



**HAL**  
open science

# Les sous-variétés de type CR de la sphère de dimension 6

Miroslava Ž Antić

► **To cite this version:**

Miroslava Ž Antić. Les sous-variétés de type CR de la sphère de dimension 6. Mathématiques [math]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis; Univerzitet u Beogradu, 2010. Français. NNT : 2010VALE0001 . tel-03065345

**HAL Id: tel-03065345**

**<https://uphf.hal.science/tel-03065345v1>**

Submitted on 14 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis  
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Ecole doctorale Science pour l'ingénieur Université Lille Nord de France

DOCTORAT

Mathématiques

Miroslava Ž. ANTIĆ

Les sous-variétés de type CR de la sphère de dimension 6  
CR submanifolds of the six-sphere  
CR podmnogostrukosti šestodimenzione sfere

Thèse dirigé par Mirjana DJORIĆ / Luc VRANCKEN

Soutenue le 4 février 2010

Composition du Jury/Komisija

President : Barbara OPOZDA

Rapporteur : John BOLTON

Rapporteur : Franki DILLEN

Examineur : Olivier BIREMBAUX

Examineur : Jason LOTAY

Directeur de Thèse : Mirjana DJORIĆ / Luc VRANCKEN



Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis  
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Ecole doctorale Science pour l'ingénieur Université Lille Nord de France

DOCTORAT

Mathématiques

Miroslava Ž. ANTIĆ

Les sous-variétés de type CR de la sphère de dimension 6  
CR submanifolds of the six-sphere  
CR podmnogostrukosti šestodimenzione sfere

Thèse dirigé par Mirjana DJORIĆ / Luc VRANCKEN

Soutenue le 4 février 2010

Composition du Jury/Komisija

President : Barbara OPOZDA

Rapporteur : John BOLTON

Rapporteur : Franki DILLEN

Examineur : Olivier BIREMBAUX

Examineur : Jason LOTAY

Directeur de Thèse : Mirjana DJORIĆ / Luc VRANCKEN

# Les sous-variétés de type CR de la sphère de dimension 6

## Résumé

Soit  $M$  une sous-variété Riemannienne d'une variété presque complexe  $\widetilde{M}$ , où nous notons la structure presque complexe par  $J$ . Alors il est naturel de regarder les propriétés des sous-variétés par rapport à cette structure  $J$ . Si l'espace tangent reste invariant par  $J$ , nous dirons que la sous-variété est presque complexe. Par contre si  $J$  envoie l'espace tangent dans l'espace normal, nous dirons qu'elle est totalement réelle. Une généralisation naturelle des sous-variétés presque complexes et des sous-variétés Lagrangiennes sont les sous-variétés de type CR. Nous disons qu'une sous-variété  $M$  est de type CR si elle admet une distribution presque complexe et que le complément orthogonal est totalement réel.

Une sous-variété de type CR est dite propre si la sous-variété n'est pas presque complexe ni totalement réelle.

Un exemple simple d'une variété Riemannienne avec une structure presque complexe est la sphère de dimension  $S^6$ . Dans ce cas, la structure presque complexe est construite en utilisant les nombres de Cayley. Dans ce travail, nous allons étudier les sous-variétés de type CR de la sphère  $S^6$  de dimension 3 et 4. A. Gray a montré qu'il n'existe pas de sous-variété presque complexe de  $S^6$  de dimension 4. Cela implique que, dans notre cas, la sous-variété est toujours propre et donc que la dimension de la distribution presque complexe est 2. La dimension de la distribution totalement réelle est aussi 2.

Nous rappelons que B. Y. Chen a introduit un invariant  $\delta_M$  pour une variété  $M$  de dimension  $n$  :

$$\delta_M = \frac{1}{2}\tau - \inf K,$$

où

$$\inf K(p) = \inf\{K(\pi), \text{courbure sectionnelle } \pi \subseteq T_p(M)\}$$

et  $\tau$  est la courbure scalaire. Il a montré que, pour une sous-variété  $M$  d'un espace de courbure sectionnelle constante  $c$ , nous avons toujours

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c,$$

où  $\|H\|$  est la norme de la courbure moyenne. Une sous-variété est appelée idéale (dans le sens de Chen) si elle réalise l'égalité dans cette inégalité.

Dans ma thèse, nous regardons les sous-variétés minimales de type CR de la sphère de dimension 3 et 4. Dans les deux cas, nous obtenons une classification des sous-variétés qui sont contenues dans une sphère de dimension  $S^5$  (avec  $S^5$  totalement géodésique dans  $S^6$ ). Dans le deuxième cas, nous obtenons aussi une classification des sous-variétés idéales.

Mots clés et phrases : sphère  $S^6$ , structure presque complexe, sous-variété idéale, sous-variété de type CR, sous-variété minimale, sous-variété totalement géodésique.

# CR submanifolds of the six-sphere

## Abstract

Let  $M$  be a Riemannian submanifold of a manifold  $\widetilde{M}$  with an almost complex structure  $J$ . It is natural to investigate submanifold  $M$  according to its relations to  $J$ . If the tangent bundle of  $M$  is invariant for  $J$ , then  $M$  is an almost complex submanifold, and if  $J$  maps tangent bundle into the corresponding normal bundle  $M$  is a totally real submanifold. A natural generalization of almost complex and totally real submanifolds are CR submanifolds. A submanifold  $M$  is called a CR submanifold if there exists on  $M$  a differentiable almost complex distribution  $H$  such that its orthogonal complement  $H^\perp \subset TM$  is a totally real distribution. A CR submanifold is called proper if its neither totally real nor almost complex. It is well known that the sphere  $S^6$  admits an almost complex, nearly Kaehler structure  $J$ , constructed using the Cayley algebra. We will investigate CR submanifolds of sphere  $S^6$ . A. Gray showed that there are no 4-dimensional almost complex submanifolds of sphere  $S^6$ , so the dimension of the almost complex distribution, in nontrivial case has to be 2, and therefore the dimension of the corresponding totally real distribution is less or equal 2.

B. Y. Chen introduced an invariant  $\delta_M$  of the  $n$ -dimensional submanifold of the real space form of constant sectional curvature  $c$  in the following way

$$\delta_M = \frac{1}{2}\tau - \inf K,$$

where

$$\inf K(p) = \inf \{K(\pi), \text{sectional plane curvature } \pi \subseteq T_p(M)\}$$

and  $\tau$  is the scalar curvature, and proved

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)} \|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c,$$

where  $\|H\|$  is norm of the mean curvature vector. It is interesting to investigate when the submanifold  $M$  satisfies an equality in the above inequality. Then we say that  $M$  satisfies Chen's basic equality.

We investigate 3 and 4-dimensional minimal submanifolds of the six-sphere. For 4-dimensional case we classify such submanifolds that satisfy Chen's basic equality, and in both dimensions we investigate submanifolds that are contained in a totally geodesic  $S^5$ . In the last chapter we investigate the minimal immersions of a surface into the sphere  $S^{2n+1}$  whose first  $(n-2)$  ellipses of curvature are circles. For such immersion we construct a sequence of minimal immersions that satisfy the same condition on the ellipse of curvature and characterize immersions whose sequences contain two immersions congruent over an orientation reversing isometry.

Key words and phrases : sphere  $S^6$ , nearly Kaehler structure, Chen's basic equality, CR submanifold, minimal submanifold, totally geodesic submanifold.

# CR podmnogostrukosti šestodimenzione sfere

## Apstrakt

Neka je  $M$  Rimanova podmnogostrukost mnogostrukosti  $\widetilde{M}$  sa skoro kompleksnom strukturom  $J$ . Prirodno je ispitivati podmnogostrukost  $M$  u skladu sa njenim odnosom prema  $J$ . Ukoliko je tangentno raslojenje podmnogostrukosti  $M$  invarijantno u odnosu na  $J$ , tada je  $M$  skoro kompleksna podmnogostrukost. Ako  $J$  preslikava tangentno raslojenje u normalno raslojenje tada je  $M$  totalno realna podmnogostrukost. Prirodna generalizacija skoro kompleksnih i totalno realnih podmnogostrukosti su CR podmnogostrukosti. Podmnogostrukost  $M$  je CR podmnogostrukost ako na  $M$  postoji diferencijabilna skoro kompleksna distribucija  $H$  takva da je njen ortogonalni komplement  $H^\perp \subset TM$  totalno realna distribucija. CR podmnogostrukost je prava ako nije ni totalno realna ni skoro kompleksna. Poznato je da na sferi  $S^6$  postoji skoro kompleksna blizu Kelerova struktura  $J$  konstruisana pomoću Kejljeve algebre. Ispitivaćemo CR podmnogostrukosti sfere  $S^6$ . U netrivialnom slučaju dimenzija skoro kompleksne distribucije mora da bude 2, a zato je i dimenzija odgovarajuće totalno realne distribucije manja ili jednaka 2.

B. J. Čen je uveo invarijantu  $\delta_M$   $n$ -dimenzione podmnogostrukosti realne prostorne forme konstantne sekcione krivine  $c$  na sledeći način

$$\delta_M = \frac{1}{2}\tau - \inf K,$$

gde je

$$\inf K(p) = \inf\{K(\pi), \text{sekcione krivine ravni } \pi \subseteq T_p(M)\}$$

i  $\tau$  je skalarna krivina, i dokazao

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c,$$

gde je  $\|H\|$  norma vektora srednje krivine. Interesantno je ispitivati koje podmnogostrukosti  $M$  zadovoljavaju jednakost u navedenoj nejednakosti. Za takve podmnogostrukosti  $M$  kažemo da zadovoljavaju Čenovu jednakost.

Ispitivaćemo trodimenzione i četvorodimenzione minimalne podmnogostrukosti šestodimenzione sfere. U četvorodimenzionom slučaju klasifikujemo takve podmnogostrukosti koje zadovoljavaju Čenovu jednakost, a u obe dimenzije izučavamo podmnogostrukosti koje pripadaju i totalno geodezijskoj sferi  $S^5$ . Takodje u poslednjem poglavlju ispitujeemo minimalne imersije površi u neparno dimenzionalnu sferu  $S^{2n+1}$  koje zadovoljavaju uslov da su prvih  $(n-2)$  krivinske elipse višeg reda krugovi. Pokazujemo da se tada takvoj imersiji može pridružiti niz minimalnih imersija koje zadovoljavaju isti uslov vezan za krivinske elipse i dajemo karakterizaciju površi za koje postoje neka dva elementa ovog niza koji su izometrični putem indirektno izometrije.

Ključne reči i izrazi : sfera  $S^6$ , blizu Kelerova struktura, Čenova jednakost, CR podmnogostrukost, minimalna podmnogostrukost, totalno geodezijska podmnogostrukost.

Thèse en cotutelle entre les laboratoires

LAMAV  
Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis  
59313 Valenciennes Cedex 9  
FRANCE

Department of Mathematics  
University of Belgrade  
11000 Belgrade  
SERBIE

## Résumé substantiel

Ce travail est constitué de deux grandes parties. Dans la première partie, nous regardons les sous-variétés de type CR de la sphère de dimension 6. Dans la deuxième partie de la thèse, nous continuons notre étude des sous-variétés minimales  $M$  d'une sphère  $S^m(1)$ .

Dans cette première partie, nous considérons  $M$  une sous-variété Riemannienne d'une variété presque complexe  $\widetilde{M}$ , où nous notons la structure presque complexe par  $J$ . Alors il est naturel de regarder les propriétés des sous-variétés par rapport à cette structure  $J$ . Si l'espace tangent reste invariant par  $J$ , nous dirons que la sous-variété est presque complexe. Par contre, si  $J$  envoie l'espace tangent dans l'espace normal, nous dirons qu'elle est totalement réelle. Une généralisation naturelle des sous-variétés presque complexes et des sous-variétés Lagrangiennes sont les sous-variétés de type CR. Nous disons qu'une sous-variété  $M$  est de type CR si elle admet une distribution presque complexe et que le complément orthogonal est totalement réel.

Une sous-variété de type CR est dite propre si la sous-variété n'est pas presque complexe ni totalement réelle.

Un exemple simple d'une variété Riemannienne avec une structure presque complexe est la sphère de dimension  $S^6$ . Dans ce cas, la structure presque complexe est construite en utilisant les nombres de Cayley. Nous développerons cette construction dans ce résumé.

D'abord, après une introduction sur la géométrie Riemannienne dans le Chapitre 2, nous introduisons la structure presque Kählerienne sur la sphère de dimension 3. Pour cela nous utilisons la multiplication sur les nombres de Cayley  $\mathcal{O}$  pour définir un produit vectoriel  $\times$  sur les nombres imaginaires de Cayley, que nous pouvons identifier avec  $\mathbb{R}^7$  en utilisant la formule :

$$u \times v = \frac{1}{2}(uv - vu), \quad (1)$$

Nous trouvons aussi que

$$u \times (v \times w) + (u \times v) \times w = 2(u, w)v - (u, v)w - (w, v)u, \quad (2)$$

et que la forme  $(u \times v, w)$  est antisymétrique en  $u, v, w$ .

Réciproquement, nous pouvons aussi exprimer la multiplication de Cayley sur  $\mathcal{O}$  en terme de produit vectoriel et de produit scalaire par

$$(r + u)(s + v) = rs - (u, v) + rv + su + (u \times v), \quad r, s \in Re(\mathcal{O}), u, v \in Im(\mathcal{O}). \quad (3)$$

Le groupe de Lie  $G_2$ , groupe des automorphismes de  $\mathcal{O}$ , est le groupe des isométries de  $\mathbb{R}^7$  qui préserve le produit vectoriel.

Nous disons qu'un repère orthonormé  $e_1, \dots, e_7$  est un repère de  $G_2$  si et seulement si

$$e_3 = e_1 \times e_2 \quad , \quad e_5 = e_1 \times e_4 \quad , \quad e_6 = e_2 \times e_4 \quad , \quad e_7 = e_3 \times e_4. \quad (4)$$

Il faut remarquer que si  $e_1, e_2, e_4$  sont des vecteurs unitaires qui sont 2 à 2 orthogonaux avec en plus  $e_4$  orthogonal à  $e_1 \times e_2$ , alors  $e_1, e_2, e_4$  déterminent un unique repère orthonormé



de  $G_2$  et nous avons les expressions suivantes pour le produit vectoriel :

x	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	0	$e_3$	$-e_2$	$e_5$	$-e_4$	$-e_7$	$e_6$
$e_2$	$-e_3$	0	$e_1$	$e_6$	$e_7$	$-e_4$	$-e_5$
$e_3$	$e_2$	$-e_1$	0	$e_7$	$-e_6$	$e_5$	$-e_4$
$e_4$	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	0	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_5$	$e_4$	$-e_7$	$e_6$	$-e_1$	0	$-e_3$	$e_2$
$e_6$	$e_7$	$e_4$	$-e_5$	$-e_2$	$e_3$	0	$-e_1$
$e_7$	$-e_6$	$e_5$	$e_4$	$-e_3$	$-e_2$	$e_1$	0

La structure presque Kählerienne de  $S^6(1)$  est alors construite de la façon suivante :

$$Ju = x \times u, \quad u \in T_x S^6(1), \quad x \in S^6(1).$$

Il est évident que  $J$  est une structure presque complexe qui est compatible avec la métrique habituelle sur  $S^6(1)$ . Dire que c'est une structure presque Kählerienne revient à dire que le tenseur  $G$  de type  $(2, 1)$  définie par

$$G(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X J)Y,$$

où  $\tilde{\nabla}$  est la connexion de Levi-Civita connexion sur  $S^6(1)$  est antisymétrique. Un calcul élémentaire montre que

$$G(X, Y) = X \times Y - \langle x \times X, Y \rangle x.$$

Après dans le chapitre 3, nous rappelons la construction d'un invariant Riemannien  $\delta_M$ , introduit B.Y. Chen pour une variété  $M$  de dimension  $n$  :

$$\delta_M = \frac{1}{2}\tau - \inf K,$$

où

$$\inf K(p) = \inf\{K(\pi), \text{courbure sectionnelle } \pi \subseteq T_p(M)\}$$

et  $\tau$  est la courbure scalaire. Nous rappelons aussi explicitement la preuve du résultat suivant qui montre que pour une sous-variété  $M$  d'un espace de courbure sectionnelle constante  $c$ , nous avons toujours

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c.$$

Dans cette inégalité,  $\|H\|$  est la norme de la courbure moyenne. Une sous-variété est appelée idéale (dans le sens de Chen) si elle réalise l'égalité dans cette inégalité. Nous montrons également le théorème qui indique quand une sous-variété réalise l'égalité dans l'inégalité de Chen :

**Théorème 1** Une sous-variété  $M^n$  d'une variété à courbure sectionnelle constante  $\tilde{M}^m$  réalise l'égalité dans l'inégalité de Chen si et seulement si il existe une base orthonormale  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m$ , où  $e_1, \dots, e_n$  sont des vecteurs tangents et  $e_{n+1}, \dots, e_m$  des vecteurs normaux, telle que les opérateurs de forme  $A_r = A_{e_r}, r = n+1, \dots, m$  satisfont

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{bmatrix}, \quad a + b = \mu, \quad (5)$$

$$A_r = \begin{bmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \cdots & 0 \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad r = n+2, \dots, m. \quad (6)$$

Dans les chapitres 3 et 4, nous étudions les sous-variétés de type CR de la sphère  $S^6$ . Nous rappelons qu' A. Gray a montré qu'il n'existe pas de sous-variété presque complexe de  $S^6$  de dimension 4. Aussi chaque courbe et chaque hypersurface sont trivialement des variétés de type CR. Dans notre cas, où nous supposons que la sous-variété de type CR est toujours propre, cela implique que la dimension de la distribution presque complexe (qui est toujours un nombre pair) est nécessairement 2. Dans ce cas, la dimension de la distribution totalement réelle peut être égal à 1 ou 2. Ce qui fait que la dimension de  $M$  peut être 3 ou 4. Le cas de la dimension 3 est étudié au chapitre 3 et celui de la dimension 4 est étudié au chapitre 4.

Nous allons aussi supposer que la sous-variété est minimale. Dans les deux cas, nous obtenons une classification des sous-variétés qui sont contenues dans une sphère de dimension  $S^5$  (avec  $S^5$  totalement géodésique dans  $S^6$ ). Dans le deuxième cas, nous obtenons aussi une classification des sous-variétés idéales.

En particulier dans le chapitre 3, nous étudions les sous-variétés minimales de type CR en choisissant un repère orthonormé de  $G_2$  de la façon suivante. Nous prenons le champ de vecteur position  $p$ ,  $E_1$  et  $E_2 = JE_1$  une base orthonormée de la distribution presque complexe,  $E_3$  un champ de vecteurs qui engendre la distribution totalement réelle et les champs de vecteurs normaux  $E_4 = JE_3, E_5 = E_1 \times E_3$  et  $E_6 = E_2 \times E_3$ .

Bien sûr un tel repère n'est pas unique. Un autre repère de  $G_2$  avec les mêmes propriétés

est donné par :

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_1 &= \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2 \\
\tilde{E}_2 &= J\tilde{E}_1 = -\sin \theta E_2 + \cos \theta E_1 \\
\tilde{E}_3 &= \pm E_3 \\
\tilde{E}_4 &= \pm E_4 \\
\tilde{E}_5 &= \pm(\cos \theta E_5 + \sin \theta E_6) \\
\tilde{E}_6 &= \pm(-\sin \theta E_5 + \cos \theta E_6).
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $M$  est contenue dans une sphère totalement géodésique  $S^5$  dans  $S^6$ . Cela implique que  $S^5$  est l'intersection de  $S^6$  avec un hyperplan passant par l'origine. Donc il existe un champ de vecteurs  $V$  de longueur constante 1, normal à  $M$  et tangent à la sphère  $S^6$ . En utilisant ces propriétés, nous pouvons écrire

$$V = \rho E_4 + \tau E_5 + \sigma E_6.$$

Par la liberté de rotation, nous pouvons supposer que  $\tau = 0$  et comme la longueur de  $V$  est 1, nous avons aussi que  $\rho^2 + \sigma^2 = 1$ .

Après nous écrivons

$$\begin{aligned}
D_{E_1}E_1 &= -p + a_1E_2 + a_2E_3 + \alpha_1E_4 + \alpha_2E_5 + \alpha_3E_6, & D_{E_1}E_2 &= -a_1E_1 + a_3E_3 + \beta_1E_4 + \beta_2E_5 + \beta_3E_6, \\
D_{E_1}E_3 &= -a_2E_1 - a_3E_2 + \gamma_1E_4 + \gamma_2E_5 + \gamma_3E_6, & D_{E_1}E_4 &= -\alpha_1E_1 - \beta_1E_2 - \gamma_1E_3 + g_1E_5 + g_2E_6, \\
D_{E_1}E_5 &= -\alpha_2E_1 - \beta_2E_2 - \gamma_2E_3 - g_1E_4 + g_3E_6, & D_{E_1}E_6 &= -\alpha_3E_1 - \beta_3E_2 - \gamma_3E_3 - g_2E_4 - g_3E_5, \\
D_{E_2}E_1 &= b_1E_2 + b_2E_3 + \beta_1E_4 + \beta_2E_5 + \beta_3E_6, & D_{E_2}E_2 &= -p - b_1E_1 + b_3E_3 + \delta_1E_4 + \delta_2E_5 + \delta_3E_6, \\
D_{E_2}E_3 &= -b_2E_1 - b_3E_2 + \mu_1E_4 + \mu_2E_5 + \mu_3E_6, & D_{E_2}E_4 &= -\beta_1E_1 - \delta_1E_2 - \mu_1E_3 + h_1E_5 + h_2E_6, \\
D_{E_2}E_5 &= -\beta_2E_1 - \delta_2E_2 - \mu_2E_3 - h_1E_4 + h_3E_6, & D_{E_2}E_6 &= -\beta_3E_1 - \delta_3E_2 - \mu_3E_3 - h_2E_4 - h_3E_5, \\
D_{E_3}E_1 &= c_1E_2 + c_2E_3 + \gamma_1E_4 + \gamma_2E_5 + \gamma_3E_6, & D_{E_3}E_2 &= -c_1E_1 + c_3E_3 + \mu_1E_4 + \mu_2E_5 + \mu_3E_6, \\
D_{E_3}E_3 &= -p - c_2E_1 - c_3E_2 + \nu_1E_4 + \nu_2E_5 + \nu_3E_6, & D_{E_3}E_4 &= -\gamma_1E_1 - \mu_1E_2 - \nu_1E_3 + k_1E_5 + k_2E_6, \\
D_{E_3}E_5 &= -\gamma_2E_1 - \mu_2E_2 - \nu_2E_3 - k_1E_4 + k_3E_6, & D_{E_3}E_6 &= -\gamma_3E_1 - \mu_3E_2 - \nu_3E_3 - k_2E_4 - k_3E_5.
\end{aligned}$$

Grâce aux propriétés du produit vectoriel nous trouvons d'abord :

$$\begin{aligned}
g_2 &= -\gamma_2, & g_1 &= 1 + \gamma_3, & \alpha_1 &= -a_3, & \beta_1 &= a_2, & h_2 &= 1 - \mu_2, & h_1 &= \mu_3, \\
\delta_1 &= b_2, & b_3 &= -a_2, & k_1 &= \nu_3, & k_2 &= -\nu_2, & \mu_1 &= c_2, & \gamma_1 &= -c_3, \\
\alpha_3 &= \beta_2, & \alpha_2 &= -\beta_3, & \delta_3 &= -\beta_2, & \mu_2 &= \gamma_3 - 1, & \mu_3 &= -\gamma_2, \\
g_3 &= a_1 - c_3, & h_3 &= b_1 + c_2, & k_2 &= c_1 + \nu_1.
\end{aligned}$$

En plus en utilisant les propriétés de  $V$  nous avons aussi

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= 0, & b_2 &= a_3, & c_1 &= 0, & \beta_2 &= a_3 \frac{\rho}{\sigma}, & \beta_3 &= -a_2 \frac{\rho}{\sigma}, & c_3 &= \frac{\sigma(-\rho + a_1\sigma)}{\rho^2 + \sigma^2}, & \gamma_2 &= -\frac{b_1\rho\sigma}{\rho^2 + \sigma^2}, \\
c_2 &= -\frac{b_1\sigma^2}{\rho^2 + \sigma^2}, & \gamma_3 &= \frac{\rho(-\rho + a_1\sigma)}{\rho^2 + \sigma^2}, & E_1(\rho) &= \frac{b_1\rho\sigma^2}{\rho^2 + \sigma^2}, & E_1(\sigma) &= -\frac{b_1\rho^2\sigma}{\rho^2 + \sigma^2}, \\
E_2(\rho) &= \sigma\left(2 - \frac{\rho(-\rho + a_1\sigma)}{\rho^2 + \sigma^2}\right), & E_2(\sigma) &= \rho\left(-2 + \frac{\rho(-\rho + a_1\sigma)}{\rho^2 + \sigma^2}\right), & E_3(\rho) &= 0, & E_3(\sigma) &= 0.
\end{aligned}$$

Il s'en suit que les fonctions  $\sigma$  et  $\rho$  ne peuvent pas s'annuler simultanément. Cela implique que nous pouvons écrire  $\sigma = \rho t$ , où  $t$  est une fonction. Après, quitte à changer le signe de  $E_3$ , nous pouvons supposer que cette fonction est positive. Nous avons  $\rho^2(t^2 + 1) = 1$ , ce qui implique que la fonction  $t$  est une solution du système d'équations différentielles :

$$E_1(t) = -tb_1, \quad E_2(t) = -3 + a_1t - 2t^2, \quad E_3(t) = 0.$$

Les équations de Gauss et Codazzi impliquent que

$$\begin{aligned} a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad E_1(a_1) = 3a_1b_1, \quad E_1(b_1) = 3a_1\frac{1}{t} + 1 - 2a_1^2 + b_1^2, \\ E_2(a_1) = 2 - a_1^2 + 2b_1^2 + 3a_1^2\frac{1}{t}, \quad E_2(b_1) = 6b_1\frac{1}{t} - 3a_1b_1, \quad E_3(a_1) = 0, \quad E_3(b_1) = 0. \end{aligned}$$

Maintenant nous pouvons montrer les théorèmes suivants.

**Théorème 2** *Soit  $M$  une variété minimale de type CR de dimension 3. Supposons que  $M$  soit contenue dans une hypersphère de  $S^6$  et que  $b_1 = 0$ . Alors  $M$  est congruente à*

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) = (\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3, \sin x_2 \cos 2x_3, \cos x_1 \cos x_2 \sin x_3, 0, \\ - \sin x_2 \sin 2x_3, - \sin x_1 \cos x_2 \sin x_3). \end{aligned}$$

Un autre cas spécial est le cas où  $M$  réalise l'égalité dans l'inégalité de Chen. Nous montrons que cela ce produit si et seulement si

$$x = 2 + a_1^2t^2 + (1 + b_1^2)t^2 - a_1t(3 + t^2) = 0$$

et nous montrons aussi le

**Théorème 3** *Soit  $M$  une variété minimale de type CR de dimension 3. Supposons que  $M$  soit contenue dans une hypersphère de  $S^6$  et qu'elle réalise l'égalité dans l'inégalité de Chen. Alors  $M$  est congruente à*

$$f(t, u, v) = (\cos t \cos u \cos v, \sin t, \cos t \sin u \cos v, \cos t \cos u \sin v, 0, - \cos t \sin u \sin v, 0).$$

Après, toujours dans le chapitre 3, nous étudions le cas générique; c'est à dire le cas où ni la fonction  $b_1$  ni la fonction  $x$  s'annulent. Dans ce cas nous pouvons introduire des coordonnées sur  $M$  de la façon suivante. D'abord nous vérifions que la fonction  $x = 2 + a_1^2t^2 + (1 + b_1^2)t^2 - a_1t(3 + t^2)$  est une solution du système d'équations différentielles :

$$E_1(x) = 0, \quad E_2(x) = -6tx, \quad E_3(x) = 0. \tag{7}$$

Un calcul direct montre aussi que les conditions d'intégrabilité de :

$$\begin{aligned} E_1(\lambda) &= -\frac{b_1t^2}{1+t^2}, \\ E_2(\lambda) &= \frac{t(-1+a_1t)}{1+t^2}, \\ E_3(\lambda) &= 0, \end{aligned}$$

sont satisfaites. Nous appelons  $\lambda$ , une solution de cette équation différentielle. Après nous vérifions que les champs de vecteurs :

$$G_1 = x^{-\frac{2}{3}} b_1 t^2 E_1, \quad G_2 = \frac{1}{t} E_2, \quad G_3 = e^\lambda E_3,$$

satisfont  $[G_i, G_j] = 0$ , pour  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Cela veut dire que nous pouvons introduire des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  sur  $M$  telle que

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad G_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad G_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Malheureusement dans ce cas, il n'est pas possible d'intégrer pour trouver des formules explicites pour l'immersion et nous devons conclure en utilisant le théorème fondamental d'existence et d'unicité.

Après, dans le chapitre 4, nous étudions de la même façon les sous-variétés de type CR de dimension 4 et nous montrons les théorèmes suivants :

**Théorème 4** *Soit  $M$  une variété minimale de type CR de dimension 4. Supposons que  $M$  réalise l'égalité dans l'inégalité de Chen. Alors  $M$  est congruente à l'immersion*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = & (\cos x_4 \cos x_1 \cos x_2, \sin x_4 \sin x_1 \cos x_2, \\ & \sin 2x_4 \sin x_3 \cos x_2 + \cos 2x_4 \sin x_2, 0, \sin x_4 \cos x_1 \cos x_2, \\ & \cos x_4 \sin x_1 \cos x_2, \cos 2x_4 \sin x_3 \cos x_2 - \sin 2x_4). \end{aligned} \quad (8)$$

**Théorème 5** *Soit  $M$  une variété minimale de type CR de dimension 4. Supposons que  $M$  est contenue dans une hypersphère de  $S^6$ . Alors  $M$  est congruente à une des immersions suivantes*

1. *l'immersion qui réalise l'égalité dans l'inégalité de Chen :*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = & (\cos x_4 \cos x_1 \cos x_2, \sin x_4 \sin x_1 \cos x_2, \\ & \sin 2x_4 \sin x_3 \cos x_2 + \cos 2x_4 \sin x_2, 0, \sin x_4 \cos x_1 \cos x_2, \\ & \cos x_4 \sin x_1 \cos x_2, \cos 2x_4 \sin x_3 \cos x_2 - \sin 2x_4). \end{aligned} \quad (9)$$

2. *l'immersion*

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = & \frac{\sqrt{6}}{8} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} (3(\cos x_1 \cos x_2 + \cos x_3 \sin x_1) + \sqrt{2} \cos(\sqrt{3}x_4)), \right. \\ & (\sqrt{2} \cos(\sqrt{3}x_4) - \cos x_1 \cos x_2 - \cos x_3 \sin x_1), 2(\sin x_1 \sin x_3 - \cos x_1 \sin x_2), \\ & 0, \frac{1}{\sqrt{3}} (-3(\cos x_1 \sin x_2 + \sin x_1 \sin x_3) + \sqrt{2} \sin(\sqrt{3}x_4)), \quad (10) \\ & \left. (\cos x_1 \sin x_2 + \sin x_1 \sin x_3 + \sqrt{2} \sin(\sqrt{3}x_4)), 2(\cos x_3 \sin x_1 - \cos x_1 \cos x_2) \right), \end{aligned}$$

## 3. l'immersion

$$\begin{aligned}
f_3(y_1, y_2, y_3, y_4) = & \frac{1}{4}(((1 + \sqrt{2}) \cos y_2 + \cos y_3) \cos(y_1 - y_4) \\
& + (\cos y_2 + (1 - \sqrt{2}) \cos y_3) \cos(y_1 + y_4) \\
& + \sin y_2 \sin y_3((\sqrt{2} - 1) \sin(y_1 + y_4) - \sin(y_1 - y_4))), \\
& (((1 + \sqrt{2}) \cos y_3 - \cos y_2) \cos(y_1 - y_4) - ((\sqrt{2} - 1) \cos y_2 + \cos y_3) \cos(y_1 + y_4) \\
& + \sin y_2 \sin y_3(\sin(y_1 + y_4) - (1 + \sqrt{2}) \sin(y_1 - y_4))), \\
& \sqrt{8\sqrt{2} - 8}((1 + \sqrt{2})(\cos y_1 \cos y_3 \sin y_2 - \sin y_1 \sin y_3) \sin y_4 \\
& - \cos y_4(\cos y_3 \sin y_1 \sin y_2 + \cos y_1 \sin y_3)), 0, ((\cos y_2 + (1 - \sqrt{2}) \cos y_3) \sin(y_1 + y_4)) \\
& - (\cos(y_1 - y_4) + (\sqrt{2} - 1) \cos(y_1 + y_4)) \sin y_2 \sin y_3 \\
& - ((1 + \sqrt{2}) \cos y_2 + \cos y_3) \sin(y_1 - y_4), \\
& (-((1 + \sqrt{2}) \cos(y_1 - y_4) + \cos(y_1 + y_4) \sin y_2 \sin y_3 \\
& + (\cos y_2 - (1 + \sqrt{2}) \cos y_3) \sin(y_1 - y_4) - ((\sqrt{2} - 1) \cos y_2 + \cos y_3) \sin(y_1 + y_4)), \\
& - 4\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2} + 1}(\cos y_4(\cos y_1 \cos y_3 \sin y_2 - \sin y_1 \sin y_3) \\
& + (\sqrt{2} - 1)(\cos y_3 \sin y_1 \sin y_2 + \cos y_1 \sin y_3) \sin y_4)).
\end{aligned} \tag{11}$$

Dans la deuxième partie de la thèse, nous continuons notre étude des sous-variétés minimales  $M$  d'une sphère  $S^m(1)$ . Maintenant nous allons supposer que la dimension de  $M$  est 2 mais que la dimension de la sphère est arbitraire. Comme chaque sphère  $S^m(1)$  peut être vue comme une hypersphère dans une sphère de dimension  $S^{m+1}$ , nous pouvons supposer que  $m = 2n + 1$  et qu'il n'existe pas de sphère de dimension  $2n - 1$  contenant la surface qui soit totalement géodésique dans  $S^{2n+1}(1)$ .

Les outils de référence pour étudier les surfaces minimales sont les coordonnées isothermes et les séquences harmoniques. Soit  $z = x + iy$  une coordonnée locale isotherme pour la surface  $M$ . Nous notons  $\frac{\partial}{\partial z}$  par  $\partial$  et  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  par  $\bar{\partial}$ . Alors pour l'immersion  $f_0$ , les parties réelles et imaginaires des vecteurs  $f_1 = \partial f_0$  et  $\bar{f}_1 = \bar{\partial} f_0$  engendrent l'espace tangent.

Nous prenons  $(\ , \ )$  l'extension complexe bilinéaire du produit scalaire sur  $R^{2n+2}$ . Comme  $f_0$  and  $f_1$  sont orthogonales, nous avons  $(f_0, f_1) = 0$  et parce que  $z$  est une coordonnée isotherme, nous trouvons  $(f_1, f_1) = 0$ . Nous introduisons une fonction  $\omega_k$  par  $(f_1, \bar{f}_1) = e^{\omega_1}$ .

Suivant cette procédure pour  $k = 1, \dots, n - 1$ , nous pouvons définir  $f_{k+1}$  comme la composante de  $\partial f_k$  qui est orthogonale à  $\bar{f}_k$  par rapport à la métrique  $(\ , \ )$ . De cette façon nous avons :

$$\begin{aligned}
\partial f_k &= f_{k+1} + \partial \omega_k f_k \\
\bar{\partial} f_k &= -e^{\omega_k - \omega_{k-1}} f_{k-1},
\end{aligned} \tag{12}$$

où  $(f_k, \bar{f}_k) = e^{\omega_k}$ . Maintenant nous allons supposer que l'immersion est  $(2n-1)$ -orthogonale. Cela veut dire que  $f_0, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_{n-1}, \bar{f}_{n-1}$  sont mutuellement orthogonaux par rapport au produit scalaire hermitien.

Nous allons aussi supposer que  $(f_n, f_n) \neq 0$ . Cela veut dire que la surface est  $(2n-1)$ -orthogonale (ce qui implique par calcul direct la  $2n$ -orthogonalité) mais pas  $(2n+1)$ -orthogonale.

Nous avons toujours

$$\bar{\partial} f_n = -\frac{(f_n, \bar{f}_n)}{(f_{n-1}, \bar{f}_{n-1})} f_{n-1}.$$

ce qui implique que la fonction  $(f_n, f_n)$  est une fonction holomorphe. En utilisant cela, nous voyons que nous pouvons choisir une coordonnée complexe  $z$  telle que  $(f_n, f_n) = -1$ . Cette coordonnée est unique à rotation d'angle  $\frac{\pi}{n}$  près. Nous appelons ce type de coordonnée, une coordonnée adaptée. Nous écrivons  $f_n = a + ib$  où  $a$  et  $b$  sont des champs de vecteurs réels et nous trouvons que  $(a, a) - (b, b) = -1, (a, b) = 0$ .

Maintenant pour compléter notre repère, nous prenons  $N$ , réel et unitaire, tel que  $N$  soit orthogonal à  $f_0, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_n, \bar{f}_n$  et tel que  $\det(f_0, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_n, \bar{f}_n, N)i^n > 0$ . Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} \partial f_n &= e^{-\omega_{n-1}} \bar{f}_{n-1} + 2\partial\varphi \coth 2\varphi f_n + 2\frac{\partial\varphi}{\sinh 2\varphi} \bar{f}_n + \alpha N, \\ \bar{\partial} f_n &= -e^{-\omega_{n-1}} \cosh 2\varphi f_{n-1}, \\ \partial N &= -\frac{\alpha}{\sinh^2 2\varphi} (f_n + \cosh 2\varphi \bar{f}_n) \end{aligned} \quad (13)$$

où  $\alpha = (\partial f_n, N)$ .

Après nous définissons des applications :

$$p_{\varepsilon, \delta}(f_0) = \delta \frac{i f_n - \bar{f}_n}{2 \cosh^2 \varphi} + \varepsilon \tanh \varphi N, \quad (14)$$

où  $\varepsilon, \delta \in \{-1, 1\}$ . Comme  $p_{-\varepsilon, -\delta}(f_0) = -p_{\varepsilon, \delta}(f_0)$ , il y a seulement deux applications différentes. Pour simplifier, nous poserons  $p_{\varepsilon, \delta}(f_0) = p_0$ . Il est facile de voir que  $p_0$  est une immersion réelle dans la sphère  $S^{2n+1}$ .

**Théorème 6** *Soit  $f_0 : M \rightarrow S^{2n+1}$  une immersion minimale qui est  $(2n-1)$ -orthogonale. Alors  $p_{\varepsilon, \delta}$  définit aussi une immersion minimale dans  $S^{2n+1}$  qui induit la même structure conforme sur  $M$ . En plus  $p_{\varepsilon, \delta}$  est aussi  $(2n-1)$ -orthogonale et a la même coordonnée adaptée.*

Comme nous trouvons seulement deux nouvelles surfaces, nous allons poser :

(i) si  $n$  est pair

$$p_{\varepsilon, -1}(f_0) = -\frac{i f_n - \bar{f}_n}{2 \cosh^2 \varphi} + \varepsilon \tanh \varphi N, \quad (\delta = -1) \quad (15)$$

(ii) si  $n$  est impair

$$p_{1,\delta}(f_0) = \delta \frac{i}{2} \frac{f_n - \overline{f_n}}{\cosh^2 \varphi} + \tanh \varphi N, \quad (\varepsilon = 1). \quad (16)$$

Nous appelons ces constructions les (+) et (-) constructions, où le signe dépend de  $\varepsilon = \pm 1$  dans le premier cas, et de  $\delta = \pm 1$  dans le deuxième.

Pour finir ce chapitre, nous montrons que

$$p_-(p_+(f_0)) = p_+(p_-(f_0)) = f_0,$$

ce qui implique qu'à partir d'une telle surface minimale, nous obtenons toute une séquence de surfaces minimales. Nous déterminons également quand la séquence est symétrique (par rapport à une symétrie qui renverse l'orientation de  $S^{2n+1}$ ).



# Table des matières

Résumé . . . . .	2
Abstract . . . . .	3
Apstrakt . . . . .	4
Résumé substantiel . . . . .	6
Predgovor . . . . .	19
<b>1 Rimanova i kompleksna geometrija . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>1.1 Rimanove mnogostrukosti . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>1.2 Rimanove podmnogostrukosti . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>1.3 Kompleksne i skoro kompleksne mnogostrukosti . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>2 Sfera <math>S^6</math> . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.1 Sfera kao podmnogostrukost prostora <math>\mathbb{R}^7</math> . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.2 Podmnogostrukosti sfere <math>S^6</math> . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>2.3 Blizu Kelerova struktura sfere <math>S^6</math> . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.4 Skoro kompleksne, totalno realne i CR podmnogostrukosti . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>3 Čenova nejednakost . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>4 Podmnogostrukosti dimenzije 3 . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>4.1 Trodimenzione CR podmnogostrukosti sfere <math>S^6</math> . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>4.2 Teoreme o postojanju i jedinstvenosti . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>4.3 Trodimenzione minimalne CR podmnogostrukosti koje zadovoljavaju Čenovu jednakost . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>4.4 Trodimenzione minimalne CR podmnogostrukosti koje pripadaju totalno geodezijskoj sferi <math>S^5</math> . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>5 Podmnogostrukosti dimenzije 4 . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>5.1 Četvorodimenzione CR podmnogostrukosti sfere <math>S^6</math> . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>5.2 Četvorodimenzione minimalne CR podmnogostrukosti koje zadovoljavaju Čenovu jednakost . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>5.3 Neminimalne CR podmnogostrukosti i Čenova jednakost . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>5.4 Četvorodimenzione minimalne CR podmnogostrukosti koje pripadaju totalno geodezijskoj sferi <math>S^5</math> . . . . .</b>	<b>84</b>
<b>6 Nizovi minimalnih površi u neparno dimenzionim sferama . . . . .</b>	<b>107</b>
<b>6.1 Minimalne površi u <math>S^{2n+1}</math> i harmonijski nizovi . . . . .</b>	<b>107</b>
<b>6.2 Pridružene minimalne površi u <math>S^{2n+1}</math> . . . . .</b>	<b>110</b>
<b>6.3 Medjusobno inverzne konstrukcije . . . . .</b>	<b>112</b>

6.4	Konstrukcija simetrične pokretne baze za $n = 2k$	113
6.5	Nizovi sa medjusobno izometričnim elementima	114
	Lista imena	118
	Literatura	119

## Predgovor

Na prostoru imaginarnih oktoniona  $Im\mathcal{O}$  definisan je vektorski proizvod koji je indukovano proizvodom Kejljevih brojeva. Pomoću njega na sferi  $S^6 \subset Im\mathcal{O}$  definišemo skoro kompleksnu strukturu  $J$  tj. endomorfizam tangentskog raslojenja sfere koji zadovoljava jednakost  $J^2 = -I$ , gde je  $I$  identičko preslikavanje. Pitanje da li je sfera i kompleksna podmnogostrukost je i dalje otvoreno. Grupa izometrija sfere  $S^6$  koje čuvaju Kejljev proizvod, a samim tim i skoro kompleksnu strukturu je  $G_2$ , podgrupa  $SO(7)$ . Struktura  $J$  je blizu Kelerova, u smislu da je  $(2, 1)$  tenzorsko polje  $G$  na  $S^6$  definisano sa  $G(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X J)Y$  kososimetrično, gde je  $\tilde{\nabla}$  Rimanova koneksija sfere  $S^6$ . Ovaj uslov za mnogostrukost je slabiji od uslova da neka mnogostrukost bude Kelerova, tj.  $G(X, Y) = 0$ . A. Grej je dokazao da sfera  $S^6$  nije Kelerova, tako da je u izvesnom smislu, ova skoro kompleksna struktura, najbolja. Za skoro kompleksnu mnogostrukost je prirodno posmatrati nekoliko zanimljivih klasa podmnogostrukosti:

- totalno realne, kod kojih  $J$  preslikava tangentsko raslojenje u normalno,
- skoro kompleksne, kod kojih je tangentsko raslojenje invarijantano za  $J$ ,
- CR podmnogostrukosti, čiji je tangentsko raslojenje direktna suma dva ortogonalna raslojenja, jednog invarijantnog za  $J$  i jednog koji se sa  $J$  preslikava u normalno.

Kažemo da je  $M$  prava CR podmnogostrukost ukoliko dimenzije ove dve distribucije nisu nula. Skoro kompleksne podmnogostrukosti sfere moraju biti parne dimenzije, dakle dimenzija 2 i 4. Medjutim A. Grej [28] je pokazao da ne postoje četvorodimenzione skoro kompleksne podmnogostrukosti sfere  $S^6$  i da je svaka kompleksna podmnogostrukost i minimalna. Klasu skoro kompleksnih krivih proučavao je R. Brajant [13], dok su DŽ. Bolton, L. Vranken i L. M. Vudvard [11] pokazali da postoje četiri osnovna tipa ovakvih krivih. Totalno realne podmnogostrukosti sfere mogu biti dimenzije manje ili jednake 3. Svaka jednodimenziona podmnogostrukost sfere je trivijalno i totalno realna. Totalno realne, minimalne podmnogostrukosti sfere dimenzije 2 su u potpunosti klasifikovane. Tangentsko raslojenje prave CR podmnogostrukosti je direktna suma skoro kompleksne distribucije koja je dimenzije 2 i totalno realne, koja stoga ne može biti dimenzije veće od 2, pa ovakve podmnogostrukosti mogu biti dimenzija 3 i 4.

B. J. Čen je uveo invarijantu podmnogostrukosti realne prostorne forme koja je ograničena sa gornje strane veličinom koja zavisi od kvadrata norme vektora glavne krivine. Na taj način je povezo unutrašnju invarijantu podmnogostrukosti sa spoljašnjom. Ukoliko podmnogostrukost dostiže to ograničenje kažemo da za njega važi Čenova jednakost. Za njih takodje važe i izvesna ograničenja vezana za dimenziju pridružene im kanonske distribucije.

Glavni predmet proučavanja ovog rada su prave, CR podmnogostrukosti sfere  $S^6$ . H. Hašimoto, K. Mašimo i K. Sekigava su u [30] pokazali da je Ojlerov broj kompaktno četvorodimenzione CR podmnogostrukosti sfere  $S^6$  nula, kao i neke druge topološke osobine, te da se ona razlikuje od  $S^4, S^2 \times S^2, CP^2$ . K. Sekigava je u [34] pokazao da u  $S^6$  ne postoje podmnogostrukosti koje su CR proizvodi, a T. Sasahara u [32] je pokazao da ukoliko trodimenziona CR podmnogostrukost sfere  $S^6$  zadovoljava Čenovu jednakost tada odgovarajuća distribucija ne može biti totalno realna. M. Djorić i L. Vranken su u [24]

klasifikovali minimalne trodimenzione CR podmnogostrukosti sfere  $S^6$  koje zadovoljavaju Čenovu jednakost, a u [25] pokazali da ukoliko trodimenziona CR podmnogostrukost sfere zadovoljava Čenovu jednakost tada mora biti i minimalna.

U ovom radu proučavamo minimalne četvorodimenzione CR podmnogostrukosti šestodimenzione sfere koje zadovoljavaju Čenovu jednakost i predstavljamo rezultate iz [6], [1], kao i minimalne trodimenzione i četvorodimenzione CR podmnogostrukosti koje pripadaju i totalno geodezijskoj sferi  $S^5$  koje su klasifikovane u [4] i [2]. Rad je organizovan na sledeći način. U prvom poglavlju izložene su osnovne definicije i teoreme vezane za Rimanovu geometriju i kompleksne mnogostrukosti. U drugom poglavlju je predstavljena sfera  $S^6$  kao podmnogostrukost  $\mathbb{R}^7$  kao i njene podmnogostrukosti, a zatim i konstrukcija blizu Kelerove strukture na  $S^6$ . U trećem poglavlju izložena je Čenova nejednakost. Četvrto i peto poglavlje sadrže originalne rezultate. Četvrto poglavlje se odnosi na trodimenzione, minimalne CR podmnogostrukosti  $S^6$ . Teoremom 10 data je veza skoro kontaktne i CR strukture podmnogostrukosti sfere i tvrdjenja o jedinstvenosti CR imersija u sferu  $S^6$  koja su izložena u Teoremama 11 i 12. Teorema 15 daje eksplicitne parametrizacije 3 tipa trodimenzionih, minimalnih, CR podmnogostrukosti sfere  $S^6$  koje pripadaju i totalno geodezijskoj sferi  $S^5$  i pokazano je da su jedinstvene do na  $G_2$  izometriju. Peto poglavlje je posvećeno minimalnim četvorodimenzionim CR podmnogostrukostima šestodimenzione sfere. Teoremom 16 je pokazano da su četvorodimenzione podmnogostrukosti koje zadovoljavaju Čenovu jednakost  $G_2$  kongruentne imersiji (88) i da pripadaju totalno geodezijskoj sferi  $S^5$ , dok su u Teoremi 17 date još dve eksplicitne parametrizacije četvorodimenzionih minimalnih, CR podmnogostukosti šestodimenzione sfere koje pripadaju i totalno geodezijskoj sferi  $S^5$  i pokazano je da su jedine do na  $G_2$  izometriju. U šestom poglavlju proučavamo minimalne imersije površi u neparnodimenzione sfere koje zadovoljavaju poseban uslov vezan za krivinske elipse višeg reda. Pokazujemo da sa takvoj imersiji može pridružiti niz minimalnih imersija površi koje adovoljavaju isti uslov vezan za krivinske elipse i proveravamo da li i kada je moguće da su neka dva elementa takvog niza izometrična putem indirektno izometrije.

Posebno se zahvaljujem dr Mirjani Djorić i dr Luku Vrankenu kako na nesebičnom trudu i vremenu koje su mi posvetili u savladjivanju izazova koje je diferencijalna geometrija postavljala pred mene, tako i na trenucima kada se beležnica i olovka odlože. Takođe, zahvaljujem se i dr Srdjanu Vukmiroviću na mnogobrojnim sugestijama koje su mi pomogle da poboljšam prvobitnu verziju ovog rada.

# 1 Rimanova i kompleksna geometrija

## 1.1 Rimanove mnogostrukosti

Neka je  $M$  realna  $n$ -dimenziona povezana diferencijabilna mnogostrukost. Označimo sa  $\{\mathcal{U}, x^h\}$  sistem koordinatnih okolina na  $M$ , pri čemu je  $\mathcal{U}$  okolina a  $x^h$  su lokalne koordinate na  $\mathcal{U}$ . Neka je  $p$  tačka mnogostrukosti  $M$ . Označimo sa  $\mathcal{D}_p$  skup funkcija definisanih na mnogostrukosti  $M$  koje su diferencijabilne u  $p$ . Diferencijabilna funkcija  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  je kriva na mnogostrukosti  $M$ . Ukoliko je  $\alpha(0) = p$ , preslikavanje  $\alpha'(0) : \mathcal{D}_p \rightarrow R$  definisano sa  $\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}$ ,  $f \in \mathcal{D}_p$  je **tangentni vektor** na krivu  $\alpha$  u tački  $p$ . Skup svih tangentnih vektora u tački  $p$  je vektorski prostor koji ćemo označavati sa  $T_pM$ . Neka je  $TM$  raslojenje na mnogostrukosti  $M$  čija je fibra u tački  $p$  prostor  $T_pM$ .  $TM$  je **tangentno raslojenje** mnogostrukosti  $M$ . Označimo sa  $\mathcal{F}(M)$  algebru diferencijabilnih funkcija na  $M$ , a  $\mathcal{X}(M)$  skup svih vektorskih polja na  $M$ . Pretpostavljamo da su sve mnogostrukosti i morfizmi klase  $C^\infty$ .

