquée avec succès dans le domaine du traitement du signal, de la communication, du traitement de la parole et de la compression d'images [Vaidynahtan & al 93, Colaneri & al 95, Chai & al 05].

Outre la méthode décrite précédemment, le modèle (8.3) peut s'obtenir aussi en passant par une étape d'identification utilisant la représentation d'entrées-sorties du modèle périodique. La méthode la plus utilisée est basée sur la considération d'un modèle périodique autorégressif à moyenne ajustée (Periodic Auto-Regressive and Moving Average model : PARMA) [Vecchia & al 85], correspondant à :

$$y(t) = a_1(t)y(t-1) + a_2(t)y(t-2) + \dots + a_r(t)y(t-r) + b_0(t)u(t) + b_1(t)u(t-1) + \dots + b_s(t)u(t-s) \quad (8.20)$$

où  $a_i(t)$  et  $b_i(t)$  sont soit des vecteurs, soit des matrices périodiques de dimensions appropriées,  $r$  et  $s$  sont des réels positifs. Il est possible de généraliser cette description en considérant ces deux réels périodiques dans le temps.

Le modèle périodique ainsi obtenu, son analyse et sa synthèse pour assurer un niveau de performances souhaitées en boucle fermée reste à réaliser. Afin de pouvoir utiliser les outils déjà existants dans le cadre des modèles linéaires à temps invariants (LTI), plusieurs travaux ont porté sur la reformulation du modèle variant dans le temps (8.3) en un modèle à temps invariant équivalent [Bittanti & al 00].

### B.3. Représentation à temps invariant des systèmes périodiques

Dans le contexte discret, un nombre fini de matrices suffit à décrire le comportement dynamique d'un système périodique. Plusieurs reformulations à temps invariant équivalentes au modèle périodique défini en (8.3) peuvent alors être obtenues. Les plus utilisées dans la littérature sont les représentations dites « liftée » et « cyclique » [Bittanti & al 00].

**a) Représentation liftée :**

Cette représentation due à [Meyer et Burrus 1975] fait apparaître l'évolution de l'état non plus entre deux instants discrets mais sur une période complète. Les vecteurs d'entrée et de sortie sont alors constitués de l'ensemble des valeurs prises par l'entrée et la sortie sur l'ensemble de la période. Soit un signal analogique  $v(\cdot)$ , son signal lifté correspondant est obtenu en partageant son axe de temps par des intervalles de longueur  $T$ . Définissons les segments  $v_k$ ,  $k$  un réel, comme suit :

$$v_k = \{u(t), \quad t \in [kT, (k+1)T]\} \quad (8.21)$$

La représentation d'état liftée de (8.3) s'écrit :

$$\left(\sum_k^L\right) \begin{cases} x_k^L(h+1) = A_k^L x_k^L(h) + B_k^L u_k^L(h) \\ y_k^L(h) = C_k^L x_k^L(h) + D_k^L u_k^L(h) \end{cases} \quad (8.22)$$

avec :

$$x_k^L(h) = x(k+hT)$$

$$u_k^L(h) = \begin{bmatrix} u(k+0+hT) \\ u(k+1+hT) \\ \vdots \\ u(k+T-1+hT) \end{bmatrix}, \quad y_k^L(h) = \begin{bmatrix} y(k+0+hT) \\ y(k+1+hT) \\ \vdots \\ y(k+T-1+hT) \end{bmatrix}$$

$$A_k^L = \Phi_A(k+T, k) = A(k+T-1) \cdots A(k+1) A(k)$$

$$B_k^L = \begin{bmatrix} \Phi_A(k+T, k+1) B(k) & \Phi_A(k+T, k+2) B(k+1) & \cdots & B(k+T-1) \end{bmatrix}$$

$$C_k^L = \begin{bmatrix} C(k)^T & (C(k+1) \cdot \Phi_A(k+1, k))^T & \cdots & (C(k+T-1) \cdot \Phi_A(k+T-1, k))^T \end{bmatrix}^T$$

$$D_k^L = \begin{bmatrix} D(k) & 0 & \cdots & 0 \\ C(k+1)B(k) & D(k+1) & & \vdots \\ C(k+2)A(k+1)B(k) & C(k+2)B(k+1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C(k+T-1)\Phi_A(k+T-1, k+1)B(k) & C(k+T-1)\Phi_A(k+T-1, k+2)B(k+1) & \cdots & D(k+T-1) \end{bmatrix}$$

Le système (8.22) est équivalent à (8.3) dans le sens où le vecteur d'état de la représentation liftée est une version échantillonnée du système périodique de base. L'instant  $k$  peut être considéré comme l'instant initial de  $T$ -échantillons du vecteur d'état du système(8.3).

**b) Représentation cyclique :**

Un inconvénient majeur de la représentation liftée (8.22) est que le vecteur d'état n'est mis à jour qu'à chaque période, la valeur de l'état à chaque instant n'est pas directement accessible. Pour remédier à ce problème [Park & Verriest 89] et [Flamm 91] ont présenté une autre reformulation à temps invariant, la représentation cyclique. Cette dernière, fait apparaître des vecteurs d'état, de commande et de sortie cycliques. Ces vecteurs cycliques, constitués de  $T$  sous-vecteurs, sont définis de telle sorte qu'à chaque instant un seul sous vecteur soit non nul et que ce sous vecteur non nul se déplace de façon cyclique dans la colonne au cours d'une période.

La reformulation cyclique est définie comme suit :

$$(\Sigma^c) \begin{cases} x^c(k+1) = A^c x^c(k) + B^c u^c(k) \\ y^c(k) = C^c x^c(k) + D^c u^c(k) \end{cases} \quad (8.23)$$

Avec :

$$x^c(k) = \begin{bmatrix} x(k-k_0+1) \\ \vdots \\ x(k) \\ x(k-k_0+1) \\ \vdots \\ x(k-k_0) \end{bmatrix}, \quad u^c(k) = \begin{bmatrix} u(k-k_0) \\ \vdots \\ u(k) \\ u(k-k_0+1) \\ \vdots \\ u(k-k_0-1) \end{bmatrix}, \quad y^c(k) = y \begin{bmatrix} y(k-k_0) \\ \vdots \\ y(k) \\ y(k-k_0+1) \\ \vdots \\ u(k-k_0-1) \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

où  $k_0 = \text{mod}(k, T)$ .

$$A^c = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & A(k+T-1) \\ A(k) & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A(k+T-2) & 0 \end{bmatrix}, \quad B^c = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & B(k+T-1) \\ B(k) & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & B(k+T-2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^c = \begin{bmatrix} C(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C(k+1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C(k+T-1) \end{bmatrix}, \quad D^c = \begin{bmatrix} D(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(k+1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D(k+T-1) \end{bmatrix}$$

Une seule représentation linéaire à temps invariant est donc suffisante qui ne fait pas intervenir de produit de matrices. Cependant, la taille du vecteur d'état se retrouve augmentée, comparé à celui de la représentation liftée(8.22). De plus, la structure particulière du vecteur d'état (8.24) augmente la complexité des étapes d'analyse et de synthèse.