Linearna koneksija je preslikavanje  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  za koje važi:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \\ (ii) \quad & \nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad \nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y, \\ (iii) \quad & \nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \end{aligned}$$

gde  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ,  $f \in \mathcal{F}(M)$ .

Kovarijantni izvod funkcije  $f$  u odnosu na  $X$  se definiše sa

$$\nabla_X f = Xf.$$

Za proizvoljno tenzorsko polje  $S$  tipa  $(0, s)$  ili  $(1, s)$ , kovarijantni izvod  $\nabla_X S$  od  $S$  u odnosu na  $X$  se definiše sa

$$(\nabla_X S)(X_1, \dots, X_s) = \nabla_X(S(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^s S(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_s), \quad (17)$$

za bilo koja vektorska polja  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Slično se može definisati i kovarijantni izvod tenzorskog polja tipa  $(r, s)$ .

Za tenzorsko polje  $S$  kažemo da je paralelno u odnosu na linearnu koneksiju  $\nabla$  ukoliko je

$$\nabla_X S = 0$$

za svako vektorsko polje  $X$ .

Tensor torzije linearne koneksije  $\nabla$  je tenzorsko polje  $T$  tipa  $(1, 2)$  definisano sa

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

za proizvoljna vektorska polja  $X$  i  $Y$ , pri čemu je  $[X, Y]$  Lijeva zagrada vektorskih polja  $X$  i  $Y$  definisana sa

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf),$$

za proizvoljno  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Za linearnu koneksiju kaŕemo da je bez torzije ukoliko je  $T(X, Y) = 0$ , za sve  $X, Y$ . Vaŕi i sledeća teorema.

**Teorema 1** *Neka su  $X_1, X_2, \dots, X_n$  vektorska polja mnogostrukosti  $M$  definisana u nekoj okolini tačke  $p \in M$ , takva da  $X_1(p), X_2(p), \dots, X_n(p)$  čine bazu vektorskog prostora  $T_p M$  i da vaŕi  $[X_i, X_j] = 0, i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Tada postoji koordinatna okolina  $(U, u^h)$  tačke  $p$  takva da je  $X_i|_U = \frac{\partial}{\partial u^i}, i \in \{1, \dots, n\}$ .*

Tenzor krivine  $R$  linearne koneksije  $\nabla$  je tenzorsko polje tipa  $(1, 3)$  definisano sa

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (18)$$

gde su  $X, Y$  i  $Z$  vektorska polja na  $M$ .

Tenzorsko polje  $g$  tipa  $(0, 2)$  se naziva **Rimanova metrika** na  $M$  ukoliko je  $g$  simetrično (tj.  $g(X, Y) = g(Y, X)$ , za sva vektorska polja na  $M$ ) i pozitivno definitno (tj.  $g(X, X) \geq 0$  za sve  $X$  i  $g(X, X) = 0$  ako i samo ako je  $X = 0$ ). Mnogostrukost  $M$  snabdevena Rimanovom metrikom  $g$  se naziva **Rimanova mnogostrukost**.

Linearna koneksija  $\nabla$  na  $M$  je Rimanova koneksija ukoliko je Rimanova metrika  $g$  paralelna u odnosu na  $\nabla$ , tj. koristeći (17), ukoliko je

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

za sva vektorska polja  $X, Y, Z$  na  $M$ . Sledeća teorema je dobro poznata:

**Teorema 2** *Na Rimanovoj mnogostrukosti postoji jedna i samo jedna Rimanova koneksija bez torzije.*

Rimanova koneksija čija egzistencija i jedinstvenost su utvrđeni Teoremom 2 se naziva **Levi-Čivita koneksija** i u ovom radu će sve koneksije biti Levi-Čivita.

Dalje, koristeći tenzor krivine koneksije  $\nabla$  definisan relacijom (18), definisaćemo još neka tenzorska polja koja su interesantna u geometriji Rimanovih mnogostrukosti.

Prvo, definišimo Rimanov tenzor krivine tipa  $(0, 4)$  sa

$$R(X, Y, U, V) = g(R(X, Y)U, V), \quad (19)$$

za proizvoljna vektorska polja  $X, Y, U, V$  na  $M$ . Koristeći relacije (18) i (19) lako se proverava da vaŕe sledeće relacije:

$$\begin{aligned} R(X, Y, U, V) + R(Y, X, U, V) &= 0, \\ R(X, Y, U, V) + R(X, Y, V, U) &= 0, \\ R(X, Y, U, V) &= R(U, V, X, Y), \\ R(X, Y, U, V) + R(Y, U, X, V) + R(U, X, Y, V) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Dalje, neka je  $\{E_1, \dots, E_n\}$  lokalno polje ortonormiranih baza na  $M$ . Tada

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(E_i, X)Y, E_i), \quad (21)$$

definiše simetrično tenzorsko polje  $S$  tipa  $(0, 2)$  koje se naziva Ričijevo tenzorsko polje. Koristeći  $S$  definišemo skalarno polje  $\tau$ , koje se naziva skalarna krivina od  $M$ , sa

$$\tau = \sum_{i=1}^n S(E_i, E_i). \quad (22)$$

Definicije Ričijevog tenzora i skalarne krivine ne zavise od izbora polja ortonormiranih baza.

Za svaku ravan  $\gamma$  odredjenu ortonormiranim vektorima  $X$  i  $Y$  u tangentnom prostoru  $T_p M$ ,  $p \in M$ , definišemo sekciju krivine  $K(\gamma)$  sa

$$K(\gamma) = g(R(X, Y)Y, X). \quad (23)$$

Lako se proverava da  $K(\gamma)$  ne zavisi od izbora ortonormirane baze  $\{X, Y\}$  ravni  $\gamma$ . Ukoliko je  $K(\gamma)$  konstantno za sve ravni  $\gamma$  u  $T_p M$  i za sve tačke  $p$  iz  $M$ , tada se  $M$  naziva prostor konstantne sekcione krivine ili realna prostorna forma. Navedimo i sledeću (Šurovu) teoremu:

**Teorema 3** *Neka je  $M$  povezana Rimanova mnogostrukost dimenzije  $n > 2$ . Ukoliko sekciona krivina  $K(\gamma)$  zavisi samo od tačke  $p$ , tada je  $M$  realna prostorna forma.*

Realnu prostornu formu konstantne sekcione krivine  $c$  ćemo označavati sa  $R(c)$ . Tada je tenzor krivine mnogostrukosti  $R(c)$  dat sa

$$R(X, Y)Z = c\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}, \quad (24)$$

za proizvoljna vektorska polja  $X, Y, Z$  na  $M$ .

Ukoliko je tenzor krivine  $R = 0$ , tj.  $M$  je prostor krivine 0, kažemo da je  $M$  lokalno euklidski prostor.

## 1.2 Rimanove podmnogostrukosti

Neka je dato diferencijabilno preslikavanje  $f$  mnogostrukosti  $M$  u drugu mnogostrukost  $\widetilde{M}$ . Diferencijal preslikavanja  $f$  u tački  $p \in M$  je linearno preslikavanje  $(f_*)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \widetilde{M}$  definisano na sledeći način: za svako  $X \in T_p M$  izaberimo krivu  $\tau(t)$  u  $M$  tako da je  $X$  tangentni vektor za  $\tau(t)$  u  $p = \tau(t_0)$ . Tada je  $(f_*)_p(X)$  tangentni vektor za krivu  $f(\tau(t))$  u  $f(p) = f(\tau(t_0))$ . Može se pokazati da  $(f_*)_p$  ne zavisi od izabrane krive. Ako je  $g$  funkcija u okolini  $f(p)$ , tada direktno sledi da važi  $((f_*)_p X)(g) = X(g \circ f)$ . Na ovaj način preslikavanje  $f : M \rightarrow \widetilde{M}$  indukuje preslikavanje  $(f_*)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \widetilde{M}$ . Preslikavanje  $f : M \rightarrow \widetilde{M}$  ima rang  $r$  u tački  $p \in M$  ako je dimenzija  $(f_*)_p(T_p M)$  jednaka  $r$ . Preslikavanje  $f : M \rightarrow \widetilde{M}$  se zove potapanje ili imersija<sup>1</sup> ako je preslikavanje  $(f_*)_p$  injektivno za svaku tačku  $p \in M$ , tj.  $\dim((f_*)_p(T_p M)) = \dim M$ . Tada kažemo i da je  $M$  potopljena podmnogostrukost mnogostrukosti  $\widetilde{M}$ , pri čemu se  $\widetilde{M}$  naziva i ambijentni prostor mnogostrukosti  $M$ . Kada je

<sup>1</sup>"immersion"

potapanje  $f$  injektivno, onda  $f$  zovemo smeštanje<sup>2</sup>  $M$  u  $\widetilde{M}$  i kažemo da je podmnogostrukost  $M$  (tj.  $f(M)$ ) smeštena podmnogostrukost mnogostrukosti  $\widetilde{M}$ .

Neka su  $M$  i  $\widetilde{M}$  Rimanove mnogostrukosti redom sa Rimanovim metrikama  $g$  i  $\widetilde{g}$ . Preslikavanje  $f : M \rightarrow \widetilde{M}$  je izometrija u tački  $p \in M$  ukoliko je

$$g(X, Y) = \widetilde{g}((f_*)_p X, (f_*)_p Y) \quad (25)$$

za sve  $X, Y \in T_p M$ . U ovom slučaju,  $(f_*)_p$  je injektivno (jer  $(f_*)_p X = 0$  povlači  $X = 0$ ). Odavde sledi da je preslikavanje  $f$  koje je izometrija u svakoj tački iz  $M$  potapanje, koje zovemo izometrijska imersija. Ukoliko za imersiju  $f$  važi relacija (25) kažemo da metrika  $\widetilde{g}$  indukuje metriku  $g$ .

Neka je  $f : (M, g) \rightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$  izometrijska imersija. Zbog jednostavnijeg označavanja ćemo identifikovati  $X$  sa njegovom slikom  $f_*(X)$ , tj. izostavljamo  $f_*$  i obe metrike ćemo označavati sa  $g$ . Označimo sa  $TM$  i  $T\widetilde{M}$  tangentna raslojenja mnogostrukosti  $M$  i  $\widetilde{M}$ , redom. Ako za tangentni vektor  $\xi_p$  mnogostrukosti  $\widetilde{M}$  u tački  $p \in M$  važi

$$g(X_p, \xi_p) = 0$$

za proizvoljni tangentni vektor  $X_p$  podmnogostrukosti  $M$ , onda kažemo da je  $\xi_p$  normalni vektor podmnogostrukosti  $M$  u  $\widetilde{M}$ , a sa  $T^\perp M$  označavamo vektorsko raslojenje svih normalnih vektora od  $M$  u  $\widetilde{M}$ . Tada je

$$T\widetilde{M} |_M = TM \oplus T^\perp M.$$

Ukoliko su  $X$  i  $Y$  vektorska polja tangentna na  $M$  i  $\widetilde{\nabla}$  Levi-Čivita koneksija na  $\widetilde{M}$ , tada je

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (26)$$

pri čemu su  $\nabla_X Y$  i  $h(X, Y)$  redom tangentna i normalna komponenta od  $\widetilde{\nabla}_X Y$ . Formula (26) se naziva Gausova formula.

**Teorema 4** *Tenzorsko polje  $\nabla$  je Levi-Čivita koneksija u odnosu na indukovanu metriku  $g$  na  $M$ , a  $h(X, Y)$  je simetrično  $(0, 2)$  tenzorsko polje na  $M$  sa vrednostima u normalnom raslojenju, koje se naziva druga fundamentalna forma podmnogostrukosti  $M$ .*

Neka je  $\xi$  normalno, a  $X$  tangentno vektorsko polje na  $M$ . Tada možemo razložiti  $\widetilde{\nabla}_X \xi$  na tangentnu i normalnu komponentu na sledeći način

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi, \quad (27)$$

gde je  $-A_\xi X$  tangentna, a  $\nabla_X^\perp \xi$  normalna komponenta. Može se dokazati da je  $A_\xi$  simetrična linearna transformacija tangentnog prostora u svakoj tački podmnogostrukosti  $M$  koja se naziva operator oblika, a  $\nabla^\perp$  metrička koneksija normalnog raslojenja  $T^\perp M$  u

---

<sup>2</sup>"imbedding"



odnosu na indukovanu metriku na  $T^\perp M$ , koja se naziva normalna koneksija. Razlaganje (27) naziva se Vajngartenova formula.

Koristeći linearnu koneksiju  $\nabla^\perp$  i Levi-Čivita koneksiju na  $M$ , možemo definisati kovarijantni izvod od  $h$  sa

$$(\nabla h)(X, Y, Z) = (\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z), \quad (28)$$

za proizvoljna vektorska polja tangenta na  $M$ .

**Lema 1** *Neka su  $X$  i  $Y$  tangenta, a  $\xi$  normalno vektorsko polje na  $M$ . Tada*

$$g(A_\xi X, Y) = g(h(X, Y), \xi). \quad (29)$$

**Dokaz:** Iz  $g(Y, \xi) = 0$  diferenciranjem i pomoću (26) i (27) sledi

$$\begin{aligned} 0 &= g(\tilde{\nabla}_X Y, \xi) + g(Y, \tilde{\nabla}_X \xi) \\ &= g(\nabla_X Y, \xi) + g(h(X, Y), \xi) - g(Y, A_\xi X) + g(Y, \nabla_X^\perp \xi) \\ &= g(h(X, Y), \xi) - g(A_\xi X, Y) \end{aligned}$$

odakle sledi tvrdjenje. ■

Podmногоstrukost  $M$  Rimanove mnogostrukosti  $\tilde{M}$  je totalno geodezijska ukoliko su geodezijske linije mnogostrukosti  $M$  ujedno i geodezijske linije ambijentne mnogostrukosti  $\tilde{M}$ . Tada važi i teorema:

**Teorema 5** *Neka je  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  izometrijsko potapanje Rimanove mnogostrukosti  $M$  u Rimanovu mnogostrukost  $\tilde{M}$ . Tada je  $M$  totalno geodezijska u  $\tilde{M}$  ako i samo ako je  $h = 0$ , tj.  $A_\xi = 0$  za svako  $\xi \in T^\perp M$ .*

Pri tome, za tačku  $p$  podmногоstrukosti  $M$  kažemo da je totalno geodezijska ukoliko je  $h(X_p, Y_p) = 0$  gde su  $X$  i  $Y$  tangenta polja na  $M$ . Totalno geodezijske podmногоstrukosti euklidskog prostora su njegovi afini potprostori, a totalno geodezijske podmногоstrukosti sfere su velike sfere.

Ako je za normalno vektorsko polje  $\xi$  na  $M$ ,  $A_\xi$  proporcionalno identičkom preslikavanju, tj.

$$A_\xi = \rho I$$

za neku funkciju  $\rho$ , onda je  $\xi$  umbiličko sečenje, a  $M$  umbilička podmногоstrukost u odnosu na  $\xi$ . Ako je  $M$  umbilička u odnosu na svako normalno vektorsko polje, onda kažemo da je  $M$  totalno umbilička.

Neka je  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-n}$  ortonormirana baza normalnog prostora  $T_p^\perp M$  u tački  $p \in M$ , pri čemu su  $m$  i  $n$ , redom dimenzije mnogostrukosti  $\tilde{M}$  i  $M$  i neka je

$$H = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m-n} \text{tr} A_{\xi_k} \xi_k. \quad (30)$$

Vektor  $H$  je normalan vektor u tački  $p$  koji ne zavisi od izbora ortonormirane baze normalnog prostora i naziva se vektorom srednje krivine.

Podmnogostrukost  $M$  je **minimalna** ukoliko je vektor srednje krivine jednak nuli u svakoj tački, odnosno ako je trag transformacije  $A_\xi$  jednak nuli za proizvoljni normalni vektor  $\xi$ .

Primetimo da je svaka podmnogostrukost  $M$  koja je minimalna i totalno umbilička, ujedno i totalno geodezijska.

Označimo sa  $\tilde{R}$  i  $R$  tenzore krivine mnogostrukosti  $\tilde{M}$  i  $M$ . Koristeći definiciju (18) tenzora krivine, Gausovu (26) i Vajngartenovu formulu (27), kao i (28), dobijamo

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + A_{h(X, Z)}Y - A_{h(Y, Z)}X \\ &\quad + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) \end{aligned} \quad (31)$$

za proizvoljna vektorska polja  $X, Y$  i  $Z$  tangentna na  $M$ .

Dalje, korišćenjem (29), (31) i (19), za proizvoljno vektorsko polje  $W$  tangentno na  $M$ , dobijamo Gausovu jednačinu

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) - g(h(X, W), h(Y, Z)) + g(h(X, Z), h(Y, W)). \quad (32)$$

Takodje, koristeći jednačinu (31), vidimo da je normalna komponenta od  $\tilde{R}(X, Y)Z$  data sa

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z). \quad (33)$$

Jednačina (33) se zove **Kodacijeva jednačina**. Dalje, označimo sa  $R^\perp$  tenzor krivine normalne koneksije  $\nabla^\perp$ . Slično, koristeći Gausovu (26) i Vajngartenovu formulu (27), za normalna vektorska polja  $\xi$  i  $\eta$  i tangentna vektorska polja  $X$  i  $Y$ , važi sledeća jednačina koja se zove **jednčina Ričija**

$$\tilde{R}(X, Y, \xi, \eta) = R^\perp(X, Y, \xi, \eta) - g([A_\xi, A_\eta]X, Y). \quad (34)$$

Ukoliko je  $M$  podmnogostrukost Rimanove mnogostrukosti  $R^m(c)$  konstantne sekcione krivine  $c$  tada pomoću (24) sledi da jednačine Gausa, Kodacija i Ričija imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= c(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)) \\ &\quad + g(h(X, W), h(Y, Z)) - g(h(X, Z), h(Y, W)), \end{aligned} \quad (35)$$

$$(\tilde{\nabla}_X h)(Y, Z) = (\tilde{\nabla}_Y h)(X, Z), \quad (36)$$

$$R^\perp(X, Y, \xi, \eta) = g([A_\xi, A_\eta](X), Y). \quad (37)$$

### 1.3 Kompleksne i skoro kompleksne mnogostrukosti

Neka je  $M$  povezan, Hausdorfov topološki prostor sa prebrojivom bazom.  $M$  je kompleksna mnogostrukost dimenzije  $n$  ako postoji otvoreno pokrivanje  $\{U_a, a \in A\}$  od  $M$ , i za svako  $a \in A$  postoji homeomorfizam  $f_a$  iz  $U_a$  na otvoreni podskup  $D_a \subset \mathbb{C}^n$ , takvi da je

za sve  $a, b \in A$ , za koje je  $U_a \cap U_b \neq \emptyset$ , preslikavanje  $f_a \circ f_b^{-1} : f_b(U_a \cap U_b) \rightarrow f_a(U_a \cap U_b)$  biholomorfno<sup>3</sup>.

Kako je  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ ,  $M$  je ujedno i  $2n$ -dimenziona diferencijabilna mnogostrukost, koja se označava sa  $M_{\mathbb{R}}$ . Kompleksna mnogostrukost  $M$  se tada naziva kompleksnom strukturom na  $M_{\mathbb{R}}$ . Neka su  $(z_1, \dots, z_n)$  lokalne holomorfne koordinate u okolini tačke  $p \in M$ , gde je  $z_i = x_i + iy_i$ . Tada je  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$  lokalna pokretna baza tangentskog raslojenja realne mnogostrukosti  $M_{\mathbb{R}}$ . Tangentno raslojenje kompleksne mnogostrukosti  $M$  je razapeto sa  $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\}$ , gde je

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

Definišimo endomorfizam  $J$  tangentskog raslojenja realne mnogostrukosti  $M_{\mathbb{R}}$  sa

$$J : T(M_{\mathbb{R}}) \rightarrow T(M_{\mathbb{R}})$$

$$J \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad J \frac{\partial}{\partial y_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Endomorfizam  $J$  zadovoljava jednakost

$$J^2 = -I,$$

gde je  $I$  identičko preslikavanje tangentskog raslojenja realne mnogostrukosti  $M_{\mathbb{R}}$ , što ga ujedno čini i izomorfizmom.

Endomorfizam  $J$  tangentskog raslojenja realne diferencijabilne mnogostrukosti  $N$  koji zadovoljava jednakost  $J^2 = -I$  zove se skoro kompleksna struktura na mnogostrukosti  $N$ . Tada za  $N$  kažemo da je skoro kompleksna mnogostrukost. Ako na  $N$  postoji skoro kompleksna struktura, dimenzija mnogostrukosti  $N$  je paran broj i  $N$  je orijentabilna.

Iz prethodnog direktno sledi da za  $n$ -dimenzionu kompleksnu mnogostrukost  $M$  postoji prirodno indukovana skoro kompleksna struktura  $J$  mnogostrukosti  $M_{\mathbb{R}}$ , odnosno  $M_{\mathbb{R}}$  je  $2n$ -dimenziona skoro kompleksna mnogostrukost.

Neka je  $N$  diferencijabilna mnogostrukost sa skoro kompleksnom strukturom  $J$ . Ako na  $N$  postoji kompleksna struktura koja indukuje  $J$  tada kažemo da je struktura  $J$  integrabilna.

Neka je  $J$  skoro kompleksna struktura diferencijabilne mnogostrukosti  $N$ . Tenzorsko polje tipa  $(1, 2)$  dato sa

$$N(X, Y) = 2\{[JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]\},$$

gde su  $X$  i  $Y$  tangentska polja mnogostrukosti  $N$ , naziva se tenzor torzije skoro kompleksne strukture  $J$ . Važi sledeća teorema.

**Teorema 6** *Skoro kompleksna struktura  $J$  diferencijabilne mnogostrukosti  $N$  je integrabilna ako i samo ako je tenzorsko polje torzije strukture  $J$  jednako nuli.*

<sup>3</sup>Preslikavanje  $f : U \rightarrow V$  je biholomorfno ako je homeomorfizam i ako su preslikavanja  $f$  i  $f^{-1}$  holomorfna.

Rimanova mnogostrukost  $(N, g)$  sa skoro kompleksnom strukturom  $J$  je hermitska ako za proizvoljna tangentna vektorska polja  $X$  i  $Y$  važi

$$g(JX, JY) = g(X, Y),$$

odnosno, ako je  $J$  izometrija.

Neka je  $N$  hermitska mnogostrukost,  $\tilde{\nabla}$  Levi-Čivita koneksija na  $N$  i  $\Phi$  2-forma, koja se definiše na sledeći način

$$\Phi(X, Y) = g(X, JY)$$

koju zovemo fundamentalom formom. Diferenciranjem dobijamo

$$\begin{aligned} & (\tilde{\nabla}_Z \Phi)(X, Y) + \Phi(\tilde{\nabla}_Z X, Y) + \Phi(X, \tilde{\nabla}_Z Y) \\ &= g(\tilde{\nabla}_Z X, JY) + g(X, (\tilde{\nabla}_Z J)Y) + g(X, J(\tilde{\nabla}_Z Y)), \end{aligned}$$

tj.

$$(\tilde{\nabla}_Z \Phi)(X, Y) = g(X, (\tilde{\nabla}_Z J)Y),$$

odakle lako sledi da je forma  $\Phi$  zatvorena ako i samo ako je

$$(\tilde{\nabla}_X J)Y = 0$$

za proizvoljna tangentna vektorska polja  $X$  i  $Y$ .

Ako je fundamentalna forma  $\Phi$  hermitske mnogostrukosti  $N$  zatvorena tada kažemo da je  $N$  Kelerova mnogostrukost. Ako važi slabiji uslov

$$(\tilde{\nabla}_X J)X = 0, \quad X \in TN,$$

kažemo da je  $N$  blizu Kelerova mnogostrukost.

## 2 Sfera $S^6$

### 2.1 Sfera kao podmnogostrukost prostora $\mathbb{R}^7$

Posmatrajmo euklidski prostor  $\mathbb{R}^7$  sa standardnom metrikom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sfera  $S^6$  je jedinična sfera tog prostora :

$$S^6(1) = \{x \in \mathbb{R}^7 | \langle x, x \rangle = 1\},$$

koju ćemo kraće označavati sa  $S^6$ . Ona je šestodimenziona podmnogostrukost prostora  $\mathbb{R}^7$ . Neka su, redom  $D, \tilde{\nabla}$ , koneksije u  $\mathbb{R}^7$  i  $S^6$ . Dalje, označimo sa  $\tilde{R}$  i  $\tilde{h}$  tenzor krivine i drugu fundamentalnu formu  $S^6$ , a sa  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  metriku na  $S^6$  indukovanu metrikom prostora  $\mathbb{R}^7$  i koju ćemo isto označavati. Uočimo, prvo, da ako sa  $N$  označimo jedinično normalno vektorsko polje  $S^6$  u  $\mathbb{R}^7$  i identifikujemo tačku na sferi sa odgovarajućim pozicionim vektorom, važi:

$$N(X) = -X, \quad X \in S^6.$$

Za proizvoljnu hiperpovrš  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  možemo definisati Gausovo preslikavanje  $\mathcal{G} : M^n \rightarrow S^n(1)$  gde je  $\mathcal{G}(q), q \in M^n$ , krajnja tačka jediničnog vektora  $N(q)$  normalnog na  $M^n$  u tački  $q$ , kome je početak u koordinatnom početku. Kako su prostori  $T_q M$  i  $T_{\mathcal{G}(q)} S^n(1)$  paralelni, možemo smatrati da važi  $(\mathcal{G}_*)_q : T_q M \rightarrow T_{\mathcal{G}(q)} S^n(1)$ . Uočimo da za  $M = S^6$  i odgovarajuće Gausovo preslikavanje  $\mathcal{G} : S^6 \rightarrow S^6$  važi  $\mathcal{G} = -id$ , gde je  $id$  identično preslikavanje sfere. Formule Gausa (26) i Vajngartena (27) glase

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{h}(X, Y), \quad (38)$$

$$D_X N = -\tilde{A}_N X + \tilde{\nabla}_X^\perp N, \quad (39)$$

za  $X$  i  $Y$  tangentne na  $S^6$ ,  $N \in T^\perp S^6$ , gde je  $\tilde{\nabla}^\perp$  normalna koneksija, a  $\tilde{A}_N$  odgovarajući operator oblika.

Tada na osnovu (29) za operator oblika  $\tilde{A}_N$  važi

$$\langle \tilde{A}_N X, Y \rangle = \langle \tilde{h}(X, Y), N \rangle. \quad (40)$$

Tada

$$\langle \tilde{A}_N X, Y \rangle = \langle D_X Y, N \rangle = -\langle Y, D_X N \rangle = -\langle D_X N, Y \rangle \quad (41)$$

tj. važi  $\tilde{A}_N X = -D_X N$ , pa je  $\tilde{\nabla}_X^\perp N = 0$ , odnosno formula (39) postaje

$$D_X N = -\tilde{A}_N X.$$

Označimo sa  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^6$  krivu čiji je tangentni vektor u odgovarajućoj tački  $c(0)$  jednak  $c'(0) = X$ . Tada

$$\mathcal{G}_*(X) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))|_{t=0} = D_X N = -\tilde{A}_N X,$$

pa je tada očigledno  $\tilde{A}_N X = X$ , što znači da je sfera totalno umbilička i da važi

$$D_X N = -X,$$

odnosno

$$D_X p = X, \quad (42)$$

gde je  $p$  poziciono vektorsko polje, tj.  $p = -N$ , a tada iz (40) dobijamo i

$$\tilde{h}(X, Y) = \langle X, Y \rangle N. \quad (43)$$

Označimo li sa  $K$  tenzor krivine prostora  $\mathbb{R}^7$  iz Gausove jednačine (32) i (43) sledi

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Y, X \rangle - \langle K(X, Y)Y, X \rangle = \langle \tilde{h}(X, X), \tilde{h}(Y, Y) \rangle - \|\tilde{h}(X, Y)\|^2$$

a dalje sledi i da je sekciona krivina sfere konstantna i jednaka 1. Iz (24) sledi i

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y, \quad (44)$$

za proizvoljna vektorska polja  $X, Y, Z \in TS^6$ .

## 2.2 Podmnogostrukosti sfere $S^6$

Neka je  $M$  podmnogostrukost sfere  $S^6$ ,  $\nabla$  koneksija,  $\nabla^\perp$  normalna koneksija,  $R$  tenzor krivine i  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  metrika na  $M$  indukovana metrikom sfere  $S^6$ , koju ćemo isto označavati. Tada formule Gausa i Vajngartena glase

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (45)$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi, \quad (46)$$

gde su  $X$  i  $Y$  tangentna vektorska polja na  $M$ , a  $\xi$  je normalno vektorsko polje na  $M$ , a tangentno na sferu i  $A_\xi$  odgovarajući operator oblika.

Ako su tenzori krivine koneksija  $\nabla$  i  $\nabla^\perp$ ,  $R$  i  $R^\perp$  i uzimajući u obzir konstantnu sekcionu krivinu (44) dobijamo da jednačine Gausa (32), Kodacija (33) i Ričija (34) glase

$$R(X, Y, Z, W) = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \langle h(X, W), h(Y, Z) \rangle - \langle h(X, Z), h(Y, W) \rangle, \quad (47)$$

$$(\nabla h)(X, Y, Z) = (\nabla h)(Y, X, Z), \quad (48)$$

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \mu \rangle = \langle [A_\xi, A_\mu]X, Y \rangle, \quad (49)$$

gde su  $X, Y, Z$  i  $W$  tangentna vektorska polja na  $M$ , a  $\xi$  i  $\mu$  normalna vektorska polja na  $M$ , a tangentna na  $S^6$ .

Uzimajući u obzir (45), (46), (43) i (38) dobijamo za  $X, Y \in TM$  i  $\xi \in T^\perp M, \xi \in TS^6$

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{h}(X, Y) = \nabla_X Y + h(X, Y) - \langle X, Y \rangle p, \quad (50)$$

$$D_X \xi = \tilde{\nabla}_X \xi + \tilde{h}(X, \xi) = \tilde{\nabla}_X \xi - \langle X, \xi \rangle p = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi. \quad (51)$$

## 2.3 Blizu Kelerova struktura sfere $S^6$

Pokazaćemo da na sferi  $S^6$  postoji skoro kompleksna struktura  $J$ . Pitanje da li na sferi postoji i kompleksna struktura još je uvek otvoreno. Struktura koju ćemo definisati je i blizu Kelerova, a kako na sferi ne postoji Kelerova struktura, ova struktura je u izvesnom smislu najbolja.

Neka je  $e_0, e_1, \dots, e_7$  standardna baza euklidskog prostora  $\mathbb{R}^8$  čija je metrika  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Možemo smatrati da je svaka tačka ovog prostora oktonion, odnosno Kejljev broj čiji je realni deo kolinearan sa  $e_0$ , a imaginarni linearna kombinacija vektora  $e_1, e_2, \dots, e_7$ . Označimo sa  $\mathcal{O}$  prostor Kejljevih brojeva, a sa  $\cdot$  standardni proizvod Kejljevih brojeva. Možemo definisati proizvod  $\times$  na ovom prostoru na sledeći način:

$$x \times y = \frac{1}{2}(x \cdot y - y \cdot x).$$

Ovaj proizvod je čisto imaginaran za čisto imaginarne  $x$  i  $y$ , pa možemo posmatrati restrikciju ovog proizvoda na prostor čisto imaginarnih Kejljevih brojeva, tj.  $\mathbb{R}^7$ . Tada je tabela množenja  $e_i \times e_j$  u ovom prostoru data sa:

$\times$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	0	$e_3$	$-e_2$	$e_5$	$-e_4$	$e_7$	$-e_6$
$e_2$	$-e_3$	0	$e_1$	$e_6$	$-e_7$	$-e_4$	$e_5$
$e_3$	$e_2$	$-e_1$	0	$-e_7$	$-e_6$	$e_5$	$e_4$
$e_4$	$-e_5$	$-e_6$	$e_7$	0	$e_1$	$e_2$	$-e_3$
$e_5$	$e_4$	$e_7$	$e_6$	$-e_1$	0	$-e_3$	$-e_2$
$e_6$	$-e_7$	$e_4$	$-e_5$	$-e_2$	$e_3$	0	$e_1$
$e_7$	$e_6$	$-e_5$	$-e_4$	$e_3$	$e_2$	$-e_1$	0

Svaka ortonormirana baza prostora  $\mathbb{R}^7$  koja zadovoljava relacije iz prethodne tabele naziva se  $G_2$  baza.

**Lema 2** Neka su  $x, y$  i  $z$  čisto imaginarni. Tada:

a)

$$x \cdot y = -\langle x, y \rangle e_0 + x \times y. \quad (52)$$

b) Ako su  $x$  i  $y$  ortogonalni, pri čemu je  $x$  jedinični, onda  $x \times (x \times y) = -y$ .

v)  $x \times y = -y \times x$ .

g)  $x \times (y \times z) + (x \times y) \times z = 2\langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z - \langle z, y \rangle x$ .

d)  $\langle x \times y, z \rangle = \langle y \times z, x \rangle = -\langle y \times x, z \rangle$ .

**Dokaz:** a) Pretpostavimo, prvo, da su  $x$  i  $y$  jedinični, ortogonalni vektori. Tada, postoji  $G_2$  baza imaginarnog prostora  $f_1, f_2, \dots, f_7$  takva da  $f_1 = x$  i  $f_2 = y$ . Tada

$$\begin{aligned} (x \times y) - x \cdot y &= -\frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x) = -\frac{1}{2}(f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_1) - \frac{1}{2}(f_3 - f_3) \\ &= 0 = \langle x, y \rangle e_0. \end{aligned}$$

Slično, ako je  $x = y$  jedinični, tada  $\langle x, x \rangle e_0 = e_0 = -x \cdot x$ . Dakle, tvrdjenje važi za vektore iz ortonormiranih baza, a kako su izrazi u jednakostima linearni i po  $x$  i po  $y$ , tvrdjenje važi za sve imaginarne vektore.

b) Možemo ponovo posmatrati  $G_2$  bazu  $f_1, \dots, f_7$  takvu da je  $x = f_1, y = f_2$ . Tada je lako izračunati da je  $f_1 \times (f_1 \times f_2) = -f_2$ . Tvrdjenje sledi iz činjenice da je izraz linearan po  $y$ . Slično se pokazuje i da je vektor  $x$  ortogonalan na  $(x \times y)$ .

v) Tvrdjenje očigledno važi za vektore  $x, y \in \{e_1, e_2, \dots, e_7\}$  a kako je  $x \times y$  linearan i po  $x$  i  $y$  važiće za sve vektore.

Slično se dokazuju i tvrdjenja pod  $g$ ) i  $d$ ). ■

### Lema 3

$$D_X(Y \times Z) = D_X Y \times Z + Y \times D_X Z.$$

**Dokaz:** Neka su  $e_i, i = 1, \dots, 7$  vektorska polja takva da je za svaku tačku prostora  $x$ ,  $\{e_1(x), e_2(x), \dots, e_7(x)\}$  jedna  $G_2$  baza prostora  $\mathbb{R}^7$ . Uočimo prvo da je tada  $D_{e_i} e_j = 0$ , pa je, trivijalno

$$D_{e_i}(e_j \times e_k) = D_{e_i} e_j \times e_k + e_j \times D_{e_i} e_k,$$

a samim tim i

$$D_X(e_j \times e_k) = D_X e_j \times e_k + e_j \times D_X e_k.$$

Dalje, možemo napisati  $Y(x) = \sum_{i=1}^7 Y_i(x) e_i(x)$  i  $Z(x) = \sum_{j=1}^7 Z_j(x) e_j(x)$ . Tada je

$$\begin{aligned} D_X(Y \times Z) &= \sum_{i,j=1}^7 D_X(Y_i(x) \cdot Z_j(x))(e_i \times e_j) + \sum_{i,j=1}^7 Y_i(x) \cdot Z_j(x) D_X(e_i \times e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^7 D_X(Y_i(x)) Z_j(x) (e_i \times e_j) + \sum_{i,j=1}^7 Y_i(x) (D_X Z_j(x)) (e_i \times e_j) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^7 Y_i(x) Z_j(x) (D_X e_i) \times e_j + \sum_{i,j=1}^7 Y_i(x) Z_j(x) e_i \times D_X e_j \\ &= D_X Y \times Z + Y \times D_X Z. \end{aligned}$$

■

Na sferi  $S^6$  možemo definisati  $(1, 1)$ -tenzorsko polje  $J$  na sledeći način:

$$J_x U = x \times U,$$

gde  $x \in S^6$  i  $U \in T_x S^6$ . Tada je vektor  $J_x U$  ortogonalan na  $x$  pa pripada odgovarajućem tangentnom prostoru. Na osnovu prethodnog

$$J_x^2 U = x \times (x \times U) = -U$$



i takodje se lako pokazuje da je  $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$ . Zato je  $J$  dobro definisano i predstavlja skoro kompleksnu strukturu na  $S^6$ .

Neka je  $G$   $(2, 1)$ -tenzorsko polje na  $S^6$  definisano sa

$$G(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X J)Y.$$

Neka je  $p$  poziciono vektorsko polje tačaka na sferi, tj.  $p = -N$ . Tada

$$\begin{aligned} G(X, Y) &= \tilde{\nabla}_X(JY) - J\tilde{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X(p \times Y) - J\tilde{\nabla}_X Y \\ &= D_X(p \times Y) - \tilde{h}(X, p \times Y) - J\tilde{\nabla}_X Y \\ &= D_X p \times Y + p \times D_X Y + \langle X, p \times Y \rangle p - p \times \tilde{\nabla}_X Y \\ &= X \times Y + \langle X, p \times Y \rangle p + p \times (D_X Y - J\tilde{\nabla}_X Y) \\ &= X \times Y + \langle X, p \times Y \rangle p \end{aligned}$$

jer je vektor u zagradi normalan na sferu, tj. kolinearan sa  $p$ .

**Teorema 7** Polje  $G$  ima sledeće osobine:

$$a) \quad G(X, X) = 0, \quad (53)$$

$$b) \quad G(X, Y) + G(Y, X) = 0, \quad (54)$$

$$c) \quad G(X, JY) + JG(X, Y) = 0, \quad (55)$$

$$d) \quad \langle G(X, Y), Z \rangle + \langle G(X, Z), Y \rangle = 0, \quad (56)$$

$$e) \quad (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) = \langle Y, JZ \rangle X + \langle X, Z \rangle JY - \langle X, Y \rangle JZ, \quad (57)$$

$$f) \quad (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) + (\tilde{\nabla}_X G)(JY, JZ) = \\ JG(G(X, Y), Z) + JG(Y, G(X, Z)), \quad (58)$$

$$g) \quad G(X, G(Y, Z)) = \langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z + \\ \langle JX, Z \rangle JY - \langle Y, JX \rangle JZ, \quad (59)$$

$$h) \quad \langle G(X, Y), G(Z, W) \rangle = \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Z, Y \rangle \\ + \langle JX, Z \rangle \langle Y, JW \rangle - \langle JX, W \rangle \langle Y, JZ \rangle \quad (60)$$

gde su  $X, Y, Z, W$  vektorska polja na  $S^6$ .

**Dokaz:**

a)

$$G(X, X) = X \times X + \langle X, p \times X \rangle p = 0.$$

Prvi sabirak je 0 zbog osobina vektorskog proizvoda, a drugi jer su  $X$  i  $p \times X$  ortogonalna vektorska polja.

b) Koristeći izraz za  $G(X, Y)$  dobijamo:

$$G(X, Y) + G(Y, X) = X \times Y - X \times Y + \langle X, p \times Y \rangle + \langle Y, p \times X \rangle = 0.$$

c) Uočimo da je

$$\begin{aligned} X \times (p \times Y) &= (X \times Y) \times p - 2\langle X, p \rangle Y + \langle X, Y \rangle p + \langle p, Y \rangle X \\ &= -p \times (X \times Y) + \langle X, Y \rangle p, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} G(X, JY) + JG(X, Y) &= \\ &= X \times (JY) + \langle X, p \times (JY) \rangle p + p \times (X \times Y) + p \times (\langle X, p \times Y \rangle p) \\ &= -p \times (X \times Y) + \langle X, Y \rangle p - \langle X, Y \rangle p + p \times (X \times Y) = 0. \end{aligned}$$

d) Lako se dobija:

$$\begin{aligned} \langle G(X, Y), Z \rangle + \langle G(X, Z), Y \rangle &= \\ &= \langle X \times Y + \langle X, p \times Y \rangle p, Z \rangle + \langle X \times Z + \langle X, p \times Z \rangle p, Y \rangle \\ &= \langle X \times Y, Z \rangle + \langle X \times Z, Y \rangle = 0. \end{aligned}$$

e) Uočimo prvo da je

$$(\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) = \tilde{\nabla}_X(G(Y, Z)) - G(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - G(Y, \tilde{\nabla}_X Z) - (\tilde{\nabla}_X G)(Z, Y).$$

Izračunajmo

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y G)(X, Z) &= \\ &= \tilde{\nabla}_X G(Y, Z) - G(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - G(Y, \tilde{\nabla}_X Z) \\ &\quad - \tilde{\nabla}_Y G(X, Z) + G(\tilde{\nabla}_Y X, Z) + G(X, \tilde{\nabla}_Y Z) = \\ &= \tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}_Y(JZ) - J(\tilde{\nabla}_Y Z)) - \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_X Y}(JZ) \\ &\quad + J(\tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_X Y} Z) - \tilde{\nabla}_Y(J\tilde{\nabla}_X Z) + J(\tilde{\nabla}_Y(\tilde{\nabla}_X Z)) \\ &\quad - \tilde{\nabla}_Y(\tilde{\nabla}_X(JZ) - J(\tilde{\nabla}_X Z)) + \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_Y X}(JZ) \\ &\quad - J(\tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_Y X} Z) + \tilde{\nabla}_X(J\tilde{\nabla}_Y Z) - J(\tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}_Y Z)) = \\ &= \tilde{R}(X, Y)JZ - J\tilde{R}(X, Y)Z = \\ &= \langle Y, JZ \rangle X - \langle X, JZ \rangle Y - \langle Y, Z \rangle JX + \langle X, Z \rangle JZ. \end{aligned}$$

Sada, specijalno za  $Z = X$  i uz činjenicu da je  $(\tilde{\nabla}_Y G)(X, X)$ , koja sledi iz antisimetričnosti  $\tilde{\nabla}_X G$ , dobijamo:

$$(\tilde{\nabla}_X G)(Y, X) = \langle Y, JX \rangle X - \langle Y, X \rangle JX + \langle X, X \rangle JY,$$

odakle sledi linearizacijom:

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_{X+Z} G)(Y, X+Z) &= \\ &= \langle Y, J(X+Z) \rangle (X+Z) - \langle Y, X+Z \rangle J(X+Z) + \langle X+Z, X+Z \rangle JY, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} & (\tilde{\nabla}_X G)(Y, X) + (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) + (\tilde{\nabla}_Z G)(Y, X) + (\tilde{\nabla}_Z G)(Y, Z) = \\ & = (\langle Y, JX \rangle X - \langle Y, X \rangle JX + \langle X, X \rangle JY) + (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) + (\tilde{\nabla}_Z G)(Y, X) \\ & + (\langle Y, JZ \rangle Z - \langle Y, Z \rangle JZ + \langle Z, Z \rangle JY). \end{aligned}$$

Znači

$$\begin{aligned} & (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) + (\tilde{\nabla}_Z G)(Y, X) = \\ & = \langle Y, JX \rangle Z + \langle Y, JZ \rangle X - \langle Y, X \rangle JZ - \langle Y, Z \rangle JX + \langle X, Z \rangle JY + \langle Z, X \rangle JY. \end{aligned}$$

Kako još važi i

$$\begin{aligned} & (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Z G)(Y, X) = \\ & = -\langle Z, JY \rangle X + \langle X, JY \rangle Z + \langle Z, Y \rangle JX - \langle X, Y \rangle JZ, \end{aligned}$$

sabiranjem ove dve jednačine dobijamo:

$$(\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) = \langle Y, JZ \rangle X + \langle X, Z \rangle JY - \langle X, Y \rangle JZ.$$

f)

$$\begin{aligned} & (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) + (\tilde{\nabla}_X G)(JY, JZ) = \\ & = (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) + \tilde{\nabla}_X(G(JY, JZ)) - G(\tilde{\nabla}_X(JY), JZ) - G(JY, \tilde{\nabla}_X(JZ)) \\ & = (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) - \tilde{\nabla}_X(G(Y, Z)) - G(\tilde{\nabla}_X(JY), JZ) - G(JY, \tilde{\nabla}_X(JZ)) \\ & = -G(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - G(Y, \tilde{\nabla}_X Z) - G(\tilde{\nabla}_X(JY), JZ) - G(JY, \tilde{\nabla}_X(JZ)) \\ & = JG(G(X, Y), Z) + JG(Y, G(X, Z)). \end{aligned}$$

g) Na osnovu (57) i tačke (f) važi

$$\begin{aligned} & -G(G(X, Y), Z) + G(G(X, Z), Y) = \\ & = -[G(G(X, Y), Z) + G(Y, G(X, Z))] \\ & = \langle Y, JZ \rangle JX - \langle X, Z \rangle Y + \langle X, Y \rangle Z - \langle JY, Z \rangle JX \\ & - \langle X, JZ \rangle JY + \langle X, JY \rangle JZ. \end{aligned}$$

Specijalno, za  $X = Z$  dobijamo

$$-G(G(X, Y), X) = \langle Y, JX \rangle JX - \langle X, X \rangle Y + \langle X, Y \rangle X,$$

a ako umesto vektorskog polja  $X$  posmatramo  $X + Z$  dobijamo

$$\begin{aligned} & G(G(X, Y), X) + G(G(X, Y), Z) + G(G(Z, Y), X) + G(G(Z, Y), Z) = \\ & = G(G(X, Y), X) + G(G(Z, Y), Z) + 2\langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z \\ & - \langle Z, Y \rangle X - \langle Y, JX \rangle JZ - \langle Y, JZ \rangle JX. \end{aligned}$$

Iz prethodna dva izraza oduzimanjem dobijamo

$$\begin{aligned} 2G(G(Y, Z), X) &= \\ &= [G(G(Y, Z), X) - G(G(Y, X), Z)] - [-G(G(Y, Z), X) - G(G(Y, X), Z)] \\ &= -2\langle JX, Z \rangle JY + 2\langle Y, JX \rangle JZ + 2\langle X, Y \rangle Z - 2\langle X, Z \rangle Y \end{aligned}$$

odakle sledi tvrdjenje.

*h)* Na osnovu (56) i tvrdjenja (*g*) sledi

$$\begin{aligned} \langle G(X, Y), G(Z, W) \rangle &= -\langle G(X, G(Z, W)), Y \rangle = \\ &= -\langle \langle JX, W \rangle JZ - \langle Z, JX \rangle JW - \langle X, Z \rangle W + \langle X, W \rangle Z, Y \rangle \\ &\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Z, Y \rangle + \langle JX, Z \rangle \langle Y, JW \rangle - \langle JX, W \rangle \langle Y, JZ \rangle. \end{aligned}$$

■

Uočimo da (53) pokazuje da je  $J$  blizu Kelerova struktura.

## 2.4 Skoro kompleksne, totalno realne i CR podmnogostrukosti

Obzirom da je na sferi  $S^6$  definisana skoro kompleksna struktura  $J$ , prirodno je proučavati podmnogostrukosti u skladu sa njihovim odnosom prema skoro kompleksnoj strukturi. Podmnogostrukost  $M$  mnogostrukosti sa skoro kompleksnom strukturom se naziva totalno realnom ako  $J(TM) \subseteq T^\perp M$  gde su  $TM$  i  $T^\perp M$  tangentno i normalno raslojenje  $M$  u mnogostrukosti, i skoro kompleksnom ako važi  $J(TM) \subseteq TM$ .

A podmnogostrukost  $M$  je CR podmnogostrukost ako postoji  $C^\infty$ -diferencijabilna  $J$  invarijantna distribucija  $\Delta : x \rightarrow \Delta_x \subset T_x M$  na  $M$  (odnosno,  $J\Delta = \Delta$ ), takva da je njen ortogonalni komplement  $\Delta^\perp$  u  $TM$  totalno realna distribucija ( $J\Delta^\perp \subseteq T^\perp M$ ), gde je  $T^\perp M$  normalno raslojenje  $M$  u mnogostrukosti. CR podmnogostrukost je prava ukoliko nije ni totalno realna ni skoro kompleksna.

A. Grej [28] je dokazao da je svaka skoro kompleksna podmnogostrukost sfere  $S^6$  minimalna i da ne postoje četvorodimenzione skoro kompleksne podmnogostrukosti od  $S^6$ . Očigledno je da totalno realne podmnogostrukosti sfere  $S^6$  mogu biti najviše trodimenzione. Kako skoro kompleksna distribucija podmnogostrukosti  $M$  mora biti parne dimenzije sledi da je ona, u netrivialnom slučaju dimenzije 2. Tada odgovarajuća totalno realna distribucija mora biti dimenzije 1 ili 2, odnosno prave CR podmnogostrukost sfere  $S^6$  može biti dimenzije 3 ili 4.

Naglasimo i da specijalna Lijeva grupa  $G_2$  ima važnu ulogu u proučavanju sfere  $S^6$  i njene skoro kompleksne strukture.  $G_2$  se definiše kao grupa automorfizama algebre oktoniona  $\mathcal{O}$ . Može se pokazati da je ona povezana podgrupa grupe  $SO(7)$ . Uočimo da  $G_2$  možemo videti i kao grupu koja "čuva" vektorski proizvod. Obzirom da je vektorski proizvod definisan pomoću Kejljevog proizvoda očigledno je da svaki element  $G_2$  ujedno "čuva" vektorski proizvod. Da bismo pokazali da važi i obrnuto biće nam neophodno i sledeće tvrdjenje.

**Lema 4** Neka je  $f_{a,b} : Im(\mathcal{O}) \rightarrow Im(\mathcal{O})$  linearni operator definisan sa  $f_{a,b}(c) = a \times (b \times c)$ . Tada je  $\langle a, b \rangle = -\frac{1}{7}tr f_{a,b}$ .

**Dokaz:** Kako je skalarni proizvod bilinearan dovoljno je dokazati tvrdjenje za bazne vektore  $a = e_i, b = e_j$ . Tada je

$$\begin{aligned} -\frac{1}{7}tr f_{e_i, e_j} &= -\frac{1}{7} \sum_{k=1}^7 \langle e_i \times (e_j \times e_k), e_k \rangle = -\frac{1}{7} \sum_{k=1}^7 \langle e_k \times (e_k \times e_j), e_i \rangle \\ &= \frac{1}{7} \sum_{k=1}^7 \langle e_i, e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle. \end{aligned}$$

■

Sada, direktno sledi da preslikavanje koje "čuva" vektorski proizvod čuva i metriku  $\langle, \rangle$  pa na osnovu Leme 2a mora se slagati i sa Kejljevom proizvodom i pripada grupi  $G_2$ .

Kako se skoro kompleksna struktura na sferi  $S^6$  definiše pomoću vektorskog proizvoda sledi da  $G_2$  "čuva" i skoro kompleksnu strukturu pa i osobine kao što su totalno realno i skoro kompleksno. Zato podmnogostrukosti sfere proučavamo do na  $G_2$  kongruenciju. Možemo uočiti i da je svaka  $G_2$  baza jednoznačno određena sa 3 vektora  $e_1, e_2, e_4$ . Oni su međusobno ortonormirani i svaki od njih je ortogonalan na algebru definisanu sa preostala dva vektora, dok njihovi vektorski proizvodi određuju i ostale vektore baze. Zato je svaki element  $G_2$  određen sa dve ovakve trojke vektora  $e_1, e_2, e_4$  i  $f_1, f_2, f_4$ .

### 3 Čenova nejednakost

Neka je  $M^n$  podmnogostrukost realne prostorne forme konstantne krivine  $c$ . Označimo sa  $K$  sekcionu krivinu, a sa

$$\tau = \sum_{i,j=1}^n K(e_i \wedge e_j),$$

skalarnu krivinu (22) podmnogostrukosti  $M^n$ , gde je  $\{e_1, \dots, e_n\}$  jedna pokretna ortonormirana baza tangentsnog raslojenja podmnogostrukosti. B. J. Čen je u [17] uveo Rimanovu invarijantu

$$\delta_M = \frac{1}{2}\tau - \inf K,$$

gde je

$$\inf K(p) = \inf\{K(\pi), \text{sekcione krivine ravni } \pi \subseteq T_p M\}$$

i dokazao da važi

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c, \quad (61)$$

gde je  $\|H\|^2$  kvadrat norme vektora srednje krivine (30).

Uočimo da nejednakost (61) povezuje unutrašnju invarijantu mnogostrukosti  $\delta_M$  sa spoljašnjom  $H$ .

Za minimalne podmnogostrukosti sfere  $S^6$  nejednakost (61) svodi se na

$$\delta_M \leq \frac{1}{2}(n+1)(n-2),$$

zbog  $c = 1$  i  $H = 0$ .

Da bismo dokazali nejednakost (61), biće neophodno dokazati sledeću lemu.

**Lema 5** *Ako su  $a_1, a_2, \dots, a_n, c$  gde je  $n \geq 2$ , realni brojevi takvi da važi*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = (n-1)\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 + c\right), \quad (62)$$

*tada važi  $2a_1a_2 \geq c$ , a jednakost važi pri  $n > 2$  ako i samo ako je  $a_1 + a_2 = a_3 = \dots = a_n$ .*

**Dokaz:** Za  $n = 2$  tvrdjenje očigledno važi. Ako je  $n > 2$  tada iz (62) sledi

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 + 2a_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i = (n-2)a_n^2 + (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + c\right)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 &= (n-1)\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 + c\right) - a_n^2 - 2a_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i = (n-2)\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + c\right) \\ &+ (n-2)a_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + c - 2a_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i. \end{aligned}$$

Uočimo da iz (62) sledi

$$\begin{aligned}
(n-2)a_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + c - 2a_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i &= (n-2)a_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \\
- 2a_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i &= (n-1)a_n^2 + \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 - 2a_n \sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{n-1} ((n-1)^2 a_n^2 \\
+ \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 - 2(n-1)a_n \sum_{i=1}^n a_i &\geq 0,
\end{aligned} \tag{63}$$

pa je zato

$$\left( \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)^2 = (n-2) \left( \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + c + e_{n-1} \right),$$

gde je  $e_{n-1} \geq 0$ .

Ako je  $n = 3$  ova jednakost se svodi na

$$2a_1 a_2 = c + e_2,$$

pa je  $2a_1 a_2 \geq 0$  i jednakost važi ako i samo ako je  $e_2 = 0$ , odnosno

$$(2a_3 - (a_1 + a_2 + a_3))^2 = 0,$$

što je ekvivalentno sa

$$a_3 = a_1 + a_2.$$

Ukoliko je  $n > 3$  ponavljajući isti postupak  $(n-2)$  puta dobijamo da važi

$$\left( \sum_{i=1}^k a_i \right)^2 = (k-1) \left( \sum_{i=1}^k a_i^2 + c + e_{n-1} + \dots + e_k \right), \quad k = 2, \dots, n-1, \tag{64}$$

gde je  $e_2, \dots, e_{n-1} \geq 0$ , pa je

$$2a_1 a_2 = c + e_2 + \dots + e_{n-1} \geq c.$$

Jednakost važi ako i samo ako je  $e_2 = \dots = e_{n-1} = 0$  odnosno ako formule (64) glase

$$\left( \sum_{i=1}^k a_i \right)^2 = (k-1) \left( \sum_{i=1}^k a_i^2 + c \right), \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Koristeći sada rezultat (63) dobijamo da za sve  $k$  važi  $(k-1)a_k = \sum_{i=1}^k a_i$ , odnosno  $(k-2)a_k = a_1 + \dots + a_{k-1}$  što dalje implicira

$$a_3 = \dots = a_n = a_1 + a_2.$$

■

**Lema 6** (*Čenova nejednakost*) Neka je  $M$   $n$ -dimenziona ( $n \geq 2$ ) podmnogostrukost Rimanove mnogostrukosti  $R^m(c)$  konstantne sekcione krivine  $c$ . Tada važi

$$\inf K \geq \frac{1}{2} \left\{ \tau - \frac{n^2(n-2)}{n-1} \|H\|^2 - (n+1)(n-2)c \right\}.$$

Jednakost važi ako i samo ako postoji ortonormirana pokretna baza  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m$  gde su  $e_1, \dots, e_n$  tangentna vektorska polja, a  $e_{n+1}, \dots, e_m$  normalna vektorska polja podmnogostrukosti  $M$  takva da u njoj operatori oblika  $A_r = A_{e_r}$ ,  $r = n+1, \dots, m$  imaju sledeći oblik

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{bmatrix}, \quad a + b = \mu, \quad (65)$$

$$A_r = \begin{bmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \cdots & 0 \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad r = n+2, \dots, m. \quad (66)$$

**Dokaz:** Iz Gausove jednačine (35) sledi

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{i,j=1}^n K(e_i \wedge e_j) = \sum_{i,j=1}^n R(e_i, e_j, e_j, e_i) = \sum_{i \neq j} c + \sum_{i,j=1}^n g(h(e_i, e_i), h(e_j, e_j)) \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n g(h(e_i, e_j), h(e_j, e_i)) = (n^2 - n)c + g\left(\sum_{i=1}^n h(e_i, e_i), \sum_{j=1}^n h(e_j, e_j)\right) - \|h\|^2 \\ &= n(n-1)c + \left\| \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i) \right\|^2 - \|h\|^2 = n(n-1)c + \sum_{l=n+1}^m g\left(\sum_{i=1}^n h(e_i, e_i), e_l\right)^2 - \|h\|^2 \\ &= n(n-1)c + \sum_{l=n+1}^m (\operatorname{tr} A_l)^2 - \|h\|^2 = n(n-1)c + \|nH\|^2 - \|h\|^2. \end{aligned}$$

Ako označimo

$$\delta = \frac{1}{2} \left( \tau - \frac{n^2(n-2)}{n-1} \|H\|^2 - (n+1)(n-2)c \right)$$

tada ova jednakost postaje

$$n^2 \|H\|^2 = (n-1) \|h\|^2 + (n-1)(2\delta - 2c). \quad (67)$$



Neka je  $\pi$  ravansko sečenje tangentskog raslojenja  $TM$ . Neka je  $e_1, \dots, e_m$  pokretna ortonormirana baza takva da je  $\pi$  razapeto vektorskim poljima  $e_1$  i  $e_2$ , dok je vektorsko polje  $e_{n+1}$  kolinearno sa poljem srednje krivine  $H$ , što izmedju ostalog znači da je za  $r \neq n+1$ ,  $tr A_r = 0$  i  $\|nH\| = |tr A_{n+1}|$ . Slično,

$$|h|^2 = \sum_{i,j=1}^n \|h(e_i, e_j)\|^2 = \sum_{l=n+1}^m \sum_{i,j=1}^n g(h(e_i, e_j), e_l)^2 = \sum_{l=n+1}^m \sum_{i,j=1}^n (h_{ij}^l)^2.$$

Tada jednakost (67) implicira

$$\left(\sum_{i=1}^n h_{ii}^{n+1}\right)^2 = (n-1)\left[\sum_{i=1}^n (h_{ii}^{n+1})^2 + \sum_{i \neq j} (h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^m \sum_{i,j=1}^n (h_{ij}^r)^2 + 2\delta - 2c\right].$$

Sada možemo primeniti Lemu 5 iz koje sledi

$$2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} \geq \sum_{i \neq j} (h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^m \sum_{i,j=1}^n (h_{ij}^r)^2 + 2\delta - 2c. \quad (68)$$

Kako je

$$\begin{aligned} K(e_1 \wedge e_2) &= R(e_1, e_2, e_2, e_1) = c + g(h(e_1, e_1), h(e_2, e_2)) - g(h(e_1, e_2), h(e_1, e_2)) \\ &= c + \sum_{r=n+1}^m h_{11}^r h_{22}^r - \sum_{r=n+1}^m (h_{12}^r)^2 \end{aligned}$$

formula (68) postaje

$$\begin{aligned} 2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} &\geq \sum_{i \neq j} (h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^m \sum_{i,j=1}^n (h_{ij}^r)^2 + 2\delta - 2[K(e_1 \wedge e_2) - \sum_{r=n+1}^m h_{11}^r h_{22}^r + \sum_{12} (h_{12}^r)^2] \\ 2K(\pi) &\geq 2 \sum_{j>2} (h_{1j}^{n+1})^2 + 2 \sum_{j>2} (h_{2j}^{n+1})^2 + 2 \sum_{j>i>2} (h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^m \sum_{i>2} (h_{ii}^r)^2 \\ &\quad + \sum_{r=n+2}^m (h_{11}^r + h_{22}^r + 2h_{11}^r h_{22}^r) + 2\delta + 2 \sum_{r=n+2}^m \sum_{j>i} (h_{ij}^r)^2 - 2 \sum_{r=n+2}^m (h_{12}^r)^2 \\ &= 2 \sum_{j>2} (h_{1j}^{n+1})^2 + 2 \sum_{j>2} (h_{2j}^{n+1})^2 + 2 \sum_{j>i>2} (h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^m \sum_{i>2} (h_{ii}^r)^2 \\ &\quad + \sum_{r=n+2}^m (h_{11}^r + h_{22}^r)^2 + 2\delta + 2 \sum_{r=n+2}^m \sum_{j>\max\{i,2\}} (h_{ij}^r)^2 \geq 2\delta, \end{aligned} \quad (69)$$

što dokazuje nejednakost. Jednakost će važiti ukoliko važi jednakost u (68) i (69) odakle sledi

$$\begin{aligned} h_{1j}^r &= h_{2j}^r = h_{ij}^r, \quad r = n+1, \dots, m, \quad i, j = 3, \dots, n, \\ h_{11}^{n+2} + h_{22}^{n+2} &= \dots = h_{11}^{n+2} + h_{22}^{n+2} = 0. \end{aligned}$$

Slično, na osnovu Leme 5 i nejednakosti (68) sledi

$$h_{11}^{n+1} + h_{22}^{n+1} = h_{33}^{n+1} = \dots = h_{nn}^{n+1}.$$

Ukoliko je  $h_{12}^{n+1}$  različito od nule tada možemo odabrati drugu ortonormiranu bazu ravni  $\pi$  za koju će ova komponenta biti nula. Naime za ta vektorska polja  $f_1$  i  $f_2$  će postojati diferencijabilna funkcija  $\phi$  takva da važi:

$$\begin{aligned} f_1 &= \cos \phi e_1 + \sin \phi e_2, \\ f_2 &= -\sin \phi e_1 + \cos \phi e_2, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} g(h(f_1, f_2), e_{n+1}) &= g\left(\frac{1}{2} \sin 2\phi (h(e_2, e_2) - h(e_1, e_1)) + \cos 2\phi h(e_1, e_2), e_{n+1}\right) \\ &= (h_{22}^{n+1} - h_{11}^{n+1}) \frac{1}{2} \sin 2\phi + h_{12}^{n+1} \cos 2\phi, \end{aligned}$$

pa ukoliko je  $h_{22}^{n+1} = h_{11}^{n+1}$  možemo definisati  $\phi = \frac{\pi}{4}$ , a ukoliko to nije slučaj možemo definisati  $\phi = \frac{1}{2} \arctan \frac{-2h_{12}^{n+1}}{h_{22}^{n+1} - h_{11}^{n+1}}$ . Sada tvrdjenje direktno sledi.  $\blacksquare$

Ukoliko u svakoj tački podmnogostrukosti  $M$  važi jednakost u nejednakosti (61) kažemo da  $M$  zadovoljava Čenovu jednakost i takve podmnogostrukosti su posebno interesantne za izučavanje. Za takve podmnogostrukosti po Lemi 6 postoji pokretna baza u kojoj su operatori oblika (65) i (66).

Posmatrajmo distribuciju koja je u proizvoljnoj tački  $p$  definisana sa

$$\mathcal{D}(p) = \{X \in T_p M \mid (n-1)h(X, Y) = ng(X, Y)H, \text{ za svako } Y \in T_p M\}. \quad (70)$$

**Lema 7** *Neka je  $M$   $n$ -dimenziona ( $n > 2$ ) podmnogostrukost Rimanove mnogostrukosti  $R^m(c)$  konstantne sekcione krivine  $c$  koja zadovoljava Čenovu jednakost. Ako  $\dim \mathcal{D}(p)$  ne zavisi od tačke  $p \in M$ , tada je tačno jedan od sledećih iskaza tačan:*

1.  $\mathcal{D}$  je  $(n-2)$ -dimenziona distribucija;
2.  $\mathcal{D} = TM$  i  $M$  je totalno geodezijski smeštena u  $R^m(c)$ ;
3. raslojenje  $Imh$  je jednodimenziono i ukoliko  $e_{n+1} \in Imh$ , tada operator  $A_{n+1}$  ima tačno dve različite sopstvene vrednosti  $0, \mu$  čije su višestrukosti redom,  $1, n-1$ .

**Dokaz:** Posmatrajmo pokretnu ortonormiranu bazu  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m$  iz Leme 7. Obzirom da  $M$  zadovoljava Čenovu jednakost sledi da su odgovarajući operatori oblika dati sa (65) i (66). Tada je  $H = \frac{1}{n} \text{tr} A_{n+1} = \frac{n-1}{n} \mu e_{n+1}$ , pa za  $k \geq 3$  važi

$$h(e_k, e_j) = \delta_{kj} \mu e_{n+1} = \frac{n}{n-1} H \delta_{kj} = \frac{n}{n-1} H g(e_k, e_j),$$

pa važi i

$$h(e_k, Y) = \frac{n}{n-1} H g(e_k, Y)$$

za proizvoljno tangentno vektorsko polje  $Y$ . Zato  $e_3, \dots, e_n$  pripadaju distribuciji  $\mathcal{D}$  i njena dimenzija je najmanje  $n-2$ . Ako distribucija ima dimenziju veću ili jednaku  $n-1$ , to znači da postoji vektorsko polje koje pripada distribuciji koje je i iz raslojenja razapetog sa  $e_1$  i  $e_2$ . Neka je to  $f = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2$  gde je  $\varphi$  neka diferencijabilna funkcija. Podsetimo se da je

$$\begin{aligned} h(e_1, e_1) &= a e_{n+1} + \sum_{r>n+1} h_{11}^r e_r, \\ h(e_2, e_2) &= b e_{n+1} - \sum_{r>n+1} h_{11}^r e_r, \\ h(e_1, e_2) &= \sum_{r>n+1} h_{12}^r e_r. \end{aligned} \tag{71}$$

Tada je

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n} h(f, e_1) &= g(f, e_1) H = g(f, e_1) \frac{n-1}{n} \mu e_{n+1}, \\ \frac{n-1}{n} h(f, e_2) &= g(f, e_2) H = g(f, e_2) \frac{n-1}{n} \mu e_{n+1}, \end{aligned}$$

pa se ove jednakosti svode na

$$\begin{aligned} \cos \varphi (a - \mu) &= 0, & \cos \varphi h_{11}^r + \sin \varphi h_{12}^r &= 0, & r > n+1, \\ \sin \varphi (b - \mu) &= 0, & \cos \varphi h_{12}^r - \sin \varphi h_{11}^r &= 0, & r > n+1. \end{aligned}$$

Odavde direktno sledi  $h_{12}^r = h_{11}^r = 0$ ,  $r > n+1$ . Ako je  $a = \mu = b$  odakle je i  $a = b = \mu = 0$ , tada ove jednakosti važe za proizvoljnu funkciju  $\varphi$  odnosno sva vektorska polja iz sečenja  $\pi$  pripadaju distribuciji, pa je njena dimenzija  $n$ . Tada je i  $h = 0$  pa je ovakva podmnogostrukost i totalno geodezijska. Ako to nije slučaj sledi da je ili  $a = \mu$  ili  $b = \mu$  odnosno  $ab = 0$  i  $\mu = a + b \neq 0$ . Bez umanjenja opštosti, neka je  $a = 0$  odnosno  $b = \mu$ . Sada direktno sledi iz (65) da  $A_{n+1}$  ima dve sopstvene vrednosti 0 i  $\mu$  odgovarajućih višestrukosti. Takodje iz (71) sledi i da je dimenzija prvog normalnog prostora  $\text{Im}h$  jednaka 1 i da je razapet vektorskim poljem  $e_{n+1}$ . ■

**Lema 8** *Neka je  $M$   $n$ -dimenziona ( $n > 2$ ) podmnogostrukost Rimanove mnogostrukosti  $R^m(c)$  konstantne sekcione krivine  $c$  i dimenzija distribucije  $\mathcal{D}$  veća ili jednaka ( $n - 2$ ). Tada  $M$  zadovoljava Čenovu jednakost.*

**Dokaz:** Obzirom da je  $\dim \mathcal{D} \geq n - 2$  postoje ortonormirana tangentska vektorska polja  $e_3, \dots, e_n$  koja pripadaju distribuciji  $\mathcal{D}$ . Neka su  $e_{n+1}, \dots, e_m$  ortonormirana vektorska polja koja razapinjaju normalno raslojenje, takva da je  $e_{n+1}$  kolinearan sa vektorom glavne krivine. Tada postoji diferencijabilna funkcija  $\mu$  takva da je

$$H = \frac{n-1}{n} \mu e_{n+1}.$$

Takodje tada je i

$$\operatorname{tr} A_k = 0, k > n+1 \quad \operatorname{tr} A_{n+1} = (n-1)\mu.$$

Važi

$$\begin{aligned} g(A_k e_i, e_j) &= g(h(e_i, e_j), e_k) = g(0, e_k) = 0, i \geq 3, i \neq j, k \geq n+1, \\ g(A_k e_i, e_i) &= (h(e_i, e_i), e_k) = g(\mu e_{n+1}, e_k), i \geq 3, k \geq n+1. \end{aligned}$$

Neka je  $e_1, e_2$  dopuna pokretne baze tangentskog raslojenja. Obzirom da je  $\operatorname{tr} A_k, k > n+1$  sledi da važi (66). Ukoliko je  $g(h(e_1, e_2), e_{n+1})$  različito od nule tada postupkom sličnim onom u Lemi 6 možemo pronaći vektorska polja  $f_1$  i  $f_2$  takva da je  $g(h(f_1, f_2), e_{n+1}) = 0$ . Uzimajući u obzir da je  $\operatorname{tr} A_{n+1} = (n-1)\mu$  sada sledi i (65), a tada iz Leme 6 sledi tvrdjenje. ■

**Lema 9** *Neka je  $M$   $n$ -dimenziona ( $n > 2$ ) podmnogostrukost Rimanove mnogostrukosti  $R^m(c)$  konstantne sekcione krivine  $c$ , koja zadovoljava Čenovu jednakost. Ako  $\dim \mathcal{D}(p)$  ne zavisi od izbora tačke  $p \in M$ , tada je distribucija integrabilna.*

**Dokaz:** Neka je  $k$  dimenzija distribucije  $\mathcal{D}$ . Ukoliko je  $k = n$  tada je  $\mathcal{D}$  trivijalno integrabilna.

Ako je  $k = n-1$  tada  $\mathcal{D}$  čine sopstveni potprostori koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti  $\mu$ , a slično u slučaju  $k = n-2$  distribucija  $\mathcal{D}$  je razapeta vektorskim poljima  $e_3, \dots, e_n$  iz Leme 8.

Označimo sa  $\mathcal{D}^\perp$  ortogonalnu komplementarnu distribuciju distribucije  $\mathcal{D}$  u tangentskom raslojenju. Tada za proizvoljna vektorska polja  $X, Y \in \mathcal{D}$  i  $Z \in \mathcal{D}^\perp$  važi

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = -h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z),$$

gde je  $\bar{\nabla}$  koneksija na mnogostrukosti, a zatim pomoću Kodacijeve jednačine sledi i

$$h(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) = h([X, Y], Z) = h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z),$$

a dalje koristeći veze iz (65) i (66) dobijamo i

$$h([X, Y], Z) = \mu[g(X, \nabla_Y Z) - g(Y, \nabla_X Z)]e_{n+1} = \mu g([X, Y], Z)e_{n+1}$$

odakle možemo zaključiti da je  $\mathcal{D}$  integrabilna distribucija. ■

## 4 Podmnogostrukosti dimenzije 3

### 4.1 Trodimenzione CR podmnogostrukosti sfere $S^6$

U ovom poglavlju smatraćemo da je  $M$  trodimenziona CR podmnogostrukost sfere  $S^6$ . Tada je tangentno raslojenje podmnogostrukosti  $M$  oblika

$$TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2,$$

gde su  $\mathcal{D}_1$  i  $\mathcal{D}_2$ , redom, skoro kompleksna i totalno realna distribucija. Neka su tada, respektivno,  $p$  poziciono vektorsko polje,  $E_1$  i  $E_2 = JE_1$  vektorska polja koja razapinju distribuciju  $\mathcal{D}_1$  i  $E_3$  vektorsko polje koje razapinje distribuciju  $\mathcal{D}_2$ . Dalje, neka je  $E_4 = JE_3$ ,  $E_5 = E_1 \times E_3$  i  $E_6 = E_2 \times E_3$ . Tada su prema izboru  $p, E_1$  i  $E_3$  medjusobno ortogonalni i jedinični vektori koji na osnovu konstrukcije definišu ortonormiranu  $G_2$  bazu  $\{p, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ . Pri tom vektorska polja  $E_4, E_5$  i  $E_6$  razapinju normalnu distribuciju podmnogostrukosti.

Uočimo da izbor ovakve baze nije jedinstven. Naime, proizvoljna baza skoro kompleksne distribucije se od zadate  $\{E_1, E_2\}$  može dobiti rotacijom, a izbor vektorskog polja koji razapinje totalne realnu distribuciju jedinstven je do na znak. Shodno tome proizvoljna baza oblika

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1 &= \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2, \\ \tilde{E}_2 &= J\tilde{E}_1 = -\sin \theta E_2 + \cos \theta E_1, \\ \tilde{E}_3 &= \pm E_3, \\ \tilde{E}_4 &= \pm E_4, \\ \tilde{E}_5 &= \pm(\cos \theta E_5 + \sin \theta E_6), \\ \tilde{E}_6 &= \pm(-\sin \theta E_5 + \cos \theta E_6),\end{aligned}$$

ispunjava prethodne uslove gde je  $\theta$  funkcija ugla rotacije.

Uočimo, takodje, da vektorsko množenje vektorom  $E_3$  na prirodan način indukuje izomorfizam izmedju normalnog raslojenja  $NM$  i  $\mathcal{D}_1 \oplus M$ .

**Lema 10** *Postoje lokalno definisane diferencijabilne funkcije  $g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3, k_1, k_2$  i  $k_3$  takve da važi*

$$\begin{aligned}\nabla_{E_1}^\perp E_4 &= g_1 E_5 + g_2 E_6, & \nabla_{E_1}^\perp E_5 &= -g_1 E_4 + g_3 E_6, & \nabla_{E_1}^\perp E_6 &= -g_2 E_4 - g_3 E_5, \\ \nabla_{E_2}^\perp E_4 &= h_1 E_5 + h_2 E_6, & \nabla_{E_2}^\perp E_5 &= -h_1 E_4 + h_3 E_6, & \nabla_{E_2}^\perp E_6 &= -h_2 E_4 - h_3 E_5, \\ \nabla_{E_3}^\perp E_4 &= k_1 E_5 + k_2 E_6, & \nabla_{E_3}^\perp E_5 &= -k_1 E_4 + k_3 E_6, & \nabla_{E_3}^\perp E_6 &= -k_2 E_4 - k_3 E_5.\end{aligned}$$

**Dokaz:** Uočimo da važi  $\langle E_i, E_j \rangle = \text{const}$  za  $i, j \in \{4, 5, 6\}$  odakle sledi

$$D_X \langle E_i, E_j \rangle = 0$$

za proizvoljno vektorsko polje  $X$ , odnosno

$$\langle D_X E_i, E_j \rangle + \langle E_i, D_X E_j \rangle = 0, \quad i, j \in \{4, 5, 6\}.$$

Sada tvrdjenje direktno sledi. ■

Kako su operatori oblika simetrični zaključujemo da postoje lokalno definisane diferencijabilne funkcije  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \mu_i, \nu_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , takve da operatori  $A_{E_4}, A_{E_5}$  i  $A_{E_6}$  imaju sledeći oblik

$$A_{E_4} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \delta_1 & \mu_1 \\ \gamma_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{bmatrix} \quad A_{E_5} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_2 & \delta_2 & \mu_2 \\ \gamma_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{bmatrix} \quad A_{E_6} = \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_3 & \delta_3 & \mu_3 \\ \gamma_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{bmatrix}.$$

Koristeći (29) dobijamo i

$$\begin{aligned} h(E_1, E_1) &= \alpha_1 E_4 + \alpha_2 E_5 + \alpha_3 E_6, & h(E_1, E_2) &= \beta_1 E_4 + \beta_2 E_5 + \beta_3 E_6, \\ h(E_1, E_3) &= \gamma_1 E_4 + \gamma_2 E_5 + \gamma_3 E_6, & h(E_2, E_2) &= \delta_1 E_4 + \delta_2 E_5 + \delta_3 E_6, \\ h(E_2, E_3) &= \mu_1 E_4 + \mu_2 E_5 + \mu_3 E_6, & h(E_3, E_3) &= \nu_1 E_4 + \nu_2 E_5 + \nu_3 E_6. \end{aligned}$$

Slično, kako važi  $\langle E_i, E_j \rangle = \text{const}$  diferenciranjem dobijamo  $\langle \nabla_{E_k} E_i, E_j \rangle + \langle E_i, \nabla_{E_k} E_j \rangle = 0$  odnosno važi sledeća lema.

**Lema 11** *Postoje lokalno definisane funkcije  $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2, 3\}$  takve da važi*

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= a_1 E_2 + a_2 E_3, & \nabla_{E_1} E_2 &= -a_1 E_1 + a_3 E_3, & \nabla_{E_1} E_3 &= -a_2 E_1 - a_3 E_2, \\ \nabla_{E_2} E_1 &= b_1 E_2 + b_2 E_3, & \nabla_{E_2} E_2 &= -b_1 E_1 + b_3 E_3, & \nabla_{E_2} E_3 &= -b_2 E_1 - b_3 E_2, \\ \nabla_{E_3} E_1 &= c_1 E_2 + c_2 E_3, & \nabla_{E_3} E_2 &= -c_1 E_1 + c_3 E_3, & \nabla_{E_3} E_3 &= -c_2 E_1 - c_3 E_2. \end{aligned}$$

Dakle, za koeficijente koneksije važi

$$\begin{aligned} D_{E_1} E_1 &= -p + a_1 E_2 + a_2 E_3 + \alpha_1 E_4 + \alpha_2 E_5 + \alpha_3 E_6, & D_{E_1} E_2 &= -a_1 E_1 + a_3 E_3 + \beta_1 E_4 + \beta_2 E_5 + \beta_3 E_6, \\ D_{E_1} E_3 &= -a_2 E_1 - a_3 E_2 + \gamma_1 E_4 + \gamma_2 E_5 + \gamma_3 E_6, & D_{E_1} E_4 &= -\alpha_1 E_1 - \beta_1 E_2 - \gamma_1 E_3 + g_1 E_5 + g_2 E_6, \\ D_{E_1} E_5 &= -\alpha_2 E_1 - \beta_2 E_2 - \gamma_2 E_3 - g_1 E_4 + g_3 E_6, & D_{E_1} E_6 &= -\alpha_3 E_1 - \beta_3 E_2 - \gamma_3 E_3 - g_2 E_4 - g_3 E_5, \\ D_{E_2} E_1 &= b_1 E_2 + b_2 E_3 + \beta_1 E_4 + \beta_2 E_5 + \beta_3 E_6, & D_{E_2} E_2 &= -p - b_1 E_1 + b_3 E_3 + \delta_1 E_4 + \delta_2 E_5 + \delta_3 E_6, \\ D_{E_2} E_3 &= -b_2 E_1 - b_3 E_2 + \mu_1 E_4 + \mu_2 E_5 + \mu_3 E_6, & D_{E_2} E_4 &= -\beta_1 E_1 - \delta_1 E_2 - \mu_1 E_3 + h_1 E_5 + h_2 E_6, \\ D_{E_2} E_5 &= -\beta_2 E_1 - \delta_2 E_2 - \mu_2 E_3 - h_1 E_4 + h_3 E_6, & D_{E_2} E_6 &= -\beta_3 E_1 - \delta_3 E_2 - \mu_3 E_3 - h_2 E_4 - h_3 E_5, \\ D_{E_3} E_1 &= c_1 E_2 + c_2 E_3 + \gamma_1 E_4 + \gamma_2 E_5 + \gamma_3 E_6, & D_{E_3} E_2 &= -c_1 E_1 + c_3 E_3 + \mu_1 E_4 + \mu_2 E_5 + \mu_3 E_6, \\ D_{E_3} E_3 &= -p - c_2 E_1 - c_3 E_2 + \nu_1 E_4 + \nu_2 E_5 + \nu_3 E_6, & D_{E_3} E_4 &= -\gamma_1 E_1 - \mu_1 E_2 - \nu_1 E_3 + k_1 E_5 + k_2 E_6, \\ D_{E_3} E_5 &= -\gamma_2 E_1 - \mu_2 E_2 - \nu_2 E_3 - k_1 E_4 + k_3 E_6, & D_{E_3} E_6 &= -\gamma_3 E_1 - \mu_3 E_2 - \nu_3 E_3 - k_2 E_4 - k_3 E_5. \end{aligned} \tag{72}$$

**Lema 12** *Za gore navedene funkcije važe sledeće relacije*

$$\begin{aligned} g_2 &= -\gamma_2, & g_1 &= 1 + \gamma_3, & \alpha_1 &= -a_3, & \beta_1 &= a_2, & h_2 &= 1 - \mu_2, & h_1 &= \mu_3, \\ \delta_1 &= b_2, & b_3 &= -a_2, & k_1 &= \nu_3, & k_2 &= -\nu_2, & \mu_1 &= c_2, & \gamma_1 &= -c_3, \\ \alpha_3 &= \beta_2, & \alpha_2 &= -\beta_3, & \delta_2 &= \beta_3, & \delta_3 &= -\beta_2, & \mu_2 &= \gamma_3 - 1, & \mu_3 &= -\gamma_2, \\ g_3 &= a_1 - c_3, & h_3 &= b_1 + c_2, & k_3 &= c_1 + \nu_1. \end{aligned}$$

**Dokaz:** Koristeći Lemu 3 i  $E_2 = JE_1 = p \times E_1$  dobijamo

$$D_X E_2 = D_X(p \times E_1) = D_X p \times E_1 + p \times D_X E_1.$$

Tada za  $X = E_1$  sledi

$$\begin{aligned} D_{E_1} E_2 &= p \times D_{E_1} E_1 = -a_1 E_1 + a_2 E_4 - \alpha_1 E_3 - \alpha_2 E_6 + \alpha_3 E_5 \\ &= -a_1 E_1 + a_3 E_3 + \beta_1 E_4 + \beta_2 E_5 + \beta_3 E_6, \end{aligned}$$

odakle zaključujemo

$$a_2 = \beta_1, \quad \alpha_1 = -a_3, \quad \alpha_2 = -\beta_3, \quad \alpha_3 = \beta_2.$$

Slično, za  $X = E_2$  sledi

$$\begin{aligned} D_{E_2} E_2 &= E_2 \times E_1 + p \times D_{E_2} E_1 = -p - b_1 E_1 + b_2 E_4 - \beta_1 E_3 - \beta_2 E_6 + \beta_3 E_5 \\ &= -p - b_1 E_1 + b_3 E_3 + \delta_1 E_4 + \delta_2 E_5 + \delta_3 E_6, \end{aligned}$$

što implicira

$$-\beta_1 = b_3, \quad \text{odnosno } b_3 = -a_2, \quad b_2 = \delta_1, \quad \beta_3 = \delta_2, \quad -\beta_2 = \delta_3.$$

Za  $X = E_3$  dobijamo

$$\begin{aligned} D_{E_3} E_2 &= E_3 \times E_1 + p \times D_{E_3} E_1 = -E_5 - c_1 E_1 + c_2 E_4 - \gamma_1 E_3 - \gamma_2 E_6 + \gamma_3 E_5 \\ &= -c_1 E_1 + c_3 E_3 + \mu_1 E_4 + \mu_2 E_5 + \mu_3 E_6, \end{aligned}$$

odnosno

$$-\gamma_1 = c_3, \quad c_2 = \mu_1, \quad -1 + \gamma_3 = \mu_2, \quad -\gamma_2 = \mu_3.$$

Kako je  $E_4 = JE_3 = p \times E_3$  sledi

$$D_X E_4 = D_X(p \times E_3) = D_X p \times E_3 + p \times D_X E_3 = X \times E_3 + p \times D_X E_3.$$

Sada za  $X = E_1$  dobijamo

$$\begin{aligned} D_{E_1} E_4 &= E_1 \times E_3 + p \times D_{E_1} E_3 = E_5 - a_2 E_2 + a_3 E_1 - \gamma_1 E_3 - \gamma_2 E_6 + \gamma_3 E_5 \\ &= -\alpha_1 E_1 - \beta_1 E_2 - \gamma_1 E_3 + g_1 E_5 + g_2 E_6, \end{aligned}$$

što implicira

$$1 + \gamma_3 = g_1, \quad -\gamma_2 = g_2.$$

Za  $X = E_2$  sledi

$$\begin{aligned} D_{E_2} E_4 &= E_2 \times E_3 + p \times D_{E_2} E_3 = E_6 - b_2 E_2 + b_3 E_1 - \mu_1 E_3 - \mu_2 E_6 + \mu_3 E_5 \\ &= -\beta_1 E_1 - \delta_1 E_2 - \mu_1 E_3 + h_1 E_5 + h_2 E_6, \end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$\mu_3 = h_1, \quad 1 - \mu_2 = h_2.$$

Slično, za  $X = E_3$  dobija se

$$\begin{aligned} D_{E_3}E_4 &= p \times D_{E_3}E_3 = -c_2E_2 + c_3E_1 - \nu_1E_3 - \nu_2E_6 + \nu_3E_5 \\ &= -\gamma_1E_1 - \mu_1E_2 - \nu_1E_3 + k_1E_5 + k_2E_6, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\nu_3 = k_1, \quad -\nu_2 = k_2.$$

Slično,

$$D_X E_5 = D_X(E_1 \times E_3) = D_X E_1 \times E_3 + E_1 \times D_X E_3.$$

Sada, za  $X = E_1$  ova jednakost postaje

$$\begin{aligned} D_{E_1}E_5 &= D_{E_1}E_1 \times E_3 + E_1 \times D_{E_1}E_3 = -E_4 + a_1E_6 - \alpha_1p - \alpha_2E_1 - \alpha_3E_2 \\ &\quad - a_3p + \gamma_1E_6 - \gamma_2E_3 - \gamma_3E_4 = -\alpha_2E_1 - \beta_2E_2 - \gamma_2E_3 - g_1E_4 + g_3E_6, \end{aligned}$$

odakle dobijamo i

$$a_1 + \gamma_1 = g_3 \text{ odnosno } g_3 = a_1 - c_3.$$

Za  $X = E_2$  sledi

$$\begin{aligned} D_{E_2}E_5 &= D_{E_2}E_1 \times E_3 + E_1 \times D_{E_2}E_3 = b_1E_6 - \beta_1p - \beta_2E_1 - \beta_3E_2 \\ &\quad - b_3p + \mu_1E_6 - \mu_2E_3 - \mu_3E_4 = -\beta_2E_1 - \delta_2E_2 - \mu_2E_3 - h_1E_4 + h_3E_6, \end{aligned}$$

odnosno

$$h_3 = b_1 + \mu_1 \text{ tj. } h_3 = b_1 + c_2.$$

Uzimajući  $X = E_3$  dobijamo

$$\begin{aligned} D_{E_3}E_5 &= D_{E_3}E_1 \times E_3 + E_1 \times D_{E_3}E_3 = c_1E_6 - \gamma_1p - \gamma_2E_1 - \gamma_3E_2 + E_2 \\ &\quad - c_3p + \nu_1E_6 - \nu_2E_3 - \nu_3E_4 = -\gamma_2E_1 - \mu_2E_2 - \nu_2E_3 - k_1E_4 + k_3E_6, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$c_1 + \nu_1 = k_3.$$

Direktna provera pokazuje da se iz jednakosti

$$D_X E_6 = D_X(E_2 \times E_3) = D_X E_2 \times E_3 + E_2 \times D_X E_3$$

ne dobijaju nove relacije. ■



## 4.2 Teoreme o postojanju i jedinstvenosti

U ovom poglavlju navešćemo definicije i tvrdjenja neophodna za dalja izračunavanja. Navedimo prvo teoreme o postojanju i jedinstvenosti za podmnogostrukosti Rimanovih mnogostrukosti konstantne sekcione krivine  $c$ , videti [18].

**Teorema 8** (*Teorema o postojanju*) Neka je  $(M, g)$  prosto povezana Rimanova  $n$ -dimenziona mnogostrukost za koju postoji  $m$ -dimenziono Rimanovo vektorsko raslojenje  $\nu(M)$  sa tenzorom krivine  $R^D$  i  $(0, 2)$  tenzorom  $h$  sa vrednostima u  $\nu(M)$ . Za proizvoljno sečenje  $\xi$  raslojenja  $\nu(M)$  definišemo  $A_\xi$  sa  $g(A_\xi X, Y) = \langle h(X, Y), \xi \rangle$  gde je  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  metrika na  $\nu(M)$ . Ukoliko su zadovoljene jednačine Gausa, Kodacija i Ričija, tada postoji izometrička imersija  $M$  u  $(n + m)$ -dimenzionu kompletnu prosto povezanu Rimanovu mnogostrukost  $R^{n+m}(c)$  konstantne krivine  $c$ , takva da je  $\nu(M)$  odgovarajuće normalno raslojenje a  $h$  druga fundamentalna forma.

**Teorema 9** (*Teorema o jedinstvenosti*) Neka su  $f, f' : M \rightarrow R^m(c)$  dve izometričke imersije Rimanove  $n$ -dimenzione mnogostrukosti  $M$  u kompletnu, prosto povezanu Rimanovu  $m$ -dimenzionu mnogostrukost konstantne krivine  $c$  sa normalnim raslojenjima  $\nu$  i  $\nu'$  koje imaju odgovarajuću kanonsku metriku raslojenja, koneksije i druge fundamentalne forme. Ako postoji izometrija  $\phi : M \rightarrow M$  za koje postoji natkrivanje  $\bar{\phi} : \nu \rightarrow \nu'$  koje "čuva" metriku, koneksiju i drugu fundamentalnu formu, tada postoji i izometrija  $\Theta$  mnogostrukosti  $R^m$  takva da je  $\Theta \circ f = f' \circ \phi$ .

Takodje, u daljem razmatranju biće nam potreban i pojam skoro kontaktne mnogostrukosti.

Neka je  $N$   $(2n + 1)$ -dimenziona mnogostrukost. Ako postoje  $(1, 1)$  tenzor  $\Phi$ , tangentno vektorsko polje  $\xi$  i 1-forma  $\eta$  definisani na  $N$  takvi da važi

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= -I + \eta \otimes \xi, \quad \text{odnosno} \quad \Phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \\ \Phi\xi &= 0, \quad \eta(\Phi X) = 0, \quad \eta(\xi) = 1, \end{aligned} \quad (73)$$

gde je  $X$  proizvoljno vektorsko polje, tada je  $N$  skoro kontaktna mnogostrukost. Ako je pritom na mnogostrukosti definisana metrika  $g(\cdot, \cdot)$  i važi

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad \eta(X) = g(X, \xi) \quad (74)$$

tada je  $N$  skoro kontaktna metrička mnogostrukost.

Neka je  $M$  trodimenziona CR podmnogostrukost sfere  $S^6$  i  $E_1, E_2, E_3$  pokretna ortonormirana baza konstruisana u poglavlju 4.1.

Neka je  $(1, 1)$  tenzor  $\varphi$  na  $M$  definisan na sledeći način: za proizvoljno vektorsko polje  $X \in TM$  vektorsko polje  $\varphi(X)$  je projekcija  $JX$  na tangentno raslojenje. Tada direktno sledi

$$\varphi(E_1) = E_2, \quad \varphi(E_2) = -E_1, \quad \varphi(E_3) = 0.$$

Neka je

$$\xi = E_3, \quad \eta(X) = \langle X, E_3 \rangle = \langle X, \xi \rangle.$$

Direktna provera pokazuje da su uslovi (73) i (74) ispunjeni, odnosno restrikcija  $J$  na tangentno raslojenje indukuje skoro kontaktnu strukturu  $(\varphi, \xi, \eta)$  na trodimenzionoj CR podmnogostrukosti. Direktno sledi i da za ovu strukturu važi

$$\langle \varphi X, \varphi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y),$$

odakle sledi da je indukovana metrika kompatibilna sa skoro kontaktnom strukturom. Ovim  $M$  postaje skoro kontaktna metrička podmnogostrukost.

Označimo sa  $\underline{h}$  projekciju druge fundamentalne forme na raslojenje razapeto sa  $E_5$  i  $E_6$ . Vektorsko množenje sa  $E_3$  indukuje na prirodan način izometriju između raslojenja  $M \oplus \mathcal{D}_1$  i  $NM$ , a njegov inverz je množenje poljem  $-E_3$ . Tada je sa

$$S(X) = \underline{h}(X, E_3) \times (-E_3)$$

definisano (1,1) tenzorsko polje na  $\mathcal{D}_1$ . Pritom, iz

$$D_{E_3}(JX) = D_{E_3}(p \times X) = -X \times E_3 + JD_{E_3}X$$

sledi

$$S(JX) = -X + JS(X), \quad \text{odnosno} \quad S\varphi X - \varphi SX + X = 0.$$

Slično iz

$$D_Y(JX) = Y \times X + JD_Y X$$

sledi i da je sa

$$\sigma(X, Y) = \underline{h}(X, Y) \times (-E_3)$$

definisano simetrično bilinearno polje  $\sigma : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$  za koje važi

$$\sigma(\varphi X, Y) = \varphi\sigma(X, Y).$$

Dokazaćemo sada teoreme o postojanju i jedinstvenosti za CR podmnogostrukosti, koristeći skoro kontaktnu strukturu.

**Teorema 10** *Neka je  $M$  trodimenziona prosto povezana orijentisana Rimanova mnogostrukost sa skoro kontaktnom metričkom strukturom  $(\varphi, \xi, \eta)$ . Neka je  $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ , gde je  $\mathcal{D}_2$  jednodimenziona distribucija razapeta strukturnim vektorskim poljem  $\xi$  i  $\mathcal{D}_1$  njen dvodimenzioni ortogonalni komplement. Neka su  $\sigma : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ ,  $S : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ ,  $Z : M \rightarrow \mathcal{D}_1$  i  $\nu_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$  redom, simetrična bilinearna forma, 1-1 tenzorsko polje, vektorsko polje i funkcija definisana na  $M$  koji zadovoljavaju sledeće relacije*

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi X, Y) &= \varphi\sigma(X, Y), \\ S\varphi X - \varphi SX + X &= 0, \end{aligned}$$

gde su  $X, Y \in \mathcal{D}_1$ . Definišimo raslojenje  $NM$  nad  $M$  tako da fibra nad tačkom  $p$  zadovoljava  $NM_p = \mathbb{R} \oplus \mathcal{D}_1$ . Definišimo i raslojenje  $E$  nad  $M$  tako da fibra nad tačkom  $p$  zadovoljava  $E_p = \mathbb{R} \oplus TM_p \oplus NM_p$ . Za lokalno definisano jedinično tangentno vektorsko polje  $V$  iz raslojenja  $\mathcal{D}_1$  i definišimo pokretnu bazu nad  $M$  sa

$$\begin{aligned} E_0 &= (1, (0, 0), (0, 0)), \\ E_1 &= (0, (V, 0), (0, 0)), \\ E_2 &= (0, (\varphi(V), 0), (0, 0)), \\ E_3 &= (0, \xi = (0, 1), (0, 0)), \\ E_4 &= (0, (0, 0), (1, 0)), \\ E_5 &= (0, (0, 0), (0, V)), \\ E_6 &= (0, (0, 0), (0, \varphi V)). \end{aligned}$$

Neka je

$$\begin{aligned}\sigma(V, V) &= \alpha_2 V + \alpha_3 \varphi V, \\ SV &= \gamma_2 V + \gamma_3 \varphi V, \\ Z &= \nu_2 V + \nu_3 \varphi V.\end{aligned}$$

Neka je  $E3$  izomorfizam raslojenja  $M \oplus \mathcal{D}_1$  i  $NM$  određen sa

$$E3(E_0) = E_4, \quad E3(E_1) = E_5, \quad E3(E_2) = E_6.$$

Ako je  $\nabla$  koneksija na  $M$  definišimo drugu fundamentalnu formu na  $NM$  sa:

$$\begin{aligned}h(X, Y) &= E3(\langle \nabla_X \xi, \varphi Y \rangle, \sigma(X, Y)), \quad X, Y \in \mathcal{D}_1, \\ h(X, \xi) &= E3(S(X)), \quad X \in \mathcal{D}_1, \\ h(\xi, \xi) &= \nu_1 E_4 + E3(Z).\end{aligned}$$

Slično, koristeći relacije iz Leme 12 pomoću formula za  $D_{E_i} E_j$  iz (72) definišemo normalnu koneksiju  $\nabla^\perp$  na  $NM$ . Tada postoji  $CR$  imersija podmnogostrukosti  $M$  u sferu  $S^6$  tako da je  $\mathcal{D}_1$  skoro kompleksna distribucija i  $\mathcal{D}_2$  totalno realna distribucija.

**Dokaz:** Uočimo da su druga fundamentalna forma i normalna koneksija definisane tako da zadovoljavaju jednačine Gausa, Kodacija i Ričija. Koristeći Teoremu 8 o postojanju i Teoremu 9 o jedinstvenosti za podmnogostrukosti u prostornim formama dobijamo da postoji imersija  $F : M \rightarrow S^6 \subset \mathbb{R}^7$ . Neka je  $E_1$  i  $E_2$  lokalno definisana ortonormirana baza distribucije  $\mathcal{D}_1$  i  $E_3$  jedinično vektorsko polje koje razapinje distribuciju  $\mathcal{D}_2$ . Označimo sa  $E_4, E_5, E_6$  odgovarajuća vektorska polja koja pripadaju  $NM$  i označimo  $E_0 = F$  imersiju. Definišimo vektorski proizvod na podmnogostrukosti  $M$  koristeći  $G_2$  tablicu množenja. Tada direktna provera pokazuje da za  $X \in \{E_1, E_2, E_3\}$  i  $Y, Z \in \{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$  važi

$$D_X(Y \times Z) = (D_X Y) \times Z + Y \times (D_X Z).$$

Dakle, vektorski proizvod  $\times$  je paralelan na podmnogostrukosti, što implicira da ukoliko je neophodno, možemo odabrati element  $SO(7)$  koji  $F$  preslikava u  $CR$  podmnogostrukost. ■

**Teorema 11** Neka je  $M$  metrička, skoro kontaktna podmnogostrukost i neka su  $f_1 : M \rightarrow S^6$  i  $f_2 : M \rightarrow S^6$  dve izometrične  $CR$  imersije iz  $M$  u  $S^6$  koje indukuju datu metričku skoro kontaktnu strukturu. Pretpostavimo da se za obe imersije prethodno definisane invarijante  $\sigma, S, Z$  i  $\nu_1$  poklapaju. Tada su ove imersije  $G_2$  kongruentne.

**Dokaz:** Na osnovu Leme 12 sledi da postoji izomorfizam normalnih raslojenja takav da obe imersije imaju iste druge fundamentalne forme kao i koeficijente normalne koneksije. Zato su obe imersije kongruentne putem nekog elementa  $A \in SO(7)$ . Obzirom da  $A$  preslikava  $G_2$  pokretnu bazu prve imersije u  $G_2$  pokretnu bazu druge imersije, sledi da  $A$  "čuva" vektorski proizvod, pa samim tim je  $A \in G_2$ . ■

Ukoliko pretpostavimo da je imersija minimalna tada iz Leme 12 sledi da su vektorsko polje  $Z$  i funkcija  $\nu_1$  određeni indukovanom koneksijom, simetričnom bilinearnom formom  $\sigma$  i  $(1, 1)$  tenzorskim poljem  $S$ . Zato, takodje važi i sledeća teorema.

**Teorema 12** *Neka je  $M$  metrička skoro kontaktna mnogostrukost i neka su  $f_1 : M \rightarrow S^6$  i  $f_2 : M \rightarrow S^6$  dve izometrične minimalne CR imersije  $M$  u  $S^6$  koje indukuju datu skoro kontaktnu metričku strukturu. Pretpostavimo i da se za obe imersije prethodno definisane invarijante  $\sigma$  i  $S$  poklapaju. Tada su obe imersije  $G_2$  kongruentne.*

### 4.3 Trodimenzione minimalne CR podmnogostrukosti koje zadovoljavaju Čenovu jednakost

Neka je  $M$  minimalna trodimenziona CR podmnogostrukost sfere  $S^6$  koja zadovoljava Čenovu jednakost. Ovakve podmnogostrukosti su ispitali i klasifikovali M. Djorić i L. Vranken u [24] i u ovom poglavlju ćemo prikazati njihov rezultat. Obzirom da  $M$  zadovoljava Čenovu jednakost (videti Lemu 6) sledi da je dimenzija distribucije definisane formulom (70) veća ili jednaka od 1.