A coté de ces deux reformulations, une autre méthode, moins utilisée, permet aussi d'aboutir à une représentation LTI équivalente au système (8.3) considéré en régime libre. Cette dernière, se base sur l'utilisation de la transformation de Floquet.

**c) Transformation de Floquet :**

Lorsque le système (8.3) est considéré en régime libre, ce dernier s'écrit :

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad A(t+T) = A(t) \quad (8.25)$$

Le modèle (8.25) a ouvert la voie à la théorie de Floquet dont le but est de trouver une transformation périodique sur l'espace d'état, de manière que, dans la nouvelle base, la matrice dynamique soit constante. On considère la transformation suivante :

$$\tilde{x}(t) = S(t)x(t), \quad S(t+T) = S(t) \quad (8.26)$$

Le problème de Floquet revient alors, à chercher la matrice  $S(t)$  périodique inversible, telle que, dans les nouvelles coordonnées :

$$\hat{x}(t+1) = \hat{A}\hat{x}(t) \quad (8.27)$$

où la matrice  $\hat{A}$ , connue sous le nom de facteur de Floquet, est constante.

Dans le cas où le modèle (8.25) est réversible (i.e.  $A(t)$  est une matrice non singulière à chaque instant). La façon d'obtenir cette matrice  $S(.)$  et la condition d'existence de la transformation de Floquet est donnée dans [Van Dooren & al 94].

La représentation d'état discrète périodique sans transformation (8.3) est choisie dans la suite pour les raisons suivantes :

- La reformulation liftée est moins riche en information car le vecteur d'état utilisé n'est mis à jour qu'au bout d'une période complète.
- La reformulation cyclique impose une structure particulière de la fonction de Lyapunov qui complexifie l'étape de la synthèse de la commande.
- La transformation de Floquet n'est possible que lorsque le système est en régime libre.

**B.4. Stabilité des systèmes linéaires périodiques**

Dans cette section, nous nous intéressons à la stabilité et aux performances des systèmes linéaires périodiques (8.25).

**a) Multiplieurs caractéristiques : [Brocket 70]**

La matrice monodromique donnée en (8.6), représente l’outil de base de l’analyse de stabilité des systèmes périodiques. Ses valeurs propres  $\Lambda_k = \lambda(\Psi_k)$  portent le nom de multiplieurs caractéristiques du système. De manière similaire à la condition de stabilité des systèmes LTI à temps discret : *le système périodique (8.25) est globalement asymptotiquement stable si et seulement si, tous ces multiplieurs caractéristiques appartiennent au disque unité ouvert [Floquet 1883, Lyapunov 1892].*

$$\Lambda_k \subset D(0,1) \quad (8.28)$$

**Remarque :** Il n’y a pas une relation directe entre les valeurs propres de la matrice d’état  $A(t)$  et la stabilité globale du système périodique. En particulier, il peut arriver que toutes les valeurs propres de  $A(t)$  soient stables alors que le système périodique est instable [Bittanti & Colaneri 09].

**b) Stabilité au sens de Lyapunov :**

La stabilité du modèle périodique défini en (8.25) peut être caractérisée aussi en termes d’inégalités matricielles linéaires (LMI) en utilisant la seconde méthode de Lyapunov. Dans ce cadre, *l’existence d’une fonction de Lyapunov quadratique périodique* est une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique. Cette dernière s’écrit :

$$V_t(x(t)) = x(t)^T P(t)x(t) \quad (8.29)$$

$$\text{Avec } P(t+T) = P(t) > 0, t \in \mathbb{N} \quad (8.30)$$

La variation de la fonction de Lyapunov périodique (8.29) s’écrit :

$$V_{t+1}(x(t+1)) - V_t(x(t)) = x(t+1)^T P(t+1)x(t+1) - x(t)^T P(t)x(t) < 0 \quad (8.31)$$

Utilisant (8.25), (8.31) est satisfaite si et seulement si :

$$A(t)^T P(t+1)A(t) - P(t) < 0 \quad (8.32)$$

Et en utilisant le complément de Schur, (8.32) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} -P(t) & (*) \\ P(t+1)A(t) & -P(t+1) \end{bmatrix} < 0 \quad (8.33)$$

Ainsi, Le résultat fondamental pour l’analyse des systèmes périodiques est énoncé dans le théorème suivant.

**Théorème : (Lemme de Lyapunov périodique)** [Bolzern 88]

Le modèle  $T$ -périodique (8.25) est GAS si et seulement si il existe  $T$  matrices de

$$\text{Lyapunov } P(t), t \in \{1, \dots, T\}, \text{ telles que : } \begin{bmatrix} -P(t) & (*) \\ P(t+1)A(t) & -P(t+1) \end{bmatrix} < 0, \forall t \in \{1, \dots, T\} \quad (8.34)$$

Sous la condition  $P(T+1) = P(1)$ .

**c) Stabilité robuste :**

Par extension des modèles linéaires classiques des incertitudes  $T$ -périodiques bornées en norme sur le modèle (8.25) peuvent être introduites :

$$x(t+1) = (A(t) + \Delta A(t))x(t) \quad (8.35)$$

$A(t)$  est la matrice dynamique périodique du modèle. Le terme d'incertitude s'écrit dans ce cas sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \Delta A(\cdot) = L_a(\cdot)\Delta_a(\cdot)N_a(\cdot) \\ \|\Delta_a(\cdot)\| < 1, \forall t \\ L_a(\cdot) \text{ et } N_a(\cdot) \text{ sont } T - \text{périodiques} \end{cases} \quad (8.36)$$

Dans le cas des incertitudes de la forme (8.36), il est possible d'obtenir des conditions LMI prouvant la stabilité robuste du modèle incertain (8.35) utilisant la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V_i(x(t)) = x(t)^T Q(t)x(t), \quad Q(t) = (P(t))^{-1} \quad (8.37)$$

**Théorème 2 : Stabilité quadratique robuste**

Le modèle périodique incertain (8.35) est GAS si et seulement si, il existe  $T$  matrices périodiques  $Q(t)$  telles les inégalités matricielles linéaires périodiques

$$\begin{bmatrix} A(t)^T Q(t+1)A(t) - Q(t) + N(t)^T N(t) & (*) \\ L(t)^T Q(t+1)A(t) & L(t)^T Q(t+1)L(t) - I \end{bmatrix} < 0 \quad (8.38)$$

$$Q(T+1) = Q(1)$$

soient vérifiées  $\forall t \in \{1, \dots, T\}$ .