Napomenućemo sledeće tvrdjenje dokazano u [32].

**Teorema 13** *Ne postoji trodimenziona prava CR podmnogostrukost sfere  $S^6$  koja zadovoljava Čenovu jednakost ako je  $\mathcal{D}$  totalno realna distribucija.*

Posledica ovog tvrdjenja je da distribucija  $\mathcal{D}$  nije totalno realna. Za dalja izračunavanja biće dovoljno dokazati i sledeće tvrdjenje.

**Lema 13** *Neka je  $M$  minimalna trodimenziona CR podmnogostrukost sfere  $S^6$ , koja zadovoljava Čenovu jednakost. Tada distribucija  $\mathcal{D}$  nije totalno realna.*

**Dokaz:** Koristimo oznake iz prethodnog poglavlja. Pretpostavimo suprotno, neka je  $\mathcal{D}$  totalno realna distribucija. To znači da je razapeta vektorskim poljem  $E_3$ . Obzirom da je  $M$  minimalna sledi da za  $E_3$  važi  $h(E_i, E_3) = 0, i = 1, 2, 3$ . Tada je

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$$

medjutim to je u kontradikciji sa činjenicom  $\mu_2 = \gamma_3 - 1$ . ■

Oдавde sledi i da  $M$  ne može biti ni totalno geodezijska podmnogostrukost.

Važi sledeća lema.

**Lema 14** *Neka je  $M_1$  minimalna trodimenziona podmnogostrukost sfere  $S^6$  koja zadovoljava Čenovu jednakost. Tada za proizvoljnu tačku  $p$  podmnogostrukosti  $M_1$  važi da su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

1. dimenzija  $\dim \mathcal{D}(p) > 1$ ,
2.  $p$  je totalno geodezijska tačka.

*Pritom ukoliko  $p$  nije totalno geodezijska tačka postoji njena okolina u kojoj je distribucija  $\mathcal{D}$  diferencijabilna.*

**Dokaz:** Neka u tački  $p$  važi  $\dim \mathcal{D}(p) > 1$ . Tada postoje jedinični i ortogonalni vektori  $U_2, U_3$  koji pripadaju prostoru  $\mathcal{D}(p)$ . Neka je  $U_1$  dopuna ovog skupa vektora do baze tangentskog prostora podmnogostrukosti  $M_1$  u tački  $p$ . Obzirom da je  $U_2, U_3 \in \mathcal{D}$  a  $M_1$  minimalna podmnogostrukost sledi da je  $h(U_2, V) = h(U_3, V) = 0$  za proizvoljni vektor  $V$ . Tada zbog minimalnosti važi i  $h(U_1, U_1) = 0$ , pa je i  $h = 0$  odnosno  $p$  totalno geodezijska tačka.

Obrnuto, ako je  $p$  totalno geodezijska tačka, obzirom da je podmnogostrukost minimalna, odnosno  $H = 0$ , direktno sledi  $\dim \mathcal{D}(p) = 3$ .

Ako je  $\dim \mathcal{D} = 1$  neka je  $U_3$  jedinični vektor koji razapinje prostor  $\mathcal{D}(p)$ , a  $U_1, U_2$  njegova dopuna do ortonormirane baze tangentskog prostora podmnogostrukosti u tački  $p$ . Tada direktna provera pokazuje da važi

$$\begin{aligned} S(U_1, U_1) &= S(U_2, U_2) = 1 - \|h(U_1, U_1)\|^2 - \|h(U_1, U_2)\|^2 < 1, \\ S(U_1, U_2) &= S(U_1, U_3) = S(U_2, U_3) = 0, \\ S(U_3, U_3) &= 1, \end{aligned}$$

gde je  $S$  Ričijev tenzor. Odavde direktno sledi da  $U_3$  razapinje sopstveni potprostor Ričijevog tenzora za sopstvenu vrednost 1, a kako je Ričijev tenzor diferencijabilni operator, njegovi potprostori za konstantne sopstvene vrednosti su takodje diferencijabilni. ■

Kako  $M$  ne može biti totalno geodezijska CR podmnogostrukost sfere  $S^6$ , skup tačaka koje nisu totalno geodezijske čini otvoren i svuda gust podskup od  $M$ , na koji se u daljem razmatranju ograničavamo. Na ovom skupu dimenzija distribucije (70) je 1 pa možemo označiti sa  $U_3$  vektorsko polje koje razapinje ovu distribuciju.

Pošto  $\mathcal{D}$  nije totalno realna, projekcija  $U_3'$  vektorskog polja  $U_3$  na skoro kompleksnu distribuciju je netrivialna. Zato za pokretnu bazu podmnogostrukosti možemo odabrati bazu iz poglavlja 4.1 i to takvu da je vektorsko polje  $E_1$  kolinearno sa  $U_3'$ . Tada postoji diferencijabilna funkcija  $o$  takva da važi

$$U_3 = \cos o E_1 + \sin o E_3.$$

Tada i sledeći skup vektorskih polja čini ortonormiranu bazu prostora:

$$\begin{aligned} p, \quad U_1 &= -\sin o E_1 + \cos o E_3, \quad U_2 = E_2, \quad U_3, \\ U_4 &= J E_3, \quad U_5 = J E_3 = E_4, \quad U_6 = E_5, \quad U_6 = E_6. \end{aligned}$$

Tada je

$$E_1 = -\sin o U_1 + \cos o U_3, \quad E_3 = \cos o U_1 + \sin o U_3.$$

Vektorska polja  $U_1, U_2$  i  $U_3$  razapinju tangentno raslojenje. Obzirom da je  $U_3 \in \mathcal{D}$  i da je  $M$  minimalna podmnogostrukost koristeći Lemu 6 sledi da u ovoj bazi operatori oblika imaju sledeći oblik

$$A_{U_4} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{U_5} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \mu_2 & 0 \\ \mu_2 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{U_6} = \begin{bmatrix} \lambda_3 & \mu_3 & 0 \\ \mu_3 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odavde sledi

$$h(E_1, E_1) = \sin^2 o h(U_1, U_1) = \sin^2 o (\lambda_1 U_4 + \lambda_2 U_5 + \lambda_3 U_6).$$

Slično sledi i

$$\begin{aligned} h(E_1, E_2) &= -\sin o (\mu_1 E_4 + \mu_2 E_5 + \mu_3 E_6), \\ h(E_1, E_3) &= -\sin o \cos o (\lambda_1 E_4 + \lambda_2 E_5 + \lambda_3 E_6), \\ h(E_2, E_2) &= -(\lambda_1 E_4 + \lambda_2 E_5 + \lambda_3 E_6), \\ h(E_2, E_3) &= -\cos o (\mu_1 E_4 + \mu_2 E_5 + \mu_3 E_6), \\ h(E_3, E_3) &= \cos^2 o (\lambda_1 E_4 + \lambda_2 E_5 + \lambda_3 E_6). \end{aligned}$$

Sada, koristeći uslove

$$\begin{aligned} D_X(E_2) &= D_X(JE_1) = D_X(p \times E_1) = X \times E_1 + p \times D_X E_1, \\ D_X(E_4) &= D_X(JE_3) = D_X(p \times E_3) = X \times E_3 + p \times D_X E_3, \\ D_X(E_1 \times E_3) &= D_X E_1 \times E_3 + E_1 \times D_X E_3 \end{aligned}$$

direktno sledi da važe sledeće relacije

$$\begin{aligned} a_2 &= -\mu_1 \sin o, & a_3 &= -\lambda_1 \sin^2 o, & b_2 &= -\lambda_1, & b_3 &= \mu_1 \sin o, & c_2 &= \mu_1 \cos o, \\ c_3 &= \lambda_1 \sin o \cos o, & \lambda_2 &= -\mu_3 \sin o, & \lambda_3 &= \mu_2 \sin o, & \lambda_2 \sin^2 o &= -\mu_3 \sin o, \\ \lambda_3 \sin^2 o &= \mu_2 \sin o, & \mu_2 \cos o &= -1 + \lambda_3 \sin o \cos o, & \mu_3 \cos o &= -\lambda_2 \sin o \cos o. \end{aligned}$$

Uočimo da pod pretpostavkom da je  $\cos o = 0$  sledi da je  $U_3 = \pm E_3$  što je nemoguće. Iz prethodnih relacija direktno sledi i

$$\lambda_2(\sin^2 o - 1) = \lambda_3(\sin^2 o - 1) = 0,$$

pa važi

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Tada važi i  $\mu_2 \cos o = -1$  pa je  $\mu_2 \neq 0$ . Zato iz  $\mu_2 \sin o = \lambda_3 = 0$  sledi

$$\sin o = 0,$$

a odavde i

$$a_2 = a_3 = b_3 = c_3 = \mu_3 = 0,$$

kao i da se vektorska polja  $U_3'$  i  $E_1$  poklapaju odnosno  $\cos o = 1$ . Sada je

$$b_2 = -\lambda_1, \quad c_2 = \mu_1, \quad \mu_2 = -1.$$

**Lema 15** Važi  $\lambda_1 = 0$  i  $E_1(\mu_1) = -1 - \mu_1^2$ ,  $E_2(\mu_1) = E_3(\mu_1) = 0$ .

**Dokaz:** Iz Kodacijeve jednačine  $(\nabla h)(E_1, E_2, E_2) = (\nabla h)(E_2, E_1, E_2)$  sledi

$$E_1(\lambda_1) = -\lambda_1(b_1 + \mu_1),$$

a iz  $(\nabla h)(E_1, E_3, E_3) = (\nabla h)(E_3, E_1, E_3)$  dobijamo

$$E_1(\lambda_1) = -2\lambda_1\mu_1, \quad \lambda_1 = c_1.$$

Slično iz

$$\begin{aligned} (\nabla h)(E_2, E_1, E_1) &= (\nabla h)(E_1, E_2, E_1), \\ (\nabla h)(E_2, E_3, E_3) &= (\nabla h)(E_3, E_2, E_3), \end{aligned}$$

redom, sledi i

$$a_1 = 0 \quad \text{ili} \quad \lambda_1 = 0,$$

odnosno

$$E_2(\lambda_1) = E_3(\mu_1) \quad \text{i} \quad c_1 = -3\lambda_1$$

odakle dobijamo

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{i} \quad E_3(\mu_1) = 0.$$

Sada  $(\nabla h)(E_3, E_2, E_2) = (\nabla h)(E_2, E_3, E_2)$  implicira

$$E_2(\mu_1) = -E_3(\lambda_1) = 0.$$

Slično iz  $(\nabla h)(E_2, E_3, E_3) = (\nabla h)(E_3, E_2, E_3)$  dobijamo

$$E_1(\mu_1) = -1 + \lambda_1^2 - b_1\mu_1, \quad \mu_1 = b_1, \quad a_1 = 0,$$

što dokazuje tvrdjenje. ■

Direktna provera potvrđuje da uslovi integrabilnosti ne nameću dodatne relacije medju koeficijentima koneksije. Dakle, za koneksiju važi:

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= 0, & \nabla_{E_1} E_2 &= 0, & \nabla_{E_1} E_3 &= 0, \\ \nabla_{E_2} E_1 &= \mu_1 E_2, & \nabla_{E_2} E_2 &= -\mu_1 E_1, & \nabla_{E_2} E_3 &= 0, \\ \nabla_{E_3} E_1 &= \mu_1 E_3, & \nabla_{E_3} E_2 &= 0, & \nabla_{E_3} E_3 &= -\mu_1 E_1, \end{aligned}$$

dok druga fundamentalna forma zadovoljava sledeće relacije:

$$h(E_1, E_1) = h(E_1, E_2) = h(E_1, E_3) = h(E_2, E_2) = h(E_3, E_3) = 0, \quad h(E_2, E_3) = \mu_1 E_4 - E_5.$$

Tada su Lijeve zagrade redom, jednake

$$[E_1, E_2] = -\mu_1 E_2, \quad [E_1, E_3] = -\mu_1 E_3, \quad [E_2, E_3] = 0.$$

Direktna provera pokazuje da postoji diferencijabilna funkcija  $\rho$  za koju važi

$$E_1(\rho) = \rho\mu_1, \quad E_2(\rho) = 0, \quad E_3(\rho) = 0, \tag{75}$$

a tada vektorska polja

$$G_1 = E_1, \quad G_2 = \rho E_2, \quad G_3 = \rho E_3$$

zadovoljavaju relacije  $[G_i, G_j] = 0, i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Na osnovu Teoreme 1 postoji lokalno definisan koordinatni sistem  $(t, u, v)$  na podmnogostrukosti  $M$ , takav da važi

$$\frac{\partial}{\partial t} = G_1, \quad \frac{\partial}{\partial u} = G_2, \quad \frac{\partial}{\partial v} = G_3.$$

Iz Leme 15 i relacija (75) sledi da bez umanjenja opštosti možemo reći

$$\mu_1 = -\tan t, \quad \rho = \cos t.$$

Ako je  $F$  odgovarajuća imersija tada za  $X = \frac{\partial}{\partial i}$  i  $Y = \frac{\partial}{\partial j}$  iz formule (50) sledi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial i \partial j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial i}} \frac{\partial}{\partial j} + h\left(\frac{\partial}{\partial i}, \frac{\partial}{\partial j}\right) - \left\langle \frac{\partial}{\partial i}, \frac{\partial}{\partial j} \right\rangle F. \tag{76}$$

Odavde se redom dobija

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} F = -F, \quad (77)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial u} F = \mu_1 \frac{\partial}{\partial u} F, \quad (78)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial v} F = \mu_1 \frac{\partial}{\partial v} F, \quad (79)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} F = -\mu_1 \rho^2 \frac{\partial}{\partial t} F - \rho^2 F, \quad (80)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F = \rho(\mu_1 F \times \frac{\partial}{\partial v} F - \frac{\partial}{\partial t} F \times \frac{\partial}{\partial v} F), \quad (81)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} F = -\rho^2(\mu_1 \frac{\partial}{\partial t} F + F). \quad (82)$$

Relacija (80) implicira

$$A(u, v) = \cos u C(v) + \sin u D(v).$$

Iz (77) sledi

$$F(t, u, v) = A(u, v) \cos t + B(u, v) \sin t$$

a zatim iz (78) i (79) sledi da je  $B$  konstantno vektorsko polje. Iz formula (81) i (82) sledi

$$\begin{aligned} B \times D'(v) &= C'(v), \\ B \times C'(v) &= -D'(v), \end{aligned}$$

odnosno

$$C''(v) = -C(v), \quad D''(v) = -D(v),$$

pa sledi

$$\begin{aligned} C(v) &= \cos v I + \sin v K, \\ D(v) &= \cos v L + \sin v M, \end{aligned}$$

gde su  $I, K, L, M$  konstantna vektorska polja, za koja važi  $B \times L = I, B \times M = K, B \times I = -L, B \times K = -M$ . Uz početne uslove

$$F(0, 0, 0) = U_1 = I, \quad E_1(0, 0, 0) = U_2 = B, \quad E_2(0, 0, 0) = U_3 = L,$$

$$E_3(0, 0, 0) = U_4 = K, \quad M = -U_6$$

odakle dobijamo da  $M$  mora biti lokalno kongruentna imersiji

$$F(t, u, v) = (\cos t \cos u \cos v, \sin t, \cos t \sin u \cos v, \cos t \cos u \sin v, 0, -\cos t \sin u \sin v, 0). \quad (83)$$

**Primedba** U [25] je dokazano da trodimenziona CR podmnogostrukost sfere  $S^6$  koja zadovoljava Čenovu jednakost mora ujedno biti i minimalna.



#### 4.4 Trodimenzione minimalne CR podmnogostrukosti koje pripadaju totalno geodezijskoj sferi $S^5$

U ovom poglavlju posmatramo podmnogostrukost  $M$  sadržanu u sferi  $S^5$  koja je totalno geodezijski smeštena u sferi  $S^6$ . Kako je totalno geodezijska ova hipersfera je presek  $S^6$  sa hiperravni koja sadrži koordinatni početak, a tada postoji jedinično konstantno vektorsko polje  $V$ , ortogonalno na tu hiperravan, koje je ujedno ortogonalno i na podmnogostrukost  $M$  i pritom tangentno na sferu  $S^6$ .

Zato je

$$V = \rho E_4 + \tau E_5 + \sigma E_6, \quad (84)$$

gde su  $\rho, \tau$  i  $\sigma$  lokalno definisane diferencijabilne funkcije na podmnogostrukosti  $M$ . Uočimo da odgovarajuću pokretnu bazu možemo odabrati tako da važi i  $\tau = 0$ . Obzirom da je  $V$  jedinično vektorsko polje, takodje važi i

$$\rho^2 + \sigma^2 = 1.$$

Takodje, kako je podmnogostrukost  $M$  ujedno i minimalna, važi da je

$$h(E_1, E_1) + h(E_2, E_2) + h(E_3, E_3) = (-a_3 + b_2 + \nu_1)E_4 + \nu_2 E_5 + \nu_3 E_6 = 0$$

odnosno

$$-a_3 + b_2 + \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.$$

Obzirom da je  $V$  konstantno vektorsko polje, u sledećoj lemi dobijamo dodatne relacije medju lokalnim funkcijama.

**Lema 16** *Neka su  $\rho$  i  $\sigma$  koeficijenti definisani relacijom (84). Tada važi*

$$\begin{aligned} \nu_1 = 0, \quad b_2 = a_3, \quad c_1 = 0, \quad \beta_2 = a_3 \frac{\rho}{\sigma}, \quad \beta_3 = -a_2 \frac{\rho}{\sigma}, \quad c_3 = \frac{\sigma(-\rho + a_1\sigma)}{\rho^2 + \sigma^2}, \quad \gamma_2 = -\frac{b_1\rho\sigma}{\rho^2 + \sigma^2}, \\ c_2 = -\frac{b_1\sigma^2}{\rho^2 + \sigma^2}, \quad \gamma_3 = \frac{\rho(-\rho + a_1\sigma)}{\rho^2 + \sigma^2}, \quad E_1(\rho) = \frac{b_1\rho\sigma^2}{\rho^2 + \sigma^2}, \quad E_1(\sigma) = -\frac{b_1\rho^2\sigma}{\rho^2 + \sigma^2}, \\ E_2(\rho) = \sigma\left(2 - \frac{\rho(-\rho + a_1\sigma)}{\rho^2 + \sigma^2}\right), \quad E_2(\sigma) = \rho\left(-2 + \frac{\rho(-\rho + a_1\sigma)}{\rho^2 + \sigma^2}\right), \quad E_3(\rho) = 0, \quad E_3(\sigma) = 0. \end{aligned}$$

**Dokaz:** Kako je  $V$  konstantno sledi da je  $D_X V = 0$  za proizvoljno vektorsko polje  $X$ . Tada je

$$\begin{aligned} D_{E_1} V &= (a_3\rho - \beta_2\sigma)E_1 + (-a_2\rho - \beta_3\sigma)E_2 + (c_3\rho - \gamma_3\sigma)E_3 \\ &\quad + (\gamma_2\sigma + E_1(\rho))E_4 + ((1 + \gamma_3)\rho + (-a_1 + c_3)\sigma)E_5 + (-\gamma_2\rho + E_1(\sigma))E_6, \\ D_{E_2} V &= (-a_2\rho - \beta_3\sigma)E_1 + (-b_2\rho + \beta_2\sigma)E_2 + (-c_2\rho + \gamma_2\sigma)E_3 \\ &\quad + ((-2 + \gamma_3)\sigma + E_2(\rho))E_4 + (-\gamma_2\rho + (-b_1 - c_2)\sigma)E_5 + ((2 - \gamma_3)\rho + E_2(\sigma))E_6, \\ D_{E_3} V &= (c_3\rho - \gamma_3\sigma)E_1 + (-c_2\rho + \gamma_2\sigma)E_2 + (-a_3 + b_2)\rho E_3 \\ &\quad + E_3(\rho)E_4 + (-a_3 + b_2 - c_1)\sigma E_5 + E_3(\sigma)E_6. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je  $\rho = 0$ . Tada je  $\sigma \neq 0$  jer je  $V$  različito od nule. Tada iz

$$\langle D_{E_1} V, E_3 \rangle = 0 \quad \text{sledi} \quad \gamma_3 = 0,$$

a slično iz

$$\langle D_{E_2}V, E_4 \rangle = 0 \text{ sledi } \gamma_3 = 2,$$

što je kontradikcija. Zato važi  $\rho \neq 0$  i uzimajući u obzir  $\langle D_{E_3}V, E_3 \rangle = 0$  dobijamo

$$a_3 = b_2 \text{ sledi } \nu_1 = 0.$$

Slično važi  $\sigma \neq 0$ , jer bi u suprotnom relacije

$$\begin{aligned} \langle D_{E_1}V, E_5 \rangle &= (1 + \gamma_3)\rho + (-a_1 + c_3)\sigma = 0, \\ \langle D_{E_2}V, E_6 \rangle &= (2 - \gamma_3)\rho + E_2(\sigma) = 0 \end{aligned}$$

ponovo dovele do kontradikcije. Sada iz

$$\langle D_{E_3}V, E_5 \rangle = (-a_3 + b_2 - c_1)\sigma = 0$$

dobijamo

$$c_1 = 0.$$

Posmatrajmo jednakosti

$$\begin{aligned} \langle D_{E_2}V, E_3 \rangle &= -c_2\rho + \gamma_2\sigma = 0, \\ \langle D_{E_2}V, E_5 \rangle &= -\gamma_2\rho + (-b_1 - c_2)\sigma = 0. \end{aligned}$$

Direktno sledi da je  $\gamma_2 = c_2 \frac{\rho}{\sigma}$ , a dalje

$$c_2 = -\frac{b_1\sigma^2}{\rho^2 + \sigma^2}, \quad \gamma_2 = -\frac{b_1\sigma\rho}{\rho^2 + \sigma^2}.$$

Slično, iz

$$\begin{aligned} \langle D_{E_1}V, E_3 \rangle &= c_3\rho - \gamma_3\sigma = 0, \\ \langle D_{E_1}V, E_5 \rangle &= (1 + \gamma_3)\rho + (-a_1 + c_3)\sigma = 0 \end{aligned}$$

sledi  $\gamma_3 = c_3 \frac{\rho}{\sigma}$  a dalje

$$c_3 = \frac{\sigma(-\rho + a_1\sigma)}{\rho^2 + \sigma^2}, \quad \gamma_3 = \frac{\rho(-\rho + a_1\sigma)}{\rho^2 + \sigma^2}.$$

Sada iz

$$\langle D_{E_1}V, E_1 \rangle = \langle D_{E_1}V, E_2 \rangle = \langle D_{E_3}V, E_4 \rangle = \langle D_{E_3}V, E_6 \rangle = 0$$

redom sledi

$$\beta_2 = a_3 \frac{\rho}{\sigma}, \quad \beta_3 = -a_2 \frac{\rho}{\sigma}, \quad E_3(\rho) = 0, \quad E_3(\sigma) = 0.$$

Takodje, iz

$$\langle D_{E_1}V, E_4 \rangle = \langle D_{E_1}V, E_6 \rangle = \langle D_{E_2}V, E_4 \rangle = \langle D_{E_2}V, E_6 \rangle = 0$$

redom sledi

$$E_1(\rho) = -\gamma_2\sigma, \quad E_1(\sigma) = \gamma_2\rho, \quad E_2(\rho) = (2 - \gamma_3)\sigma, \quad E_2(\sigma) = (\gamma_3 - 2)\rho$$

odakle sledi i tvrdjenje. ■

Na osnovu dokaza Leme 16 sledi da su funkcije  $\sigma$  i  $\rho$  različite od nule. Zato postoji lokalno definisana, različita od nule diferencijabilna funkcija  $t$  takva da je  $\sigma = \rho t$ . Kako je  $V$  jedinično vektorsko polje, sledi da važi

$$\rho^2(t^2 + 1) = 1.$$

Sada direktno iz prethodnog dokaza sledi

$$E_1(t) = -tb_1, \quad E_2(t) = -3 + a_1t - 2t^2, \quad E_3(t) = 0. \quad (85)$$

Jednačine Kodacija i Gausa impliciraju nove relacije medju koeficijentima.

### Lema 17

$$\begin{aligned} a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad E_1(a_1) = 3a_1b_1, \quad E_1(b_1) = 3a_1\frac{1}{t} + 1 - 2a_1^2 + b_1^2, \\ E_2(a_1) = 2 - a_1^2 + 2b_1^2 + 3a_1^2\frac{1}{t}, \quad E_2(b_1) = 6b_1\frac{1}{t} - 3a_1b_1, \quad E_3(a_1) = 0, \quad E_3(b_1) = 0. \end{aligned}$$

**Dokaz:** Gausove jednačine za  $R(E_1, E_3, E_1, E_2)$  i  $R(E_2, E_3, E_1, E_2)$ , Ričijeva jednačina za  $R(E_1, E_3, E_6, E_4)$  i Kodacijeva jednačina za  $R(E_2, E_3)E_3$  impliciraju da su sledeći izrazi, redom, jednaki nuli:

$$\begin{aligned} y_1 &= 3a_1a_2 + 3a_3b_1 - \frac{3a_2}{t} - E_3(a_1), \\ z_1 &= 3a_1a_3 - 3a_2b_1 - \frac{3a_3}{t} - E_3(b_1), \\ y_4 &= -a_2b_1\rho^2t + a_3(-3\rho^2 + a_1\rho^2t - 2\rho^2t^2) + \rho^2tE_3(b_1), \\ z_2 &= 3a_2\rho^2 - a_1a_2\rho^2t - a_3b_1\rho^2t + 2a_2\rho^2t^2 - \rho^2tE_3(a_1). \end{aligned}$$

Označimo  $x = -4b_1\rho^2t$  i  $y = 3\rho^2 - 2a_1\rho^2t + \rho^2t^2$ . Tada se jednakosti

$$\begin{aligned} z_2 - \rho^2ty_1 &= 0, \\ y_4 + \rho^2tz_1 &= 0 \end{aligned}$$

pojednostavljaju do

$$a_3x + a_2y = 0, \quad a_2x - a_3y = 0.$$

Pretpostavimo da je  $a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ . Tada je  $x = 0, y = 0$ , odnosno  $b_1 = 0$  i  $a_1 = \frac{3+t^2}{2t}$ . Takođe, iz  $a_3y + y_4 = 0$  sledi  $-a_1a_3 = a_3t$ , a iz  $z_1 = 0$  sledi  $a_1a_3t = a_3$ , što se svodi na  $a_3 = 0$ . Kako je  $y_1 = 0$  direktno sledi  $a_2 = 0$ , što je kontradikcija. Dakle, važi

$$a_2 = a_3 = 0.$$

Takođe, tada je iz  $y_1 = z_1 = 0$  sledi i

$$E_3(a_1) = E_3(b_1) = 0.$$

Slično iz  $R(E_2, E_3, E_1, E_3) = R(E_2, E_3, E_1, E_4) = 0$  sledi da redom važi

$$E_2(b_1) = 6b_1 \frac{1}{t} - 3a_1 b_1, \quad E_2(a_1) = 2 - a_1^2 + 2b_1^2 + 3a_1 \frac{1}{t}.$$

Sada iz  $R(E_1, E_2, E_3, E_6) = 0$  sledi  $1 + a_1 + b_1^2 - E_2(a_1) + E_1(b_1) = 0$  odnosno

$$E_1(b_1) = 3a_1 \frac{1}{t} + 1 - 2a_1^2 + b_1^2.$$

Slično,  $R(E_1, E_2, E_4, E_7) = 0$  implicira  $6b_1 \rho - \sigma E_1(a_1) - \sigma E_2(b_1)$ , odakle je i

$$E_1(a_1) = 3a_1 b_1,$$

čime je tvrdjenje dokazano. ■

Sumirajući rezultate prethodnih lema, dobijamo da važi sledeća teorema

**Teorema 14** *Neka je  $M$  minimalna trodimenziona CR podmnogostrukost sfere  $S^6$  koja je sadržana u totalno geodezijskoj sferi  $S^5$  u  $S^6$ . Tada postoje tangentska vektorska polja  $E_1, E_2, E_3$  na  $M$ , normalna vektorska polja  $E_4, E_5, E_6$  i lokalno definisane diferencijabilne funkcije  $a_1, b_1$  i  $t$  takve da važi*

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= a_1 E_2, & \nabla_{E_1} E_2 &= -a_1 E_1, & \nabla_{E_1} E_3 &= 0, \\ \nabla_{E_2} E_1 &= b_1 E_2, & \nabla_{E_2} E_2 &= -b_1 E_1, & \nabla_{E_2} E_3 &= 0, \\ \nabla_{E_3} E_1 &= -\frac{b_1 t^2}{1+t^2} E_3, & \nabla_{E_3} E_2 &= \frac{t(a_1 t - 1)}{1+t^2}, & \nabla_{E_3} E_3 &= \frac{b_1 t^2}{1+t^2} E_1 + \frac{t - a_1 t^2}{1+t^2} E_2, \end{aligned} \quad (86)$$

dok je druga fundamentalna forma zadata sa

$$\begin{aligned} h(E_1, E_1) &= 0, \quad h(E_1, E_2) = 0, \quad h(E_2, E_2) = 0, \quad h(E_3, E_3) = 0, \\ h(E_1, E_3) &= \frac{t - a_1 t^2}{1+t^2} E_4 - \frac{b_1 t}{1+t^2} E_5 + \frac{-1 + a_1 t}{1+t^2} E_6, \\ h(E_2, E_3) &= -\frac{b_1 t^2}{1+t^2} E_4 - \frac{-2 + a_1 t - t^2}{1+t^2} E_5 + \frac{b_1 t}{1+t^2} E_6. \end{aligned} \quad (87)$$

Pritom, funkcije  $a_1, b_1, t$  zadovoljavaju sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} E_1(a_1) &= 3a_1 b_1, & E_2(a_1) &= 2 - a_1^2 + 2b_1^2 + 3a_1 \frac{1}{t}, & E_3(a_1) &= 0, \\ E_1(b_1) &= 3\frac{a_1}{t} + 1 - 2a_1^2 + b_1^2, & E_2(b_1) &= 6\frac{b_1}{t} - 3a_1 b_1, & E_3(b_1) &= 0, \\ E_1(t) &= -tb_1, & E_2(t) &= -3 + a_1 t - 2t^2, & E_3(t) &= 0. \end{aligned}$$

Koristeći izraze za koeficijente koneksije dobijamo da važi

$$[E_1, E_2] = -a_1 E_1 - b_1 E_2, \quad [E_1, E_3] = \frac{b_1 t^2}{1+t^2} E_3, \quad [E_2, E_3] = -\frac{t(-1 + a_1 t)}{1+t^2} E_3.$$

Uočimo da ova vektorska polja ne definišu koordinatni sistem na podmnogostrukosti. Pre nego što ispitamo oblik ovakvih podmnogostrukosti u opštem slučaju, obratićemo pažnju na dva

specijalna slučaja.

**Primer 1** Pretpostavimo da važi  $b_1 = 0$ . Tada iz  $0 = E_1(b_1) = \frac{3a_1}{t} + 1 - 2a_1^2$  sledi

$$t = \frac{3a_1}{2a_1^2 - 1},$$

a Lijeve zagrade imaju sledeći oblik:

$$[E_1, E_2] = -a_1 E_1, \quad [E_1, E_3] = 0, \quad [E_2, E_3] = -\frac{3a_1}{1 + 4a_1^2} E_3$$

dok za  $a_1$  važi

$$E_1(a_1) = 0, \quad E_2(a_1) = 1 + a_1^2, \quad E_3(a_1) = 0. \quad (88)$$

Potražimo vektorska polja koja odgovaraju nekom koordinatnom sistemu. Potražimo vektorsko polje u obliku  $F_1 = \mu E_1$  tako da je  $[F_1, E_2] = 0$  odnosno  $\mu[E_1, E_2] - E_2(\mu)E_1 = 0$  odakle i  $E_2(\mu) = -\mu a_1$ . Ako pretpostavimo da je  $\mu$  funkcija po  $a_1$  sledi da je  $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2}}$ . Ako slično potražimo treće vektorsko polje u obliku  $F_3 = \rho E_3$  koje ispunjava uslov  $[E_2, F_3] = 0$  odnosno  $\rho[E_2, E_3] + E_2(\rho)E_3 = 0$  a tada uz pretpostavku da je i  $\rho$  funkcija po  $a_1$  sledi da je  $\rho = \sqrt{\frac{1+4a_1^2}{1+a_1^2}}$ .

Direktnom proverom, sada dobijamo da za vektorska polja

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2}} E_1, \quad F_2 = E_2, \quad F_3 = \sqrt{\frac{1+4a_1^2}{1+a_1^2}} E_3$$

važi  $[F_i, F_j] = 0$ , te prema Teoremi 1 postoji lokalno definisan koordinatni sistem  $(x_1, x_2, x_3)$  na podmnogostrukosti  $M$  takav da važi

$$F_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad F_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad F_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Koeficijenti koneksije  $\nabla$  tada imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \nabla_{F_1} F_1 &= \frac{a_1}{1+a_1^2} F_2, & \nabla_{F_1} F_2 &= -a_1 F_1, & \nabla_{F_1} F_3 &= 0, \\ \nabla_{F_2} F_2 &= 0, & \nabla_{F_2} F_3 &= \frac{3a_1}{1+4a_1^2} F_3, & \nabla_{F_3} F_3 &= -\frac{3a_1}{1+a_1^2} F_2. \end{aligned}$$

Iz formula (88) sledi

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = 1 + a_1^2, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_3} = 0,$$

pa bez umanjenja opštosti možemo reći da je  $a_1(x_2) = \tan x_2$ , a druga fundamentalna forma ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} h(F_1, F_1) &= 0, & h(F_1, F_2) &= 0, & h(F_1, F_3) &= -\frac{3a_1^2}{\sqrt{1+a_1^2}(1+4a_1^2)} J F_3 + \frac{-1+2a_1^2}{\sqrt{1+a_1^2}(1+4a_1^2)} F_2 \times F_3, \\ h(F_2, F_2) &= 0, & h(F_2, F_3) &= -\frac{2(1+a_1^2)^{\frac{3}{2}}}{1+4a_1^2} F_1 \times F_3, & h(F_3, F_3) &= 0. \end{aligned}$$

Takodje važi

$$\langle F_1, F_1 \rangle = \frac{1}{1+a_1^2}, \quad \langle F_2, F_2 \rangle = 1, \quad \langle F_3, F_3 \rangle = \frac{1+4a_1^2}{1+a_1^2}, \quad \langle F_i, F_j \rangle = 0, i \neq j.$$

Ako označimo imersiju sa  $F$  tada formula (50) postaje

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} F + h\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) F - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle F. \quad (89)$$

Za  $i = j = 2$  ova jednakost se pojednostavljuje do

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} F + F = 0$$

odakle sledi

$$F(x_1, x_2, x_3) = A(x_1, x_3) \cos x_2 + B(x_1, x_3) \sin x_2,$$

gde su  $A$  i  $B$  vektorska polja koja ne zavise od promenljive  $x_2$ . Za  $i = 1, j = 2$  formula (89) postaje

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F = -\tan x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} F,$$

odnosno

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} A \sin x_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} B \cos x_2 = -\tan x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} F.$$

Ova jednakost važi za sve vrednosti  $x_1, x_2$  i  $x_3$  iz domena te će važiti i za  $x_2 = 0$ , a tada sledi  $\frac{\partial}{\partial x_1} B(x_1, x_3) = 0$ , odnosno  $B$  je vektorsko polje koje zavisi isključivo od promenljive  $x_3$ . Sada, za  $i = j = 1$  dobijamo

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} F = \sin x_2 \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} F - F$$

odnosno

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} A \cos x_2 = \sin x_2 \cos x_2 (-A \cos x_2 + B \cos x_2) - (A \cos x_2 + B \sin x_2)$$

a specijalno za vrednost  $x_2 = 0$  sledi

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} A(x_1, x_3) + A(x_1, x_3) = 0$$

odnosno

$$A(x_1, x_3) = A_1(x_3) \cos x_1 + A_2(x_3) \sin x_1,$$

gde su  $A_1$  i  $A_2$  vektorska polja koja zavise isključivo od promenljive  $x_3$ . Sada za  $i = j = 3$  jednakost (89) postaje

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} A(x_1, x_3) \cos x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} B(x_1, x_3) \sin x_2 = & -3 \sin x_2 \cos x_2 (B(x_1, x_3) \cos x_2 - A(x_1, x_3) \sin x_2) \\ & - (1 + 3 \sin^2 x_2) (A(x_1, x_3) \cos x_2 + B(x_1, x_3) \sin x_2) \end{aligned} \quad (90)$$

i ponovo za  $x_2 = 0$  dobijamo

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} A(x_1, x_3) + A(x_1, x_3) = 0$$

odnosno

$$(A_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} A_1) \cos x_1 + (A_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} A_2) \sin x_1 = 0$$

a kako su  $\cos x_1$  i  $\sin x_1$  linearno nezavisne funkcije dalje dobijamo

$$A_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} A_1 = 0, \quad A_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} A_2 = 0$$

odakle sledi i

$$A_1(x_3) = C_1 \cos x_3 + C_2 \sin x_3,$$

$$A_2(x_3) = D_1 \cos x_3 + D_2 \sin x_3,$$

gde su  $C_1, C_2, D_1, D_2$  konstantna vektorska polja.

Sada se jednakost (90) pojednostavljuje do

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} B(x_3) + 4B(x_3) = 0$$

odakle dobijamo

$$B(x_3) = B_1 \cos 2x_3 + B_2 \sin 2x_3$$

gde su  $B_1, B_2$  konstantna vektorska polja.

Kako je  $\{p, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$  jedna  $G_2$  pokretna baza možemo je u tački  $(0, 0, 0)$  identifikovati sa  $\{e_1, \dots, e_7\}$ . Tada sledi

$$C_1 = F(0, 0, 0) = e_1,$$

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} F(0, 0, 0) = e_2,$$

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} F(0, 0, 0) = e_3,$$

$$C_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} F(0, 0, 0) = e_4.$$

Takodje iz (89) dobijamo

$$B_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} F(0, 0, 0) = -e_6$$

$$D_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} F(0, 0, 0) = -e_7$$

odakle sledi da imersija ima sledeći oblik

$$F(x_1, x_2, x_3) = (\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3, \sin x_2 \cos 2x_3, \cos x_1 \cos x_2 \sin x_3, 0, \\ -\sin x_2 \sin 2x_3, -\sin x_1 \cos x_2 \sin x_3).$$

**Primer 2** Na osnovu Leme 6 sledi da za trodimenzionu podmnogostrukost  $\widetilde{M}$  sfere  $S^6$  važi

$$\delta_{\widetilde{M}} \leq \frac{9}{4}H^2 + 2,$$

a u tački  $p$  važi jednakost ako i samo ako je dimenzija distribucije

$$\mathcal{D} = \{X \in T_p\widetilde{M} \mid 2h(X, Y) = 3\langle X, Y \rangle H, \quad \text{za svako } Y \in T_p\widetilde{M}\}$$

veća ili jednaka jedan.

Uočimo da je prostor odredjen drugom fundamentalnom formom podmnogostrukosti  $M$  jednodimenzion ukoliko su vektorska polja  $h(E_1, E_3)$  i  $h(E_2, E_3)$  kolinearna, odnosno, ako i samo ako je sledeći izraz

$$x = 2 + a_1^2 t^2 + (1 + b_1^2)t^2 - a_1 t(3 + t^2) \quad (91)$$

identički jednak nuli. Ukoliko je ovaj uslov ispunjen, za nenula vektorsko polje  $V$  odredjeno sa

$$V = b_1 t E_1 - (-1 + a_1 t) E_2$$

važi  $h(V, E_i) = 0, i \in \{1, 2, 3\}$ . Kako je  $M$  minimalna podmnogostrukost, odnosno  $H = 0$  sledi da je odgovarajuća distribucija  $\mathcal{D}$  dimenzije najmanje jedan, pa  $M$  zadovoljava Čenovu jednakost i zato je lokalno kongruentna imersiji (83).

Vratimo se sada opštem slučaju. Uočimo da diferencijabilna funkcija  $x$  zadata formulom (91) zadovoljava sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$E_1(x) = 0, \quad E_2(x) = -6tx, \quad E_3(x) = 0. \quad (92)$$

Sada pretpostavljamo da je  $x \neq 0$  i  $b_1 \neq 0$ , odnosno da se podmnogostrukost  $M$  razlikuje od prethodna dva primera i potražimo vektorska polja na podmnogostrukosti  $M$  koja odgovaraju nekom koordinatnom sistemu. Potražimo vektorsko polje  $G_3 = f_3 E_3$  takvo da važi  $[E_1, G_3] = [E_2, G_3] = 0$ , gde je  $f_3$  diferencijabilna funkcija. Tada sledi

$$E_1(f_3) = -f_3 \frac{b_1 t^2}{1 + t^2}, \quad E_2(f_3) = f_3 \frac{t(-1 + a_1 t)}{1 + t^2}.$$

Posmatrajmo, zato, sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} E_1(\lambda) &= -\frac{b_1 t^2}{1 + t^2}, \\ E_2(\lambda) &= \frac{t(-1 + a_1 t)}{1 + t^2}, \\ E_3(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Direktna provera pokazuje da ovaj sistem zadovoljava uslov integrabilnosti, pa zato postoji diferencijabilna funkcija  $\lambda$  koja je rešenje prethodnog sistema i možemo smatrati da je  $f_3 = e^\lambda$ . Sada potražimo i diferencijabilne funkcije  $f_1$  i  $f_2$  takve da za  $G_1 = f_1 E_1$  i  $G_2 = f_2 E_2$  važi  $[G_1, G_2] = [G_1, G_3] = [G_2, G_3] = 0$  odakle sledi i da je  $E_3(f_1) = E_3(f_2) = 0$ . Uslov  $[G_1, G_2] = 0$  implicira da važi  $E_1(f_2) = f_2 b_1$  i  $E_2(f_1) = -f_1 a_1$ . Direktna provera pokazuje da funkcije  $f_1 = x^{-\frac{2}{3}} b_1 t^2$  i  $f_2 = \frac{1}{t}$  zadovoljavaju ove uslove. Znači, važi sledeće tvrdjenje.



**Lema 18** Ako je  $x \neq 0$  i  $b_1 \neq 0$ , tada za vektorska polja

$$G_1 = x^{-\frac{2}{3}} b_1 t^2 E_1, \quad G_2 = \frac{1}{t} E_2, \quad G_3 = e^\lambda E_3,$$

važi  $[G_i, G_j] = 0$ , za  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Dakle, postoji lokalno definisan koordinatni sistem  $(x_1, x_2, x_3)$  na  $M$  takav da važi

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad G_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad G_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Sada ćemo konstruisati minimalnu CR imersiju u sferu  $S^6$  na sledeći način. Uočimo sledeći sistem diferencijalnih jednačina i njegovo rešenje definisano na otvorenom podskupu  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} &= 3a_1 b_1^2 t^2 x^{-\frac{2}{3}}, & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} &= \frac{(2 - a_1^2 + 2b_1^2)}{t} + 3\frac{a_1}{t^2}, & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_1} &= (3a_1 b_1 t + b_1 t^2 - 2a_1^2 b_1 t^2 + b_1^3 t^2) x^{-\frac{2}{3}}, & \frac{\partial b_1}{\partial x_2} &= 6b_1 \frac{1}{t^2} - 3a_1 b_1 \frac{1}{t}, & \frac{\partial b_1}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial t}{\partial x_1} &= -t^3 b_1^2 x^{-\frac{2}{3}}, & \frac{\partial t}{\partial x_2} &= -\frac{3}{t} + a_1 - 2t, & \frac{\partial t}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} &= -\frac{b_1^2 t^4}{1 + t^2} x^{-\frac{2}{3}}, & \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} &= \frac{(-1 + a_1 t)}{1 + t^2}, & \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} &= 0, \end{aligned}$$

gde je  $x$  funkcija definisana formulom (91). Kako direktni račun pokazuje da su ispunjeni uslovi integrabilnosti prethodnog sistema sledi da za sledeći izbor inicijalnih uslova u koordinatnom početku,

$$b_1(O) = \alpha, \quad a_1(O) = \beta, \quad t(O) = \gamma, \quad \lambda(O) = 1,$$

(gde je  $b_1(O) \neq 0 \neq x(O)$ ) postoji lokalno definisano rešenje na domenu  $U_{\alpha\beta\gamma}$ . Definišimo sada metriku na skupu  $U_{\alpha\beta\gamma}$  koristeći uslov da vektorska polja

$$E_1 = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{b_1 t^2} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = t \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad E_3 = e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

definišu ortonormiranu bazu vektorskih polja na  $U_{\alpha\beta\gamma}$ . Tada sledi da je  $M$  izometrična nekoj od imersija  $U_{\alpha\beta\gamma}$  za odgovarajući izbor parametara  $\alpha, \beta, \gamma$ . Sada definišimo koeficijente koneksije kao u (86). Tada, na osnovu Teoreme 10 sledi da postoji CR imersija

$$F_{\alpha\beta\gamma} : U_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow S^6, \tag{93}$$

a na osnovu Teoreme 12 da je  $M$  kongruentna ovoj imersiji. Dakle, važi sledeća teorema:

**Teorema 15** Neka je  $M$  trodimenziona, minimalna, CR podmnogostrukost sfere  $S^6$  koja pripada i sferi  $S^5$  totalno geodezijski smeštenoj u  $S^6$ . Tada je  $M$  lokalno izometrična preko jedne  $G_2$  izometrije sa jednom od sledećih imersija

1. sa imersijom

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) &= (\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3, \sin x_2 \cos 2x_3, \\ &\quad \cos x_1 \cos x_2 \sin x_3, 0, -\sin x_2 \sin 2x_3, -\sin x_1 \cos x_2 \sin x_3); \end{aligned}$$

2. sa imersijom

$$F_1(t, u, v) = (\cos t \cos u \cos v, \sin t, \cos t \sin u \cos v, \cos t \cos u \sin v, 0, \\ - \cos t \sin u \sin v, 0);$$

3. sa jednom od imersija  $F_{\alpha\beta\gamma} : U_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow S^6$  datih u (93).

## 5 Podmnogostrukosti dimenzije 4

### 5.1 Četvorodimenzione CR podmnogostrukosti sfere $S^6$

Neka je  $M$  četvorodimenziona CR podmnogostrukost sfere  $S^6$ . Dimenzija skoro kompleksne distribucije je parna, a kako je u [28], A. Grej pokazao da ne postoje četvorodimenzione skoro kompleksne podmnogostrukosti sfere  $S^6$  zaključujemo da je dimenzija skoro kompleksne distribucije 2, što dalje implicira da je i dimenzija totalno realne distribucije 2. Neka je  $\{\xi, \eta\}$  jedna ortonormirana baza  $T^\perp(M)$ . Tada vektorska polja  $J\xi = p \times \xi$  i  $J\eta = p \times \eta$  razapinju totalno realnu distribuciju. Dalje je

$$\langle p, \xi \times \eta \rangle = -\langle \xi, p \times \eta \rangle = -\langle \xi, J\eta \rangle = 0,$$

dok iz osobina vektorskog proizvoda direktno sledi da je vektorsko polje  $\xi \times \eta$  ortogonalno na  $\xi$  i  $\eta$  i stoga pripada tangentskom raslojenju  $T(M)$ .

Slično

$$\begin{aligned} \langle p \times (\xi \times \eta), \xi \rangle &= \langle (p \times \eta) \times \xi + 2\langle p, \xi \rangle \eta - \langle p, \eta \rangle \xi - \langle \xi, \eta \rangle p, \xi \rangle \\ &= \langle (p \times \eta) \times \xi, \xi \rangle = 0, \end{aligned}$$

odakle sledi da je  $J(\xi \times \eta)$  vektorsko polje ortogonalno na  $\xi$ . Zamenom  $\xi$  i  $\eta$  u prethodnoj jednakosti direktno sledi da je  $J(\xi \times \eta)$  normalno i na vektorsko polje  $\eta$ . Kako važi  $\langle p, J(\xi \times \eta) \rangle = \langle p, p \times (\xi \times \eta) \rangle = 0$  i vektorsko polje  $J(\xi \times \eta)$  pripada tangentskom raslojenju  $T(M)$ . Takodje, važe sledeće relacije

$$\begin{aligned} \langle J(\xi \times \eta), \xi \times \eta \rangle &= 0, \\ \langle J(\xi \times \eta), J\xi \rangle &= \langle \xi \times \eta, \xi \rangle = 0, \\ \langle J(\xi \times \eta), J\eta \rangle &= \langle \xi \times \eta, \eta \rangle = 0, \\ \langle \xi \times \eta, J\xi \rangle &= -\langle J(\xi \times \eta), \xi \rangle = 0, \\ \langle \xi \times \eta, J\eta \rangle &= -\langle J(\xi \times \eta), \eta \rangle = 0. \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da je skoro kompleksna distribucija razapeta vektorskim poljima  $\xi \times \eta$  i  $J(\xi \times \eta)$ . Označimo ovu distribuciju sa  $U$  i u skladu sa tim označimo totalno realnu distribuciju sa  $U^\perp$ . Takodje, direktnom proverom zaključujemo da je  $\{p, \xi, J\xi, \eta, J\eta, \xi \times \eta, -J(\xi \times \eta)\}$  jedna  $G_2$  baza.