**Remarque :** Des conditions LMI périodiques peuvent aussi s'obtenir de manière classique, dans le cas où des incertitudes polytopiques sont considérées. Dans ce cadre, des fonctions de Lyapunov polytopiques de la forme (8.39) ont été utilisées [Arzelier & al 05, Farges & al 05].

$$V_i(x(t)) = x(t)^T P(t, \xi)x(t) \quad (8.39)$$

avec :  $P(t, \xi) = \sum_{i=1}^T \xi_i P_i(k)$  et  $\sum_{i=1}^T \xi_i = 1$ .

### B.5. Performances des systèmes discrets périodiques

Afin d'étudier les performances des systèmes périodiques, on considère le modèle périodique certain et stable suivant :

$$\begin{cases} x(t+1) = A(t)x(t) + B_v(t)v(t), & x(0) = 0 \\ z(t) = C(t)x(t) + D_v(t)v(t) \end{cases} \quad (8.40)$$

Où  $v(t)$  représente la perturbation du modèle.

Les critères les plus fréquemment rencontrés pour évaluer les performances des systèmes périodiques sont exprimés à l'aide des normes  $H_\infty$  et  $H_2$ .

#### a) Normes $H_\infty$ :

De la même manière que pour les systèmes LTI, la norme  $H_\infty$  pour les systèmes périodiques correspond au gain  $L_2 \rightarrow L_2$  dans le pire cas. Dans ce cadre, le problème de rejet de la perturbation  $v(t)$  est classiquement transformé en un problème de minimisation qui s'écrit :

$$\min_{\gamma > 0} \sup_{\|v(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|v(t)\|_2} \leq \gamma \quad (8.41)$$

Considérant la fonction de Lyapunov périodique définie en (8.29) et le critère  $H_\infty$  défini en (8.41), la condition de stabilité minimisant le critère s'écrit :

$$\Delta V_k(x(k)) + y(k)^T y(k) - \gamma^2 v(k)^T v(k) < 0$$

Après quelques transformations matricielles, il est possible d'aboutir à une formulation LMI de ce problème de minimisation [Bolzern & al 04] sous la forme :

$$\begin{aligned} & \min_{W(k), k \in [1, \dots, T]} \gamma > 0: \\ & \left[ \begin{array}{cc} A(k)^T W(k+1) A(k) - W(k) + C(k)^T C(k) & (*) \\ B_v(k)^T W(k+1) A(k) + D_v(k)^T C(k) & B(k)^T W(k+1) B(k) + D_v(k)^T D_v - \gamma I \end{array} \right] < 0 \quad (8.42) \\ & \left[ \begin{array}{l} W(T+1) = W(1) \\ \forall k \in [1, \dots, T] \end{array} \right. \end{aligned}$$

**b) Norme  $H_2$  :**

La norme  $H_2$  représente l'énergie totale pour un entrée de type impulsion ; elle peut être calculée de plusieurs manières, celle basée sur le calcul du grammien d'observabilité est la suivante :

$$\|\Sigma\|_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \text{Trace} \left[ D_v(l)^T D_v(l) + B(l) W_o(l) B(l) \right]} \quad (8.43)$$

où  $W_o(l)$  est le grammien d'observabilité périodique défini en (8.46).

La norme  $H_2$  explicitée en (8.43) peut alors être calculée comme la solution du problème de minimisation suivant [Bamieh & al 92] :

$$\begin{cases} \min_{P(k), k \in \{1, \dots, T\}} \gamma > 0 : \\ \left\{ \begin{array}{l} A(k)^T P(k+1) A(k) - P(k) + C(k)^T C(k) < 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, T\} \\ \text{Trace} \left[ \sum_{k=1}^T B(k)^T P(k) B(k) + D_v(k)^T D_v(k) \right] < N\gamma \\ P(T+1) = P(1) \\ \forall k \in \{1, \dots, T\} \end{array} \right. \end{cases} \quad (8.44)$$

Après avoir explicité la stabilité, la partie suivante traite des lois de commande périodiques.

**B.6. Lois de commande périodiques**

Les premiers développements concernant les lois de commande périodiques ont été appliqués sur des systèmes invariants dans le temps. Les principales contributions concernent d'une part, la résolution des problèmes sans solutions via l'utilisation de contrôleurs à temps invariant [Brockett & al 83, Coron & al 99, Morin & al 95, Samson & al 93] et d'autre part, l'amélioration des performances du système bouclé [Blondel & al 94, Moreau & al 04].

Avant d'entamer la partie sur la synthèse de loi de commande périodique, rappelons les conditions de commandabilité et d'observabilité des modèles périodiques discrets [Bittanti & al 85, Bittanti & Bolzern 86].

**Proposition 1 :** (Grammien de commandabilité)

Le modèle linéaire périodique (8.3) est commandable à chaque instant  $t$  si et seulement si le grammien de commandabilité à l'instant  $t$  définie en (8.45) est positif :  $W_r(\tau, t) > 0, \forall t$ .

$$W_r(\tau, t) = \sum_{j=\tau+1}^t \Phi_A(t, j) B(j-1) B(j-1)^T \Phi_A(t, j)^T \quad (8.45)$$

**Proposition 2 :** (Grammien d'observabilité)

Le modèle linéaire périodique (8.3) est observable à chaque instant  $t$  si et seulement si le grammien de d'observabilité à l'instant  $t$  définie en (8.46) est positif :  $W_w(\tau, t) > 0, \forall t$ .

$$W_w(\tau, t) = \sum_{j=\tau}^{t-1} \Phi_A(j, \tau)^T C(j)^T C(j) \Phi_A(j, \tau) \quad (8.46)$$

**a) Retour d'état périodique linéaire :**

La loi de commande généralement utilisée se calque sur celle proposée dans le cadre non périodique sous la forme d'un retour d'état avec un gain périodique :

$$u(t) = K(t)x(t), K(t+T) = K(t) \quad (8.47)$$

La boucle fermée associée est alors :

$$x(t+1) = (A(t) + B(t)K(t))x(t) \quad (8.48)$$

En particulier, la matrice dynamique de la boucle fermée est la matrice périodique  $A(t) + B(t)K(t)$ . La variation de la fonction de Lyapunov périodique (8.29) tout au long de la trajectoire du modèle périodique (8.3), s'écrit :

$$(A(t) + B(t)K(t))^T P(t+1)(A(t) + B(t)K(t)) - P(t) < 0 \quad (8.49)$$

En multipliant à gauche et à droite par  $W(t) = (P(t))^{-1}$ , et en utilisant la complément de Schur, l'inégalité (8.49) est vérifiée si :

$$\begin{bmatrix} -W(t) & (*) \\ (A(t) + B(t)K(t))W(t) & -W(t+1) \end{bmatrix} < 0 \quad (8.50)$$

En introduisant le changement de variable bijectif  $Y(k) = K(k)W(k)$ , (8.50) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -W(t) & (*) \\ A(t)W(t) + B(t)Y(t) & -W(t+1) \end{bmatrix} < 0 \quad (8.51)$$

$$\forall t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$$

**Théorème 3:** (Stabilisation quadratique)

Soit le modèle T-périodique (8.3) et la loi de commande T-périodique (8.47), la boucle fermée (8.48) est GAS si et seulement si, il existe  $T$  matrices  $W(t), t \in \{1, \dots, N\}$  et  $T$  matrices

$Y(t)$ ,  $t \in \{1, \dots, N\}$  telles que (8.51) soit vrai. De plus si le problème à une solution, les gains de commande périodiques sont donnés par :  $K(t) = Y(t)(W(t))^{-1}$ .