Uočimo neku drugu bazu normalnog raslojenja  $\{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\}$ . Tada postoji lokalno definisana funkcija  $\alpha$  takva da je

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \cos \alpha \xi + \sin \alpha \eta, \\ \tilde{\eta} &= \pm(-\sin \alpha \xi + \cos \alpha \eta). \end{aligned}$$

Tada sledi

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} \times \tilde{\eta} &= \pm(\cos \alpha \xi + \sin \alpha \eta) \times (-\sin \alpha \xi + \cos \alpha \eta) = \pm \xi \times \eta, \\ J(\tilde{\xi} \times \tilde{\eta}) &= \pm J(\xi \times \eta), \\ J\tilde{\xi} &= \cos \alpha J\xi + \sin \alpha J\eta, \\ J\tilde{\eta} &= \pm(-\sin \alpha J\xi + \cos \alpha J\eta). \end{aligned} \tag{94}$$

**Lema 19** Postoje lokalno definisane funkcije  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  takve da važi

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi \times \eta}^\perp \xi &= \alpha_1 \eta, & \nabla_{\xi \times \eta}^\perp \eta &= -\alpha_1 \xi, & \nabla_{J(\xi \times \eta)}^\perp \xi &= \alpha_2 \eta, & \nabla_{J(\xi \times \eta)}^\perp \eta &= -\alpha_2 \xi, \\ \nabla_{J\xi}^\perp \xi &= \alpha_3 \eta, & \nabla_{J\xi}^\perp \eta &= -\alpha_3 \xi, & \nabla_{J\eta}^\perp \xi &= \alpha_4 \eta, & \nabla_{J\eta}^\perp \eta &= -\alpha_4 \xi. \end{aligned}$$

**Dokaz:** Uočimo da iz  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$  sledi  $D_X \langle \xi, \eta \rangle = 0$  za proizvoljno vektorsko polje  $X$ , što dalje implicira  $\langle D_X \xi, \eta \rangle + \langle \xi, D_X \eta \rangle = 0$ . Sada tvrdjenje direktno sledi. ■

Označimo

$$F_1 = \xi \times \eta, \quad F_2 = J(\xi \times \eta), \quad F_3 = J\xi, \quad F_4 = J\eta.$$

Vektorska polja  $F_1, F_2, F_3, F_4$  formiraju lokalnu bazu tangentskog raslojenja podmnogostrukosti  $M$ . Uzimajući u obzir da su operatori oblika simetrični zaključujemo da postoje lokalne funkcije  $\beta_i, \gamma_i, i \in \{1, 10\}$ , takve da operatori  $A_\xi$  i  $A_\eta$  imaju sledeći oblik u ovoj bazi

$$A_\xi = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \beta_2 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \\ \beta_3 & \beta_6 & \beta_8 & \beta_9 \\ \beta_4 & \beta_7 & \beta_9 & \beta_{10} \end{bmatrix}, \quad A_\eta = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_2 & \gamma_5 & \gamma_6 & \gamma_7 \\ \gamma_3 & \gamma_6 & \gamma_8 & \gamma_9 \\ \gamma_4 & \gamma_7 & \gamma_9 & \gamma_{10} \end{bmatrix}.$$

Koristeći (29) dobijamo i

$$\begin{aligned} h(F_1, F_1) &= \beta_1 \xi + \gamma_1 \eta, & h(F_1, F_2) &= \beta_2 \xi + \gamma_2 \eta, & h(F_1, F_3) &= \beta_3 \xi + \gamma_3 \eta, \\ h(F_1, F_4) &= \beta_4 \xi + \gamma_4 \eta, & h(F_2, F_2) &= \beta_5 \xi + \gamma_5 \eta, & h(F_2, F_3) &= \beta_6 \xi + \gamma_6 \eta, \\ h(F_2, F_4) &= \beta_7 \xi + \gamma_7 \eta, & h(F_3, F_3) &= \beta_8 \xi + \gamma_8 \eta, & h(F_3, F_4) &= \beta_9 \xi + \gamma_9 \eta, \\ h(F_4, F_4) &= \beta_{10} \xi + \gamma_{10} \eta. \end{aligned} \tag{95}$$

**Lema 20** Koeficijenti koneksije  $\alpha_i, i \in \{1, \dots, 4\}$  i  $\beta_j, \gamma_j, j \in \{1, \dots, 10\}$  zadovoljavaju sledeće relacije:

$$\begin{aligned} \nabla_{F_1} F_1 &= (\beta_3 + \gamma_4) F_2 - \beta_2 F_3 - \gamma_2 F_4, & \nabla_{F_1} F_2 &= -(\beta_3 + \gamma_4) F_1 + \beta_1 F_3 + \gamma_1 F_4, \\ \nabla_{F_1} F_3 &= \beta_2 F_1 - \beta_1 F_2 + \alpha_1 F_4, & \nabla_{F_1} F_4 &= \gamma_2 F_1 - \gamma_1 F_2 - \alpha_1 F_3, \\ \nabla_{F_2} F_1 &= (\beta_6 + \gamma_7) F_2 - \beta_5 F_3 - \gamma_5 F_4, & \nabla_{F_2} F_2 &= -(\beta_6 + \gamma_7) F_1 + \beta_2 F_3 + \gamma_2 F_4, \\ \nabla_{F_2} F_3 &= \beta_5 F_1 - \beta_2 F_2 + (-1 + \alpha_2) F_4, & \nabla_{F_2} F_4 &= \gamma_5 F_1 - \gamma_2 F_2 - (-1 + \alpha_2) F_3, \\ \nabla_{F_3} F_1 &= (\beta_8 + \gamma_9) F_2 - \beta_6 F_3 - \gamma_6 F_4, & \nabla_{F_3} F_2 &= -(\beta_8 + \gamma_9) F_1 + \beta_3 F_3 + (1 + \gamma_3) F_4, \\ \nabla_{F_3} F_3 &= \beta_6 F_1 - \beta_3 F_2 + \alpha_3 F_4, & \nabla_{F_3} F_4 &= \gamma_6 F_1 - (1 + \gamma_3) F_2 - \alpha_3 F_3, \\ \nabla_{F_4} F_1 &= (\beta_9 + \gamma_{10}) F_2 - \beta_7 F_3 - \gamma_7 F_4, & \nabla_{F_4} F_2 &= -(\beta_9 + \gamma_{10}) F_1 + (-1 + \beta_4) F_3 + \gamma_4 F_4, \\ \nabla_{F_4} F_3 &= \beta_7 F_1 - (-1 + \beta_4) F_2 + \alpha_4 F_4, & \nabla_{F_4} F_4 &= \gamma_7 F_1 - \gamma_4 F_2 - \alpha_4 F_3, \end{aligned}$$

i

$$\beta_4 + 1 = \gamma_3, \quad \beta_7 = \gamma_6, \quad \beta_9 = \gamma_8, \quad \beta_{10} = \gamma_9.$$

**Dokaz:** Kako je  $\langle F_j, F_k \rangle$  konstantna funkcija za proizvoljne  $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , sledi da važi  $\nabla_{F_i} \langle F_j, F_k \rangle = 0$  za proizvoljno  $i$ . Kako je data koneksija Rimanova sledi da je  $\langle \nabla_{F_i} F_j, F_k \rangle + \langle F_j, \nabla_{F_i} F_k \rangle = 0$ . Ako je  $\nabla_{F_i} F_j = \sum_{k \in \{1, \dots, 4\}} \Gamma_{ij}^k F_k, i, j \in \{1, \dots, 4\}$  tada sledi da je  $\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ik}^j = 0$ .

Specijalno je i  $\Gamma_{ij}^j = 0$ .

Primenom (50) i (95) dobijamo

$$D_{F_i} F_2 = \nabla_{F_i} F_2 + h(F_2, F_i) - \langle F_2, F_i \rangle p,$$

a kako je  $F_2 = JF_1 = p \times F_1$ , iz Leme 3 i jednakosti (42) dobijamo

$$\begin{aligned} D_{F_i} F_2 &= D_{F_i} p \times F_1 + p \times D_{F_i} F_1 = F_i \times F_1 + p \times [\nabla_{F_i} F_1 + h(F_i, F_1) - \langle F_i, F_1 \rangle p] \\ &= F_i \times F_1 + \sum_{k \in \{1, \dots, 4\}} \Gamma_{i1}^k p \times F_k + p \times h(F_1, F_i). \end{aligned} \quad (96)$$

Za  $i = 1$  sledi

$$D_{F_1} F_2 = \nabla_{F_1} F_2 + \beta_2 \xi + \gamma_2 \eta,$$

a korišćenjem tablice vektorskog množenja jednakost (96) postaje

$$\begin{aligned} D_{F_1} F_2 &= F_1 \times F_1 + p \times [\nabla_{F_1} F_1 + h(F_1, F_1) - \langle F_1, F_1 \rangle p] \\ &= -\Gamma_{11}^2 F_1 - \Gamma_{11}^3 \xi - \Gamma_{11}^4 \eta + \beta_1 F_3 + \gamma_1 F_4 \end{aligned}$$

odakle se direktno dobija

$$\beta_2 = -\Gamma_{11}^3, \quad \gamma_2 = -\Gamma_{11}^4, \quad \beta_1 = \Gamma_{12}^3, \quad \gamma_1 = \Gamma_{12}^4.$$

Slično, za  $i = 2$  dobijamo

$$\begin{aligned} D_{F_2} F_2 &= F_2 \times F_1 + \sum_{k \in \{1, \dots, 4\}} \Gamma_{21}^k p \times F_k + p \times (\beta_2 \xi + \gamma_2 \eta) \\ &= -p - \Gamma_{21}^2 F_1 - \Gamma_{21}^3 \xi - \Gamma_{21}^4 \eta + \beta_2 F_3 + \gamma_2 F_4, \end{aligned}$$

odnosno

$$\beta_5 = -\Gamma_{21}^3, \quad \gamma_5 = -\Gamma_{21}^4, \quad \beta_2 = \Gamma_{22}^3, \quad \gamma_2 = \Gamma_{22}^4.$$

Za  $i = 3$  dobijamo

$$D_{F_3} F_2 = (1 + \gamma_3) F_4 - \Gamma_{31}^2 F_1 - \Gamma_{31}^3 \xi - \Gamma_{31}^4 \eta + \beta_3 F_3,$$

što implicira

$$1 + \gamma_3 = \Gamma_{32}^4, \quad \beta_3 = -\Gamma_{32}^3, \quad \beta_6 = -\Gamma_{31}^3, \quad \gamma_6 = -\Gamma_{31}^4.$$

Ako je  $i = 4$  jednakost (96) postaje

$$D_{F_4} F_2 = (-1 + \beta_4) F_3 - \Gamma_{41}^2 F_1 - \Gamma_{41}^3 \xi - \Gamma_{41}^4 \eta + \beta_4 F_3,$$

odnosno

$$-1 + \beta_4 = \Gamma_{42}^3, \quad \gamma_4 = \Gamma_{42}^4, \quad \beta_7 = -\Gamma_{41}^3, \quad \gamma_7 = -\Gamma_{41}^4.$$

Kako je  $F_3 = p \times \xi$  sledi da je

$$\begin{aligned} D_{F_i} F_3 &= D_{F_i} (p \times \xi) = D_{F_i} p \times \xi + p \times D_{F_i} \xi = F_i \times \xi + p \times (-A_\xi F_i + \nabla_{F_i}^\perp \xi) \\ &= F_i \times \xi + p \times (-A_\xi F_i + \alpha_i \eta). \end{aligned} \quad (97)$$

Jednakost (97) za  $i = 1$  postaje

$$\begin{aligned} D_{F_1}F_3 &= F_1 \times \xi + p \times (-\beta_1F_1 - \beta_2F_2 - \beta_3F_3 - \beta_4F_4 + \alpha_1p \times \eta) \\ &= (1 + \beta_4)\eta - \beta_1F_2 + \beta_2F_1 + \beta_3\xi + \alpha_1F_4, \end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$\Gamma_{13}^4 = \alpha_1, \quad \gamma_3 = 1 + \beta_4.$$

Slično za  $i = 2$  dobijamo

$$D_{F_2}F_3 = (-1 + \alpha_2)F_4 - \beta_2F_2 + \beta_5F_1 + \beta_6\xi,$$

i zaključujemo

$$-1 + \alpha_2 = \Gamma_{23}^4, \quad \beta_7 = \gamma_6.$$

Ako je  $i = 3$  tada se (97) pojednostavljuje do

$$D_{F_3}F_3 = -p - \beta_3F_2 + \beta_6F_1 + \beta_8\xi + \beta_9\eta + \alpha_3F_4,$$

što implicira

$$\Gamma_{33}^4 = \alpha_3, \quad \gamma_8 = \beta_9.$$

Za  $i = 4$  (97) postaje

$$D_{F_4}F_3 = (1 - \beta_4)F_2 + \beta_7F_1 + \beta_9\xi + \beta_{10}\eta + \alpha_4F_4,$$

odakle zaključujemo

$$\Gamma_{43}^4 = \alpha_4, \quad \gamma_9 = \beta_{10}.$$

Uočimo, takodje, kako je  $F_1 = \xi \times \eta$  što dalje implicira da je

$$\begin{aligned} D_{F_i}(\xi \times \eta) &= D_{F_i}\xi \times \eta + \xi D_{F_i}\eta = (-A_\xi F_i + \nabla_{F_i}^\perp \xi) \times \eta + \xi \times (-A_\eta F_i + \nabla_{F_i}^\perp \eta) \\ &= (-A_\xi F_i + \alpha_i \eta) \times \eta + \xi \times (-A_\eta F_i - \alpha_i \xi) = -A_\xi F_i \times \eta - \xi \times A_\eta F_i. \end{aligned}$$

Sada, za  $i = 1$  dobijamo

$$\begin{aligned} D_{F_1}F_1 &= -(\beta_1F_1 + \beta_2F_2 + \beta_3F_3 + \beta_4F_4) \times \eta - \xi \times (\gamma_1F_1 + \gamma_2F_2 + \gamma_3F_3 + \gamma_4F_4) \\ &= \beta_1\xi - \beta_2F_3 + \beta_3F_2 + \beta_4p + \gamma_1\eta - \gamma_2F_4 - \gamma_3p + \gamma_4F_2, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\Gamma_{11}^2 = \beta_3 + \gamma_4.$$

Za  $i = 2$  analogno sledi

$$D_{F_2}F_1 = \beta_2\xi - \beta_5F_3 + \beta_6F_2 + \beta_7p + \gamma_2\eta - \gamma_5F_4 - \gamma_6p + \gamma_7F_2$$

i dalje

$$\Gamma_{21}^2 = \beta_6 + \gamma_7.$$

Za  $i = 3$  se dobija

$$D_{F_3}F_1 = \beta_3\xi - \beta_6F_3 + \beta_8F_2 + \beta_9p + \gamma_3\eta - \gamma_6F_4 - \gamma_8p + \gamma_9F_2$$

i

$$\Gamma_{31}^2 = \beta_8 + \gamma_9.$$

Ako je  $i = 4$  tada sledi

$$D_{F_4}F_1 = \beta_4\xi - \beta_7F_3 + \beta_9F_2 + \beta_{10}p + \gamma_4\eta - \gamma_7F_4 - \gamma_9p + \gamma_{10}F_2$$

odakle zaključujemo da je

$$\Gamma_{41}^2 = \beta_9 + \gamma_{10}.$$

■

**Napomena** Kako je  $F_4 = J\eta = p \times \eta$ , sličan uslov se može nametnuti i za  $D_{F_4}F_4$ , ali se direktnim računom može proveriti da se ne dobijaju neki novi uslovi.

Uočimo, dalje da diferenciranjem iz  $\langle \xi, J\eta \rangle = 0$  dobijamo

$$\langle D_X\xi, J\eta \rangle + \langle \xi, X \times \eta \rangle + \langle \xi, p \times D_X\eta \rangle = 0$$

što dalje implicira

$$-\langle A_\xi X, J\eta \rangle + \langle A_\eta X, J\xi \rangle - \langle X, \xi \times \eta \rangle = 0$$

odnosno

$$A_\eta(J\xi) - A_\xi(J\eta) = \xi \times \eta. \quad (98)$$

## 5.2 Četvorodimenzione minimalne CR podmnogostrukosti koje zadovoljavaju Čenovu jednakost

Posmatrajmo CR podmnogostrukost  $M$  sfere  $S^6$  koja je minimalna i zadovoljava Čenovu jednakost. Dokazaćemo sledeću teoremu.

**Teorema 16** *Podmnogostrukost  $M$  je lokalno kongruentna sa imersijom*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = & (\cos x_4 \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, \sin x_4 \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3, \\ & \sin 2x_4 \sin x_3 \cos x_2 + \cos 2x_4 \sin x_2, 0, \sin x_4 \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, \\ & \cos x_4 \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3, \cos 2x_4 \sin x_3 \cos x_2 - \sin 2x_4 \sin x_2). \end{aligned} \quad (99)$$

U ovom poglavlju koristimo pokretnu bazu  $\{p, F_1, F_2, F_3, F_4, \xi, \eta\}$  iz poglavlja 5.1. Kako  $M$  zadovoljava Čenovu jednakost iz Leme 7 sledi da je distribucija

$$\mathcal{D} = \{Z \in T(M) | h(X, Z) = 0, \forall X \in T(M)\} \quad (100)$$

dimenzije 2. Neka je  $V \in \mathcal{D}$  proizvoljno vektorsko polje. Koristeći (98) dobijamo

$$\begin{aligned} \langle \xi \times \eta, V \rangle &= \langle A_\eta(J\xi), V \rangle - \langle A_\xi(J\eta), V \rangle \\ &= \langle \eta, h(J\xi, V) \rangle - \langle \xi, h(V, J\eta) \rangle = 0, \end{aligned}$$

što dalje implicira da takvo vektorsko polje  $V$  mora pripadati raslojenju razapetom vektorskim poljima  $F_2, F_3$  i  $F_4$ .

Kako je  $\mathcal{D}$  dimenzije 2, u datom raslojenju postoji vektorsko polje  $V_1 \in \mathcal{D}$  ortogonalno na  $F_2$ , odnosno  $V_1 \in \mathcal{L}(F_3, F_4)$ . Obzirom da odgovarajuća pokretna baza nije određena na jedinstven način, pogledati (94), možemo sada odabrati bazu raslojenja  $T^\perp(M)$ ,  $\{\xi, \eta\}$  tako da važi

$$V_1 = F_3.$$

Neka je dalje  $V_2 \in \mathcal{D}$  jedinično vektorsko polje ortogonalno na  $V_1$ , odnosno razapeto sa  $F_2$  i  $F_4$ . Tada na podmnogostrukosti postoji diferencijabilna funkcija  $\phi$  takva da

$$V_2 = \cos \phi F_2 + \sin \phi F_4.$$

U sledećih nekoliko lema, koristimo prethodno definisanu bazu, i rezultat Leme 20 i istražujemo uslov da  $M$  zadovoljava Čenovu jednakost u cilju dobijanja dodatnih relacija medju koeficijentima operatora oblika.

**Lema 21** *Na podmnogostrukosti  $M$  postoji lokalno definisana diferencijabilna funkcija  $t$  takva da važi*

$$\begin{aligned} \beta_3 = \gamma_3 = \beta_6 = \gamma_6 = \beta_7 = \beta_8 = \gamma_8 = \beta_9 = \gamma_9 = \beta_{10} = 0, \quad \beta_4 = -1, \\ \beta_2 = t, \quad \beta_1 = \beta_5 = 0, \quad \gamma_2 = -t\gamma_4, \quad \gamma_7 = -t\gamma_{10}, \quad \gamma_5 = t^2\gamma_{10}, \\ \gamma_1 = -\gamma_5 - \gamma_{10} = -(1 + t^2)\gamma_{10}. \end{aligned} \quad (101)$$

**Dokaz:** Uočimo da je

$$\begin{aligned} h(V_1, F_1) &= h(F_3, F_1) = \beta_3\xi + \gamma_3\eta, \\ h(V_1, F_2) &= h(F_3, F_2) = \beta_6\xi + \gamma_6\eta, \\ h(V_1, F_3) &= h(F_3, F_3) = \beta_8\xi + \gamma_8\eta, \\ h(V_1, F_4) &= h(F_3, F_4) = \beta_9\xi + \gamma_9\eta, \end{aligned}$$

a kako su vektorska polja  $\xi$  i  $\eta$  linearno nezavisna direktno sledi

$$\beta_3 = \gamma_3 = \beta_6 = \gamma_6 = \beta_8 = \gamma_8 = \beta_9 = \gamma_9 = 0.$$

Sada, iz Leme 20 sledi i

$$\beta_4 = -1, \quad \beta_7 = \beta_{10} = 0.$$

Dalje važi

$$\begin{aligned} h(V_2, F_1) &= (\cos \phi \beta_2 + \sin \phi \beta_4)\xi + (\cos \phi \gamma_2 + \sin \phi \gamma_4)\eta, \\ h(V_2, F_2) &= (\cos \phi \beta_5 + \sin \phi \beta_7)\xi + (\cos \phi \gamma_5 + \sin \phi \gamma_7)\eta, \\ h(V_2, F_3) &= (\cos \phi \beta_6 + \sin \phi \beta_9)\xi + (\cos \phi \gamma_6 + \sin \phi \gamma_9)\eta, \\ h(V_2, F_4) &= (\cos \phi \beta_7 + \sin \phi \beta_{10})\xi + (\cos \phi \gamma_7 + \sin \phi \gamma_{10})\eta, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \cos \phi \beta_2 - \sin \phi = 0, \quad \cos \phi \gamma_2 + \sin \phi \gamma_4 = 0, \\ \cos \phi \beta_5 = 0, \quad \cos \phi \gamma_5 + \sin \phi \gamma_7 = 0, \\ \cos \phi \gamma_7 + \sin \phi \gamma_{10} = 0. \end{aligned} \quad (102)$$



Podmnogostrukost  $M$  je minimalna pa je stoga

$$\beta_1 + \beta_5 + \beta_8 + \beta_{10} = \beta_1 + \beta_5 = 0, \quad \gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_8 + \gamma_{10} = \gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_{10} = 0.$$

Kako je  $\cos \phi \beta_2 - \sin \phi = 0$  direktno zaključujemo da je  $\cos \phi \neq 0$  pa iz (102) sledi

$$\beta_1 = \beta_5 = 0.$$

Označimo  $t = \tan \phi$ . Sada direktno iz (102) sledi

$$\begin{aligned} \beta_2 &= t, & \gamma_2 &= -t\gamma_4, & \gamma_7 &= -t\gamma_{10}, \\ \gamma_5 &= t^2\gamma_{10}, & \gamma_1 &= -\gamma_5 - \gamma_{10} = -(1+t^2)\gamma_{10}. \end{aligned}$$

■

**Lema 22** *Koeficijenti  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma_4, \gamma_{10}$  i  $t$  zadovoljavaju sledeće jednačine*

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad F_3(t) + 1 + t^2 = 0, \quad F_3(\gamma_4) = 0, \quad \alpha_2 = 1 - 2t^2, \quad \alpha_4 = 3t, \quad \gamma_{10} = 0, \\ F_1(\gamma_4) &= 0, \quad F_2(t) = 2t\gamma_4(1+t^2), \quad F_2(t\gamma_4) = 3t\gamma_4^2 + t(1-2t^2), \quad F_1(t) = 0, \\ F_4(\gamma_4) &= 3t\gamma_4^2 + 3t, \quad F_4(t) = -2\gamma_4(t^2+1), \quad F_2(\gamma_4) = (1-2t^2)(\gamma_4^2+1). \end{aligned}$$

**Dokaz:** Iz Kodacijevе jednačine (33) za  $X = Z = F_3$ ,  $Y = F_1$  i koristeći Lemu 21, odnosno  $F_3 = V_1$  dobija se

$$\begin{aligned} \nabla_{F_3}^\perp h(F_1, F_3) - h(\nabla_{F_3} F_1, F_3) - h(F_1, \nabla_{F_3} F_3) - (\nabla_{F_1}^\perp h(F_3, F_3) - h(\nabla_{F_1} F_3, F_3) - h(F_3, \nabla_{F_1} F_3)) \\ = -h(F_1, \nabla_{F_3} F_3) = -h(F_1, \alpha_3 F_4) = -\alpha_3(-\xi + \gamma_4 \eta) = 0, \end{aligned}$$

pa je

$$\alpha_3 = 0.$$

Slično, za  $X = F_3, Y = Z = F_1$  dobijamo

$$\begin{aligned} (\nabla h)(F_3, F_1, F_1) - (\nabla h)(F_1, F_3, F_1) &= \nabla_{F_3}^\perp h(F_1, F_1) + h(F_1, \nabla_{F_1} F_3) \\ &= -\alpha_1 \xi - (F_3((1+t^2)\gamma_{10}) + t(1+t^2)\gamma_{10} + \alpha_1 \gamma_4) \eta \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\alpha_1 = 0, \quad F_3((1+t^2)\gamma_{10}) + t(1+t^2)\gamma_{10} = 0.$$

Slično

$$\begin{aligned} (\nabla h)(F_1, F_2, F_3) - (\nabla h)(F_2, F_1, F_3) &= h(F_1, \nabla_{F_2} F_3) - h(F_2, \nabla_{F_1} F_3) \\ &= (1 - \alpha_2 - 2t^2)(\xi - \gamma_4 \eta), \\ (\nabla h)(F_1, F_4, F_3) - (\nabla h)(F_4, F_1, F_3) &= h(F_1, \nabla_{F_4} F_3) - h(F_4, \nabla_{F_1} F_3) \\ &= (3t - \alpha_4)(\xi - \gamma_4 \eta), \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\alpha_2 = 1 - 2t^2, \quad \alpha_4 = 3t.$$

Sada iz

$$\begin{aligned}
(\nabla h)(F_2, F_1, F_1) - (\nabla h)(F_1, F_2, F_1) &= \nabla_{F_2}^\perp(-(1+t^2)\gamma_{10}\eta) - 2h(-t\gamma_{10}F_2 - t^2\gamma_{10}F_4, F_1) \\
&- (\nabla_{F_1}^\perp(t\xi - t\gamma_4\eta) - h(-\gamma_4F_1 - (1+t^2)\gamma_{10}F_4, F_1) - h(F_2, \gamma_4F_2 + t\gamma_4F_4)) \\
&= ((1+t^2)\gamma_{10}(1+\alpha_2) - F_1(t))\xi + (-F_2((1+t^2)\gamma_{10}) + F_1(t\gamma_4))\eta,
\end{aligned}$$

sledi

$$F_1(t) = 2(1-t^4)\gamma_{10}, \quad -F_2((1+t^2)\gamma_{10}) + F_1(t\gamma_4) = 0. \quad (103)$$

Slično

$$\begin{aligned}
(\nabla h)(F_2, F_4, F_1) - (\nabla h)(F_4, F_2, F_1) &= \nabla_{F_2}^\perp(-\xi + \gamma_4\eta) - h(t^2\gamma_{10}F_1 + t\gamma_4F_4, F_1) \\
&- h(F_4, -t\gamma_{10}F_2 - t^2\gamma_{10}F_4) - (\nabla_{F_4}^\perp(t\xi - t\gamma_4\eta) - h(-\gamma_{10}F_1 + \gamma_4F_4, F_1) - h(F_2, \gamma_{10}F_2 + t\gamma_{10}F_4)) \\
&= (-\gamma_4\alpha_2 - t^2\gamma_4 - F_4(t) - t\gamma_4\alpha_4 - \alpha\gamma_4)\xi + (t\alpha_4 - F_4(t\gamma_4) - (1+t^2)\gamma_{10}^2 - \gamma_4^2 + \alpha_2 - F_2(\gamma_4) \\
&- t^2(1+t^2)\gamma_{10}^2 - t^2\gamma_4^2)\eta,
\end{aligned}$$

odakle sledi

$$F_4(t) = \gamma_4(-2 - 2t^2), \quad t^2 - F_4(t\gamma_4) - (1+t^2)^2\gamma_{10}^2 - \gamma_4^2 + 1 - F_2(\gamma_4) - t^2\gamma_4^2 = 0. \quad (104)$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
(\nabla h)(F_1, F_2, F_4) - (\nabla h)(F_2, F_1, F_4) &= \nabla_{F_1}^\perp(-t\gamma_{10}\eta) - h(-\gamma_4F_1 - (1+t^2)\gamma_{10}F_4, F_4) \\
&- h(F_2, -t\gamma_4F_1 + (1+t^2)\gamma_{10}F_2) - (\nabla_{F_2}^\perp(-\xi + \gamma_4\eta) - h(-t\gamma_{10}F_2 - t^2\gamma_{10}F_4, F_4) \\
&- h(F_1, t^2\gamma_{10}F_1 + t\gamma_4F_2)) = \gamma_4(-1 + 2t^2 + \alpha_2)\xi + (-F_1(t\gamma_{10}) + \gamma_4^2 + \gamma_{10}^2 - t^2\gamma_4^2 \\
&- t^4\gamma_{10}^2 + \alpha_2 - F_2(\gamma_4) - t^2\gamma_{10}^2(1+t^2) - t^2\gamma_4^2)\eta = (-F_1(t\gamma_{10}) + \gamma_4^2 + \gamma_{10}^2 - t^2\gamma_4^2 - t^4\gamma_{10}^2 \\
&+ 1 - 2t^2 - F_2(\gamma_4) - t^2\gamma_{10}^2(1+t^2) - t^2\gamma_4^2)\eta = 0.
\end{aligned} \quad (105)$$

Slično

$$\begin{aligned}
(\nabla h)(F_4, F_1, F_1) - (\nabla h)(F_1, F_4, F_1) &= \nabla_{F_4}^\perp(-(1+t^2)\gamma_{10}\eta) - 2h(\gamma_{10}F_2 + t\gamma_{10}F_4, F_1) \\
&- (\nabla_{F_1}^\perp(-\xi + \gamma_4\eta) - h(-t\gamma_4F_1 + (1+t^2)\gamma_{10}F_2, F_1) - h(F_4, \gamma_4F_2 + t\gamma_4F_4)) \\
&= (1+t^2)\gamma_{10}(\alpha_4 + t)\xi + (-F_4((1+t^2)\gamma_{10}) - F_1(\gamma_4))\eta = 4t(1+t^2)\gamma_{10}\xi \\
&+ (-F_4((1+t^2)\gamma_{10}) - F_1(\gamma_4))\eta,
\end{aligned} \quad (106)$$

što implicira

$$4t(1+t^2)\gamma_{10} = 0, \quad -F_4((1+t^2)\gamma_{10}) - F_1(\gamma_4) = 0. \quad (107)$$

Pretpostavimo da je  $t = 0$ . Tada iz (104) sledi  $\gamma_4 = 0$ , a iz (103) i  $\gamma_{10} = 0$ . Medjutim, tada iz jednačine (105) sledi kontradikcija  $1 = 0$ . Dakle, iz (107) sledi

$$\gamma_{10} = 0.$$

Sada iz (103) sledi

$$F_1(t) = 0, \quad F_1(t\gamma_4) = 0, \quad F_1(\gamma_4) = 0.$$

Analogno

$$\begin{aligned} (\nabla h)(F_1, F_4, F_4) - (\nabla h)(F_4, F_1, F_4) &= -2h(-t\gamma_4 F_1, F_4) - (\nabla_{F_4}^\perp(-\xi + \gamma_4 \eta) - h(F_1, -\gamma_4 F_2)) \\ &= (3t\gamma_4^2 + 3t - F_4(\gamma_4))\eta, \end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$F_4(\gamma_4) = 3t(1 + \gamma_4^2). \quad (108)$$

Takodje, (105) se svodi na

$$F_2(\gamma_4) = (\gamma_4^2 - 1)(1 - 2t^2). \quad (109)$$

Iz

$$\begin{aligned} (\nabla h)(F_1, F_2, F_2) - (\nabla h)(F_2, F_1, F_2) &= -2h(-\gamma_4 F_1, F_2) - (\nabla_{F_2}^\perp(t\xi - t\gamma_4 \eta) - h(F_1, -t\gamma_4 F_4)) \\ &= (-2t\gamma_4^2 - t(1 - 2t^2) + F_2(t\gamma_4) - t\gamma_4^2)\eta, \end{aligned}$$

odnosno

$$F_2(t\gamma_4) = 3t\gamma_4^2 + t(1 - 2t^2).$$

Kako iz (108) sledi da je  $\gamma_4 \neq 0$  pomoću (109) dobijamo i

$$F_2(t) = 2t\gamma_4(1 + t^2).$$

Primenom Kodacijevе jednačine na  $F_3, F_1$  i  $F_2$  dobijamo

$$\begin{aligned} (\nabla h)(F_3, F_1, F_2) - (\nabla h)(F_1, F_3, F_2) &= \nabla_{F_3}^\perp(t\xi - t\gamma_4 \eta) - h(F_1, F_4) + h(tF_1, F_2) \\ &= (F_3(t) + 1 + t^2)\xi + (-F_3(t\gamma_4) - \gamma_4 - t^2\gamma_4)\eta = 0, \quad (110) \end{aligned}$$

odakle dobijamo i

$$F_3(\gamma_4) = 0.$$

Direktna provera pokazuje da su i ostale jednačine zadovoljene. ■

Sada, direktnim računom dobijamo

$$\begin{aligned} [F_1, F_2] &= -\gamma_4 F_1, & [F_1, F_3] &= tF_1, \\ [F_1, F_4] &= -t\gamma_4 F_1, & [F_2, F_3] &= -tF_2 - (2t^2 + 1)F_4, \\ [F_2, F_4] &= t\gamma_4 F_2 + 2(t^2 + 1)F_3 - \gamma_4 F_4, & [F_3, F_4] &= -3F_2 - 3tF_4. \end{aligned}$$

Specijalno, ova vektorska polja ne definišu lokalne koordinate. Potražimo jednu takvu pokretnu bazu. Označimo sa  $G_1, G_2, G_3$  i  $G_4$  vektorska polja na podmnogostrukosti  $M$  koja odgovaraju nekom koordinatnom sistemu. Pretpostavimo da  $G_1$  može biti oblika  $G_1 = \rho F_1$ , gde je  $\rho$  lokalno definisana funkcija. Ako potražimo funkciju  $\rho$  takvu da važi  $[G_1, F_i] = \rho[F_1, F_i] - F_i(\rho)F_1 = 0, i \in \{2, 3, 4\}$ , dobijamo

$$F_2(\log \rho) = -\gamma_4, \quad F_3(\log \rho) = t, \quad F_4(\log \rho) = -t\gamma_4.$$

Kako je  $F_i(\log \rho) = \frac{\partial \log \rho}{\partial t} F_i(t) + \frac{\partial \log \rho}{\partial \gamma_4} F_i(\gamma_4)$ , za  $i = 3$  dobijamo  $\frac{\partial \log \rho}{\partial t} = -\frac{t}{1+t^2}$ , odakle sledi da je

$$\log \rho = -\frac{1}{2} \log(1 + t^2) + \rho_1$$

gde je  $\rho_1$  funkcija po promenljivoj  $\gamma_4$ , a zatim za  $i = 4$  sledi da je  $\rho_1'(\gamma_4) = -\frac{\gamma_4}{1+\gamma_4^2}$  te možemo uzeti

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+\gamma_4^2}}.$$

Direktnom proverom dobija se da je i jednačina za  $i = 2$  zadovoljena. Pošto je  $F_1(t) = F_1(\gamma_4) = 0$ , potražićemo  $G_2, G_3$  i  $G_4$  u raslojenju  $\mathcal{L}(F_2, F_3, F_4)$ .

Uočimo, da za  $\bar{V} = F_2 + tF_4$  sledi  $[F_3, \bar{V}] = -2t\bar{V}$ .

Zato, neka je  $G_2 = F_3, G_3 = \lambda\bar{V}$ , gde je  $\lambda$  neka lokalno definisana funkcija. Iz uslova  $[G_2, G_3] = 0$  dobijamo  $F_3(\log \lambda) = 2t$ . Analogno prethodnom razmatranju zaključujemo  $\frac{\partial \log \lambda}{\partial t} = -\frac{2t}{1+t^2}$  pa možemo uzeti

$$\lambda = \frac{1}{1+t^2}.$$

Želimo da poslednje vektorsko polje ispunjava uslov  $G_4(t) = G_4(\gamma_4) = 0$ . Tada za vektorsko polje  $\bar{G}_4 = aF_2 + bF_3 + cF_4$  proporcionalno  $G_4$ , gde su  $a, b, c$  lokalno definisane diferencijabilne funkcije

$$a(1-2t^2) + 3ct = 0, \quad 2at\gamma_4 - b - 2c\gamma_4 = 0,$$

pa ako je, naprimer,  $a = 3t$  dobijamo i

$$b = 2(1+t^2)\gamma_4, \quad c = -(1-2t^2).$$

Kako je  $\bar{G}_4(t) = \bar{G}_4(\gamma_4) = 0$  direktnim računom

$$[\bar{G}_4, G_2] = 2t\bar{G}_4, \quad [\bar{G}_4, G_3] = -\gamma_4\bar{G}_4.$$

Potražimo, dakle,  $G_4$  u obliku  $G_4 = \mu\bar{G}_4$ , gde je  $\mu$  lokalno definisana funkcija. Slično zaključujemo

$$G_2(\log \mu) = 2t, \quad G_3(\log \mu) = -\gamma_4,$$

pa možemo definisati  $\mu = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+\gamma_4^2}}$ . Dakle, dokazana je sledeća lema.

**Lema 23** *Vektorska polja*

$$G_1 = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+\gamma_4^2}}F_1, \quad G_2 = F_3, \quad G_3 = \frac{1}{1+t^2}F_2 + \frac{t}{1+t^2}F_4,$$

$$G_4 = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+\gamma_4^2}}(3tF_2 + 2(1+t^2)\gamma_4F_3 - (1-2t^2)F_4)$$

ispunjavaju uslov  $[G_i, G_j] = 0$ , za  $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ , te na podmnogostrukosti  $M$  postoji lokalno definisan koordinatni sistem  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  takav da važi

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad G_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad G_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad G_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Direktno se dobija i da vektorska polja  $F_i$  izražena u pokretnoj bazi  $\{G_i, 1 \leq i \leq 4\}$  imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} F_1 &= \sqrt{1+t^2}\sqrt{1+\gamma_4^2}G_1, & F_2 &= -2t\gamma_4G_2 + (1-2t^2)G_3 + t\sqrt{1+\gamma_4^2}G_4 \\ F_3 &= G_2, & F_4 &= 2\gamma_4G_2 + 3tG_3 - \sqrt{1+\gamma_4^2}G_4. \end{aligned} \quad (111)$$

Takodje, iz Leme 22 sledi:

$$\begin{aligned} G_1(t) &= 0, & G_1(\gamma_4) &= 0, & G_2(t) &= -(1+t^2), & G_2(\gamma_4) &= 0, \\ G_3(t) &= 0, & G_3(\gamma_4) &= 1+\gamma_4^2, & G_4(t) &= 0, & G_4(\gamma_4) &= 0. \end{aligned}$$

Odavde sledi i da je  $t$  funkcija isključivo po promenljivoj  $x_2$ , i do na translaciju koordinatnog sistema možemo reći

$$t = -\tan x_2,$$

Slično,  $\gamma_4$  zavisi isključivo od promenljive  $x_3$  i bez umanjenja opštosti možemo reći da je

$$\gamma_4 = \tan x_3.$$

Završimo sada dokaz Teoreme 16.

Iz jednakosti (50) zaključujemo da je

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} p = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + h\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle p. \quad (112)$$

Specijalno, za  $i = j = 2$  (112) postaje

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} p = -p,$$

odakle direktno sledi

$$p = A(x_1, x_3, x_4) \cos x_2 + B(x_1, x_3, x_4) \sin x_2,$$

gde su  $A$  i  $B$  neka vektorska polja. Dalje za  $i = 1, j = 2$  iz (112) dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial x_1} B = 0,$$

odnosno vektorsko polje  $B$  zavisi od promenljivih  $x_3, x_4$ . Slično za  $i = 2, j = 3$  dobija se

$$\frac{\partial}{\partial x_3} B = 0 \quad (113)$$

odnosno  $B$  je funkcija isključivo po  $x_4$ . Za  $i = 2, j = 4$  jednakost (112) postaje

$$\frac{\partial}{\partial x_4} B = -2 \sin x_3 A - 2 \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} A. \quad (114)$$

Diferenciranjem jednakosti (114) po  $x_3$  i koristeći (113) dobijamo

$$A + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_3} A = 0,$$

što dalje implicira da je

$$A = C(x_1, x_4) \cos x_3 + D(x_1, x_4) \sin x_3 \quad (115)$$

za neka vektorska polja  $C$  i  $D$ . Sada, (114) se redukuje na

$$D = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_4} B.$$

Slično za  $i = 1, j = 1$  iz (112) dobijamo

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} A = \cos x_3 \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} A - \cos^2 x_3 A. \quad (116)$$

Sada iz (115) i (116) dobijamo

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} C = -C,$$

odakle sledi

$$C = V(x_4) \cos x_1 + W(x_4) \sin x_1, \quad (117)$$

za neka vektorska polja  $V$  i  $W$ .

Za  $i = 4, j = 4$ , direktnim računom, (112) postaje

$$\begin{aligned} & \cos x_2 \left[ \cos x_3 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_4} V \cos x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_4} W \sin x_1 \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x_4 \partial x_4 \partial x_4} B \sin x_3 \right] \\ & + \sin x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_4} B = 3 \cos x_2 \cos x_3 (V \cos x_1 + W \sin x_1) \\ & - 4 \left[ (V \cos x_1 + W \sin x_1) \cos x_3 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_4} B \sin x_3 \right] \cos x_2 - 4B \sin x_2. \end{aligned} \quad (118)$$

Posebno, jednakost (118) važi i za  $x_2 = \frac{\pi}{2}$  odnosno  $\cos x_2 = 0$  i proizvoljne  $x_1, x_3$  i  $x_4$ . Tada dobijamo

$$\frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_4} B + 4B = 0 \quad (119)$$

a tada se (118) redukuje na

$$\frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_4} V \cos x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_4 \partial x_4} W \sin x_1 = -(V \cos x_1 + W \sin x_1). \quad (120)$$

Takodje, (119) implicira

$$B = B_1 \sin 2x_4 + B_2 \cos 2x_4,$$

gde su  $B_1$  i  $B_2$  konstantna vektorska polja.

Analogno, za proizvoljne  $x_2, x_3$  i  $x_4$  i za  $\cos x_1 = 0$  i  $\sin x_1 = 0$ , respektivno, iz (120) sledi

$$V = V_1 \sin x_4 + V_2 \cos x_4,$$

$$W = W_1 \sin x_4 + W_2 \cos x_4,$$

gde su  $V_1, V_2, W_1, W_2$  konstantna vektorska polja. Kako je  $\{p, \xi, F_3, \eta, F_4, F_1, -F_2\}$  jedna  $G_2$  pokretna baza možemo je identifikovati u tački  $(0, 0, 0, 0)$  sa bazom  $\{e_1, \dots, e_7\}$ . Sada sledi

$$p(0, 0, 0, 0) = V_2 = e_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Obzirom da važi (111) zaključujemo

$$\begin{aligned} F_1(0, 0, 0, 0) &= G_1(0, 0, 0, 0) = W_2 = e_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), \\ F_2(0, 0, 0, 0) &= G_3(0, 0, 0, 0) = B_1 = -e_7 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1), \\ F_3(0, 0, 0, 0) &= G_2(0, 0, 0, 0) = B_2 = e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), \\ F_4(0, 0, 0, 0) &= -G_4(0, 0, 0, 0) = -V_1 = -e_5 = (0, 0, 0, 0, -1, 0, 0). \end{aligned} \quad (121)$$

Da bismo izračunali  $W_1$  uočimo da je

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_4} p(0, 0, 0, 0) = W_1.$$

Korišćenjem (112) dobijamo

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_4} p(0, 0, 0, 0) = \xi$$

odakle sledi

$$W_1 = \xi = e_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Sada direktno dobijamo formulu (99).

Obrnuto, direktnim računom dobijamo da imersija (99) ispunjava uslove teoreme.

### 5.3 Neminimalne CR podmnogostrukosti i Čenova jednakost

U ovom poglavlju ćemo ispitati četvorodimenzione, neminimalne CR podmnogostrukosti sfere  $S^6$  koje zadovoljavaju Čenovu jednakost i predstavimo rezultate rada [3]. Podsećamo da je u [25] dokazano da trodimenziona CR podmnogostrukost koja zadovoljava Čenovu jednakost mora biti minimalna.

Takodje, na osnovu koeficijenata druge fundamentalne forme četvorodimenzionih CR podmnogostrukosti sfere sledi da one nikad nisu totalno geodezijske. Naime, važi

$$\beta_4 + 1 = \gamma_3,$$

odakle sledi da druga fundamentalna forma podmnogostrukosti nije identički jednaka nuli pa  $M$  nije totalno geodezijska podmnogostrukost. Zato, ispitujemo podmnogostrukosti koje zadovoljavaju sličnu osobinu, naime, one podmnogostrukosti za koje nula-distribucija

$$\mathcal{D}_1(p) = \{X \in T_p M \mid h(X, Y) = 0, \forall Y \in T_p M\}, \quad (122)$$

ima najveću moguću dimenziju. Koristićemo prethodno konstruisanu  $G_2$  bazu. Dokazujemo sledeće teoreme.

**Teorema 17** *Neka je  $M$  četvorodimenziona CR podmnogostrukost sfere  $S^6$  koja zadovoljava Čenovu jednakost. Tada  $M$  mora biti minimalna.*

**Teorema 18** *Najveća moguća dimenzija distribucije  $\mathcal{D}_1$  za podmnogostrukosti iz skupa četvorodimenzionih CR podmnogostrukosti sfere  $S^6$  je dva. Pri tom, ako je  $M$  podmnogostrukost iz tog skupa za koju je dimenzija  $\mathcal{D}_1$  jednaka dva, tada je  $M$  minimalna i zadovoljava Čenovu jednakost.*

Dokažimo Teoremu 17. Pretpostavimo da je  $M$  neminimalna, četvorodimenziona CR podmnogostrukost koja zadovoljava Čenovu jednakost. Obzirom da je neminimalna sledi da je vektor srednje krivine

$$H = \frac{1}{4}((\beta_1 + \beta_5 + \beta_8 + \beta_{10})\xi + (\gamma_1 + \gamma_5 + \beta_9 + \gamma_{10})\eta)$$

nenula. Možemo bazu normalnog vektorskog prostora  $\xi$  i  $\eta$  izabrati tako da je  $H$  ortogonalan na vektorsko polje  $\eta$ . Tada je

$$\beta_9 = -(\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_{10}) \text{ i } \beta_1 + \beta_5 + \beta_8 + \beta_{10} \neq 0.$$

Obzirom da  $M$  zadovoljava Čenovu jednakost sledi i da je dimenzija odgovarajuće distribucije  $\mathcal{D}$  najmanje dva. Neka je  $W \in \mathcal{D}$  proizvoljno vektorsko polje. Tada postoje lokalno definisane diferencijabilne funkcije  $k_1, k_2, k_3$  i  $k_4$  takve da

$$W = k_1 F_1 + k_2 F_2 + k_3 F_3 + k_4 F_4.$$

Tada koristeći (98) dobijamo

$$\langle F_1, W \rangle - \langle \eta, h(F_3, W) \rangle - \langle \xi, h(F_4, W) \rangle = -2(k_4 \beta_{10} + k_1 \beta_4 + k_2 \beta_7 + k_3 \beta_9) = 0,$$

a dalje i

$$k_4 \beta_{10} = -(k_1 \beta_4 + k_2 \beta_7 + k_3 \beta_9). \quad (123)$$

Iz  $0 = h(F_4, W) - \frac{4}{3} \langle F_4, W \rangle H$  sledi

$$\begin{aligned} (k_1 \beta_4 + k_2 \beta_7 - \frac{1}{3} k_4 (\beta_1 - 2\beta_{10} + \beta_8 + \beta_{10}) + k_3 \beta_9) \xi \\ + (k_3 \beta_{10} + k_4 \gamma_{10} + k_1 \gamma_4 + k_2 \gamma_7) \eta = 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$k_1 \beta_4 + k_2 \beta_7 - \frac{1}{3} k_4 (\beta_1 - 2\beta_{10} + \beta_8 + \beta_{10}) + k_3 \beta_9 = 0.$$

Koristeći (123) dobijamo

$$-\frac{1}{3} k_4 (\beta_1 + \beta_5 + \beta_8 + \beta_{10}) = 0$$

odakle sledi i

$$k_4 = 0.$$

Slično, iz (123) dobijamo i

$$0 = \langle h(F_3, W) - \frac{4}{3} \langle F_3, W \rangle H, \eta \rangle = k_4 \beta_{10} + k_1 (1 + \beta_4) + k_2 \beta_7 + k_3 \beta_9 = k_1,$$

odnosno  $k_1 = 0$ . Odavde sledi da je distribucija  $\mathcal{D}$  razapeta vektorskim poljima  $F_2, F_3$ , a kako je ujedno i dimenzije dva, sledi da su koeficijenti  $k_2$  i  $k_3$  proizvoljni. Sada za  $W \in \mathcal{D}$  dobijamo

$$\begin{aligned} h(F_1, W) - \frac{4}{3} \langle F_1, W \rangle H &= (k_2 \beta_2 + k_3 \beta_3) \xi + (k_3 + k_3 \beta_4 + k_2 \gamma_2) \eta = 0, \\ h(F_2, W) - \frac{4}{3} \langle F_2, W \rangle H &= (k_3 \beta_6 - \frac{1}{3} k_2 (\beta_1 - 2\beta_5 + \beta_8 + \beta_{10})) \xi \\ &\quad + (k_2 \beta_7 - k_3 (\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_{10})) \eta = 0, \\ h(F_3, W) - \frac{4}{3} \langle F_3, W \rangle H &= (k_2 \beta_6 - \frac{1}{3} (\beta_1 + \beta_5 - 2\beta_8 + \beta_{10})) \xi \\ &\quad + (k_2 \beta_7 - k_3 (\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_7)) \eta = 0, \\ h(F_4, W) - \frac{4}{3} \langle F_4, W \rangle H &= (k_2 \beta_7 - k_3 (\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_7)) \xi + (k_3 \beta_{10} + k_2 \gamma_7) \eta = 0. \end{aligned}$$



Sada sledi

$$\begin{aligned}
k_2\beta_2 + k_3\beta_3 &= 0, & k_3 + k_3\beta_4 + k_2\gamma_2 &= 0, \\
k_3\beta_6 - \frac{1}{3}k_2(\beta_1 - 2\beta_5 + \beta_8 + \beta_{10}) &= 0, & k_2\beta_7 - k_3(\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_{10}) &= 0, \\
k_2\beta_6 - \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_5 - 2\beta_8 + \beta_{10}) &= 0, & k_2\beta_7 - k_3(\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_7) &= 0, \\
k_2\beta_7 - k_3(\gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_7) &= 0, & k_3\beta_{10} + k_2\gamma_7 &= 0.
\end{aligned}$$

Obzirom da su koeficijenti  $k_2$  i  $k_3$  proizvoljni dobijamo

$$\begin{aligned}
\beta_2 = \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = -1, \quad \gamma_2 = 0, \quad \beta_6 = 0, \quad \beta_7 = \gamma_5 = 0, \quad \beta_{10} = \gamma_7 = 0, \\
\beta_1 + \beta_{10} - 2\beta_5 + \beta_8 = \beta_1 + \beta_{10} + \beta_5 - 2\beta_8 = 0, \quad \gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_{10} = 0,
\end{aligned}$$

odnosno

$$\beta_5 = \beta_8 = \beta_1.$$

Vektor srednje krivine sada ima oblik

$$H = \frac{3}{4}\beta_1\xi \quad \text{i} \quad \beta_1 \neq 0.$$

Uočimo da je sada

$$[F_1, F_3] = D_{F_1}F_3 - D_{F_3}F_1 = -2\beta_1F_2 + \alpha_1F_4,$$

pa je

$$\begin{aligned}
R(F_1, F_3)F_1 &= D_{F_1}D_{F_3}F_1 - D_{F_3}D_{F_1}F_1 - D_{[F_1, F_3]}F_1 \\
&= D_{F_1}(\beta_1F_2) - D_{F_3}(-p + \gamma_4F_2 + \beta_1\xi + \gamma_1\eta) + 2\beta_1(-\beta_1F_3) - \alpha_1(-\xi + \gamma_4\eta) \\
&= F_1(\beta_1)F_2 + \beta_1(-\gamma_4F_1 + \beta_1F_3 + \gamma_1F_4) + F_3 - F_3(\gamma_4)F_2 - \gamma_4(-\beta_1F_1 + F_4) \\
&\quad - F_3(\beta_1)\xi - \beta_1(-\beta_1F_3 + \alpha_3\eta) - F_3(\gamma_1)\eta - \gamma_1(-\alpha_3\xi) - 2\beta_1^2F_3 - \alpha_1(-\xi + \gamma_4)\eta,
\end{aligned}$$

a tada je

$$R(F_1, F_3, F_1, F_3) = \beta_1^2 + 1 + \beta_1^2 - 2\beta_1^2 = 1,$$

što je kontradikcija sa činjenicom da je prostor  $\mathbb{R}^7$  krivine nula. Zato ne postoje neminimalne CR podmnogostrukosti sfere  $S^6$  dimenzije 4 koje zadovoljavaju Čenovu jednakost.

Dokažimo Teoremu 18. Ispitajmo prvo, distribuciju  $\mathcal{D}_1$ . Uočimo da za vektorsko polje  $V \in \mathcal{D}_1$  na osnovu (98) važi

$$\begin{aligned}
\langle \xi \times \eta, V \rangle &= \langle A_\eta(J\xi), V \rangle - \langle A_\xi(J\eta), V \rangle \\
&= \langle \eta, h(J\xi, V) \rangle - \langle \xi, h(V, J\eta) \rangle = 0
\end{aligned} \tag{124}$$

što implicira da  $V$  pripada prostoru razapetom sa  $F_2, F_3$  i  $F_4$ .

Neka je  $M$  proizvoljna četvorodimenziona CR podmnogostrukost sfere  $S^6$ . Već je pokazano da  $M$  ne može biti totalno geodezijska podmnogostrukost. Takodje, na osnovu (124) sledi da  $\mathcal{D}_1$

ne može biti ni dimenzije tri. Naime, u tom slučaju bi se distribucija  $\mathcal{D}_1$  poklapala sa prostorom razapetim sa  $F_2, F_3$  i  $F_4$  što nije moguće. Distribucije  $\mathcal{D}$  i  $\mathcal{D}_1$  se poklapaju ako i samo ako je podmnogostrukost minimalna. Minimalne CR podmnogostrukosti sfere dimenzije četiri koje zadovoljavaju Čenovu jednakost su primer podmnogostrukosti čija je distribucija  $\mathcal{D}_1$  dimenzije 2. Dakle, to je maksimalna moguća dimenzija distribucije  $\mathcal{D}_1$ .

Obzirom da je dimenzija  $\mathcal{D}_1$  dva, postoji vektorsko polje  $V_1 \in \mathcal{D}_1$  ortogonalno na vektorsko polje  $F_2$  (odnosno  $V_1 \in \mathcal{L}(F_3, F_4)$ ). U ovom slučaju možemo izabrati pokretnu bazu normalnog raslojenja  $T^\perp(M)$  tako da važi

$$V_1 = F_3.$$

Sada, neka je  $V_2 \in \mathcal{D}_1$  vektorsko polje ortogonalno na  $V_1$ . Tada postoji lokalno definisana diferencijabilna funkcija  $\phi$  takva da je

$$V_2 = \cos \phi F_2 + \sin \phi F_4.$$

**Lema 24** *Na podmnogostrukosti  $M$  postoji lokalno definisana diferencijabilna funkcija*

$$\begin{aligned} \beta_3 = \beta_6 = \beta_7 = \beta_8 = \beta_9 = \beta_{10} = \beta_5 = 0, \quad \beta_4 = -1, \\ \beta_2 = t, \quad \gamma_2 = -t\gamma_4, \quad \gamma_7 = -t\gamma_{10}, \quad \gamma_5 = t^2\gamma_{10}. \end{aligned} \quad (125)$$

**Dokaz:** Iz  $h(V_1, F_j) = 0, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  direktno sledi

$$\beta_3 = 0, \quad \beta_4 = -1, \quad \beta_6 = 0, \quad \beta_7 = 0, \quad \beta_8 = 0, \quad \beta_9 = 0, \quad \beta_{10} = 0.$$

Takodje  $h(V_2, F_j) = 0$  je zadovoljeno. Sada iz  $h(V_2, F_j) = 0, j \in \{1, 2, 4\}$  dobijamo

$$\begin{aligned} h(V_2, F_1) &= (\cos \phi \beta_2 - \sin \phi) \xi + (\cos \phi \gamma_2 + \sin \phi \gamma_4) \eta = 0, \\ h(V_2, F_2) &= \cos \phi \beta_5 \xi + (\cos \phi \gamma_5 + \sin \phi \gamma_7) \eta = 0, \\ h(V_2, F_4) &= (\cos \phi \gamma_7 + \sin \phi \gamma_{10}) \eta = 0. \end{aligned}$$

Ako bi važiilo  $\cos \phi = 0$  sledilo bi i  $\sin \phi \xi = 0$ , što je nemoguće, pa je  $\cos \phi \neq 0$ , a samim tim i  $\beta_5 = 0$ . Sada, možemo uvesti smenu  $t = \tan \phi$ , a iz formula (126) tvrdjenje leme direktno sledi. ■

**Lema 25** *Koeficijenti koneksije zadovoljavaju sledeće jednakosti*

$$\begin{aligned} \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 3t, \quad \alpha_2 = 1 - 2t^2, \quad \gamma_{10} = 0, \quad F_3(\gamma_4) = 0, \quad F_3(t) = -(1 + t^2), \\ F_1(t) = 2\gamma_1(t^2 - 1) - \gamma_4(t\alpha_1 - \beta_1) + F_2(\beta_1), \quad F_3(\gamma_1) = -\alpha_1\gamma_4 - t(\gamma_1 + \beta_1\gamma_4), \\ F_2(\alpha_1) = 4t\gamma_1(1 - 2t^2) + \gamma_4(\alpha_1(1 + 4t^2) + 3t\beta_1) - 4tF_2(\beta_1), \\ F_2(t) = t^2\gamma_4(1 + t^2), \quad F_4(\beta_1) = 4t\gamma_1 + \gamma_4(t\beta_1 - \alpha_1), \quad F_3(\alpha_1) = \beta_1(1 - 2t^2) - 4t\alpha_1, \\ F_4(t) = -2(1 + t^2)\gamma_4, \quad F_4(\alpha_1) = 4\gamma_1(t^2 - 1) - 2\gamma_4(t\alpha_1 + \beta_1) + 3F_2(\beta_1), \\ F_2(\gamma_1) = \gamma_4(2\gamma_1(1 - t^2) + \gamma_4(t\alpha_1 + \beta_1) - F_2(\beta_1)) - \beta_1(1 + t^2) - tF_4(\gamma_1), \\ F_4(\gamma_4) = 3t(1 + \gamma_4^2), \quad F_3(\beta_1) = \alpha_1, \quad F_2(\gamma_4) = (1 - 2t^2)(1 + \gamma_4^2), \\ F_4(\gamma_1) = -\alpha_1 - 3t\beta_1 + F_1(\gamma_4). \end{aligned}$$

**Dokaz:** Iz Kodacijeve jednačine (33) za vektorska polja  $X = Z = F_3, Y = F_1$  sledi

$$\alpha_3(-\xi + \gamma_4\eta) = 0.$$

Slično, Kodacijeva jednačina  $R(F_3, F_4, F_1, \xi)$  daje  $-3t + \alpha_4 = 0$ . Dalje, to implicira

$$R(F_1, F_2, \xi, F_3) = -1 + 2t^2 + \alpha_2 = 0.$$

Sada iz Gausove jednačine za  $R(F_1, F_3, F_3, F_1)$  sledi

$$-1 - t^2 - F_3(t) = 0$$

odakle zaključujemo i  $t \neq 0$ . Na sličan način dobijamo

$$R(F_3, F_4, F_1, F_2) = -t\gamma_{10} + F_3(\gamma_{10}) = 0,$$

$$R(F_3, F_4, F_1, \eta) = F_3(\gamma_4) = 0.$$

Sada sledi

$$R(F_1, F_2, F_2, F_3) = 2\gamma_1 - 2t^2\gamma_1 + t\alpha_1\gamma_4 + \beta_1\gamma_4 + F_1(t) - F_2(\beta_1) = 0,$$

$$R(F_1, F_2, F_3, F_4) = 4t\gamma_1(1 - 2t^2) + (\alpha_1(1 + 4t^2) + 3t\beta_1)\gamma_4 \\ - F_2(\alpha_1) - 4tF_2(\beta_1) = 0,$$

$$R(F_1, F_2, \eta, \xi) = -3t^3\gamma_{10} = 0.$$

Obzirom da je funkcija  $t$  različita od nule dobijamo i  $\gamma_{10} = 0$ .

Dalje je

$$R(F_1, F_2, F_1, \xi) = 2\gamma_1 - 2t^2\gamma_1 + t\alpha_1\gamma_4 + \beta_1\gamma_4 + F_1(t) - F_2(\beta_1),$$

$$R(F_1, F_3, \xi, F_1) = \alpha_1\gamma_4 + t(\gamma_1 + \beta_1\gamma_4) + F_3(\gamma_1),$$

$$R(F_1, F_2, \xi, F_2) = -2t(1 + t^2)\gamma_4 + F_2(t),$$

$$R(F_1, F_4, \xi, F_1) = \alpha_1\gamma_4 - t(4\gamma_1 + \beta_1\gamma_4) + F_4(\beta_1),$$

$$R(F_1, F_3, F_3, F_4) = -4t\alpha_1 + \beta_1 - 2t^2\beta_1 + F_3(\alpha_1),$$

$$R(F_2, F_4, F_3, F_2) = -2(1 + t^2)\gamma_4 + F_4(t),$$

$$R(F_1, F_4, F_4, F_3) = 4\gamma_1 - 4t^2\gamma_1 + 2t\gamma_1\alpha_4 + 2\beta_1\gamma_4 + F_4(\alpha_1) - 3F_2(\beta_1),$$

$$R(F_1, F_2, F_2, F_4) = t\alpha_1 - \beta_1 + 2t^2\beta_1 + \gamma_4(2(t^2 - 1)\gamma_1 + (t\alpha_1 + \beta_1)\gamma_4 \\ - F_2(\beta_1)) - F_2(\gamma_1) - tF_1(\gamma_4),$$

$$R(F_1, F_4, F_2, F_1) = -3t(1 + \gamma_4^2) + F_4(\gamma_4),$$

$$R(F_1, F_3, F_2, F_3) = \alpha_1 - F_3(\beta_1),$$

$$R(F_1, F_2, F_1, F_2) = -(-1 + 2t^2)(1 + \gamma_4^2) - F_2(\gamma_4),$$

$$R(F_1, F_2, F_5, \eta) = 4t\gamma_1 - 8t^3\gamma_1 + \alpha_1\gamma_4 + 4t^2\alpha_1\gamma_4 + 3t\beta_1\gamma_4 - F_2(\alpha_1) - 4tF_2(\beta_1),$$

$$R(F_1, F_4, F_1, \xi) = -\alpha_1 - 3t\beta_1 - F_4(\gamma_1) + F_1(\gamma_4),$$

odakle direktno sledi tvrdjenje. Takodje, direktna provera pokazuje da su ovo i dovoljni uslovi da sve jednačine Gausa, Kodacija i Ričija budu zadovoljene. ■

Koristeći uslov da je koneksija bez torzije za vektorska polja  $F_1, F_3$  i funkciju  $\gamma_4$  dobijamo

$$F_2(\beta_1) = (-\beta_1(1+t^2) + 2\gamma_1\gamma_4(1-t^2) + \gamma_4^2(t\alpha_1 + \beta_1))/\gamma_4,$$

što uprošćava uslov integrabilnosti za  $t$  i  $F_1, F_3$  na

$$(1+t^2)(\alpha_1 + t\beta_1)(1+2\gamma_4^2)/\gamma_4 = 0.$$

Zato važi  $\alpha_1 + t\beta_1 = 0$ . Tada dobijamo

$$0 = F_4(\alpha_1 + t\beta_1) = -(1+t^2)(-2\gamma_1\gamma_4 + \beta_1(3+2\gamma_4^2))/\gamma_4.$$

Sada važi

$$\gamma_1 = \beta_1(3 + \gamma_4^2)/(2\gamma_4). \quad (126)$$

Slično kao i ranije, rezultati Leme 25 i (126) impliciraju

$$\begin{aligned} 0 &= F_2(-2\gamma_1\gamma_4 + \beta_1(3 + \gamma_4^2)) = (2\gamma_1\gamma_4(2 + t^2(\gamma_4^2 - 1)) \\ &\quad - \beta_1(3 - 4\gamma_4^2 - 3\gamma_4^4 + t^2(3 + 8\gamma_4^2 + 5\gamma_4^4)) + 2t\gamma_4^2 F_4(\gamma_1))/\gamma_4 \\ &= (4t^2\gamma_1\gamma_4(3 + \gamma_4^2) + \beta_1(3(1 + \gamma_4^2)^2 + t^2(-15 - 6\gamma_4^2 + \gamma_4^4)))/\gamma_4 \\ &= 3(1 + t^2)(1 + \gamma_4^2)^2\beta_1/\gamma_4. \end{aligned}$$

Zato je  $\beta_1 = 0$  a dalje i  $\gamma_1 = 0$ . Medjutim, sada direktno sledi da važi  $H = 0$ . Obzirom da je  $M$  minimalna podmnogostrukost, distribucije  $\mathcal{D}$  i  $\mathcal{D}_1$  su identički jednake,  $M$  zadovoljava Čenovu jednakost i lokalno je kongruentna imersiji (99).

## 5.4 Četvorodimenzione minimalne CR podmnogostrukosti koje pripadaju totalno geodezijskoj sferi $S^5$

U ovom poglavlju ćemo ispitivati četvorodimenzione podmnogostrukosti koje istovremeno pripadaju i nekoj hiperravni prostora  $\mathbb{R}^7$  koja sadrži koordinatni početak. Drugim rečima, podmnogostrukost  $M$  pripada i sferi  $S^5$  koja je totalno geodezijska podmnogostrukost sfere  $S^6$ .

**Teorema 19** *Neka je  $M$  četvorodimenziona, minimalna CR podmnogostrukost sfere  $S^6$  sadržana u totalno geodezijskoj sferi  $S^5$ . Tada je  $M$  lokalno kongruentna jednoj od sledećih imersija:*

1. imersiji (99) i zadovoljava Čenovu jednakost,
2. imersiji

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{\sqrt{6}}{8} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} (3(\cos x_1 \cos x_2 + \cos x_3 \sin x_1) + \sqrt{2} \cos(\sqrt{3}x_4)), \right. \\ &\quad \left. (\sqrt{2} \cos(\sqrt{3}x_4) - \cos x_1 \cos x_2 - \cos x_3 \sin x_1), 2(\sin x_1 \sin x_3 - \cos x_1 \sin x_2), \right. \\ &\quad \left. 0, \frac{1}{\sqrt{3}} (-3(\cos x_1 \sin x_2 + \sin x_1 \sin x_3) + \sqrt{2} \sin(\sqrt{3}x_4)), \right. \\ &\quad \left. (\cos x_1 \sin x_2 + \sin x_1 \sin x_3 + \sqrt{2} \sin(\sqrt{3}x_4)), 2(\cos x_3 \sin x_1 - \cos x_1 \cos x_2) \right), \end{aligned} \quad (127)$$

## 3. imersiji

$$\begin{aligned}
f_3(y_1, y_2, y_3, y_4) = & \frac{1}{4}(((1 + \sqrt{2}) \cos y_2 + \cos y_3) \cos(y_1 - y_4) \\
& + (\cos y_2 + (1 - \sqrt{2}) \cos y_3) \cos(y_1 + y_4) \\
& + \sin y_2 \sin y_3((\sqrt{2} - 1) \sin(y_1 + y_4) - \sin(y_1 - y_4))), \\
& (((1 + \sqrt{2}) \cos y_3 - \cos y_2) \cos(y_1 - y_4) - ((\sqrt{2} - 1) \cos y_2 + \cos y_3) \cos(y_1 + y_4) \\
& + \sin y_2 \sin y_3(\sin(y_1 + y_4) - (1 + \sqrt{2}) \sin(y_1 - y_4))), \\
& \sqrt{8\sqrt{2}} - 8((1 + \sqrt{2})(\cos y_1 \cos y_3 \sin y_2 - \sin y_1 \sin y_3) \sin y_4 \tag{128} \\
& - \cos y_4(\cos y_3 \sin y_1 \sin y_2 + \cos y_1 \sin y_3)), 0, ((\cos y_2 + (1 - \sqrt{2}) \cos y_3) \sin(y_1 + y_4)) \\
& - (\cos(y_1 - y_4) + (\sqrt{2} - 1) \cos(y_1 + y_4)) \sin y_2 \sin y_3 \\
& - ((1 + \sqrt{2}) \cos y_2 + \cos y_3) \sin(y_1 - y_4), \\
& (-((1 + \sqrt{2}) \cos(y_1 - y_4) + \cos(y_1 + y_4) \sin y_2 \sin y_3 \\
& + (\cos y_2 - (1 + \sqrt{2}) \cos y_3) \sin(y_1 - y_4) - ((\sqrt{2} - 1) \cos y_2 + \cos y_3) \sin(y_1 + y_4)), \\
& - 4\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2} + 1}(\cos y_4(\cos y_1 \cos y_3 \sin y_2 - \sin y_1 \sin y_3) \\
& + (\sqrt{2} - 1)(\cos y_3 \sin y_1 \sin y_2 + \cos y_1 \sin y_3) \sin y_4)).
\end{aligned}$$

I u ovom poglavlju koristimo pokretnu bazu  $\{p, F_1, F_2, F_3, F_4, \xi, \eta\}$  kao i rezultate iz Leme 20. Takodje, od sada podrazumevamo da je  $M$  minimalna i sadržana u hiperravni kroz koordinatni početak. Iz minimalnosti direktno sledi da je

$$\beta_1 + \beta_{10} + \beta_5 + \beta_8 = \beta_9 + \gamma_1 + \gamma_{10} + \gamma_5 = 0.$$

Kako je  $M$  sadržana u hiperravni, jedinični normalni vektor te hiperravni je ujedno ortogonalan na  $M$  i tangentan na sferu  $S^6$ . Možemo, stoga odabrati bazu normalnog raslojenja podmnogostrukosti  $M$  tako da taj vektor bude  $\eta$ .

**Lema 26** *Koeficijenti koneksije zadovoljavaju sledeće relacije*

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = \alpha_1 = \gamma_5 = \beta_7 = \gamma_7 = \alpha_2 = \beta_9 = \beta_{10} = \gamma_{10} = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \quad i \quad \beta_4 = -1.$$

**Dokaz:** Kako je  $\eta$  konstantno vektorsko polje dobijamo

$$\begin{aligned}
D_{F_1}\eta &= -\gamma_1 F_1 - \gamma_2 F_2 - (1 + \beta_4)F_3 - \gamma_4 F_4 - \alpha_1 \xi = 0, \\
D_{F_2}\eta &= -\gamma_2 F_1 - \gamma_5 F_2 - \beta_7 F_3 - \gamma_7 F_4 - \alpha_2 \xi = 0, \\
D_{F_3}\eta &= -(1 + \beta_4)F_1 - \beta_7 F_2 - \beta_9 F_3 + (\beta_1 + \beta_5 + \beta_8)F_4 - \alpha_3 \xi = 0, \\
D_{F_4}\eta &= -\gamma_4 F_1 - \gamma_7 F_2 + (\beta_1 + \beta_5 + \beta_8)F_3 + (\beta_9 + \gamma_1 + \gamma_5)F_4 - \alpha_4 \xi = 0,
\end{aligned}$$

a kako su  $F_1, F_2, F_3, F_4$  i  $\xi$  linearno nezavisna vektorska polja tvrdjenje sledi direktno. ■

Proverimo sada uslove koje nameću jednačine Gausa, Kodacija i Ričija.

**Lema 27** *Za koeficijente koneksije važi*

$$\begin{aligned}
F_4(\beta_3) &= 3\beta_2, & F_4(\beta_6) &= 3(\beta_1 + 2\beta_5), & F_4(\beta_2) &= -3\beta_3, & F_4(\beta_5) &= -6\beta_6, & F_4(\beta_1) &= 0, \\
F_1(\beta_1) &= -3\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_6 - F_3(\beta_3) - F_1(\beta_5), & F_2(\beta_1) &= -3\beta_3\beta_5 + 3\beta_2\beta_6 + F_1(\beta_2), \\
F_2(\beta_5) &= 3(\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5) - F_2(\beta_1) - F_3(\beta_6), & F_3(\beta_1) &= -3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) + F_1(\beta_3), \\
F_2(\beta_6) &= -3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) + F_3(\beta_5), & F_1(\beta_5) &= -3\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_6 + F_2(\beta_2), \\
F_2(\beta_3) &= F_1(\beta_6) + 1 + \beta_1^2 - 2\beta_2^2 + \beta_3^2 + 4\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2, \\
F_1(\beta_6) &= F_3(\beta_2) + 1 - 2\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2.
\end{aligned}$$

**Dokaz:** Direktnim računom dobijamo da su sledeći izrazi

$$\begin{aligned}
R(F_3, F_4, F_3, F_2) &= -3\beta_2 + F_4(\beta_3), \\
R(F_3, F_4, F_2, F_1) &= 6\beta_6 + F_4(\beta_1) + F_4(\beta_5), \\
R(F_3, F_4, F_1, F_2) &= -3(\beta_1 + 2\beta_5) + F_4(\beta_6), \\
R(F_1, F_2, F_1, F_2) &= 1 + \beta_1^2 - 2\beta_2^2 + \beta_3^2 + 4\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2 - F_2(\beta_3) + F_1(\beta_6), \\
R(F_1, F_3, F_3, F_1) &= -1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2 + 2\beta_3^2 + 2\beta_1\beta_5 - \beta_5^2 - \beta_6^2 - F_3(\beta_2) + F_1(\beta_6), \\
R(F_2, F_3, F_2, F_1) &= 3\beta_3\beta_5 - 3\beta_2\beta_6 + F_2(\beta_1) + F_2(\beta_5) + F_3(\beta_6), \\
R(F_2, F_3, F_3, F_1) &= 3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) - F_3(\beta_5) + F_2(\beta_6), \\
R(F_1, F_3, F_1, F_2) &= -3\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_6 - F_1(\beta_1) - F_3(\beta_3) - F_1(\beta_5), \\
R(F_1, F_2, F_2, F_3) &= -3\beta_3\beta_5 + 3\beta_2\beta_6 - F_2(\beta_1) + F_1(\beta_2), \\
R(F_1, F_2, F_3, F_1) &= 3\beta_2\beta_3 - 3\beta_1\beta_6 - F_2(\beta_2) + F_1(\beta_5), \\
R(F_1, F_4, \xi, F_1) &= F_4(\beta_1), \\
R(F_2, F_4, F_1, \xi) &= -3\beta_3 - F_4(\beta_2), \\
R(F_1, F_3, F_1, \xi) &= 3\beta_2\beta_3 - 3\beta_1\beta_6 - F_2(\beta_2) + F_1(\beta_5)
\end{aligned}$$

su jednaki nuli što direktno dokazuje tvrdjenje.

Direktna provera pokazuje da su ovi uslovi dovoljni da sve Gausove, Kodacijeve i Ričijeve jednačine budu zadovoljene. ■

Takodje, činjenica da je koneksija bez torzije nameće dodatne uslove za koeficijente  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6$ . Naime sledeći izrazi moraju biti jednaki nuli:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -3\beta_2 + 3\beta_1^2\beta_2 - 3\beta_2^3 - 3\beta_2\beta_3^2 - 6\beta_2\beta_5^2 + 6\beta_1\beta_3\beta_6 - 6\beta_2\beta_6^2 - 4\beta_6F_1(\beta_2) + 4\beta_3F_2(\beta_2) \\
&\quad - 3\beta_2F_3(\beta_2) - F_1(F_1(\beta_2)) - F_2(F_2(\beta_2)) + \beta_1F_1(\beta_3) + 4\beta_5F_1(\beta_3) + \beta_3F_3(\beta_3) - F_3(F_2(\beta_3)), \\
x_2 &= 3\beta_3 - 6\beta_1^2\beta_3 - 6\beta_2^2\beta_3 - 6\beta_3^3 - 6\beta_1\beta_3\beta_5 + 6\beta_1\beta_2\beta_6 + (3\beta_1 + 4\beta_5)F_1(\beta_2) - \beta_2F_2(\beta_2) \\
&\quad + 3\beta_3F_3(\beta_2) + 4\beta_6F_1(\beta_3) - 4\beta_2F_3(\beta_3) - F_1(F_1(\beta_3)) - F_3(F_3(\beta_3)) - F_3(F_2(\beta_2)), \\
x_3 &= -F_4(F_2(\beta_2)) - F_4(F_3(\beta_3)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_4 &= -6\beta_1\beta_2\beta_3 - 12\beta_2\beta_3\beta_5 + \beta_6(6 - 3\beta_1^2 + 3\beta_2^2 - 9\beta_3^2 + 6\beta_1\beta_5 + 6\beta_5^2 + 6\beta_6^2) - \beta_2F_1(\beta_2) \\
&\quad + (4\beta_1 + 3\beta_5)F_2(\beta_2) + 6\beta_6F_3(\beta_2) - \beta_3F_1(\beta_3) + (\beta_1 - 3\beta_5)F_3(\beta_3) + F_3(F_1(\beta_2)) \\
&\quad - F_2(F_1(\beta_3)), \\
x_5 &= 3F_1(\beta_3) + F_4(F_1(\beta_2)), \\
x_6 &= -3F_1(\beta_2) + F_4(F_1(\beta_3)), \\
x_7 &= -\beta_3F_1(\beta_2) - \beta_6F_2(\beta_2) + (\beta_1 + \beta_5)F_3(\beta_2), \\
x_8 &= \beta_2F_1(\beta_2) + \beta_5F_2(\beta_2) + \beta_6F_3(\beta_2), \\
x_9 &= -\beta_1F_1(\beta_2) - \beta_2F_2(\beta_2) - \beta_3(-6 + F_3(\beta_2)), \\
x_{10} &= -3(-2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 - 2\beta_6^2) + 6F_3(\beta_2) + F_4(F_2(\beta_2)), \\
x_{11} &= -3F_2(\beta_2) + 3F_3(\beta_3) + F_4(F_3(\beta_2)), \\
x_{12} &= \beta_5(2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 + 2\beta_1\beta_5 + 2\beta_5^2 + 2\beta_6^2 + F_3(\beta_2)) + \beta_2F_1(\beta_3) + \beta_6F_3(\beta_3), \\
x_{13} &= \beta_2(7\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 8\beta_5^2 - 2\beta_6^2 - 8) + 6\beta_3\beta_6(\beta_1 - \beta_5) - 3\beta_2F_3(\beta_2) + F_3(F_3(\beta_2)) \\
&\quad - 3\beta_1F_1(\beta_3) + 2\beta_5F_1(\beta_3) - 3\beta_3F_3(\beta_3) + 2\beta_1F_3(\beta_5) + 4\beta_5F_3(\beta_5) + 4\beta_6F_3(\beta_6) - F_3(F_2(\beta_3)), \\
x_{14} &= 3(-2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 - 2\beta_6^2) - 6F_3(\beta_2) + F_4(F_3(\beta_3)), \\
x_{15} &= 3\beta_2(\beta_2^2 - 2 - 2\beta_1^2 + 2\beta_3^2 - 5\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 + \beta_6^2 - F_3(\beta_2)) - 3\beta_3(4\beta_1\beta_6 + 3\beta_5\beta_6) + 4\beta_6F_1(\beta_2) \\
&\quad - 4\beta_3F_2(\beta_2) + F_1(F_1(\beta_2)) + F_2(F_2(\beta_2)) + 4\beta_1F_3(\beta_5) + \beta_5F_3(\beta_5) + \beta_6F_3(\beta_6) + F_3(F_1(\beta_6)), \\
x_{16} &= \beta_2(-3\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_6 + F_2(\beta_2)) - 3\beta_3F_3(\beta_2) + 3\beta_6(-3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) + F_1(\beta_3)) \\
&\quad - 3\beta_2F_3(\beta_3) + \beta_6F_3(\beta_5) + 3\beta_1F_3(\beta_6) - \beta_5(F_1(\beta_2) + F_3(\beta_6)) + F_3(F_2(\beta_2)) - F_3(F_1(\beta_5)), \\
x_{17} &= 3\beta_1\beta_2\beta_3 + 12\beta_6 - 3\beta_1^2\beta_6 + \beta_2F_1(\beta_2) - \beta_1F_2(\beta_2) - \beta_3F_3(\beta_5) + \beta_2F_3(\beta_6) - F_3(F_3(\beta_6)) \\
&\quad - F_3(F_1(\beta_2)) - F_3(F_2(\beta_5)), \\
x_{18} &= -18\beta_1\beta_2 - 18\beta_2\beta_5 - 18\beta_3\beta_6 + 9F_3(\beta_5) - F_4(F_1(\beta_2)) - F_4(F_3(\beta_6)), \\
x_{19} &= 3F_1(\beta_2) + 9F_3(\beta_6) + F_4(F_3(\beta_5)), \\
x_{20} &= -3\beta_3(3\beta_6^2 + \beta_2^2 + 2) - 6\beta_1\beta_2\beta_6 - 9\beta_2\beta_5\beta_6 + (\beta_1 - \beta_5)F_1(\beta_2) + 2\beta_2F_2(\beta_2) - 2\beta_3F_3(\beta_2) \\
&\quad + 3\beta_6F_1(\beta_3) - 3\beta_2F_3(\beta_3) + \beta_6F_3(\beta_5) + 3\beta_1F_3(\beta_6) - \beta_5F_3(\beta_6) + F_3(F_2(\beta_2)) - F_3(F_1(\beta_5)), \\
x_{21} &= \beta_2(1 + 10\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\beta_3^2 + 13\beta_1\beta_5 + 4\beta_5^2 + \beta_6^2 + 3F_3(\beta_2)) + \beta_3(12\beta_1\beta_6 + 3\beta_5\beta_6 - 4F_3(\beta_3)) \\
&\quad + F_3(F_3(\beta_2)) - 4\beta_1F_1(\beta_3) - 2\beta_5F_1(\beta_3) - 2\beta_1F_3(\beta_5) + 3\beta_5F_3(\beta_5) + 3\beta_6F_3(\beta_6) - F_3(F_1(\beta_6)), \\
x_{22} &= \beta_1(2\beta_1^2 + 11\beta_2^2 - 7 + 2\beta_3^2 - 12\beta_5 + 2\beta_1\beta_5 + 12\beta_2^2\beta_5 - \beta_5^2 - \beta_6^2) + 12\beta_2\beta_3\beta_6 - 3\beta_2F_1(\beta_3) \\
&\quad - (4\beta_1 + 3\beta_5)F_3(\beta_2) - 3\beta_6F_3(\beta_3) - 4\beta_2F_3(\beta_5) + F_3(F_3(\beta_5)) - 4\beta_3F_3(\beta_6) - F_3(F_2(\beta_6)), \\
x_{23} &= 18\beta_1\beta_2 + 18\beta_2\beta_5 + 18\beta_3\beta_6 - 3F_1(\beta_3) - 9F_3(\beta_5) + F_4(F_3(\beta_6)).
\end{aligned} \tag{129}$$

Ispitajmo prvo da li je moguć slučaj da neka od funkcija koeficijentata koneksije bude identički jednaka nuli.

**Slučaj 1.** Pretpostavimo da je  $\beta_5 = 0$ . Tada iz  $F_4(\beta_5) = -6\beta_6$  sledi i da je  $\beta_6 = 0$ , a zatim iz  $F_4(\beta_6) = 3(\beta_1 + 2\beta_5)$  dobijamo i da je  $\beta_1 = 0$ . Sada, uslovi iz Leme 27 postaju

$$\begin{aligned}
F_1(\beta_2) &= F_1(\beta_3) = 0, \\
F_3(\beta_3) &= -3\beta_2\beta_3 = -F_2(\beta_2), \\
F_3(\beta_2) &= -1 - \beta_2^2 + 2\beta_3^2, \\
F_2(\beta_3) &= 1 - 2\beta_2^2 + \beta_3^2.
\end{aligned}$$

Ako je  $V$  vektorsko polje za koje važi  $h(V, X) = 0$  za proizvoljno tangentno vektorsko polje  $X$  i ako označimo  $V = k_1 F_1 + k_2 F_2 + k_3 F_3 + k_4 F_4$  dobijamo

$$\begin{aligned} h(V, F_1) &= (-k_4 + k_2 \beta_2 + k_3 \beta_3) \xi, \\ h(V, F_2) &= k_1 \beta_2 \xi, \\ h(V, F_3) &= k_1 \beta_3 \xi, \\ h(V, F_4) &= k_1 \xi \end{aligned}$$

a kako su vektorska polja  $F_1, F_2, F_3$  i  $F_4$  linearno nezavisna sledi da je  $k_1 = 0$  i  $k_4 = k_2 \beta_2 + k_3 \beta_3$ . Pošto iz Leme 27 sledi da je  $F_4(\beta_3) = 3\beta_2$ ,  $F_4(\beta_2) = -3\beta_3$  važi da je  $\beta_2 = 0$  ako i samo ako je  $\beta_3 = 0$  i u tom slučaju je  $F_2(\beta_3) = 1$  što je nemoguće. Takodje, tada je i  $F_4(\frac{\beta_2}{\beta_3}) = -3\frac{\beta_2^2 + \beta_3^2}{\beta_3^2} \neq 0$  pa su  $\beta_2$  i  $\beta_3$  i linearno nezavisne funkcije. Prema tome distribucija (100) je dimenzije 2 i koristeći Lemu 7 zaključujemo da podmnogostrukost  $M$  zadovoljava Čenovu jednakost, pa je lokalno kongruentna imersiji (99).

**Slučaj 2.** Pretpostavimo sada da je  $\beta_5 \neq 0$  i  $\beta_6 = 0$ . Tada iz  $F_4(\beta_6) = 3(\beta_1 + 2\beta_5)$  sledi  $\beta_1 + 2\beta_5 = 0$ . Slično, pomoću rezultata iz Leme 27 dobijamo i

$$\begin{aligned} F_1(\beta_1 + 2\beta_5) &= -6\beta_2\beta_3 + F_2(\beta_2) - F_3(\beta_3), F_2(\beta_1 + 2\beta_5) = -3\beta_3\beta_5 - F_1(\beta_2), \\ F_3(\beta_1 + 2\beta_5) &= 3\beta_2(\beta_1 + \beta_5) + F_1(\beta_3), F_4(\beta_1 + 2\beta_5) = 0 \end{aligned}$$

odakle je

$$F_1(\beta_2) = -3\beta_3\beta_5, F_1(\beta_3) = -3\beta_2(\beta_1 + \beta_5), F_3(\beta_3) = -2\beta_2\beta_3 + F_2(\beta_2).$$

Tada je

$$x_7 = \beta_5(1 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 3\beta_5^2),$$

a kako je  $\beta_5 \neq 0$  sledi i

$$1 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 3\beta_5^2 = 0.$$

Sada iz

$$x_8 = 8\beta_5(3\beta_2\beta_3 - F_2(\beta_2))$$

dobijamo da je

$$F_2(\beta_2) = 3\beta_2\beta_3.$$

Kako važi

$$F_3(1 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 3\beta_5^2) = -2\beta_2(1 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 12\beta_5^2)$$

sledi da je

$$\beta_2 = 0$$

a dalje iz  $F_4(\beta_2) = 0$  dobijamo

$$\beta_3 = 0.$$

Sada,  $R(F_1, F_2, F_1, F_2) = 0$  implicira  $\beta_5^2 = \frac{1}{3}$ . Kako je  $\beta_5 = \langle h(F_2, F_2), \xi \rangle$  možemo odabrati bazno vektorsko polje  $\xi$  (tj, promeniti mu znak) tako da važi  $\beta_5 > 0$ , a onda je

$$\beta_5 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Sada, komponente koneksije imaju sledeći oblik



$$\begin{array}{llll}
D_{F_1} F_1 = -p - \frac{2}{\sqrt{3}} \xi, & D_{F_1} F_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} F_3, & D_{F_1} F_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} F_2, & D_{F_1} F_4 = -\xi, \\
D_{F_1} \xi = \frac{2}{\sqrt{3}} F_1 + F_4, & D_{F_1} \eta = 0, & D_{F_2} F_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} F_3, & D_{F_2} F_2 = -p + \frac{1}{\sqrt{3}} \xi, \\
D_{F_2} F_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} F_1 - F_4, & D_{F_2} F_4 = F_3, & D_{F_2} \xi = -\frac{1}{\sqrt{3}} F_2, & D_{F_2} \eta = 0, \\
D_{F_3} F_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} F_2, & D_{F_3} F_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} F_1 + F_4, & D_{F_3} F_3 = -p + \frac{1}{\sqrt{3}} \xi, & D_{F_3} F_4 = -F_2, \\
D_{F_3} \xi = -\frac{1}{\sqrt{3}} F_3, & D_{F_3} \eta = 0, & D_{F_4} F_1 = -\xi, & D_{F_4} F_2 = -2F_3, \\
D_{F_4} F_3 = 2F_2, & D_{F_4} F_4 = -p, & D_{F_4} \xi = F_1, & D_{F_4} \eta = 0,
\end{array}$$

a vrednosti Lijeveih zagrada

$$\begin{aligned}
[F_1, F_2] &= -\frac{1}{\sqrt{3}} F_3, & [F_1, F_3] &= \frac{1}{\sqrt{3}} F_2, & [F_1, F_4] &= 0, \\
[F_2, F_3] &= \frac{2}{\sqrt{3}} F_1 - 2F_4, & [F_2, F_4] &= 3F_3, & [F_3, F_4] &= -3F_2
\end{aligned}$$

odakle sledi da ova vektorska polja ne odgovaraju nekom sistemu koordinata. Označimo

$$Z_1 = -\frac{1}{2} F_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} F_4 \quad \text{i} \quad Z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 + \frac{1}{2} F_4.$$

Direktna provera uslova da je koneksija bez torzije pokazuje da postoji diferencijabilna funkcija  $\phi$  takva da važi

$$F_1(\phi) = \sqrt{3}, \quad F_2(\phi) = F_3(\phi) = 0 \quad \text{i} \quad F_4(\phi) = 1.$$

Tada za vektorska polja

$$Z_2 = \cos \phi F_2 + \sin \phi F_3 \quad \text{i} \quad Z_3 = \sin \phi F_2 - \cos \phi F_3$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
[Z_1, Z_2] &= \frac{4}{\sqrt{3}} Z_3, & [Z_2, Z_3] &= \frac{4}{\sqrt{3}} Z_1, & [Z_3, Z_1] &= \frac{4}{\sqrt{3}} Z_2, \\
[Z_1, Z_4] &= [Z_2, Z_4] = [Z_3, Z_4] = 0.
\end{aligned}$$

Potražimo sad vektorska polja  $J_1$  i  $J_2$  koja su razapeta vektorskim poljima  $Z_2$  i  $Z_3$  takva da važi  $[Z_1, J_1] = [Z_4, J_1] = [Z_1, J_2] = [Z_4, J_2] = 0$ . Potražimo diferencijabilnu funkciju  $\varsigma$  takvu da za vektorska polja

$$J_1 = -\cos \varsigma Z_2 - \sin \varsigma Z_3 \quad \text{i} \quad J_2 = \sin \varsigma Z_2 - \cos \varsigma Z_3,$$

važi  $[J_1, Z_1] = 0$  i  $[J_1, Z_4] = 0$ . Iz ova dva uslova redom sledi da je  $Z_1(\varsigma) = -\frac{4}{\sqrt{3}}$  i  $Z_4(\varsigma) = 0$  odnosno  $F_1(\varsigma) = \frac{2}{\sqrt{3}}$  i  $F_4(\varsigma) = -2$ . Tada je i

$$[J_1, J_2] = \frac{4}{\sqrt{3}} Z_1 - Z_2(\varsigma) Z_2 - Z_3(\varsigma) Z_3.$$

Izvide  $Z_2(\varsigma)$  i  $Z_3(\varsigma)$  ćemo potražiti u obliku  $Z_2(\varsigma) = \sin \varsigma g_1(\vartheta)$  i  $Z_3(\varsigma) = -\cos \varsigma g_1(\vartheta)$  gde je  $\vartheta$  neka diferencijabilna funkcija. Tada važi

$$[J_1, J_2] = \frac{4}{\sqrt{3}} Z_1 + g_1(\vartheta) J_2.$$

Potražimo sada linearno nezavisna vektorska polja

$$X_2 = k_1 Z_1 + k_2 J_2 \quad \text{i} \quad X_3 = \bar{k}_1 Z_1 + \bar{k}_2 J_2$$

takva da je  $[X_2, J_1] = [X_2, Z_4] = [X_3, J_1] = [X_3, Z_4] = [X_2, X_3] = 0$  gde su  $k_1, k_2, \bar{k}_1$  i  $\bar{k}_2$  diferencijabilne funkcije promenljive  $\vartheta$ . Tada sledi

$$[J_1, X_2] = J_1(k_1)Z_1 + J_1(k_2)J_2 + k_2[J_1, J_2] = (J_1(k_1) + \frac{4}{\sqrt{3}}k_2)Z_1 + (J_1(k_2) - k_2g_1)J_2 = 0,$$

pa važi

$$\begin{aligned} J_1(k_1) + \frac{4}{\sqrt{3}}k_2 &= J_1(\vartheta)k_1' + \frac{4}{\sqrt{3}}k_2 = 0, \\ J_1(k_2) - g_1k_2 &= J_1(\vartheta)k_2' - g_1k_2 = 0, \end{aligned} \quad (130)$$

a slično iz  $[J_1, X_3] = 0$  sledi i

$$\begin{aligned} J_1(\bar{k}_1) + \frac{4}{\sqrt{3}}\bar{k}_2 &= J_1(\vartheta)\bar{k}_1' + \frac{4}{\sqrt{3}}\bar{k}_2 = 0, \\ J_1(\bar{k}_2) - g_1\bar{k}_2 &= J_1(\vartheta)\bar{k}_2' - g_1\bar{k}_2 = 0. \end{aligned} \quad (131)$$

Jednakosti (130) i (131) nas motivišu da rešenje potražimo u obliku  $-k_2 = \bar{k}_2$  uz uslov  $k_1' = -\bar{k}_1'$ , a tada dobijamo

$$-\cos \varsigma k_1' Z_2(\vartheta) - \sin \varsigma k_1' Z_3(\vartheta) + \frac{4}{\sqrt{3}}k_2 = 0. \quad (132)$$

Tada slično dobijamo i

$$[X_2, X_3] = [k_1 Z_1 + k_2 J_2, \bar{k}_1 Z_1 + \bar{k}_2 J_2] = (k_1 + \bar{k}_1)k_2' Z_1(\vartheta) = 0.$$

Ako pretpostavimo da je  $k_1 = -\bar{k}_1$  tada vektorska polja  $X_2$  i  $X_3$  ne bi bila linearno nezavisna. Uzmimo, zato, da je  $Z_1(\vartheta) = 0$ . Ako definišemo  $Z_2(\vartheta) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos \varsigma$  i  $Z_3(\vartheta) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin \varsigma$  tada se (132) svodi na

$$k_1' + 2k_2 = 0.$$

Takodje je i

$$\frac{2}{\sqrt{3}}k_2' - g_1k_2 = 0 \quad \text{kao i} \quad k_1 + \bar{k}_1 = \text{const.}$$

Stoga, možemo definisati

$$\begin{aligned} k_1(\vartheta) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 \vartheta, & k_2(\vartheta) &= -\frac{\sqrt{3}}{4}\sin(2\vartheta), \\ \bar{k}_1(\vartheta) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2 \vartheta, & \bar{k}_2(\vartheta) &= \frac{\sqrt{3}}{4}\sin(2\vartheta), \\ g_1(\vartheta) &= \frac{4}{\sqrt{3}}\cot(2\vartheta) = \frac{2}{\sqrt{3}}(\cot \vartheta - \tan \vartheta), \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
Z_1(\vartheta) &= 0, & Z_2(\vartheta) &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varsigma, & Z_3(\vartheta) &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varsigma, \\
Z_1(\varsigma) &= -\frac{4}{\sqrt{3}}, & Z_2(\varsigma) &= \frac{4}{\sqrt{3}} \cot(2\vartheta) \sin \varsigma, & Z_3(\varsigma) &= -\frac{4}{\sqrt{3}} \cot(2\vartheta) \cos \varsigma, \\
Z_4(\varsigma) &= 0, & Z_4(\vartheta) &= 0.
\end{aligned}$$

Doista, proverom uslova da je koneksija bez torzije dobija se da postoje diferencijabilne funkcije  $\varsigma$  i  $\vartheta$  za koje važi

$$\begin{aligned}
F_1(\vartheta) &= 0, & F_4(\vartheta) &= 0, \\
F_2(\vartheta) &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varsigma - \phi), & F_3(\vartheta) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\varsigma - \phi), \\
F_1(\varsigma) &= \frac{2}{\sqrt{3}}, & F_2(\varsigma) &= \frac{4}{\sqrt{3}} \sin(\varsigma - \phi) \cot(2\vartheta), \\
F_3(\varsigma) &= \frac{4}{\sqrt{3}} \cos(\varsigma - \phi) \cot(2\vartheta), & F_4(\varsigma) &= -2.
\end{aligned}$$

Označimo

$$\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varsigma Z_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varsigma Z_3, \\
X_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 \vartheta Z_1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\vartheta \sin \varsigma Z_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \varsigma \sin 2\vartheta Z_3, \\
X_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \vartheta Z_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\vartheta \sin \varsigma Z_2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \varsigma \sin 2\vartheta Z_3, \\
X_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2} Z_4.
\end{aligned} \tag{133}$$

Dokazali smo da važi sledeća lema.

**Lema 28** Za vektorska polja  $X_1, X_2, X_3, X_4$  data relacijama (133) važi  $[X_i, X_j] = 0, i, j \in \{1, 4\}$  odnosno postoji lokalni koordinatni sistem  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  na podmnogostrukosti  $M$  takav da važi  $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$ .

Takodje, vektorska polja  $X_1, X_2, X_3, X_4$  čine ortogonalnu pokretnu bazu za koju važi

$$\langle X_1, X_1 \rangle = \frac{3}{4}, \quad \langle X_2, X_2 \rangle = \frac{3}{4} \cos^2 \vartheta, \quad \langle X_3, X_3 \rangle = \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta, \quad \langle X_4, X_4 \rangle = \frac{3}{4},$$

kao i

$$\begin{aligned}
h(X_1, X_1) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \xi, \quad h(X_2, X_2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos^2 \vartheta \xi, \quad h(X_3, X_3) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 \vartheta \xi, \\
h(X_4, X_4) &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} \xi, \quad h(X_i, X_j) = 0, \quad i \neq j.
\end{aligned}$$

Direktno dobijamo da su nenula kovarijantni izvodi jednaki

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1} X_2 &= -\tan \vartheta X_2, & \nabla_{X_1} X_3 &= \cot \vartheta X_3, \\
\nabla_{X_2} X_2 &= \cos \vartheta \sin \vartheta X_1, & \nabla_{X_3} X_3 &= -\cos \vartheta \sin \vartheta X_1,
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
X_1(\vartheta) &= 1, \quad X_2(\vartheta) = X_3(\vartheta) = X_4(\vartheta) = 0, \quad X_2(\varsigma) = 1, \quad X_1(\varsigma) = 0, \quad X_2(\varsigma) = X_3(\varsigma) = 1, \\
X_4(\varsigma) &= 0, \quad X_4(\phi) = \sqrt{3}, \quad X_1(\phi) = X_2(\phi) = X_3(\phi) = 0,
\end{aligned}$$

odakle sledi da je (uz eventualnu translaciju koordinatnog sistema)  
 $x_1 = \vartheta, x_2 + x_3 = \varsigma, x_4 = \frac{\phi}{\sqrt{3}}$ . Tada iz jednakosti (50) dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} p = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} + h\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle p. \quad (134)$$

Tada za  $i = 4, j \neq i$  sledi da je

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial p}{\partial x_4} \right) = 0,$$

odnosno da  $\frac{\partial p}{\partial x_4}$  zavisi samo od promenljive  $x_4$ , pa integralenjem po  $x_4$  zaključujemo da je

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_4) + C(x_1, x_2, x_3)$$

gde su  $A$  i  $C$  neka vektorska polja.

Dalje, za  $i = 2, j = 3$  sledi

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} C = 0. \quad (135)$$

Slično za  $i = 1, j = 3$  sledi

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial C}{\partial x_3} \right) = \cot x_1 \frac{\partial C}{\partial x_3}.$$

Tada, integralenjem po  $x_1$  dobijamo

$$\frac{\partial C}{\partial x_3} = \sin x_1 C_1 \quad (136)$$

gde je  $C_1$  vektorsko polje koje ne zavisi od  $x_1$ . Diferenciranjem po promenljivoj  $x_2$  i koristeći jednakost (135) dobijamo

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_2} \sin x_1 = 0$$

odakle sledi da je  $C_1$  vektorska funkcija koja zavisi samo od promenljive  $x_1$ . Slično, za  $i = 1, j = 2$  dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial C}{\partial x_2} \right) = -\tan x_1 \frac{\partial C}{\partial x_2},$$

odnosno

$$\frac{\partial C}{\partial x_2} = C_2 \cos x_1 \quad (137)$$

gde je  $C_2$  vektorska funkcija koja zavisi samo od promenljive  $x_2$ . Označimo sa  $\gamma_1(x_3)$  i  $\gamma_2(x_2)$  neke vektorske funkcije takve da je  $C_1(x_3) = \frac{\partial}{\partial x_3} \gamma_1(x_3)$  i  $C_2(x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \gamma_2(x_2)$ . Tada iz (137) direktno sledi da je

$$C = \cos x_1 \gamma_2 + C_3(x_1, x_3),$$

a zatim iz jednakosti (136) dobijamo

$$C_3 = \sin x_1 \gamma_1 + C_4$$

gde je  $C_4$  vektorsko polje koje zavisi isključivo od promenljive  $x_1$ .

Ako je  $i = j = 4$  dobijamo

$$\xi = -\frac{1}{\sqrt{3}} p - \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} A. \quad (138)$$

Slično za  $i = j = 1$  i koristeći (138) dobijamo da jednakost (134) postaje

$$-A - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} A = C_4 + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} C_4. \quad (139)$$

Obzirom da je leva strana jednakosti funkcija po promenljivoj  $x_4$ , a desna po promenljivoj  $x_1$  sledi da su obe jednake nekom konstantnom vektorskom polju  $M$ , i direktno dobijamo da je

$$\begin{aligned} C_4(x_1) &= R_1 \cos x_1 + R_2 \sin x_1 + M, \\ A(x_4) &= T_1 \cos(\sqrt{3}x_4) + T_2 \sin(\sqrt{3}x_4) - M. \end{aligned}$$

Takodje su i  $R_1, R_2, T_1$  i  $T_2$  konstantna vektorska polja.