Plusieurs versions de ce théorème sont données et discutées dans [Bittanti & al 01, De Souza & al 00, Farges & al 05].

L'application du théorème 3, permet d'obtenir une loi de commande périodique dont la période est la même que celle du modèle. Dans le cas où la période  $T$  est beaucoup plus importante que la période d'échantillonnage du système discret, le nombre de paramètre considéré augmente de manière conséquente et rend la résolution des conditions de stabilité (8.51) assez complexe à l'aide des solveurs actuels.

**Remarque :** Il est possible de considérer le problème dual de l'observation périodique, les résultats s'obtiennent de manière similaire [Freudenberg & al 89, Bittanti & al 01].

**b) Retour de sortie statique périodique linéaire :**

Dans la section précédente, nous avons considéré une loi de commande par retour d'état périodique exploitant la mesure de l'état. Lorsque seule la mesure du signal de sortie est disponible, la loi de commande peut être donnée en fonction de la sortie  $y(t)$  sous la forme suivante :

$$u(t) = K(t)y(t), K(t+T) = K(t) \quad (8.52)$$

La boucle fermée associée s'écrit :

$$x(t+1) = (A(t) + B(t)K(t)C(t))x(t) \quad (8.53)$$

Le problème de stabilisation de la boucle fermée (8.53) représente un réel défi. Les recherches sur ce sujet sont également motivées par le fait, que dans certains cas, une loi de commande périodique permet de stabiliser un système invariant dans le temps qui n'est pas stabilisable par une loi de commande invariante dans le temps. L'exemple suivant illustre ce propos.

**Exemple [Colaneri & al 98] :**

Cet exemple académique montre qu'un système LTI non stabilisable par retour de sortie statique LTI peut être stabilisable par un retour de sortie statique 2-périodique.

Soit le système LTI suivant :

$$\begin{cases} x(t+1) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (8.54)$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } C = [1 \quad 1]$$

Comme  $\lambda(A) = \{0.6180 - 1.6180\}$ , le système (8.54) est instable en boucle ouverte.

Considérons une loi de commande de la forme  $u(t) = Ky(t)$ . Ainsi la boucle fermée s'écrit :

$$x(t+1) = (A + BKC)x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K+1 & K-1 \end{bmatrix} x(t) \quad (8.55)$$

Le polynôme caractéristique du système bouclé est donc :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A + BKC) = \lambda^2 - (K-1)\lambda - (1+K) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

D'après le critère de Jury, ce polynôme a toutes ses racines de module inférieur à 1 si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 > 0 \\ a_2 - a_0 > 0 \end{cases}$$

La deuxième condition s'écrit  $-(1+K) + (K-1) + 1 > 0 \Leftrightarrow -1 > 0$  et n'est donc jamais vérifiée. Il n'existe donc pas de correcteur statique LTI permettant de stabiliser ce système.

Considérons à présent une loi de commande 2-périodique de la forme :

$$u(t) = K(t)y(t) \text{ où } K(t+2) = K(t) \quad (8.56)$$

Avec  $K(1) = 3$  et  $K(2) = -1$

La représentation d'état du système bouclé est :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (A + BK(t)C)x(t) = A_{bf}(t)x(t) \\ A_{bf}(t+2) &= A_{bf}(t) \end{aligned} \quad (8.57)$$

$$\text{Avec } A_{bf}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, A_{bf}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Le calcul des multipliers caractéristiques prouve la stabilité du système bouclé 2-périodique:

$$\Lambda = \lambda(A_{bf}(2)A_{bf}(1)) = \lambda\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}\right) = \{0, 0\}.$$

Divers travaux traitent de ce problème et apportent des solutions pour obtenir les gains  $K(t)$ . Par exemple, dans [Bittanti & Colaneri 09], une méthode basée sur l'utilisation d'une loi de commande à données échantillonnées a été utilisée. Les gains de commande sont calculés utilisant la matrice monodromique du système bouclé. Dans ce cas, les gains de commande sont calculés sur une période et se répètent à chaque période. Une autre méthode permet de résoudre le problème en considérant une équation de riccati périodique [Colaneri & al 98], cette dernière nécessite que la matrice  $C(t)$  soit de rang plein en ligne à chaque instant  $t$ . Dans [Farges & al 06], l'utilisation d'une fonction de Lyapunov périodique quadratique conduit à l'obtention de conditions de stabilisation sous forme BMI qui sont résolues à l'aide d'algorithmes en plusieurs passes.

**Remarque :** Dans le cadre des problèmes de contrôle ou d'observation de modèles périodiques, il est aussi possible d'introduire des critères de performances (decay rate,  $H_2$ ,  $H_\infty$ , ...) [Zhang & al 96, Colaneri 00, Sagfors & al 00, Farges & al 05].

### B.7. Conclusion

Dans cette annexe, un état de l'art concernant l'analyse et la synthèse des modèles linéaires périodiques a été présenté. En premier lieu, les différentes méthodes permettant d'aboutir à ce type de modèles ainsi que les différentes reformulations à temps invariants qui lui sont équivalentes ont été données. En second lieu, différentes méthodes permettant d'analyser la stabilité des systèmes linéaires périodiques à temps discret ont été abordées. Finalement, les différents travaux portant sur la synthèse des lois de commande périodiques pour les systèmes linéaires périodiques ont été exposés.

## ANNEXE C. Moyens Expérimentaux

Les résultats expérimentaux présentés dans la partie III ont été validés utilisant un banc d'essai moteur disponible au laboratoire d'accueil de cette thèse (figure 8.6). Sa mise en place a été effectuée au cours de nos travaux. Le moteur est un moteur quatre cylindres à allumage commandé de 1.6 litres de cylindrée disposant d'un système d'injection indirecte électronique BOSCH MP 5.1, ces principales caractéristiques sont répertoriées dans le tableau 13.

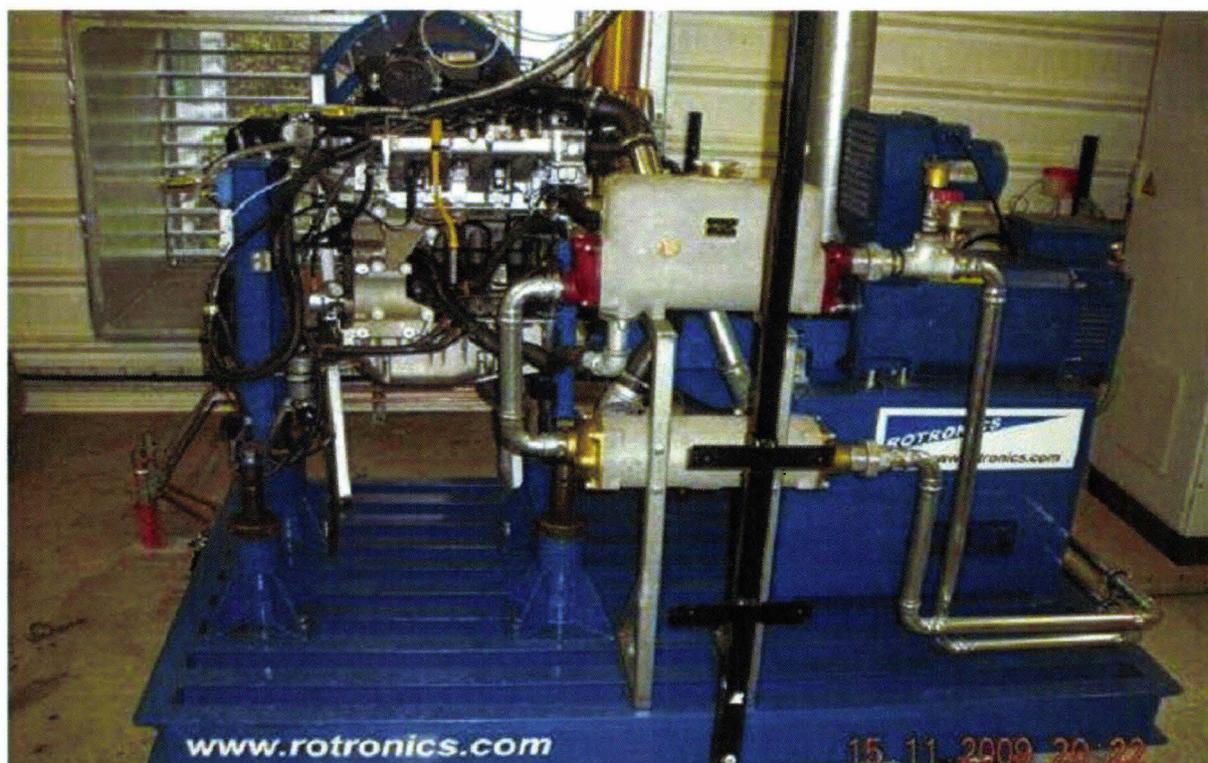


Figure 8.6 : Banc Moteur expérimental PSA TU5JP du laboratoire LAMIH-UVHC

Le banc d'essai est instrumenté pour l'acquisition des différents signaux du moteur :

- La pression, le débit d'air et la température au collecteur d'admission, ainsi que la position du papillon des gaz
- La pression et la température au collecteur d'échappement
- La pression à l'intérieur de chacun des cylindres
- le couple transmis
- La position angulaire et le régime du moteur ainsi que le régime et le couple du frein.
- Un répartiteur d'allumage a été ajouté afin de récupérer la position de l'arbre à came.

Tableau 13

| <b>Caractéristiques du moteur</b> |                                     |                        |
|-----------------------------------|-------------------------------------|------------------------|
| (*)                               | Type de Cycle                       | 4 Temps                |
| $n_{cyl}$                         | Nombre des cylindres                | 4 (en ligne)           |
| (*)                               | Nombre de soupape par cylindre      | 1                      |
| (*)                               | Ordre d'allumage                    | 1-3-4-2                |
| $C_{max}$                         | Couple maximal                      | 135 Nm à 3000 tr/min   |
| $P_{max}$                         | Puissance maximale                  | 65 KW à 5600 tr/min    |
| $N_{min}$                         | Régime au ralenti                   | 800 tr/min             |
| $N_{max}$                         | Régime maximal                      | 5600 tr/min            |
| <b>Paramètres Géométriques</b>    |                                     |                        |
| $D$                               | Diamètre de l'alésage               | 78.5 mm                |
| $L$                               | course                              | 82 mm                  |
| $r = \frac{L}{2}$                 | Rayon du vilebrequin                | 41 mm                  |
| $l$                               | Longueur de la bielle               | 133.5 mm               |
| $r_c$                             | Rapport Volumétrique                | 9.6                    |
| <b>Admission</b>                  |                                     |                        |
| $D_{ref\_a}$                      | Diamètre de référence               | 31.46 mm               |
| $\theta_{AOA}$                    | Avance à l'ouverture d'admission    | 4° Avant le PMH        |
| $\theta_{RFA}$                    | Retard à la fermeture d'admission   | 46° Après le PMH       |
| <b>Echappement</b>                |                                     |                        |
| $D_{ref\_e}$                      | Diamètre de référence               | 34.5 mm                |
| $\theta_{AOE}$                    | Avance à l'ouverture d'échappement  | 42° Avant le PMB       |
| $\theta_{RFE}$                    | Retard à la fermeture d'échappement | 0° Après le PMH        |
| <b>Collecteurs et conduits</b>    |                                     |                        |
| $V_a$                             | Volume au collecteur d'admission    | 1180 cm <sup>3</sup>   |
| $V_e$                             | Volume au collecteur d'admission    | 452.18 cm <sup>3</sup> |

Le moteur est monté sur un banc fixe et couplé avec un frein à courant de Foucault. L'ensemble est implanté dans une cellule assurant les fonctions de : ventilation, échappement des gaz brûlés, alimentation en eau et en combustible, sécurité,...