Sada za  $i = j = 2$  sledi

$$R_1 + \gamma_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \gamma_2 = 0,$$

pa postoje konstantna vektorska polja  $H_1$  i  $H_2$  takve da važi

$$\gamma_2(x_2) = H_1 \cos x_2 + H_2 \sin x_2 - R_1.$$

Slično, za  $i = j = 3$  dobijamo

$$R_2 + \gamma_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \gamma_1 = 0,$$

odnosno

$$\gamma_1(x_3) = H_3 \cos x_3 + H_4 \sin x_3 - R_2,$$

gde su i  $H_3$  i  $H_4$  konstantna vektorska polja. Kako je  $\{p, \xi, F_3, \eta, F_4, F_1, -F_2\}$  jedna  $G_2$  pokretna baza, možemo je u tački  $(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0)$  identifikovati sa bazom  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ . Tada sledi

$$\begin{aligned} p\left(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0\right) &= e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(H_1 + H_3) + T_1, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} p\left(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0\right) &= K_1\left(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-H_1 + H_3), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} p\left(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0\right) &= K_2\left(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}H_2, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} p\left(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0\right) &= K_3\left(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}H_4, \\ \frac{\partial}{\partial x_4} p\left(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0\right) &= K_4\left(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0\right) = \sqrt{3}T_2, \\ \xi\left(\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0\right) &= -\frac{\sqrt{6}}{6}(H_1 + H_3) + \sqrt{3}T_1, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\sqrt{6}}{8}\{\sqrt{3}, -1, 0, 0, 0, 0, -2\}, & H_2 &= \frac{\sqrt{6}}{8}\{0, 0, -2, 0, -\sqrt{3}, 1, 0\}, \\ H_3 &= \frac{\sqrt{6}}{8}\{\sqrt{3}, -1, 0, 0, 0, 0, 2\}, & H_4 &= \frac{\sqrt{6}}{8}\{0, 0, 2, 0, -\sqrt{3}, 1, 0\}, \\ T_1 &= \frac{1}{4}\{1, \sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0\}, & T_2 &= \frac{1}{4}\{0, 0, 0, 0, 1, \sqrt{3}, 0\}, \end{aligned}$$

odakle direktno dobijamo imersiju  $f_2$  datu formulom (127).

**Primedba** Uočimo da je imersija  $f_2$  izometrična  $S^3(\frac{\sqrt{3}}{2}) \times S^1(\frac{1}{2})$ .

**Slučaj 3.** Već smo приметili da iz relacija  $F_4(\beta_2) = -\beta_3$  i  $F_4(\beta_3) = \beta_2$  sledi da je  $\beta_2 = 0$  ekvivalentno sa  $\beta_3 = 0$ . Pretpostavimo, stoga da je  $\beta_2 = \beta_3 = 0$  i da je pritom  $\beta_5 \neq 0$  i  $\beta_6 \neq 0$ . Tada sledi da je

$$\begin{aligned} x_{16} &= \beta_6 F_3(\beta_5) - \beta_5 F_3(\beta_6) = 0, \\ x_{21} &= \beta_5 F_3(\beta_5) + \beta_6 F_3(\beta_6) = 0. \end{aligned}$$

Kako je determinanta ovog sistema  $\beta_5^2 + \beta_6^2 \neq 0$  sledi da je

$$F_3(\beta_5) = 0 \quad \text{i} \quad F_3(\beta_6) = 0.$$

Tada je  $x_{17} = 3\beta_6(\beta_1^2 - 4) = 0$  odnosno  $\beta_1^2 = 4$ . Kao i ranije, koristeći  $\beta_1 = \langle h(F_1, F_1), \xi \rangle$  zaključujemo da možemo odabrati bazno vektorsko polje  $\xi$  (odnosno njegov znak) tako da je  $\beta_1 > 0$  odnosno  $\beta_1 = 2$ .

Tada iz  $x_{10} = -3\beta_1^2 + 6\beta_1\beta_5 + 6(1 + \beta_5^2 + \beta_6^2) = 0$  sledi  $-1 + 2\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2 = 0$ . Tada postoji diferencijabilna funkcija  $\varphi$  takva da je

$$\beta_5 = -1 + \sqrt{2} \cos \varphi, \quad \beta_6 = \sqrt{2} \sin \varphi,$$

i koristeći  $\text{ctg} \varphi = \frac{1+\beta_5}{\beta_6}$  dobijamo da funkcija  $\varphi$  zadovoljava sledeće relacije

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= -3(1 + 2\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2) = -6, \quad F_2(\varphi) = 0, \\ F_3(\varphi) &= 0, \quad F_4(\varphi) = 3(1 + 2\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2) = 6. \end{aligned} \tag{140}$$

Direktnom proverom se dobija da su i svi ostali uslovi (129) zadovoljeni. Takodje, koeficijenti koneksije su dati sledećim relacijama

$$\begin{aligned} D_{F_1} F_1 &= -p + 2\xi, & D_{F_1} F_2 &= 2F_3, \\ D_{F_1} F_3 &= -2F_2, & D_{F_1} F_4 &= -\xi, \\ D_{F_1} \xi &= -2F_1 + F_4, & D_{F_1} \eta &= 0, \\ D_{F_2} F_1 &= \sqrt{2} \sin \varphi F_2 + (1 - \sqrt{2} \cos \varphi) F_3, & D_{F_2} F_2 &= -p - \sqrt{2} \sin \varphi F_1 - (1 - \sqrt{2} \cos \varphi) \\ D_{F_2} F_3 &= (1 - \sqrt{2} \cos \varphi) F_1 - F_4 + \sqrt{2} \sin \varphi \xi, & D_{F_2} F_4 &= F_3, \\ D_{F_2} \xi &= (1 - \sqrt{2} \cos \varphi) F_2 - \sqrt{2} \sin \varphi F_3, & D_{F_2} \eta &= 0, \\ D_{F_3} F_1 &= (-1 - \sqrt{2} \cos \varphi) F_2 - \sqrt{2} \sin \varphi F_3, & D_{F_3} F_2 &= (1 + \sqrt{2} \cos \varphi) F_1 + F_4 + \sqrt{2} \sin \varphi \xi, \\ D_{F_3} F_3 &= -p + \sqrt{2} \sin \varphi F_1 - (1 + \sqrt{2} \cos \varphi) \xi, & D_{F_3} F_4 &= -F_2, \\ D_{F_3} \xi &= -\sqrt{2} \sin \varphi F_2 + (1 + \sqrt{2} \cos \varphi) F_3, & D_{F_3} \eta &= 0, \\ D_{F_4} F_1 &= -\xi, & D_{F_4} F_2 &= -2F_3, \\ D_{F_4} F_3 &= 2F_2, & D_{F_4} F_4 &= -p, \\ D_{F_4} \xi &= F_1, & D_{F_4} \eta &= 0, \end{aligned}$$

dok su odgovarajuće Lijeve zagrade

$$\begin{aligned} [F_1, F_2] &= -\sqrt{2} \sin \varphi F_2 + (1 + \sqrt{2} \cos \varphi) F_3, & [F_1, F_3] &= (\sqrt{2} \cos \varphi - 1) F_2 + \sqrt{2} \sin \varphi F_3, \\ [F_1, F_4] &= 0, & [F_2, F_3] &= -2F_1 - 2F_4, & [F_2, F_4] &= 3F_3, & [F_3, F_4] &= -3F_2. \end{aligned}$$

Potražimo vektorska polja koja odgovaraju nekom koordinatnom sistemu podmnogostrukosti  $M$ .

Označimo, prvo,

$$K_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_4 \quad \text{i} \quad K_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_4 .$$

Potražimo vektorska polja  $G_2$  i  $G_3$  razapeta sa  $F_2$  i  $F_3$  takva da važi  $[G_2, K_4] = [G_3, K_4] = 0$ . Pretpostavimo da su odgovarajući koeficijenti funkcije promenljive  $\varphi$ , odnosno  $G_2 = f(\varphi)F_2 + g(\varphi)F_3$  i analogno za  $G_3$ . Tada iz uslova integrabilnosti dobijamo

$$\begin{aligned} 6\sqrt{2}f' &= -\sin \varphi f + (\cos \varphi - 2\sqrt{2})g, \\ 6\sqrt{2}g' &= (\cos \varphi + 2\sqrt{2})f + \sin \varphi g. \end{aligned}$$

Kako i koeficijenti koji odgovaraju vektorskom polju  $G_3$  zadovoljavaju iste uslove, iz prostora rešenja ovog sistema diferencijalnih jednačina biramo neka dva koja odredjuju linearno nezavisna vektorska polja

$$\begin{aligned} G_2 &= (-(1 + \sqrt{2}) \sin(\frac{1}{12}(-6 + \sqrt{2})\varphi) - \sin(\frac{1}{12}(6 + \sqrt{2})\varphi))F_2 \\ &\quad + (-(1 + \sqrt{2}) \cos(\frac{1}{12}(-6 + \sqrt{2})\varphi) + \cos(\frac{1}{12}(6 + \sqrt{2})\varphi))F_3, \\ G_3 &= (\cos(\frac{1}{12}(-6 + \sqrt{2})\varphi) + (-1 + \sqrt{2}) \cos(\frac{1}{12}(6 + \sqrt{2})\varphi))F_2 \\ &\quad + (-\sin(\frac{1}{12}(-6 + \sqrt{2})\varphi) + (-1 + \sqrt{2}) \sin(\frac{1}{12}(6 + \sqrt{2})\varphi))F_3. \end{aligned}$$

Za vektorska polja  $G_2$  i  $G_3$  važi

$$[K_1, G_2] = (1 + \sqrt{2})G_3, \quad [K_1, G_3] = (1 - \sqrt{2})G_2, \quad [G_2, G_3] = 4\sqrt{2}K_1.$$

Potražimo vektorska polja  $K_2$  i  $W_3$  takodje razapeta sa  $F_2$  i  $F_3$ , odnosno  $G_2$  i  $G_3$  takva da

$$[K_1, K_2] = [K_4, K_2] = [K_1, W_3] = [K_4, W_3] = 0.$$

Zato je  $K_2 = k_1G_2 + k_2G_3$  gde je  $K_4(k_1) = K_4(k_2) = 0$ . Kao i ranije, pretpostavimo da su  $k_1$  i  $k_2$  funkcije neke nove promenljive  $\gamma$ . Tada iz uslova za Lijeve zagrade sledi

$$K_1(k_1) = -k_2(1 - \sqrt{2}), \quad K_1(k_2) = -(1 + \sqrt{2})k_1,$$

te možemo definisati

$$k_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \sin \gamma, \quad k_2 = \cos \gamma$$

gde je  $\gamma$  promenljiva koja zadovoljava uslove

$$K_1(\gamma) = 1, \quad G_2(\gamma) = \cos \gamma f_1(\theta), \quad G_3(\gamma) = -\frac{\sin \gamma}{1 + \sqrt{2}}, \quad K_4(\gamma) = 0,$$

a  $\theta$  promenljiva za koju važi

$$K_1(\theta) = 0, \quad G_2(\theta) = -(1 + \sqrt{2}) \sin \gamma, \quad G_3(\theta) = -\cos \gamma, \quad K_4(\theta) = 0$$

i funkcija  $f_1$  definisana na sledeći način

$$f_1(\theta) = \sqrt{4\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})} \tan\left(\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}}\theta\right).$$

Direktna provera pokazuje da je uslov da je koneksija bez torzije ispunjen za ovako definisane  $\gamma$  i  $\theta$ , te da takve funkcije postoje. Tada je

$$K_2 = \frac{\sin \gamma}{1 + \sqrt{2}} G_2 + \cos \gamma G_3,$$

a slično dobijamo i

$$W_3 = \frac{\cos \gamma}{1 + \sqrt{2}} G_2 - \sin \gamma G_3.$$

Takodje važi i  $[K_2, W_3] = -\frac{\cos \gamma f_1}{(1 + \sqrt{2})^2} G_2 + \frac{\sin \gamma f_1}{1 + \sqrt{2}} G_3 - \frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} K_1$ .

Konačno, potražimo vektorsko polje  $K_3$  u sledećem obliku  $K_3 = f_2(\theta)K_1 + f_3(\theta)W_3$  tako da

$$[K_1, K_3] = [K_2, K_3] = [K_3, K_4] = 0.$$

Ovaj uslov se dalje pojednostavljuje do uslova

$$f_2' = -f_3 \frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \quad \text{i} \quad f_3' = -\frac{1}{1 + \sqrt{2}} f_1 f_3.$$

Zato možemo definisati

$$f_3 = \cos\left(\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}}\theta\right),$$

a tada je

$$f_2 = -\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}} \sin\left(\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}}\theta\right)$$

te važi i sledeća lema.

**Lema 29** *Na podmnogostrukosti  $M$  u okolini svake tačke postoji koordinatni sistem  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  takav da za vektorska polja*

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} F_4, \\ K_2 &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \left( ((1 + \sqrt{2}) \cos(\gamma + \frac{1}{12}(-6 + \sqrt{2})\varphi) + \cos(\gamma + \frac{1}{12}(6 + \sqrt{2})\varphi)) F_2 \right. \\ &\quad \left. + (-(1 + \sqrt{2}) \sin(\gamma + \frac{1}{12}(-6 + \sqrt{2})\varphi) + \sin(\gamma + \frac{1}{12}(6 + \sqrt{2})\varphi)) F_3 \right), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
K_3 &= (\sqrt{4-2\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}\theta))(F_1+F_4) \\
&\quad - \frac{1}{1+\sqrt{2}}(\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}\theta)((1+\sqrt{2})\sin(\gamma+\frac{1}{12}(\sqrt{2}-6)\varphi)) + \sin(\gamma+\frac{1}{12}(6+\sqrt{2})\varphi))F_2 \\
&\quad - \frac{1}{1+\sqrt{2}}(\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}\theta)((1+\sqrt{2})\cos(\gamma+\frac{1}{12}(\sqrt{2}-6)\varphi)) - \cos(\gamma+\frac{1}{12}(6+\sqrt{2})\varphi))F_2, \\
K_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_4
\end{aligned}$$

važi  $K_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ ,  $K_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$ ,  $K_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$  i  $K_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}$ .

Takodje, važi i

$$\begin{aligned}
K_1(\varphi) &= K_2(\varphi) = K_3(\varphi) = 0, \quad K_4(\varphi) = 6\sqrt{2}, \\
K_1(\gamma) &= 1, \quad K_2(\gamma) = K_3(\gamma) = K_4(\gamma) = 0, \\
K_1(\theta) &= K_3(\theta) = K_4(\theta) = 0, \quad K_2(\theta) = -1
\end{aligned}$$

i bez umanjenja opštosti možemo reći da je

$$x_1 = \gamma, \quad x_2 = -\theta, \quad x_4 = \frac{\varphi}{6\sqrt{2}}.$$

Takodje, direktni račun pokazuje da su sledeći kovarijantni izvodi razliciti od nule

$$\begin{aligned}
\nabla_{K_1}K_2 &= -2\sqrt{2-\sqrt{2}}\tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)K_1 + \sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)K_3, \\
\nabla_{K_1}K_3 &= -\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)K_2, \\
\nabla_{K_2}K_2 &= 2(\sqrt{2}-1)\sin(2x_1+2x_4)(K_1+K_4), \\
\nabla_{K_2}K_3 &= 2(\sqrt{2}-1)\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)((\sqrt{2}+\cos(2x_1+2x_4))F_1 + \cos(2x_1+2x_4)F_4), \\
\nabla_{K_2}K_4 &= 2^{\frac{5}{4}}\sqrt{\sqrt{2}-1}(1+\sqrt{2}\cos(2x_1+2x_4))\tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)F_1 - \sqrt{2}\sin(2x_1+2x_4)F_2 \\
&\quad - (1+\sqrt{2}\cos(2x_1+2x_4))\sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)F_4, \\
\nabla_{K_3}K_3 &= -2(\sqrt{2}-1)\cos^2(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\sin(2x_1+2x_4)(F_1+F_4) \\
&\quad - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(4\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)F_2, \\
\nabla_{K_3}K_4 &= -2^{\frac{7}{4}}\sqrt{-1+\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\sin(2x_1+2x_4)F_1 \\
&\quad + \cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)(1-\sqrt{2}\cos(2x_1+2x_4))F_2 + \sqrt{2}\sin(2x_1+2x_4)F_3.
\end{aligned}$$

Direktno se dobija i da vektorska polja  $K_1, K_2, K_3$  i  $K_4$  zadovoljavaju i sledeće relacije

$$\begin{aligned}
h(K_1, K_1) &= h(K_1, K_2) = h(K_1, K_3) = h(K_2, K_4) = 0, \\
h(K_2, K_2) &= 2(\sqrt{2}-1)\cos(2x_1+2x_4)\xi, \quad h(K_1, K_4) = \xi, \\
h(K_2, K_3) &= -2(\sqrt{2}-1)\cos(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\sin(2x_1+2x_4)\xi, \\
h(K_3, K_3) &= -2(\sqrt{2}-1)\cos^2(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\cos(2x_1+2x_4)\xi, \\
h(K_3, K_4) &= 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)\xi, \quad h(K_4, K_4) = 2\xi,
\end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned}\langle K_1, K_1 \rangle &= 1, \quad \langle K_1, K_2 \rangle = 0, \quad \langle K_1, K_3 \rangle = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}} \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}}x_2), \quad \langle K_1, K_4 \rangle = 1, \\ \langle K_2, K_2 \rangle &= 2(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - \cos(2x_1 + 2x_4)), \quad \langle K_2, K_4 \rangle = 0, \quad \langle K_3, K_4 \rangle = 0, \\ \langle K_2, K_3 \rangle &= -2(\sqrt{2} - 1) \cos(2\sqrt{2 - \sqrt{2}}x_2) \sin(2x_1 + 2x_4), \quad \langle K_4, K_4 \rangle = 1, \\ \langle K_3, K_3 \rangle &= \sqrt{2}(-1 + \sqrt{2})(3 - \cos(4\sqrt{2 - \sqrt{2}}x_2))\sqrt{2} \cos^2(2\sqrt{2 - \sqrt{2}}x_2) \cos(2x_1 + 2x_4).\end{aligned}$$

Nadjimo parametrizaciju podmnogostrukosti  $M$  koristeći jednakost (134). Za  $i = j = 1$  dobijamo

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} p + p = 0$$

odakle sledi da je

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_2, x_3, x_4) \cos x_1 + B(x_2, x_3, x_4) \sin x_1,$$

gde su  $A$  i  $B$  vektorske funkcije koje zavise isključivo od promenljivih  $x_2, x_3, x_4$ . Dalje, za  $i = 1, j = 4$  sledi

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial x_4} A \sin x_1 + \frac{\partial}{\partial x_4} B \cos x_1. \quad (141)$$

Koristeći (141) za  $i = j = 4$  dobijamo

$$\frac{\partial^2}{\partial x_4^2} A \cos x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} B \sin x_1 = (-2\frac{\partial}{\partial x_4} A - B) \sin x_1 + (2\frac{\partial}{\partial x_4} B - A) \cos x_1.$$

Kako su  $\sin x_1$  i  $\cos x_1$  linearno nezavisne funkcije, ovaj uslov se pojednostavljuje do

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_4^2} A &= 2\frac{\partial}{\partial x_4} B - A, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} B &= -2\frac{\partial}{\partial x_4} A - B,\end{aligned}$$

i rešavajući ovaj sistem diferencijalnih jednačina dobijamo

$$\begin{aligned}A &= C_2 \cos((\sqrt{2} - 1)x_4) - C_4 \cos((1 + \sqrt{2})x_4) + C_3 \sin((1 + \sqrt{2})x_4) + C_1 \sin((\sqrt{2} - 1)x_4), \\ B &= C_1 \cos((\sqrt{2} - 1)x_4) + C_2 \sin((\sqrt{2} - 1)x_4) + C_3 \cos((\sqrt{2} + 1)x_4) + C_4 \sin((\sqrt{2} - 1)x_4),\end{aligned}$$

gde su  $C_1, C_2, C_3$  i  $C_4$  funkcije po promenljivim  $x_2$  i  $x_3$ .

Takodje, za  $i = 1, j = 2$  dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} p &= -\frac{\partial}{\partial x_2} A \sin x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} B \cos x_1 = -2\sqrt{2 - \sqrt{2}} \tan(2\sqrt{2 - \sqrt{2}}x_2) (B \cos x_1 - A \sin x_1) \\ &+ \sec(2\sqrt{2 - \sqrt{2}}x_2) \left( \frac{\partial}{\partial x_3} A \cos x_1 + \frac{\partial}{\partial x_3} B \sin x_1 \right).\end{aligned} \quad (142)$$

Slično kao ranije, zbog linearne nezavisnosti funkcija  $\sin x_1$  i  $\cos x_1$  jednakost (142) postaje

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_2} A &= 2\sqrt{2-\sqrt{2}} \tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) A + \sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) \frac{\partial}{\partial x_3} B, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} B &= -2\sqrt{2-\sqrt{2}} \tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) B + \sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) \frac{\partial}{\partial x_3} A \end{aligned}$$

i dalje, zbog linearne nezavisnosti funkcija  $\sin((\sqrt{2}-1)x_4)$ ,  $\cos((\sqrt{2}-1)x_4)$ ,  $\sin((\sqrt{2}+1)x_4)$  i  $\cos((\sqrt{2}+1)x_4)$  zaključujemo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} C_1 &= (1+\sqrt{2}) \frac{\partial}{\partial x_3} C_4 \sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) + 2\sqrt{2-\sqrt{2}} C_3 \tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} C_2 &= -(1+\sqrt{2}) \frac{\partial}{\partial x_3} C_3 \sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) + 2\sqrt{2-\sqrt{2}} C_4 \tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} C_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_3} C_4 \sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) - 2\sqrt{2-\sqrt{2}} C_3 \tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} C_4 &= \frac{\partial}{\partial x_3} C_3 \sec(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) - 2\sqrt{2-\sqrt{2}} C_4 \tan(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2). \end{aligned} \quad (143)$$

Takodje, za  $i=2, j=4$  sledi

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_4} p = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Ova jednakost važi za sve vrednosti promenljivih  $x_1, x_2, x_3$  i  $x_4$  iz domena pa onda specijalno važi i za vrednosti  $x_4=0$  i  $x_1=0$  odnosno  $x_1=\frac{\pi}{2}$  i proizvoljne  $x_2$  i  $x_3$  i uzimajući u obzir (143) dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} C_2 &= \sqrt{\sqrt{2}-1} ((1+\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial x_3} C_4 + 2^{\frac{5}{4}} (C_1 + (1+\sqrt{2})C_3)) \sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_3} C_1 &= (1+\sqrt{2}) \frac{\partial}{\partial x_3} C_3 - 2^{\frac{5}{4}} \sqrt{\sqrt{2}-1} (C_2 + (1+\sqrt{2})C_4) \sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2). \end{aligned} \quad (144)$$

Slično, za vrednosti  $i=j=2$  pomoću (143) i (144) i vrednosti promenljivih  $x_4=0$  i  $x_1=0$ , odnosno  $x_1=\frac{\pi}{2}$ , redom dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} C_3 &= -2(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}(C_1 + (1+\sqrt{2})C_3) \cos^2(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) \\ &\quad - 2^{\frac{1}{4}}(1+\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}) \frac{\partial}{\partial x_3} C_4 \sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} C_4 &= -2(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}(C_2 + (1+\sqrt{2})C_4) \cos^2(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) \\ &\quad + 2^{\frac{1}{4}}(1+\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}) \frac{\partial}{\partial x_3} C_3 \sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2). \end{aligned} \quad (145)$$

Iz (143) sledi  $\frac{\partial}{\partial x_2} (C_1 + (1+\sqrt{2})C_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} (C_2 + (1+\sqrt{2})C_4) = 0$ . Takodje, važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (C_1 + (1+\sqrt{2})C_3) &= 2(1+\sqrt{2}) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} C_3 + 4 \sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2) (-\sqrt{2+\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_3} C_4 \\ &\quad + ((-2+\sqrt{2})C_1 - \sqrt{2}C_3) \sin(2\sqrt{2-\sqrt{2}}x_2)), \end{aligned}$$

a jednakost (145) dalje ovaj izraz pojednostavljuje do

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(C_1 + (1 + \sqrt{2})C_3) + \frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}(C_1 + (1 + \sqrt{2})C_3) = 0,$$

odakle dobijamo

$$C_1 + (1 + \sqrt{2})C_3 = P_1 \cos\left(\frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}x_3\right) + P_2 \sin\left(\frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}x_3\right)$$

gde su  $P_1$  i  $P_2$  konstantna vektorska polja. Na sličan način dobijamo i

$$C_2 + (1 + \sqrt{2})C_4 = Q_1 \cos\left(\frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}x_3\right) + Q_2 \sin\left(\frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}x_3\right)$$

gde su i  $Q_1$  i  $Q_2$  konstantna vektorska polja.

Sada,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} C_3 &= \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^{\frac{3}{2}}} (2^{\frac{1}{4}} (\cos(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_3})(P_2 + Q_1 \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_2})) \\ &\quad + (-P_1 + Q_2 \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_2})) \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_3})), \\ \frac{\partial}{\partial x_3} C_4 &= \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^{\frac{3}{2}}} (2^{\frac{1}{4}} (\cos(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_3})(Q_2 - P_1 \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_2})) \\ &\quad + (Q_1 + P_2 \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_2})) \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_3})). \end{aligned}$$

Integral po promenljivoj  $x_3$  daje

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{2}) (\cos(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_3})(P_1 - Q_2 \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_2})) \\ &\quad + (P_2 + Q_1 \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_2})) \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_3})) + M_1, \\ C_4 &= \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{2}) (\cos(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_3})(Q_1 + P_2 \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_2})) \\ &\quad + (Q_2 - P_1 \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_2})) \sin(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_3})) + M_2, \end{aligned}$$

gde su  $M_1$  i  $M_2$  vektorska polja koja zavise isključivo od promenljive  $x_2$ . Diferenciranjem po  $x_2$  i pomoću (143) dalje sledi

$$\frac{d}{dx_2} M_i + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_2} M_i \tan(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_2}) = 0, i = 1, 2,$$

odnosno,  $M_i = \cos(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x_2}) S_i$  gde su  $S_1$  i  $S_2$  takodje konstantna vektorska polja.

Ponovo, kako je  $\{p, \xi, F_3, \eta, F_4, F_1, -F_2\}$  jedna pokretna  $G_2$  baza, to je u tački  $(0, 0, 0, 0)$  možemo identifikovati sa bazom  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ . Tada direktno dobijamo

$$\begin{aligned}
 p(0, 0, 0, 0) &= e_1 = Q_1 - \frac{Q_1}{\sqrt{2}} - (2 + \sqrt{2})S_2, \\
 \frac{\partial}{\partial x_1} p(0, 0, 0, 0) &= K_1(0, 0, 0, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(P_1 - 2S_1), \\
 \frac{\partial}{\partial x_2} p(0, 0, 0, 0) &= K_2(0, 0, 0, 0) = -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}P_2, \\
 \frac{\partial}{\partial x_3} p(0, 0, 0, 0) &= K_3(0, 0, 0, 0) = \sqrt{20 - 14\sqrt{2}}Q_2, \\
 \frac{\partial}{\partial x_4} p(0, 0, 0, 0) &= K_4(0, 0, 0, 0) = P_1 - \frac{P_1}{\sqrt{2}} + (2 + \sqrt{2})S_1, \\
 \xi &= \frac{\sqrt{2}}{2}(Q_1 + 2S_2),
 \end{aligned} \tag{146}$$

i konačno

$$\begin{aligned}
 P_1 &= -\frac{1}{2}\{0, 0, 0, 0, 1, 1, \sqrt{2}\}, P_2 = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}\}, \\
 Q_1 &= \frac{1}{2}\{1, 1 + \sqrt{2}, 0, 0, 0, 0, 0\}, Q_2 = \{0, 0, -\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}, 0, 0, 0, 0\}, \\
 S_1 &= \frac{1}{4}\{0, 0, 0, 0, 1, 1 - \sqrt{2}, 0\}, S_2 = \frac{1}{4}\{-1, -1 + \sqrt{2}, 0, 0, 0, 0, 0\}.
 \end{aligned} \tag{147}$$

Da bi pojednostavili parametrizaciju podmnogostrukosti  $M$  možemo promeniti koordinatni sistem na sledeći način

$$y_1 = x_1 + x_4, \quad y_2 = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}x_2, \quad y_3 = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}x_3, \quad y_4 = \sqrt{2}x_4.$$

Sada direktno dobijamo imersiju  $f_3$  datu formulom (128).

**Slučaj 4.** Pretpostavimo da važi  $\beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6 \neq 0$  i  $\beta_1 = 0$ . Iz Leme 5 sledi

$$F_1(\beta_2) = 3(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6).$$

Tada je

$$x_7 = 3\beta_3(-\beta_3\beta_5 + \beta_2\beta_6) - \beta_6F_2(\beta_2) + \beta_5F_3(\beta_2) = 0$$

i

$$x_8 = 3\beta_2(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6) + \beta_5F_2(\beta_2) + \beta_6F_3(\beta_2) = 0$$

odakle dalje sledi

$$F_2(\beta_2) = 3(-\beta_3\beta_5 + \beta_2\beta_6)(\beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6)/(\beta_5^2 + \beta_6^2)$$

i

$$F_3(\beta_2) = 3(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6)^2/(\beta_5^2 + \beta_6^2).$$

Medjutim, tada sledi da je

$$x_{10} = 6(1 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_5^2 + \beta_6^2)$$

izraz različit od nule pa je u ovom slučaju sistem (129) nemoguć.

**Slučaj 5.** Istražimo sada sistem (129) pod pretpostavkom da skup tačaka gde je bilo koji koeficijent nula nije nigde gust.

Prvo, označimo

$$y = \beta_1^2\beta_5 - \beta_2^2\beta_5 + \beta_3^2\beta_5 - 2\beta_2\beta_3\beta_6 + \beta_1(-\beta_2^2 + \beta_5^2 + \beta_6^2). \quad (148)$$

Pretpostavimo da je  $y = 0$ . Iz jednakosti  $x_7 = 0$  tada dobijamo

$$F_1(\beta_2) = \frac{1}{\beta_3}(-\beta_6 F_2(\beta_2) + (\beta_1 + \beta_5)F_3(\beta_2))$$

i dalje

$$x_8 = \frac{1}{\beta_3}((\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6)F_2(\beta_2) + (\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6)F_3(\beta_2)).$$

Uočimo takodje da važi

$$F_4(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6) = -3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6)$$

i

$$F_4(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) = 3(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6),$$

pa važi da su jednakosti  $\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6 = 0$  i  $\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6 = 0$  ekvivalentne. Ako je  $\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6 \neq 0$ , odnosno  $\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6 \neq 0$  tada sledi

$$F_2(\beta_2) = -(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6)F_3(\beta_2)/(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6).$$

Oдавde dalje sledi

$$x_9 = 6\beta_3 - yF_3(\beta_2)/(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6)$$

te dolazimo do kontradikcije  $\beta_3 = 0$ . Dakle, važi

$$\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6 = \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6 = 0. \quad (149)$$

Kako je  $y = \beta_3(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6) - \beta_2(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) + \beta_1(\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2)$  sledi da je

$$\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2 = 0. \quad (150)$$

Ovi uslovi pojednostavljaju izraze za izvode na sledeći način

$$\begin{aligned} F_1(\beta_1) &= -F_3(\beta_3) - F_2(\beta_2), F_2(\beta_1) = F_1(\beta_2), F_3(\beta_1) = F_1(\beta_3), F_4(\beta_1) = 0, F_4(\beta_2) = -3\beta_3, \\ F_2(\beta_3) &= 2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 + F_3(\beta_2), F_4(\beta_3) = 3\beta_2, F_1(\beta_5) = -\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_6 + F_2(\beta_2), \\ F_2(\beta_5) &= -F_2(\beta_1) - F_3(\beta_6), F_4(\beta_5) = -6\beta_6, F_1(\beta_6) = F_3(\beta_2) + 1 - 2\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\beta_3^2 - 3\beta_1\beta_5, \\ F_2(\beta_6) &= F_3(\beta_5), F_4(\beta_6) = 3(\beta_1 + 2\beta_5). \end{aligned}$$

Takodje se pojednostavljaju i jednakosti (129). Za dalja izračunavanja biće nam korisni izrazi za  $x_{12}, x_{13}, x_{16}$  i  $x_{17}$ .

Kako važi (150) sledi da je

$$x_{12} = \beta_5(2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 + F_3(\beta_2)) + \beta_2 F_1(\beta_3) + \beta_6 F_3(\beta_3).$$

Dalje,  $F_3(F_3(\beta_2) - F_2(\beta_3)) = F_3(-2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)$  implicira

$$x_{13} = \beta_2(-8 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - \beta_2 F_3(\beta_2) - \beta_1 F_1(\beta_3) - \beta_3 F_3(\beta_3).$$

Na sličan način iz  $F_3(F_2(\beta_2) - F_1(\beta_5)) = F_3(3\beta_2\beta_3 - 3\beta_1\beta_6)$  sledi

$$x_{16} = \beta_2(-3\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_6 + F_2(\beta_2)) + \beta_6 F_3(\beta_5) - \beta_5(F_1(\beta_2) + F_3(\beta_6)).$$

Konačno,  $F_3(F_3(\beta_6) + F_1(\beta_2) + F_2(\beta_5)) = 0$  implicira

$$x_{17} = 3\beta_1\beta_2\beta_3 + 12\beta_6 - 3\beta_1^2\beta_6 + \beta_2 F_1(\beta_2) - \beta_1 F_2(\beta_2) - \beta_3 F_3(\beta_5) + \beta_2 F_3(\beta_6).$$

Uočimo da važi

$$\beta_2 x_8 + \beta_5 x_9 = 6\beta_3\beta_5 + (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)F_1(\beta_2),$$

a iz (149) direktno sledi  $\beta_1 = -(1 + \frac{\beta_3^2}{\beta_2^2})\beta_5$ , pa je  $\beta_2^2 - \beta_1\beta_5 = \beta_2^2 + \beta_5^2 + \frac{\beta_3^2\beta_5^2}{\beta_2^2} > 0$ , te dobijamo

$$F_1(\beta_2) = -6\beta_3\beta_5 / (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5).$$

Slično, iz

$$\beta_2 x_{16} + \beta_5 x_{17} = 3(-\beta_2^3\beta_3 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_5 + \beta_1\beta_2^2\beta_6 - (-4 + \beta_1^2)\beta_5\beta_6) + (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)F_2(\beta_2) = 0$$

sledi

$$F_2(\beta_2) = -(3(-\beta_2^3\beta_3 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_5 + \beta_1\beta_2^2\beta_6 - (-4 + \beta_1^2)\beta_5\beta_6)) / (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5).$$

Sada iz izraza za  $x_8$  direktno dobijamo

$$F_3(\beta_2) = (3\beta_5(-\beta_2^3\beta_3 + 2\beta_2\beta_3 + 2\beta_1\beta_2^2\beta_6 - 6 + (4 - \beta_1^2)\beta_5\beta_6)) / ((\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)\beta_6).$$

Takodje iz izraza za  $x_5$  sledi

$$\begin{aligned} & 6\beta_2(-\beta_2^2\beta_5 + \beta_5(-2\beta_3^2 + \beta_1\beta_5) + 2\beta_2\beta_3\beta_6) + (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)^2 F_1(\beta_3) \\ &= 6\beta_2(-\beta_2^2\beta_5 + \beta_5(-2\beta_3^2 + \beta_1\beta_5) + 2\beta_3^2\beta_5) + (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)^2 F_1(\beta_3) \\ &= -6\beta_2\beta_5(\beta_2^2 - \beta_1\beta_5) + (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)^2 F_1(\beta_3) = 0 \end{aligned}$$

što dalje implicira

$$F_1(\beta_3) = 6\beta_2\beta_5 / (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5).$$

Izraz za  $x_{13}$  daje

$$\begin{aligned} F_3(\beta_3) &= (\beta_2(3\beta_2^3\beta_3\beta_5 - 3\beta_2\beta_3\beta_5(2 + \beta_1\beta_5) + \beta_2^4\beta_6 + \beta_2^2(-8 + \beta_1^2 + \beta_3^2 - 4\beta_1\beta_5)\beta_6 \\ &+ \beta_5(-\beta_1^3 - \beta_1(-2 + \beta_3^2) - 12\beta_5 + 3\beta_1^2\beta_5)\beta_6)) / (\beta_3(\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)\beta_6). \end{aligned}$$

Uočimo da  $\beta_6 = \beta_3\beta_5/\beta_2$  i  $\beta_1 = -(1 + \frac{\beta_3^2}{\beta_2^2})\beta_5$  impliciraju

$$x_{11} = -6(2\beta_2^6 + 4\beta_2^2\beta_3^2\beta_5^2 + 2\beta_3^4\beta_5^2 + \beta_2^4(-7 + 2\beta_3^2 + 2\beta_5^2)) / \beta_2^4.$$

Kao ranije, možemo pretpostaviti da je  $\beta_5 > 0$  a tada je

$$\beta_5 = \sqrt{\beta_2^4(7 - 2\beta_2^2 - 2\beta_3^2)} / (\sqrt{2}(\beta_2^2 + \beta_3^2)). \quad (151)$$

Takodje, iz (149) sledi

$$\begin{aligned}\beta_6 F_2(\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5) + \beta_5 F_2(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) &= 0, \\ \beta_6 F_3(\beta_2\beta_6 - \beta_3\beta_5) + \beta_5 F_3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) &= 0,\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\beta_3\beta_6 F_1(\beta_2) + (\beta_3\beta_5 + \beta_2\beta_6) F_3(\beta_5) + (-\beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) F_3(\beta_6) &= 0, \\ \beta_2\beta_5 F_1(\beta_3) + (\beta_2\beta_5 - \beta_3\beta_6) F_3(\beta_5) + (\beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) F_3(\beta_6) &= 0\end{aligned}$$

i direktno sledi

$$\begin{aligned}F_3(\beta_5) &= 6\beta_5(-\beta_2^3\beta_5^2 + \beta_2^2\beta_3\beta_5\beta_6 + \beta_3^3\beta_5\beta_6 + \beta_2\beta_3^2\beta_6^2)/((\beta_2^2 + \beta_3^2)(\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)(\beta_5^2 + \beta_6^2)), \\ F_3(\beta_6) &= -6\beta_5(\beta_2^2\beta_3\beta_5^2 + \beta_2^3\beta_5\beta_6 + \beta_2\beta_3^2\beta_5\beta_6 - \beta_3^3\beta_6^2)/((\beta_2^2 + \beta_3^2)(\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)(\beta_5^2 + \beta_6^2)).\end{aligned}$$

Sada, iz  $F_1(\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2) = 0$  sledi

$$\begin{aligned}(-9\beta_2^5\beta_3\beta_5\beta_6 + 6\beta_2^3\beta_3\beta_5(2 + 3\beta_1\beta_5)\beta_6 - 3\beta_1\beta_2\beta_3\beta_5^2(4 + 3\beta_1\beta_5)\beta_6 + 2\beta_2^6\beta_6^2 \\ + \beta_2^4(-(-2 + 4\beta_1^2 + \beta_1\beta_5)\beta_6^2 + \beta_3^2(3\beta_5^2 - 4\beta_6^2)) + 2\beta_1^2\beta_5^2((7 - 2\beta_1^2)\beta_6^2 + \beta_3^2(6\beta_5^2 - 2\beta_6^2)) \\ + \beta_2^2\beta_5(24\beta_5\beta_6^2 + \beta_1^3(3\beta_5^2 + 8\beta_6^2) + \beta_1^2(3\beta_5^3 - 4\beta_5\beta_6^2) + \beta_1(-16\beta_6^2 + \beta_3^2(-9\beta_5^2 + 8\beta_6^2)))) \\ = 3\beta_5^2(\beta_2^4\beta_3^2 + 4\beta_1^2\beta_3^2\beta_5^2 + \beta_1\beta_2^2\beta_5(-3\beta_3^2 + \beta_1(\beta_1 + \beta_5))) - 3\beta_2\beta_3\beta_5(-4 + 3\beta_2^2 - 3\beta_1\beta_5) \\ \cdot (\beta_2^2 - \beta_1\beta_5)\beta_6 + (2\beta_6^2 - 2\beta_1^2(-7 + 2\beta_1^2 + 2\beta_3^2)\beta_5^2 + 4\beta_2^2\beta_5(2\beta_1(-2 + \beta_1^2 + \beta_3^2) \\ - (-6 + \beta_1^2)\beta_5) - \beta_2^4(-2 + 4\beta_3^2 + \beta_1(4\beta_1 + \beta_5)))\beta_6^2 = 0.\end{aligned}\tag{152}$$

Jednakosti (149), (150) i (151) pojednostavljaju (152) do

$$6\beta_2^8\beta_3^2(-7 + 2\beta_2^2 + 2\beta_3^2)^2/(\beta_2^2 + \beta_3^2)^4 = 0$$

odakle sledi  $-7 + 2\beta_2^2 + 2\beta_3^2 = 0$  a tada iz (151) dobijamo kontradikciju  $\beta_5 = 0$ .

Zato važi  $y \neq 0$ . Tada je determinanta sistema jednačina  $x_7 = x_8 = x_9 = 0$  jednaka  $y$  i direktno dobijamo

$$\begin{aligned}F_1(\beta_2) &= 6\beta_3(\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2)/y, \quad F_2(\beta_2) = -6\beta_3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6)/y, \\ F_3(\beta_2) &= 6\beta_3(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6)/y.\end{aligned}$$

Koristeći izraz za  $F_1(\beta_2)$  iz izraza za  $x_5$  dobijamo

$$F_1(\beta_3) = -6\beta_2(\beta_1\beta_5 + \beta_5^2 + \beta_6^2)/y$$

a na sličan način iz jednakosti  $x_{11} = 0$  dobijamo

$$F_3(\beta_3) = -6\beta_2(\beta_3\beta_5 - \beta_2\beta_6)/y.$$

Iz ovih relacija tada sledi

$$F_i(\beta_2^2 + \beta_3^2) = 0 \quad \text{za } i \in \{1, 3, 4\}.$$

Tada direktno sledi i da je

$$F_2(\beta_2^2 + \beta_3^2) = \frac{2}{3}\beta_3x_{10} = 0.$$



Sada zaključujemo da je funkcija  $\beta_2^2 + \beta_3^2$  konstantna i da takodje važi

$$F_2(\beta_3) = 6\beta_2(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6)/y.$$

Koristeći

$$\begin{aligned} F_2(\beta_5) &= 3(-\beta_3\beta_5 + \beta_2\beta_6) - F_1(\beta_2) - F_3(\beta_6), \\ F_2(\beta_1) &= 3(-\beta_3\beta_5 + \beta_2\beta_6) + F_1(\beta_2) \end{aligned}$$

u izrazu za  $x_{17}$  dobijamo da važi

$$x_{17} = 3\beta_1\beta_2\beta_3 + 12\beta_6 - 3\beta_1^2\beta_6 + \beta_2F_1(\beta_2) - \beta_1F_2(\beta_2) - \beta_3F_3(\beta_5) + \beta_2F_3(\beta_6).$$

Slično, jednakost

$$F_2(\beta_6) = -3(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_6) + F_3(\beta_5)$$

transformiše izraz za  $x_{22}$  u

$$\begin{aligned} x_{22} &= -7\beta_1 + 2\beta_1^3 + 2\beta_1\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_3^2 - 12\beta_5 + 2\beta_1^2\beta_5 + 3\beta_2^2\beta_5 - \beta_1\beta_5^2 + 3\beta_2\beta_3\beta_6 - \beta_1\beta_6^2 \\ &\quad - \beta_1F_3(\beta_2) - \beta_2F_3(\beta_5) - \beta_3F_3(\beta_6). \end{aligned}$$

Iz prethodne dve jednakosti dalje sledi

$$\begin{aligned} F_3(\beta_5) &= (2\beta_1^3\beta_2 - 7\beta_1\beta_2 + 2\beta_1\beta_2^2 + 5\beta_1\beta_2\beta_3^2 - 12\beta_2\beta_5 + 2\beta_1^2\beta_2\beta_5 + 3\beta_2^2\beta_5 - \beta_1\beta_2\beta_5^2 + 12\beta_3\beta_6 \\ &\quad - 3\beta_1^2\beta_3\beta_6 + 3\beta_2^2\beta_3\beta_6 - \beta_1\beta_2\beta_6^2 + \beta_2\beta_3F_1(\beta_2) - \beta_1\beta_3F_2(\beta_2) - \beta_1\beta_2F_3(\beta_2))/(\beta_2^2 + \beta_3^2) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} F_3(\beta_6) &= (7\beta_1\beta_3 - 2\beta_1^3\beta_3 + \beta_1\beta_2^2\beta_3 - 2\beta_1\beta_3^3 + 12\beta_3\beta_5 - 2\beta_1^2\beta_3\beta_5 - 3\beta_2^2\beta_3\beta_5 + \beta_1\beta_3\beta_5^2 + 12\beta_2\beta_6 \\ &\quad - 3\beta_1^2\beta_2\beta_6 - 3\beta_2\beta_3^2\beta_6 + \beta_1\beta_3\beta_6^2 + \beta_2^2F_1(\beta_2) - \beta_1\beta_2F_2(\beta_2) + \beta_1\beta_3F_3(\beta_2))/(\beta_2^2 + \beta_3^2). \end{aligned}$$

Sada se pomoću  $F_1(\beta_2)$ ,  $F_2(\beta_2)$ ,  $F_3(\beta_2)$  i koristeći  $F_4(y) = 0$  izraz za  $x_{19}$  pojednostavljuje do

$$\begin{aligned} y_1 &= -2y\beta_1\beta_3 + y\beta_1^3\beta_3 + 4y\beta_1\beta_2^2\beta_3 + y\beta_1\beta_3^3 - 2y\beta_1^2\beta_3\beta_5 + 6y\beta_2^2\beta_3\beta_5 - 6\beta_1\beta_2^2\beta_3\beta_5 - 6\beta_1\beta_3^3\beta_5 \\ &\quad - 2y\beta_1\beta_3\beta_5^2 - 3y\beta_2^3\beta_6 + 6\beta_1\beta_2^3\beta_6 + 3y\beta_2\beta_3^2\beta_6 + 6\beta_1\beta_2\beta_3^2\beta_6 - 2y\beta_1\beta_3\beta_6^2 = 0. \end{aligned}$$

Slično, zamenom  $F_2(\beta_2)$  u izraz  $x_{10}$  dobijamo

$$y_2 = 6(\beta_1\beta_2^2 + \beta_2^2\beta_5 - \beta_3^2\beta_5 + 2\beta_2\beta_3\beta_6) + y(-2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 - 2\beta_6^2) = 0.$$

Dalje je

$$y_1 - \beta_1\beta_3y_2 = 3\beta_2(y - 2\beta_1)(\beta_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_2\beta_3\beta_5 - \beta_2^2\beta_6 + \beta_3^2\beta_6) = 0.$$

Pretpostavimo da je  $y = 2\beta_1$ . Tada

$$y_2 = 2(-2\beta_1 + \beta_1^3 + 4\beta_1\beta_2^2 + \beta_1\beta_3^2 - 2\beta_1^2\beta_5 + 3\beta_2^2\beta_5 - 3\beta_3^2\beta_5 - 2\beta_1\beta_5^2 + 6\beta_2\beta_3\beta_6 - 2\beta_1\beta_6^2).$$

Ako sada uvrstimo u  $x_{18}$  izraze za  $F_3(\beta_6)$  i  $F_1(\beta_2)$ ,  $F_2(\beta_2)$ ,  $F_3(\beta_2)$  i  $F_3(\beta_5)$  redom dobijamo

$$\begin{aligned} y_3 &= 6\beta_1(\beta_1(\beta_2^3 + 4\beta_2\beta_3^2) + \beta_2^3\beta_5 + 7\beta_2\beta_3^2\beta_5 - 2\beta_2^2\beta_3\beta_6 + 4\beta_3^3\beta_6) + y(\beta_1^3\beta_2 - 2\beta_1^2\beta_2\beta_5 \\ &\quad - 3\beta_3(2\beta_2\beta_3\beta_5 - \beta_2^2\beta_6 + \beta_3^2\beta_6) + \beta_1\beta_2(\beta_2^2 - 2(1 + \beta_3^2 + \beta_5^2 + \beta_6^2))) = 0. \end{aligned}$$

Koristeći  $y = 2\beta_1$  sledi

$$\frac{y_3}{6\beta_1} - \beta_2 \frac{y_2}{2} = 9\beta_3(\beta_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_2\beta_3\beta_5 - \beta_2^2\beta_6 + \beta_3^2\beta_6) = 0.$$

Dakle,

$$\beta_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_2\beta_3\beta_5 - \beta_2^2\beta_6 + \beta_3^2\beta_6 = 0.$$

Pretpostavka je da važi  $\beta_2 \neq 0$  i  $\beta_3 \neq 0$  odakle takodje sledi da funkcije  $\beta_2$  i  $\beta_3$  nisu konstantne, a kako  $\beta_2^2 + \beta_3^2$  jeste konstantna funkcija sledi  $\beta_2^2 - \beta_3^2 \neq 0$ . Zato je

$$\beta_6 = (\beta_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_2\beta_3\beta_5)/(\beta_2^2 - \beta_3^2),$$

a tada

$$y = (\beta_1\beta_2^2 + (\beta_2^2 + \beta_3^2)\beta_5)(-\beta_2^4 + \beta_1^2\beta_3^2 + \beta_3^4 + \beta_1\beta_2^2\beta_5 + \beta_1\beta_3^2\beta_5)/(\beta_2^2 - \beta_3^2) \neq 0. \quad (153)$$

Takodje  $y_2 = 0$  implicira

$$y = -\frac{6(\beta_2^2 + \beta_3^2)(\beta_1\beta_2^2 + (\beta_2^2 + \beta_3^2)\beta_5)}{(\beta_2^2 - \beta_3^2)(-2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 - 2\beta_6^2)}$$

pa (153) postaje

$$-6(\beta_2^2 + \beta_3^2) = (\beta_1^2\beta_3^2 + \beta_3^4 + \beta_1\beta_2^2\beta_5 + \beta_1\beta_3^2\beta_5 - \beta_2^4)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 - 2\beta_6^2 - 2).$$

Kako je leva strana jednakosti konstantna sledi

$$\begin{aligned} F_4((-\beta_2^4 + \beta_1^2\beta_3^2 + \beta_3^4 + \beta_1\beta_2^2\beta_5 + \beta_1\beta_3^2\beta_5)(-2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 2\beta_1\beta_5 - 2\beta_5^2 - 2\beta_6^2)) \\ = -2\beta_2\beta_3(-6)(\beta_2^2 + \beta_3^2)/(\beta_2^2 - \beta_3^2) = 0. \end{aligned}$$

Dakle ni ovaj slučaj nije moguć, čime je tvrdjenje dokazano.

## 6 Nizovi minimalnih površi u neparno dimenzionim sferama

U ovom poglavlju predstavimo rezultate iz [5], vezane za minimalne imersije površi u neparno dimenzione sfere.

### 6.1 Minimalne površi u $S^{2n+1}$ i harmonijski nizovi

Neka je  $M$  površi i  $f_0 : M \rightarrow S^{2n+1}$  minimalna imersija površi  $M$  u jediničnu sferu. Pretpostavimo da  $f_0(M)$  ne pripada sferi  $S^{2m+1}$  manje dimenzije totalno geodezijski smeštenoj u  $S^{2n+1}$ .