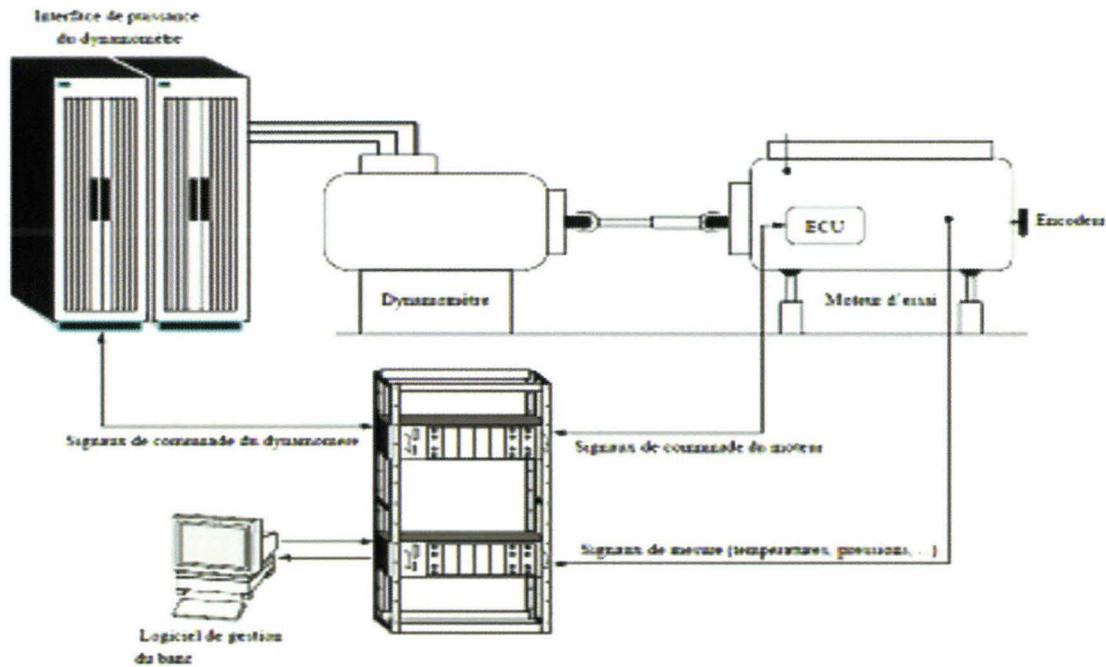


Figure 8.7 : Structure et équipements du banc d'essai de recherche

### *Campagne de mesures*

Le logiciel de gestion du banc permet de stabiliser le moteur sur des points de fonctionnement choisis. La régulation du dynamomètre autour de la valeur de consigne souhaitée peut se faire soit en couple, soit en vitesse. Le début des essais est précédé par une mise en température du moteur. Pour chaque point de fonctionnement visité, la mesure débute lorsque les variables ont atteint le régime stationnaire. On procède à un enregistrement des signaux une fois qu'un front montant est détecté sur le signal délivré par le répartiteur d'allumage signalant que le cylindre 1 fonctionne en phase d'admission, la période d'échantillonnage utilisée est de  $5 \times 10^{-4}$  s.

## ANNEXE D. Modèles utilisés

Cette annexe est dédiée aux différents modèles qui ont été utilisés dans le but de la synthèse des observateurs ainsi qu'aux matrices solutions du problème LMI correspondant.

### D.1 : Modèle utilisé pour l'estimation du débit en entrée des cylindres :

Le tableau 14 présente le modèle TS 120-périodique qui a été utilisé pour l'estimation des débits qui entrent dans les cylindres dans le cas où les chevauchements entre les cylindres sont pris en compte. Les instants angulaires  $IVO_i$  et  $IVC_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n_{cyl}\}$  correspondent respectivement aux instants d'ouverture et de fermeture des soupapes d'admission de chacun des cylindres.

**Tableau 14**

| $\theta \in [0, \dots, IVC_2]$ (cylindre 1 ou 2 active)   | $\theta \in [IVC_2, \dots, IVO_3]$ (cylindre 1 inactive)   |
|---|--|
| $A^1(\theta, nl'_1, nl'_2, nl'_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -nl'_1 & -nl'_1 & 0 & 0 \\ c'_1 & 1-c'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl'_2 & 0 & 0 & 1-c'_3 & 0 & 0 & 0 \\ nl'_3 & 0 & 0 & 0 & 1-c'_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B^1(\theta, nl'_1) = [nl'_1 \ 0 \ c'_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $A^1_1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl'_1}, \underline{nl'_2}, \underline{nl'_3}), A^1_2(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl'_1}, \overline{nl'_2}, \overline{nl'_3})$ $A^1_3(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl'_1}, \overline{nl'_2}, \underline{nl'_3}), A^1_4(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl'_1}, \underline{nl'_2}, \underline{nl'_3})$ $A^1_5(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl'_1}, \underline{nl'_2}, \overline{nl'_3}), A^1_6(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl'_1}, \overline{nl'_2}, \underline{nl'_3})$ $A^1_7(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl'_1}, \overline{nl'_2}, \overline{nl'_3}), A^1_8(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl'_1}, \overline{nl'_2}, \overline{nl'_3})$ $B^1_1(\theta) = B^1_2(\theta) = B^1_3(\theta) = B^1_4(\theta) = B^1(\theta, \underline{nl'_1}),$ $B^1_5(\theta) = B^1_6(\theta) = B^1_7(\theta) = B^1_8(\theta) = B^1(\theta, \overline{nl'_1})$ | $A^2(\theta, nl'_1, nl'_2, nl'_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -nl'_1 & 0 & 0 & 0 \\ c'_1 & 1-c'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl'_2 & 0 & 0 & 1-c'_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B^2(\theta, nl'_1) = [nl'_1 \ 0 \ c'_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $A^2_1(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl'_1}, \underline{nl'_2}, \underline{nl'_3}), A^2_2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl'_1}, \underline{nl'_2}, \overline{nl'_3})$ $A^2_3(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl'_1}, \overline{nl'_2}, \underline{nl'_3}), A^2_4(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl'_1}, \underline{nl'_2}, \underline{nl'_3})$ $A^2_5(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl'_1}, \underline{nl'_2}, \overline{nl'_3}), A^2_6(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl'_1}, \overline{nl'_2}, \underline{nl'_3})$ $A^2_7(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl'_1}, \overline{nl'_2}, \overline{nl'_3}), A^2_8(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl'_1}, \overline{nl'_2}, \overline{nl'_3})$ $B^2_1(\theta) = B^2_2(\theta) = B^2_3(\theta) = B^2_4(\theta) = B^2(\theta, \underline{nl'_1}),$ $B^2_5(\theta) = B^2_6(\theta) = B^2_7(\theta) = B^2_8(\theta) = B^2(\theta, \overline{nl'_1})$ |
| $\theta \in [IVO_3, \dots, IVC_1]$ (cylindre 1 ou 2 inactive)   | $\theta \in [IVC_1, \dots, IVO_4]$ (cylindre 1 active)   |



|   |   |
|---|---|
| $A^7(\theta, nl_1', nl_2', nl_3') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -nl_1' & 0 & -nl_1' \\ c_1' & 1-c_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl_3' & 0 & 0 & 0 & 1-c_3' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl_3' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-c_3' \end{bmatrix}$ $B^7(\theta, nl_1') = [nl_1' \ 0 \ c_2' \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $A_1^7(\theta) = A^7(\theta, nl_1', nl_2', nl_3'), A_2^7(\theta) = A^7(\theta, nl_1', nl_2', nl_3')$ $A_3^7(\theta) = A^7(\theta, nl_1', nl_2', nl_3'), A_4^7(\theta) = A^7(\theta, nl_1', nl_2', nl_3')$ $A_5^7(\theta) = A^7(\theta, nl_1', nl_2', nl_3'), A_6^7(\theta) = A^7(\theta, nl_1', nl_2', nl_3')$ $A_7^7(\theta) = A^7(\theta, nl_1', nl_2', nl_3'), A_8^7(\theta) = A^7(\theta, nl_1', nl_2', nl_3')$ $B_1^7(\theta) = B_2^7(\theta) = B_3^7(\theta) = B_4^7(\theta) = B^7(\theta, nl_1')$ $B_5^7(\theta) = B_6^7(\theta) = B_7^7(\theta) = B_8^7(\theta) = B^7(\theta, nl_1')$ | $A^8(\theta, nl_1', nl_2', nl_3') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -nl_1' & 0 & 0 \\ c_1' & 1-c_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl_3' & 0 & 0 & 0 & 1-c_3' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B^8(\theta, nl_1') = [nl_1' \ 0 \ c_2' \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ $A_1^8(\theta) = A^8(\theta, nl_1', nl_2', nl_3'), A_2^8(\theta) = A^8(\theta, nl_1', nl_2', nl_3')$ $A_3^8(\theta) = A^8(\theta, nl_1', nl_2', nl_3'), A_4^8(\theta) = A^8(\theta, nl_1', nl_2', nl_3')$ $A_5^8(\theta) = A^8(\theta, nl_1', nl_2', nl_3'), A_6^8(\theta) = A^8(\theta, nl_1', nl_2', nl_3')$ $A_7^8(\theta) = A^8(\theta, nl_1', nl_2', nl_3'), A_8^8(\theta) = A^8(\theta, nl_1', nl_2', nl_3')$ $B_1^8(\theta) = B_2^8(\theta) = B_3^8(\theta) = B_4^8(\theta) = B^8(\theta, nl_1')$ $B_5^8(\theta) = B_6^8(\theta) = B_7^8(\theta) = B_8^8(\theta) = B^8(\theta, nl_1')$ |
| $\theta \in [IVO_1, \dots, 720]$ (y compris 1 et 2 années)  |   |
| <p><b>On Obtient les mêmes matrices que la première phase</b></p>   |   |

**D.2 : Modèle utilisé pour l'estimation du débit en sortie des cylindres**

Le tableau 15 présente le modèle TS 120-périodique qui a été utilisé pour l'estimation des débits des gaz brûlés sortant des cylindres dans le cas où le chevauchement entre les cylindres n'est pas pris en compte.

**Tableau 15**

| $\theta \in [0, \dots, 180^\circ]$ (cylindre 3 activé)  | $\theta \in [180, \dots, 360^\circ]$ (cylindre 4 activé)  |
|---|---|
| $A^1(\cdot) = \begin{bmatrix} 1+nl_2 & 0 & 0 & 0 & nl_1 & 0 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl_3 & 0 & 0 & 0 & 1-c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_1^1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_2^1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$ $A_3^1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_4^1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$ $A_5^1(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_6^1(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$ $A_7^1(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_8^1(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$  | $A^2(\cdot) = \begin{bmatrix} 1+nl_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & nl_1 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-c_2 \end{bmatrix}$ $A_1^2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_2^2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$ $A_3^2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_4^2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$ $A_5^2(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_6^2(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$ $A_7^2(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_8^2(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$  |
| $\theta \in [540, \dots, 720^\circ]$ (cylindre 1 activé)  | $\theta \in [360, \dots, 540^\circ]$ (cylindre 2 activé)  |
| $A^4(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}) = \begin{bmatrix} 1+nl_2 & 0 & nl_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl_3 & 0 & 1-c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_1^4(\theta) = A^4(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_2^4(\theta) = A^4(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$ $A_3^4(\theta) = A^4(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_4^4(\theta) = A^4(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$ $A_5^4(\theta) = A^4(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_6^4(\theta) = A^4(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$ $A_7^4(\theta) = A^4(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_8^4(\theta) = A^4(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$ | $A^3(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}) = \begin{bmatrix} 1+nl_2 & 0 & 0 & nl_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nl_3 & 0 & 0 & 1-c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_1^3(\theta) = A^3(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_2^3(\theta) = A^3(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$ $A_3^3(\theta) = A^3(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_4^3(\theta) = A^3(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$ $A_5^3(\theta) = A^3(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}), A_6^3(\theta) = A^3(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$ $A_7^3(\theta) = A^3(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_8^3(\theta) = A^3(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$ |

Alors que le tableau 16 présente le modèle TS 120-périodique qui a été utilisé pour l'estimation des débits qui sortent des cylindres dans le cas où le chevauchement entre les cylindres est pris en compte.





### D.3 : Modèle utilisé pour l'estimation des fraction d'air en sortie des cylindres

Le tableau 17 présentes le modèle TS 120-périodique qui a été utilisé pour l'estimation des fractions d'air en sortie des cylindres dans le cas où le chevauchement entre les cylindres est pris en compte.

Tableau 17

| $\theta \in [0, \dots, EVO_4]$ (cylindre 3 activé)  | $\theta \in [EVO_4, \dots, EVC_3]$ (cylindre 3 et 4 activés)  |
|---|---|
| $A^1(\theta, nl_1, nl_2, nl_3) = \begin{bmatrix} 1+nl_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | $A^2(\theta, nl_1, nl_2, nl_3) = \begin{bmatrix} 1+nl_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ |
| $A_d^1(\theta, nl_1, nl_2, nl_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & nl_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$       | $A_d^2(\theta, nl_1, nl_2, nl_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & nl_2 & nl_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$    |
| $A_1^1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_2^1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$   | $A_1^2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_2^2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$   |
| $A_3^1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_4^1(\theta) = A^1(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$   | $A_3^2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_4^2(\theta) = A^2(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$   |
| $A_5^1(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_6^1(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$   | $A_5^2(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_6^2(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$   |
| $A_7^1(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_8^1(\theta) = A^1(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$   | $A_7^2(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_8^2(\theta) = A^2(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$   |
| $A_{1d}^1(\theta) = A_d^1(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_{2d}^1(\theta) = A_d^1(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$   | $A_{1d}^2(\theta) = A_d^2(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_{2d}^2(\theta) = A_d^2(\theta, \underline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$   |
| $A_{3d}^1(\theta) = A_d^1(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_{4d}^1(\theta) = A_d^1(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$   | $A_{3d}^2(\theta) = A_d^2(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_{4d}^2(\theta) = A_d^2(\theta, \underline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$   |
| $A_{5d}^1(\theta) = A_d^1(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_{6d}^1(\theta) = A_d^1(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$   | $A_{5d}^2(\theta) = A_d^2(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_{6d}^2(\theta) = A_d^2(\theta, \overline{nl_1}, \underline{nl_2}, \overline{nl_3})$   |
| $A_{7d}^1(\theta) = A_d^1(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_{8d}^1(\theta) = A_d^1(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$   | $A_{7d}^2(\theta) = A_d^2(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \underline{nl_3}), A_{8d}^2(\theta) = A_d^2(\theta, \overline{nl_1}, \overline{nl_2}, \overline{nl_3})$   |
| $\theta \in [EVC_3, \dots, EVO_2]$ (cylindre 4 activé)  | $\theta \in [EVO_2, \dots, EVC_4]$ (cylindre 2 et 4 activés)  |