Proučavaćemo površi u terminima teorije harmonijskih nizova. Neka su  $(x, y)$  lokalne izotermalne koordinate na površi  $M$ , odnosno koordinatni sistem za koji važi da je  $\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 0$  i  $\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$  i neka je  $z = x + iy$  odgovarajuća lokalna kompleksna koordinata. Označavaćemo  $\frac{\partial}{\partial z}$  sa  $\partial$  i  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  sa  $\bar{\partial}$ . Za imersiju  $f_0$  tada važi da realni i imaginarni delovi vektorskih polja  $f_1 = \partial f_0$  i  $\bar{f}_1 = \bar{\partial} f_0$  razapinju tangentni prostor imersije u svakoj tački.

Neka je  $(\ , \ )$  kompleksno bilinearano proširenje standardnog skalarnog proizvoda u prostoru  $R^{2n+2}$ . Kako su  $f_0$  i  $f_1$  ortogonalni sledi

$$(f_0, f_1) = 0$$

a kako je koordinata  $z$  izotermalna važi

$$(f_1, f_1) = 0.$$

Označimo  $(f_1, \bar{f}_1) = e^{\omega_1}$ . Nastavljajući ovaj postupak, za  $k = 1, \dots, m$ ,  $m \leq n - 1$ , u nesingularnim tačkama možemo definisati vektorsko polje  $f_{k+1}$  kao komponentu  $\partial f_k$  koja je ortogonalna na  $\bar{f}_k$  u odnosu na proizvod  $(\ , \ )$ . Kako je  $\partial f_k$  ortogonalan na  $f_i$  i  $\bar{f}_i$  za  $i < k$  i  $\bar{f}_k$ , sledi ([9])

$$\begin{aligned} \partial f_k &= f_{k+1} + \partial \omega_k f_k \\ \bar{\partial} f_k &= -e^{\omega_k - \omega_{k-1}} f_{k-1}, \end{aligned} \quad (154)$$

gde je  $(f_k, \bar{f}_k) = e^{\omega_k}$ . Za imersiju kod koje su vektorska polja  $f_0, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_m, \bar{f}_m$  medjusobno ortogonalna u odnosu na hermitski skalarni proizvod kažemo da je  $(2m + 1)$  orthogonalna. Tada postoje globalno definisana linijska raslojenja  $L_0, L_1, \bar{L}_1, \dots, L_m, \bar{L}_m$ .

Uvedimo pojam krivinskih elipsi višeg reda kao u [27]. Ako je  $h$  druga fundamentalna forma površi tada je sa

$$(\nabla h)(X, Y, Z) = \nabla_X^\perp h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z).$$

definisana tri forma.

Iz Kodacijeve jednačine sledi da je  $\nabla h$  forma simetrična po  $X, Y, Z$ . Tada induktivno definišemo

$$\begin{aligned} (\nabla^\ell h)(X_1, \dots, X_{\ell+2}) &= \nabla_{X_1}^\perp (\nabla^{\ell-1} h(X_2, \dots, X_{\ell+2})) - (\nabla^{\ell-1} h)(\nabla_{X_1} X_2, \dots, X_{\ell+2}) \dots \\ &\quad - (\nabla^{\ell-1} h)(X_2, \dots, \nabla_{X_1} X_{\ell+2}). \end{aligned}$$

Tada definišemo  $(\sigma^\ell h)$  kao komponentu  $\nabla^\ell h$  ortogonalnu na  $im(h), \dots, im(\sigma^{\ell-1} h)$ . Kažemo da je tačka  $p$  generička ako za sve  $\ell \leq m - 2$ , važi da je  $im(\sigma^\ell h)$  dvodimenzionalni prostor. Iz Ričijevog identiteta za tenzore i Kodacijeve jednačine da je  $(\sigma^\ell h)$  totalno simetrični tenzor. Ako je  $\{e_1, e_2\}$

orijentisana ortonormirana baza u tački  $p$  i  $v = \cos t e_1 + \sin t e_2$  jedinični vektor, zbog minimalnosti sledi

$$(\sigma^\ell h)(v, \dots, v) = \cos(l+2)t (\sigma^\ell h)(e_1, \dots, e_1) + \sin(l+2)t (\sigma^\ell h)(e_2, e_1, \dots, e_1),$$

odakle dalje sledi da je slika  $(\sigma^\ell h)$  elipsa u normalnom prostoru.

**Lema 30** *Neka je  $m \leq n$ . sledeće osobine su ekvivalentne:*

1. imersija je  $(2m+1)$ -ortogonalna,
2. u generičkoj tački, prvih  $(m-1)$ -krivinskih elipsi višeg reda su (nedegenerisani) krugovi.

**Dokaz:** Prvo, pretpostavimo da je imersija  $(2m+1)$  ortogonalna. Tada su  $f_0, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_m, \bar{f}_m$  medjusobno ortogonalna vektorska polja u odnosu na hermitski skalarni proizvod. Po svojoj konstrukciji tada sledi da je  $f_2 = h(\partial, \partial)$  a korišćenjem ortogonalnosti sledi da je i

$$f_{k+2} = (\sigma^k h)(\partial, \dots, \partial).$$

Kako važi  $(f_{k+2}, f_{k+2}) = 0$ , za  $k+2 \leq m$  direktno sledi da su prvih  $(m-1)$  krivinskih elipsi višeg reda krugovi.

Obrnuto, pretpostavimo da su prvih  $(m-1)$  krivinskih elipsi višeg reda nedegenerisani krugovi. Tada korišćenjem matematičke indukcije možemo pretpostaviti da su  $f_0, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_{m-1}, \bar{f}_{m-1}$  ortogonalna vektorska polja u odnosu na hermitski proizvod. Tada je niz najmanje  $(2m-1)$ -ortogonalan. Tada je  $f_m = \partial f_{m-1} - \partial \omega_{m-1} f_{m-1}$  je ortogonalan na  $f_0, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_{m-1}$ . Takodje, iz  $\partial(f_{m-1}, f_{m-1}) = 0$ , sledi da je  $f_m$  ortogonalan na  $\bar{f}_{m-1}$ . Dalje važi  $(f_m, f_m) = 0$  (jer je  $(m-2)$ -krivinska elipsa višeg reda krug). To znači da je  $f_m$  ortogonalan na  $\bar{f}_m$ . Konjugovanjem dobijamo tvrdjenje teoreme.  $\blacksquare$

Ako za imersiju  $f_0 : M \rightarrow S^{2n+1}$  važi da su prvih  $n$  krivinskih elipsi višeg reda krugovi, odnosno da  $f_0$  idukuje  $(2n+3)$  ortogonalni niz, tada iz Erbacherove teoreme direktno sledi da važi

1. imersija je sadržana u sferi  $S^{2n}$  koja je totalno geodzijski smeštena u  $S^{2n+1}$
2.  $n$ -ta krivinska elipsa je degenerisana i zapravo je tačka
3. imersija je superminimalna.

Sledeći slučaj je onaj kada su prvih  $(n-1)$  krivinskih elipsi višeg reda krugovi. Tada je imersija  $(2n+1)$ -ortogonalna. Tada je, ([9]), harmonijski niz periodičan i  $(2n+2)$  linijskih raslojenja u nizu su medjusobno ortogonalni. Tada je  $(n+1)$ -vo linijsko raslojenje je realno i definiše novo preslikavanje  $M \rightarrow S^{2n+1}$  koje se naziva polarnom imersijom originalne imersije.

Ovde ispitujemo sledeći slučaj, odnosno pretpostavljamo da su prvih  $(n-2)$  krivinskih elipsi višeg reda krugovi, dok  $(n-1)$ -va nije. U [10] ispitivane su površi sfere  $S^5$ , za koje je ovo slučaj.

Pretpostavimo sada  $m = n-1$ . Konstruisali smo ortogonalni niz  $f_0, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_{n-1}, \bar{f}_{n-1}$ . Takodje su definisani  $f_n$  i  $\bar{f}_n$ . Pretpostavimo  $(f_n, f_n) \neq 0$ . To znači da je niz  $(2n-1)$ -ortogonalan pa je kao i malopre i  $2n$ -ortogonal ali ne i  $(2n+1)$ -ortogonalan.

Takodje važi

$$\bar{\partial} f_n = -\frac{(f_n, \bar{f}_n)}{(f_{n-1}, \bar{f}_{n-1})} f_{n-1}.$$

što zajedno sa činjenicom da je niz  $2n$ -ortogonalan implicira da je funkcija  $(f_n, f_n)$  nenula holomorfna funkcija, pa u nesingularnim tačkama možemo odabrati izotermalnu koordinatu  $z$  tako da

važi  $(f_n, f_n) = -1$ . Ova koordinata nije određena na jedinstven način, možemo je menjati rotacijama za  $\frac{\pi}{n}$  i translacijama. Za takvu kompleksnu oordinatu kažemo da je prilagodjena imersiji  $f_0$ . Ako označimo  $f_n = a + ib$  gde su  $a$  i  $b$  realna vektorska polja, sledi

$$(a, a) - (b, b) = -1, (a, b) = 0.$$

Po pretpostavci slika  $M$  nije sadržana u sferi manje, neparne dimenzije pa linijska raslojenja  $L_0, \dots, L_n, \bar{L}_n$  su linearno nezavisnana otvorenom svuda gustom podskupu od  $M$  ([12]). Od sada posmatraćemo tačke iz ovog podskupa. Na tom skupu možemo definisati diferencijabilnu pozitivnu funkciju  $\varphi$  takvu da važi  $|a| = \sinh \varphi$  i  $|b| = \cosh \varphi$ . Oдавde, dalje sledi

$$(f_n, \bar{f}_n) = \cosh 2\varphi.$$

Uočimo da je vektor  $a$  sa malom osom krivinske elipse, dok je vektor  $b$  kolinearano sa velikom osom. Sada, da bismo kompletirali pokretnu bazu prostora  $R^{2n+1}$  definišimo  $N$  kao jedinično, realno vektorsko polje ortogonalno na  $f_0, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_n, \bar{f}_n$  takvo da  $\det(f_0, f_1, \bar{f}_1, \dots, f_n, \bar{f}_n, N)i^n > 0$ . Tada, direktnim računom dobijamo

$$\begin{aligned} \partial f_n &= e^{-\omega_{n-1}} \bar{f}_{n-1} + 2\partial\varphi \coth 2\varphi f_n + 2\frac{\partial\varphi}{\sinh 2\varphi} \bar{f}_n + \alpha N, \\ \partial \bar{f}_n &= -e^{-\omega_{n-1}} \cosh 2\varphi \bar{f}_{n-1}, \\ \bar{\partial} N &= -\frac{\bar{\alpha}}{\sinh^2 2\varphi} (\bar{f}_n + \cosh 2\varphi f_n) \end{aligned} \quad (155)$$

gde je  $\alpha = (\partial f_n, N)$ . Konjugovanjem prethodnih jednačina dobijamo i odgovarajuće  $\bar{\partial}$  jednačine

$$\begin{aligned} \bar{\partial} f_n &= -e^{-\omega_{n-1}} \cosh 2\varphi f_{n-1}, \\ \bar{\partial} \bar{f}_n &= e^{-\omega_{n-1}} f_{n-1} + 2\bar{\partial}\varphi \coth 2\varphi \bar{f}_n + 2\frac{\bar{\partial}\varphi}{\sinh 2\varphi} f_n + \bar{\alpha} N, \\ \partial N &= -\frac{\alpha}{\sinh^2 2\varphi} (f_n + \cosh 2\varphi \bar{f}_n). \end{aligned} \quad (156)$$

Tada, uslovi integrabilnosti postaju:

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\omega_1 &= e^{\omega_2 - \omega_1} - e^{\omega_1}, \\ \partial\bar{\partial}\omega_k &= e^{\omega_{k+1} - \omega_k} - e^{\omega_k - \omega_{k-1}}, \quad 1 < k < n-1, \\ \partial\bar{\partial}\omega_{n-1} &= e^{-\omega_{n-1}} \cosh 2\varphi - e^{\omega_{n-1} - \omega_{n-2}}, \\ 2\partial\bar{\partial}\varphi &= -\sinh 2\varphi e^{-\omega_{n-1}} + \frac{\alpha\bar{\alpha}}{\sinh 2\varphi}, \\ \bar{\partial}\alpha &= -2\partial\varphi \frac{\bar{\alpha}}{\sinh 2\varphi}. \end{aligned} \quad (157)$$

Uočimo da su prvih  $(n-1)$  jednačina standardni uslovi integrabilnosti za  $\gamma_p$  invarijante date u [12]. Poslednje tri su dobijene na isti način. Matrica kompleksn, bilinearne forme u pokretnoj bazi data je sa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\omega_1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\omega_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \cosh 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cosh 2\varphi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 6.2 Pridružene minimalne površi u $S^{2n+1}$

Polazeći od minimalne površi u  $S^{2n+1}$  čijih su prvih  $(n-2)$  krivinskih elipsi višeg reda krugovi konstruisaćemo dve nove imersije površi u sferu  $S^{2n+1}$ . Transformacije koje indukuju ove imersije se dobijaju na sledeći način.  $(n-1)$ -va krivinska elipsa višeg reda je prava elipsa sa centrom u koordinatnom početku i pripada trodimenzionom prostoru (ortogonalnom na tangentni prostor i sve prethodne krivinske elipse). Kako poslednja krivinska elipsa nije krug, možemo izvršiti rotaciju u normalnom prostoru oko manje ose elipse kojom će se elipsa slikati u krug. Ova rotacija indukuje transformacije početne površi, i do na znak postoje dve različite transformacije. Pokazaćemo da su nove imersije takodje minimalne, i da takodje zadovoljavaju uslov da su prvih  $(n-2)$  krivinske elipse krugovi.

Neka je  $f_0$  početna imersija. Definišimo preslikavanja

$$p_{\varepsilon, \delta}(f_0) = \delta \frac{i f_n - \overline{f_n}}{2 \cosh^2 \varphi} + \varepsilon \tanh \varphi N, \quad (158)$$

gde  $\varepsilon, \delta \in \{-1, 1\}$ . Uočimo da važi  $p_{-\varepsilon, -\delta}(f_0) = -p_{\varepsilon, \delta}(f_0)$ , pa u suštini postoje dva različita preslikavanja. Zbog jednostavnosti označavaćemo  $p_{\varepsilon, \delta}(f_0) = p_0$ . Direktno sledi da je  $p_0$  realna imersija u sferu  $S^{2n+1}$ .

**Teorema 20** *Neka je  $f_0 : M \rightarrow S^{2n+1}$  minimalna imersija čijih su prvih  $(n-2)$  krivinskih elipsi višeg reda krugovi u svakoj tački. Tada je na otvorenom, svuda gustom podskupu  $M$ ,  $p_{\varepsilon, \delta}$  minimalna imersija u  $S^{2n+1}$  koja indukuje istu konformalnu strukturu na  $M$  kao i  $f_0$ . Takodje, prvih  $(n-2)$  krivinskih elipsi višeg reda imersije  $p_{\varepsilon, \delta}$  su krugovi i prilagodjena kompleksna koordinata za  $f_0$  je ujedno prilagodjena i imersiji  $p_{\varepsilon, \delta}$ .*

**Dokaz:**

$$\partial p_0 = \delta i e^{-\omega_{n-1}} \overline{f_{n-1}} - \frac{1}{4 \sinh \varphi \cosh^3 \varphi} (\alpha \varepsilon - 2i \delta \partial \varphi) (f_n + \cosh 2\varphi \overline{f_n} - \sinh 2\varphi i \delta \varepsilon N). \quad (159)$$

Ako označimo  $w = (f_n + \cosh 2\varphi \overline{f_n} - \sinh 2\varphi i \delta \varepsilon N)$  sledi  $(w, w) = 0$  a odatle dalje dobijamo  $(\partial p_0, \partial p_0) = 0$  što implicira da je  $z$  takodje konformalna koordinata za novo preslikavanje. Uočimo takodje

$$\begin{aligned} \partial w &= -e^{-\omega_{n-1}} \sinh^2 2\varphi \overline{f_{n-1}} + \left( 2\partial \varphi \coth 2\varphi + \frac{i \delta \varepsilon \alpha}{\sinh 2\varphi} \right) f_n + \left( 2\partial \varphi \frac{\cosh 2\varphi}{\sinh 2\varphi} + \frac{i \delta \varepsilon \alpha \cosh 2\varphi}{\sinh 2\varphi} \right) \overline{f_n} \\ &+ (\alpha - 2i \delta \varepsilon \partial \varphi \cosh 2\varphi) N = -e^{-\omega_{n-1}} \sinh^2 2\varphi \overline{f_{n-1}} + \frac{i \alpha \delta \varepsilon + 2\partial \varphi \cosh 2\varphi}{\sinh 2\varphi} w. \end{aligned} \quad (160)$$

Ako sa  $y$  označimo funkciju  $\frac{(\alpha\varepsilon - 2i\delta\partial\varphi)}{4\sinh\varphi\cosh^3\varphi}$  tada važi  $\bar{\partial}y = -\frac{1}{8}\frac{1}{\sinh^2\varphi\cosh^4\varphi}(2(-1+2\cosh 2\varphi)(\alpha\varepsilon - 2i\delta\partial\varphi)\bar{\partial}\varphi - \varepsilon\bar{\partial}\alpha\sinh 2\varphi + i\delta(\alpha\bar{\alpha} - e^{-\omega_{n-1}}\sinh^2 2\varphi))$  a direktnim računom dobijamo

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\partial p_0 &= (-\bar{\partial}y - y\coth 2\varphi(2\bar{\partial}\varphi + i\delta\varepsilon\bar{\alpha}))f_n + (-y(2\frac{\sinh^2 2\varphi + \cosh^2 2\varphi}{\sinh 2\varphi}\bar{\partial}\varphi + \frac{i\delta\varepsilon\bar{\alpha}}{\sinh 2\varphi}) \\ &+ \delta i e^{-\omega_{n-1}} - \bar{\partial}y\cosh 2\varphi)\bar{f}_n + (\bar{\partial}y i \delta \varepsilon \sinh 2\varphi - y\cosh 2\varphi(\bar{\alpha} - 2i\delta\varepsilon\bar{\partial}\varphi))N,\end{aligned}$$

a dalje, korišćenjem (157) i  $\delta^2 = \varepsilon^2 = 1$  dobijamo

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\partial p_0 &= (\frac{1}{4}e^{-\omega_{n-1}}(-2i\delta\frac{1}{\cosh^2\varphi} + e^{\omega_{n-1}}(-i\alpha\bar{\alpha}\delta + 2\alpha\varepsilon\bar{\partial}\varphi - 2\partial\varphi(\bar{\alpha}\varepsilon + 2i\delta))\frac{1}{\cosh^4\varphi}))(f_n - \bar{f}_n) \\ &+ (\frac{1}{2}e^{-\omega_{n-1}}(-2\varepsilon + e^{\omega_{n-1}}(\alpha\varepsilon - 2i\delta\partial\varphi)(-\bar{\alpha} - 2i\delta\varepsilon\bar{\partial}\varphi)\frac{1}{\cosh^2\varphi})\tanh\varphi)N = \\ &(-\cosh\omega_{n-1} - \frac{1}{2\delta}((\alpha\bar{\alpha}\delta + 2i\alpha\varepsilon\bar{\partial}\varphi + \partial\varphi(-2i\bar{\alpha}\varepsilon + 4\delta))\frac{1}{\cosh^2\varphi} + \sinh\omega_{n-1})p_0,\end{aligned}$$

što pokazuje da su i tangentna i normalna komponenta  $\partial\bar{\partial}p_0$  jednake nuli, pa dobijamo i  $h(\partial, \bar{\partial}) = 0$ , odnosno svaka od pridruženih imersija  $M$  u  $S^{2n+1}$  je minimalna.

Dalje, koristeći (159), (154) i (155) metodama matematičke indukcije dobijamo

$$\partial^l p_0 = v_l + \delta(-1)^{l+1} i e^{-\omega_{n-l}} \bar{f}_{n-l} + \mu_l w, \quad l \leq n-1, \quad (161)$$

gde su  $\mu_l$  diferencijabilne funkcije i  $v_l$  vektorsko polje razapeto sa  $\{\bar{f}_{n-l+1}, f_{n-l+1}, \dots, \bar{f}_{n-1}\}$ . Na sličan način sledi i

$$\partial^n p_0 = v_n + \delta(-1)^{n-1} i f_0 + \mu_n w. \quad (162)$$

Ako označimo

$$p_1 = \partial p_0, p_{k+1} = \partial p_k - \partial\bar{\omega}_k p_k, \quad 1 < k \leq n-1 \quad (163)$$

gde je  $e^{\bar{\omega}_k} = (p_k, \bar{p}_k)$  sledi da za  $l > 1$  važi  $p_l = \partial^l p_0 + w_l$  gde je  $w_l$  razapet vektorskim poljima  $\{\partial p_0, \partial^2 p_0, \dots, \partial^{l-1} p_0\}$ . Odavde direktno sledi  $(p_k, p_k) = 0, k < n-1$  i  $(p_n, p_n) = -1$ , pa je  $z$  takodje i prilagodjena koordinata imersiji  $p_0$ . ■

Obzirom da za svaku minimalnu površ postoje suštinski dve različite transformacije (do na znak), označavaćemo:

(i) ako je  $n$  parno

$$p_{\varepsilon, -1}(f_0) = -\frac{i}{2}\frac{f_n - \bar{f}_n}{\cosh^2\varphi} + \varepsilon \tanh\varphi N, \quad (\delta = -1) \quad (164)$$

(ii) ako je  $n$  neparno

$$p_{1, \delta}(f_0) = \delta\frac{i}{2}\frac{f_n - \bar{f}_n}{\cosh^2\varphi} + \tanh\varphi N, \quad (\varepsilon = 1). \quad (165)$$

Zvaćemo ove imersije (+) i (-) pridruženom imersijom u zavisnosti od toga da li je  $\varepsilon = \pm 1$  u prvom slučaju (i), i  $\delta = \pm 1$  u drugom slučaju (ii).

### 6.3 Medjusobno inverzne konstrukcije

Pokazaćemo da su (+) i (-) medjusobno inverzne konstrukcije u sledećem smislu

$$p_-(p_+(f_0)) = p_+(p_-(f_0)) = f_0.$$

Označimo sa  $\tilde{N}$ , jedinično realno vektorsko polje ortogonalno na  $\{p_0, p_1, \overline{p_1}, \dots, \dots, p_n, \overline{p_n}\}$  takvo da je  $\det(p_0, p_1, \overline{p_1}, \dots, p_n, \overline{p_n}, \tilde{N})i^n > 0$  i sa  $(p_n, \overline{p_n}) = \cosh 2\tilde{\varphi}$ . Neka je

$$v = \frac{\delta(-1)^{n+1}i}{2 \cosh^2 \tilde{\varphi}}(p_n - \overline{p_n}) + f_0 \quad (166)$$

i uočimo da je  $v$  realno vektorsko polje ortogonalno na  $p_0, p_1, \overline{p_1}, \dots, p_{n-1}, \overline{p_{n-1}}$  po svojoj konstrukciji. Slično,

$$\begin{aligned} (v, p_n) &= \frac{\delta(-1)^{n+1}i}{2 \cosh^2 \tilde{\varphi}}(-1 - \cosh 2\tilde{\varphi}) + (f_0, p_n) = i\delta(-1)^n + (f_0, \partial^n p_0) \\ &= i\delta(-1)^n + i\delta(-1)^{n-1} = 0, \end{aligned}$$

a kako je  $v$  realno, konjugovanjem sledi i  $(v, \overline{p_n}) = 0$  što implicira da je  $v$  polje kolinearno sa  $\tilde{N}$ , odnosno  $v = \kappa\tilde{N}$ . Tada direktno sledi

$$(v, v) = \tanh^2 \tilde{\varphi}, \quad (167)$$

tako da jedino treba odrediti znak funkcije  $\kappa$ . Uočimo, prvo

$$p_0 \wedge w \wedge \overline{w} = -\varepsilon e^{\lambda_0} f_n \wedge \overline{f_n} \wedge N$$

gde je  $\lambda_0$  neka funkcija. Koristeći (163) sledi i

$$p_0 \wedge w \wedge \overline{w} \wedge p_1 \wedge \overline{p_1} \wedge \dots \wedge p_{n-1} \wedge \overline{p_{n-1}} = (-1)^n \varepsilon e^{\lambda_{n-1}} f_1 \wedge \overline{f_1} \wedge \dots \wedge f_n \wedge \overline{f_n} \wedge N,$$

a iz (162) dobijamo

$$\begin{aligned} p_0 \wedge p_1 \wedge \overline{p_1} \wedge \dots \wedge p_n \wedge \overline{p_n} \wedge v &= p_0 \wedge p_1 \wedge \overline{p_1} \wedge \dots \wedge p_n \wedge \overline{p_n} \wedge f_0 \\ &= (-1)^{n+1} \varepsilon e^{\lambda_n} f_0 \wedge f_1 \wedge \overline{f_1} \wedge \dots \wedge f_n \wedge \overline{f_n} \wedge N. \end{aligned}$$

Zato je znak funkcije  $\kappa$  ujedno i znak sledećeg izraza

$$\frac{\det(p_0, p_1, \overline{p_1}, \dots, p_n, \overline{p_n}, f_0)}{\det(p_0, p_1, \overline{p_1}, \dots, p_n, \overline{p_n}, \tilde{N})} = \frac{\det(p_0, p_1, \overline{p_1}, \dots, p_n, \overline{p_n}, f_0)}{\det(f_0, f_1, \overline{f_1}, \dots, f_n, \overline{f_n}, N)} = \varepsilon(-1)^{n+1}, \quad (168)$$

i

$$v = \varepsilon(-1)^{n+1} \tanh \tilde{\varphi} \tilde{N}.$$

Sada dobijamo

$$\begin{aligned} p_{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}}(p_{\varepsilon, \delta}(f_0)) &= \frac{\tilde{\delta}i}{2 \cosh^2 \tilde{\varphi}}(p_n - \overline{p_n}) + \tilde{\varepsilon} \tanh \tilde{\varphi} \tilde{N} \\ &= \tilde{\delta}\delta(-1)^n(f_0 - v) + \tilde{\varepsilon} \tanh \tilde{\varphi} \tilde{N} = \tilde{\delta}\delta(-1)^n f_0 + (\tilde{\delta}\delta\varepsilon + \tilde{\varepsilon}) \tanh \tilde{\varphi} \tilde{N}, \end{aligned}$$



pa i za parne  $n$ , kada je  $\tilde{\delta} = \delta = -1$  i  $\varepsilon + \tilde{\varepsilon} = 0$  kao i za neparne  $n$  kada važi  $\tilde{\delta} + \delta = 0$  i  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} = 1$  dobijamo

$$p_{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}}(p_{\varepsilon, \delta}(f_0)) = f_0,$$

odakle sledi da su (+) i (-) medjusobno inverzne konstrukcije. Takodje, za minimalnu imersion  $f_0 = f^0 : M \rightarrow S^{2n+1}$  čijih su prvih  $(n-2)$  krivinskih elipsi krugovi dobijamo niz minimalnih imersija  $\{f^p, p \in \mathbb{Z}\}$  gde je  $f^{p+1} = (f^p)^+$ ,  $f^{p-1} = (f^p)^-$ , koje zadovoljavaju isti uslov vezan za krivinske elipse.

## 6.4 Konstrukcija simetrične pokretne baze za $n = 2k$

U slučaju kada je  $n$  parno možemo konstruisati pokretnu bazu prilagodjenu konstruisanim pridruženim imersijama, koja će biti korisna za dalja izračunavanja. Naime, neka je  $n = 2k$  i neka je:

$$\mathcal{B} = \{f_0, f_1, \overline{f_1}, \dots, f_k, \overline{f_k}, \overline{p_k}, p_k, \dots, \overline{p_1}, p_1, p_0\}.$$

Tada matrica kompleksnog proširenja skalarnog proizvoda u ovom skupu vektorskih polja ima ledeći oblik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\omega_1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\omega_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & A & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\tilde{\omega}_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\tilde{\omega}_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e^{\omega_k} & 0 & (-1)^k i \\ e^{\omega_k} & 0 & (-1)^{k-1} i & 0 \\ 0 & (-1)^{k-1} i & 0 & e^{\tilde{\omega}_k} \\ (-1)^k i & 0 & e^{\tilde{\omega}_k} & 0 \end{pmatrix},$$

a njena determinanta je proizvod pozitivnog množioca i  $(e^{\omega_k + \tilde{\omega}_k} - 1)^2$ , odakle direktno sledi da su vektorska polja iz  $\mathcal{B}$  linearno nezavisna ako i samo ako je  $\omega_k + \tilde{\omega}_k \neq 0$ .

**Lema 31** *Nejednakost  $\omega_k + \tilde{\omega}_k \geq 0$  važi u svim tačkama površi  $M$  a stroga nejednakost na otvorenom, svuda gustom podskupu ove površi.*

**Dokaz:** Uočimo prvo da iz (161) i formule dobijene iz ove konjugovanjem sledi

$$e^{\tilde{\omega}_k} = (p_k, \overline{p_k}) = e^{-2\omega_k} e^{\omega_k} + \chi, \quad (169)$$

gde je  $\chi \geq 0$  što dalje implicira  $\omega_k + \tilde{\omega}_k \geq 0$ . Očigledno,  $\omega_k + \tilde{\omega}_k = 0$  važi ako i samo ako  $\chi = 0$  odnosno, ekvivalentno  $p_k = (-1)^k i e^{-\omega_k} \overline{f_k}$ . Pretpostavimo da ovo važi na otvorenom skupu u  $M$ . Tada diferenciranjem dobijamo

$$\begin{aligned} -e^{\tilde{\omega}_k - \omega_{k-1}} p_{k-1} &= \overline{\partial} p_k = (-1)^k i e^{-\omega_k} \overline{f_{k+1}}, \\ p_{k-1} &= (-1)^{k-1} i e^{\tilde{\omega}_{k-1}} \overline{f_{k+1}}, \\ \overline{p_{k-1}} &= (-1)^k i e^{\tilde{\omega}_{k-1}} f_{k+1}, \end{aligned} \quad (170)$$

što direktno daje  $\omega_{k+1} + \widetilde{\omega}_{k-1} = 0$ . Sada, (170) ima sledeći oblik  $p_{k-1} = (-1)^{k-1} i e^{-\omega_{k-1}} \overline{f_{k+1}}$ . Matematičkom indukcijom sledi da nastavljajući ovaj postupak dobijamo

$$\omega_{n-j} + \widetilde{\omega}_j = 0, \quad 1 \leq j \leq k-1,$$

a dalje i

$$\begin{aligned} p_1 &= -i e^{\widetilde{\omega}_1} \overline{f_{n-1}}, \\ \overline{p_1} &= i e^{\widetilde{\omega}_1} f_{n-1}, \\ \overline{\partial} p_1 &= -e^{\widetilde{\omega}_1} p_0 = -i e^{-\omega_{n-1}} \overline{f_n}, \end{aligned}$$

što implicira da su vektorska polja  $p_0$  i  $\overline{f_n}$  kolinearna, što je kontradikcija. ■

Ako sada označimo  $\gamma = (\partial f_k, p_k) = -(f_k, \partial p_k)$  tada su jednačine pokretne baze  $\mathcal{B}$  sledeće

$$\begin{aligned} \partial f_0 &= f_1, \\ \partial f_1 &= f_2 + \partial \omega_1 f_1, \\ &\vdots \\ \partial f_k &= \frac{e^{\omega_k + \widetilde{\omega}_k} \partial \omega_k + (-1)^k i \gamma}{e^{\omega_k + \widetilde{\omega}_k} - 1} f_k + (-1)^{k-1} i e^{-\widetilde{\omega}_{k-1}} \overline{p_{k-1}} + e^{\omega_k} \frac{\gamma + (-1)^{k-1} i \partial \omega_k}{e^{\omega_k + \widetilde{\omega}_k} - 1} \overline{p_k}, \\ \overline{\partial} f_k &= -e^{\omega_k - \omega_{k-1}} f_{k-1}, \\ \overline{\partial} p_k &= -e^{\widetilde{\omega}_k - \widetilde{\omega}_{k-1}} \overline{p_{k-1}}, \\ \partial p_k &= \frac{e^{\omega_k + \widetilde{\omega}_k} \partial \widetilde{\omega}_k - (-1)^k i \gamma}{e^{\omega_k + \widetilde{\omega}_k} - 1} p_k + (-1)^{k-1} i e^{-\omega_{k-1}} \overline{f_{k-1}} + e^{\widetilde{\omega}_k} \frac{-\gamma + (-1)^{k-1} i \partial \widetilde{\omega}_k}{e^{\omega_k + \widetilde{\omega}_k} - 1} \overline{f_k}, \\ &\vdots \\ \partial p_1 &= p_2 + \partial \widetilde{\omega}_1 p_1, \\ \partial p_0 &= p_1. \end{aligned}$$

Uslovi integrabilnosti su

$$\partial \overline{\partial} \omega_i = e^{\omega_{i+1} - \omega_i} - e^{\omega_i - \omega_{i-1}}, \quad i \leq k-1, \quad (171)$$

$$\partial \overline{\partial} \widetilde{\omega}_i = e^{\widetilde{\omega}_{i+1} - \widetilde{\omega}_i} - e^{\widetilde{\omega}_i - \widetilde{\omega}_{i-1}}, \quad i \leq k-1, \quad (172)$$

$$\partial \overline{\partial} \omega_k = e^{-\widetilde{\omega}_{k-1} - \omega_k} - e^{\omega_k - \omega_{k-1}} + \frac{|\gamma - i(-1)^k \partial \omega_k|^2}{e^{\omega_k + \widetilde{\omega}_k} - 1},$$

$$\partial \overline{\partial} \widetilde{\omega}_k = e^{-\omega_{k-1} - \widetilde{\omega}_k} - e^{\widetilde{\omega}_k - \widetilde{\omega}_{k-1}} + \frac{|\gamma + i(-1)^k \partial \widetilde{\omega}_k|^2}{e^{\omega_k + \widetilde{\omega}_k} - 1},$$

$$\overline{\partial} \gamma = -i(-1)^k e^{-\omega_{k-1} - \widetilde{\omega}_{k-1}} (e^{\omega_k + \widetilde{\omega}_{k-1}} - e^{\omega_{k-1} + \widetilde{\omega}_k}). \quad (173)$$

## 6.5 Nizovi sa medjusobno izometričnim elementima

Ispitaćemo, sada, da li i kada su neka dva elementa jednog niza minimalnih imersija u sferu  $S^{2n+1}$  izometrične. Prvo, uočimo da u slučaju da je u pitanju direktna izometrija ovaj niz je periodičan, u smislu da ako postoji direktna izometrija  $A$  takva da je  $f^k = A f^0$ , za neki indeks

$k$ , tada za proizvoljni indeks  $\ell$  važi  $f^{k+\ell} = Af^\ell$ . Ovo direktno sledi iz činjenice da izometrija slika harmonijski niz ponovo u harmonijski niz, a obzirom da je transformacija direktna, slika i preostalo normalno vektorsko polje ponovo u odgovarajuće normalno vektorsko polje. Ovde ćemo posvetiti pažnju indirektnim izometrijama. Posebno ćemo ispitati slučajeve kada je  $n$  parno, odnosno, neparno. Označimo sa  $f_0^q, q \in \mathbb{Z}$   $q$ -ti element niza.

Neka je prvo  $n = 2k$ . Tada

$$f_0^+ = -\frac{i}{2 \cosh^2 \varphi} (f_n - \overline{f_n}) + \tanh \varphi N,$$

$$f_0^- = -\frac{i}{2 \cosh^2 \varphi} (f_n - \overline{f_n}) - \tanh \varphi N.$$

**Teorema 21** *Neka je  $A$  indirektna izometrija prostora  $R^{2n+2}$  koja fiksira koordinatni početak, gde je  $n$  parno.*

$$(Af_0)^+ = A(f_0^-), \quad (Af_0)^- = A(f_0^+) \quad (174)$$

i za svako  $p \in \mathbb{Z}$  važi  $(Af_0)^p = A(f_0^{-p})$ .

**Dokaz:** Primetimo, prvo da važi  $A(f_i) = (Af)_i$  i  $A(\overline{f_i}) = \overline{(Af)_i}$  za  $1 \leq i \leq n$ . Kako je  $A$  indirektna izometrija važi  $\det(Af_0, Af_1, \dots, AN) = -\det(f_0, f_1, \dots, N) = \det(f_0, f_1, \dots, -N)$  što implicira da je odgovarajuće normalno vektorsko polje površi  $Af_0$  zapravo vektorsko polje  $-AN$ . Sada primenjujući izometriju  $A$  na  $(+)$  i  $(-)$  konstrukciju dobijamo tvrdjenje. ■

**Primedba** Iz ove teoreme sledi da ukoliko postoje dva elementa niza izometrična putem indirektna izometrije  $A$ , tada postoji element niza  $f^q$  takav da je  $Af^{q-1} = f^{q+1}$  ili  $Af^q = f^{q+1}$ . Karakterizovaćemo ova dva slučaja i bez umanjavanja opštosti možemo smatrati da je  $q = 0$ , odnosno  $f_0^q = f_0$ .

**Teorema 22** *Ako je  $n$  parno tada postoji indirektna izometrija  $A$  koja fiksira koordinatni početak takva da važi  $Af_0^- = f_0^+$  ako i samo ako je  $\alpha = 0$  odnosno, ekvivalentno ako je  $f_0$  sadržana u sferi manje dimenzije koja je totalno geodezijski smeštena u sferu  $S^{2n+1}$ .*

**Dokaz:** Očigledno iz definicije sledi da je  $\alpha = 0$  je ekvivalentno činjenici da je odgovarajuće normalno vektorsko polje  $N$  konstantno, odnosno da je  $f_0$  sadržana u sferi manje dimenzije koja je totalno geodezijski smeštena u sferu  $S^{2n+1}$ . Pretpostavimo sada da važi  $Af_0^- = f_0^+$ . Tada je  $Af_0 = f_0$  a takodje  $N$  je sopstveni vektor preslikavanja  $A$  koji odgovara sopstvenoj vrednosti  $-1$  što implicira da  $f_0$  pripada hiperravni ortogonalnoj na  $N$  kroz koordinatni početak. Obrnuto, ako  $f_0$  pripada hiperravni kroz koordinatni početak, neka je  $A$  refleksija u odnosu na hiperravan koja sadrži  $f_0$ . Tada primenjujući  $(+)$  i  $(-)$  konstrukciju dobijamo uopšteniji rezultat  $A(f_0^{-p}) = f_0^p$  za svako  $p$ . ■

**Teorema 23** *Ako je  $n$  parno sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1) *Postoji indirektna izometrija  $A$  takva da je  $A(f_0) = f_0^+ = p_0$ ,*

2)  *$\gamma = 0$  i  $\omega_k = \overline{\omega_k}$ ,*

*i ako je ovo slučaj tada važi i  $\omega_i = \overline{\omega_i}, 1 \leq i \leq k-1$ .*

**Dokaz:** Ako je  $A(f_0) = f_0^+ = p_0$  tada važi  $Ap_0 = (Af_0)^- = f_0$  a dalje diferenciranjem dobijamo  $A\partial f_i = \partial p_i$  i  $Ap_i = \overline{f_i}$ . Sada,  $\gamma = (\partial f_k, p_k) = (A\partial f_k, Ap_k) = -\gamma$  pa je  $\gamma = 0$ . Slično  $\tilde{\omega}_i = \ln(p_i, \overline{p_i}) = \ln(Ap_i, \overline{Ap_i}) = \omega_i$  za  $i \leq k$ . Obrnuto, ako važi iskaz 2 iz (173) dobijamo  $\omega_{k-1} = \widetilde{\omega_{k-1}}$ , a dalje, (171) i (172) impliciraju  $\omega_i = \tilde{\omega}_i$ ,  $1 \leq i \leq k-2$ . Tada, koristeći pokretnu bazu  $\mathcal{B}$  u tački  $z$  definišimo operator  $A(z)$  na sledeći način  $A(z)(f_i) = p_i, A(z)(\overline{f_i}) = \overline{p_i}, A(z)(p_i) = f_i, A(z)(\overline{p_i}) = \overline{f_i}, 0 \leq i \leq k$ . Uočimo da je  $A(z)$  izometrija,  $A^2(z) = Id$  i da je  $\det A(z) = -1$ . Takodje,  $A'(z)f_0 + A(z)\partial f_0 = \partial p_0$  odakle sledi  $A'(z)(f_0) = 0$ . Na sličan način dobijamo da  $A'(z)$  slika u nulu svaki vektor baze  $\mathcal{B}$ . zato je  $A$  indirektna izometrija prostora  $R^{2n+2}$  koja zadovoljava uslove teoreme. ■

Sada, neka je  $n = 2k + 1$ . Tada je

$$f_0^+ = -\frac{i}{2 \cosh^2 \varphi} (f_n - \overline{f_n}) + \tanh \varphi N,$$

$$f_0^- = \frac{i}{2 \cosh^2 \varphi} (f_n - \overline{f_n}) + \tanh \varphi N,$$

pa se sledeća teorema dobija na sličan način.

**Teorema 24** *Neka je  $n$  neparno i  $A$  indirektna izometrija prostora  $R^{2n+2}$  koja fiksira koordinatni početak. Tada*

$$(Af_0)^+ = -A(f_0^-), \quad (Af_0)^- = -A(f_0^+). \quad (175)$$

**Primedba** Obzirom da je  $-A$  takodje indirektna izometrija, dolazimo do sledećeg zaključka: ukoliko su neka dva elementa niza izometrična putem indirektna izometrije  $A$  tada postoji element  $f_0^q$  takav da važi  $Af_0^q = \pm f_0^{q+1}$ , ili  $Af_0^q = \pm f_0^q$ . Takodje, pretpostavićemo da je  $q = 0$  i  $f_0^q = f_0$ .

**Teorema 25** *Ako je  $n$  neparno, tada su sledeći iskazi ekvivalentni*

- 1)  $\alpha = 0$ ,
- 2)  $f_0$  je sadržana u sferi koja je totalno geodezijski smeštena u  $S^{2n+1}$ ,
- 3) postoji indirektna izometrija  $A$  koja fiksira koordinatni početak takva da je  $Af_0^- = -f_0^+$ .

**Dokaz:** Iskazi 1 i 2 su očigledno ekvivalentni kao i ranije. Ako pretpostavimo da je  $Af_0^- = -f_0^+$  sledi  $Af_0 = f_0$  i  $f_0$  pripada hiperravni ortogonalnoj na  $N$ . Obrnuti smer teoreme dokazuje se direktno. ■

Uočimo da u ovom slučaju primenom (+) i (-) konstrukcije dobijamo  $A(f_0^{-p}) = (-1)^p f_0^p$  za svako  $p$ .

**Teorema 26** *Ne postoje indirektna izometrije prostora  $R^{2n+2}$ , kada je  $n$  neparno, koje fiksiraju koordinatni početak za koje je  $A(f_0^+) = f_0$ .*

**Dokaz:** Pretpostavimo da takva izometrija ipak postoji i označimo je sa  $A$ . Primenujući (+) i (-) konstrukciju dobijamo  $Af_0 = -f_0^+$  i  $A^2 f_0 = -f_0$ . Tada diferenciranjem dobijamo  $A^2 f_i = -f_i, i \leq n$  a kako je  $A^2$  direktna izometrija sledi  $A^2 N = -N$ , što dalje implicira  $A^2 = -Id$  a dalje i  $A^{-1} = -A = A^T$ . Obzirom da za koso simetrične matrice važi  $x^T A x = 0$  za proizvoljni realni

vektor  $x$ , sledi da su  $Ax$  i  $x$  ortogonalni vektori za proizvoljno  $x$ . To znači da možemo odabrati bazu  $\{x_1, Ax_1, \dots, x_{n+1}, Ax_{n+1}\}$  vektorskog prostora  $R^{2n+1}$  u kojoj  $A$  ima sledeću matricu

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sin \alpha_{n+1} \\ 0 & 0 & & \sin \alpha_{n+1} & 0 \end{pmatrix},$$

gde je  $\alpha_i = \pm \frac{\pi}{2}$ , što je kontradikcija sa činjenicom  $\det A = -1$ . ■

## Lista imena

DŽ. Bolton, John Bolton  
R. Brajant, Robert Bryant  
B. J. Čen, Bang Yen Chen  
M. Djorić, Mirjana Djorić  
J. Erbaher, Joseph Erbacher  
K. F. Gaus, Carl Friedrih Gauss  
A. Grej, Alfred Gray  
H. Hašimoto, Hideya Hashimoto  
F. Hausdorf, Felix Hausdorff  
A. Kejli, Arthur Cayley  
E. Keler, Erich Kähler  
D. Kodaci, Delfino Codazzi  
T. Levi-Čivita, Tullio Levi-Civita  
S. Li, Sophus Lie  
K. Mašimo, Katsuya Mashimo  
L. Ojler, Leonhard Euler  
G. F. Riman, Georg Friedrich Riemann  
G. Riči, Gregorio Ricci-Curbastro  
T. Sasahara, Toru Sasahara  
K. Sekigava, Kouei Sekigawa  
I. Šur, Issai Schur  
J. Vajngarten, Julius Weingarten  
L. Vranken, Luc Vrancken  
L. M. Vudvard, Lyndon M. Woodward

# Literatura

- [1] M. Antić, *CR submanifolds of the sphere  $S^6$  and Chen's equality*, *Proceedings of the Symposium on the differential geometry of submanifolds*, 2007, str. 17–24, ISBN: 978-1-8479-9016-7, [lulu.com/content/1156986](http://lulu.com/content/1156986)
- [2] M. Antić, 4-dimensional minimal CR submanifolds of the sphere  $S^6$  contained in a totally geodesic sphere  $S^5$ , *prihvaćeno za štampu u Journal of Geometry and Physics*, DOI: [10.1016/j.geomphys.2009.09.005](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2009.09.005).
- [3] M. Antić, A note on four-dimensional CR submanifolds of the sphere  $S^6$  and Chen's equality, *na recenziji*.
- [4] M. Antić, L. Vrancken, 3-dimensional minimal CR submanifolds of the sphere  $S^6$  contained in a hyperplane, *na recenziji*.
- [5] M. Antić, L. Vrancken, Sequences of minimal surfaces in  $S^{2n+1}$ , *prihvaćeno za štampu u Israel Journal of Mathematics*
- [6] M. Antić, M. Djorić, L. Vrancken, 4-dimensional minimal CR submanifolds of the sphere  $S^6$  satisfying Chen's equality, *Differential Geometry and Its Applications*, Elsevier, 25, (2007), str. 290–298.
- [7] A. Bejancu, Geometry of CR-submanifolds, *D. Reidel Publ. Dordrecht, Holland*, 1986.
- [8] D. Blair, Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, *Birkhauser, Boston*, 2002.
- [9] J. Bolton, F. Pedit, L.M. Woodward, Minimal surfaces and the affine Toda field model, *J. Reine angew. Math.*, 459(1995), str. 119–150.
- [10] J. Bolton, L. Vrancken, Transforms for minimal surfaces in the 5-sphere, *to appear in Differential Geometry and Its Applications*
- [11] J. Bolton, L. Vrancken, L. M. Woodward, On almost complex curves in the nearly Kaehler 6-sphere, *Quart. J. Math. Oxford Ser (2)*, 45, (1994), str. 407–427.
- [12] J. Bolton, L.M. Woodward, Congruence theorems for harmonic maps from a Riemannian surface into  $CP^n$  and  $S^n$ , *J. Lond. Math. Soc.*, 45(1992), str.363–376.
- [13] R. Bryant, Submanifolds and special structures on the octonians, *J. Differential Geom.*, 20, (1982), str. 185–232.
- [14] E. Calabi, H. Gluck, What are the best almost complex structures on the 6-sphere in Differential Geometry: geometry in mathematical physics and related topics, *Amer. Math. Soc*, (1993), str. 99–106.
- [15] B. Y. Chen, Geometry of submanifolds, *Pure Appl. Math.* 22, Marcel Dekker, New York, 1973.

- [16] B. Y. Chen, A Riemannian invariant and its applications to submanifold theory, *Results in Math.*, 27, (1995), str. 687–696.
- [17] B. Y. Chen, Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds, *Archiv. Math. (Basel)*, 60, (1993), str. 568–578.
- [18] B. Y. Chen, Riemannian submanifolds, *Handbook of Differential Geometry*, vol. I, str. 187–418.
- [19] B. Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, Characterizing a class of totally real submanifolds of  $S^6(1)$  by their sectional curvatures, *Tôhoku Math. J.*, 47, (1995), str. 185–198.
- [20] B. Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, Two equivariant totally real immersions into the nearly Kaehler 6-sphere and their characterizations, *Japanese J. Math.*, 21, No1, (1995), str. 207–221.
- [21] M. Dajczer, L. A. Florit, On Chen's basic equality, *Illinois J. Math.*, 42, (1998), str. 97–106.
- [22] F. Dillen, L. Vrancken, Totally real submanifolds in  $S^6(1)$  satisfying Chen's equality, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348, (1996), str. 1633–1646.
- [23] F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, Classification of totally real 3-dimensional submanifolds of  $S^6(1)$  with  $K \geq 1/16$ , *J. Math. Soc. Japan*, 42, (1990), str. 565–584.
- [24] M. Djorić, L. Vrancken, Three dimensional minimal CR submanifolds in  $S^6$  satisfying Chen's equality, *Journal of Geometry and Physics*, 56, (2006), str. 2279–2288.
- [25] M. Djorić, L. Vrancken, Geometric conditions on three dimensional CR submanifolds in  $S^6$ , prihvaćeno za štampu u *Advances in Geometry*
- [26] N. Ejiri, Totally real submanifolds in a 6-sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 83, No4, (1981), str. 759–763.
- [27] N. Ejiri, Equivariant minimal immersions of  $S^2$  into  $S^{2m}(1)$ , *Trans. Amer. Math. Soc.*, 297, (1986), str. 105–124.
- [28] A. Gray, Almost complex submanifolds of the six-sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 20, (1969), str. 277–279.
- [29] R. Harvey, H. B. Lawson, Calibrated Geometries *Acta Math.*, 148, (1982), str. 47–157.
- [30] H. Hashimoto, K. Mashimo, K. Sekigawa, On 4-dimensional CR-submanifolds of a 6-dimensional sphere *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 34, (2002), Minimal Surfaces, Geometric Analysis and Symplectic Geometry, str. 143–154.
- [31] K. Mashimo, Homogeneous totally real submanifolds of  $S^6$ , *Tskuba J. Math.*, 9, (1985), str. 185–202.
- [32] T. Sasahara, Three-dimensional CR submanifolds in the nearly Kaehler six-sphere satisfying B. Y. Chen's basic equality, *Tamkang Journal of Mathematics*, 31, (2000), str. 289–296.
- [33] K. Sekigawa, Almost complex submanifolds of a 6-dimensional sphere, *Kôdai Math. J.*, 6, (1983), str. 174–185.
- [34] K. Sekigawa, Some CR-submanifolds in a 6-dimensional sphere *Tensor, N. S.*, 41, (1984), str. 13–20.
- [35] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, *Publish or Perish, USA*
- [36] R. M. W. Wood, Framing the exceptional Lie group  $G_2$ , *Topology*, 15, (1976), str. 303–320.



Bibliothèque Universitaire de Valenciennes



00900635