| $\theta \in [EVC_2, \dots, EVO_3]$ (modèle de base)  | $\theta \in [EVO_3, \dots, 720]$ (modèle de base)  |
|--|--|
| $A^7(\theta, nl_1, nl_2, nl_3) = \begin{bmatrix} 1+nl_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  | $A^8(\theta, nl_1, nl_2, nl_3) = \begin{bmatrix} 1+nl_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1-c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  |
| $A_d^7(\theta, nl_1, nl_2, nl_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & nl_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  | $A_d^8(\theta, nl_1, nl_2, nl_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & nl_3 & 0 & nl_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   |
| $A^7(\theta) = A^7(\theta, \underline{nl}_1, \underline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_2^7(\theta) = A^7(\theta, \underline{nl}_1, \underline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_3^7(\theta) = A^7(\theta, \underline{nl}_1, \overline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_4^7(\theta) = A^7(\theta, \underline{nl}_1, \overline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_5^7(\theta) = A^7(\theta, \overline{nl}_1, \underline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_6^7(\theta) = A^7(\theta, \overline{nl}_1, \underline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_7^7(\theta) = A^7(\theta, \overline{nl}_1, \overline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_8^7(\theta) = A^7(\theta, \overline{nl}_1, \overline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_{1d}^7(\theta) = A_d^7(\theta, \underline{nl}_1, \underline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_{2d}^7(\theta) = A_d^7(\theta, \underline{nl}_1, \underline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_{3d}^7(\theta) = A_d^7(\theta, \underline{nl}_1, \overline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_{4d}^7(\theta) = A_d^7(\theta, \underline{nl}_1, \overline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_{5d}^7(\theta) = A_d^7(\theta, \overline{nl}_1, \underline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_{6d}^7(\theta) = A_d^7(\theta, \overline{nl}_1, \underline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_{7d}^7(\theta) = A_d^7(\theta, \overline{nl}_1, \overline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_{8d}^7(\theta) = A_d^7(\theta, \overline{nl}_1, \overline{nl}_2, \overline{nl}_3)$ | $A_1^8(\theta) = A^8(\theta, \underline{nl}_1, \underline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_2^8(\theta) = A^8(\theta, \underline{nl}_1, \underline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_3^8(\theta) = A^8(\theta, \underline{nl}_1, \overline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_4^8(\theta) = A^8(\theta, \underline{nl}_1, \overline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_5^8(\theta) = A^8(\theta, \overline{nl}_1, \underline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_6^8(\theta) = A^8(\theta, \overline{nl}_1, \underline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_7^8(\theta) = A^8(\theta, \overline{nl}_1, \overline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_8^8(\theta) = A^8(\theta, \overline{nl}_1, \overline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_{1d}^8(\theta) = A_d^8(\theta, \underline{nl}_1, \underline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_{2d}^8(\theta) = A_d^8(\theta, \underline{nl}_1, \underline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_{3d}^8(\theta) = A_d^8(\theta, \underline{nl}_1, \overline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_{4d}^8(\theta) = A_d^8(\theta, \underline{nl}_1, \overline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_{5d}^8(\theta) = A_d^8(\theta, \overline{nl}_1, \underline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_{6d}^8(\theta) = A_d^8(\theta, \overline{nl}_1, \underline{nl}_2, \overline{nl}_3)$<br>$A_{7d}^8(\theta) = A_d^8(\theta, \overline{nl}_1, \overline{nl}_2, \underline{nl}_3), A_{8d}^8(\theta) = A_d^8(\theta, \overline{nl}_1, \overline{nl}_2, \overline{nl}_3)$ |

**Titre de la thèse : Analyse et synthèse des systèmes non linéaires périodiques :  
Application au moteur à allumage commandé**

**Résumé :** Cette thèse se focalise sur l'analyse et la synthèse des systèmes non linéaires périodiques mis sous forme polytopique en temps discret. Des développements théoriques sont proposés dans le cas d'une classe particulière de modèles dit de type Tagaki-Sugeno (TS). D'une part, le problème de réduction du conservatisme dans le cadre de la stabilisation est abordé en utilisant une nouvelle fonction de Lyapunov non quadratique dans le cas discret. D'autre part, des résultats théoriques sur la commande et l'observation des modèles TS périodiques discrets, sans et avec retard sont exposés. La partie applicative porte principalement sur l'estimation cylindre à cylindre d'un moteur quatre temps à allumage commandé. Les outils développés sont utilisés pour estimer les débits d'air entrant et de gaz sortant des cylindres ainsi que les richesses individuelles. Des essais temps réel sur banc d'essais moteur permettent de montrer l'intérêt des méthodes utilisées.

**Mots clés :** Modèles polytopiques TS discrets, Fonction de Lyapunov non quadratique, Modèles périodiques, Retard, Commande et observation, Moteur à allumage commandé, Estimation cylindre à cylindre.

---

**Title: Analysis and synthesis for periodic non linear models : application to IC engine**

**Abstract:** This work focus on the analysis and synthesis for nonlinear periodic system via a polytopic form in discrete time. Some theoretical developments are proposed in the case of a particular class of model called Tagaki-Sugeno (TS) fuzzy model. On one hand, the problem of reduction of the conservatism of the stability condition is treated using a new non quadratic Lyapunov function in the discrete case. On the other hand, theoretical results about the control and observer design for discrete periodic TS models, with and without time delay are exposed. The applicative developments mainly concern the individual cylinder estimation for a four stroke spark ignition engine. The proposed theoretical tools are used to estimate individual mass flow rate of gas going in and out the cylinders, and also all the air-fuel ratio. Real time trials on a engine test bed are provided to show the interest of the used approach.

**Keywords:** Discrete polytopic TS models, Non quadratic Lyapunov function, Periodic model, Time delay, Control and observer design, Spark ignition engine, Cylinder by cylinder estimation.

Bibliothèque Universitaire de Valenciennes



00900835