



HAL
open science

Variétés de Richardson : multiplicités et désingularisation

Michaël Balan

► **To cite this version:**

Michaël Balan. Variétés de Richardson : multiplicités et désingularisation. Mathématiques [math]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2011. Français. NNT : 2011VALE0027 . tel-03416030

HAL Id: tel-03416030

<https://uphf.hal.science/tel-03416030v1>

Submitted on 5 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 11/24

THÈSE

présentée à

**L'UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES ET DU
HAINAUT-CAMBRÉSIS
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR
UNIVERSITÉ LILLE NORD-DE-FRANCE - 072**

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

Spécialité : Mathématiques fondamentales

par

Michaël BALAN

**Variétés de Richardson : multiplicités et
désingularisation**

Soutenue le 24 novembre 2011 devant le jury composé de :

Michel BRION	(Rapporteur)
Aziz EL KACIMI ALAOUI	(Directeur de thèse)
Stéphane GAUSSENT	(Rapporteur)
Bernard LECLERC	(Examineur)
Christian OHN	(Co-encadrant de thèse)
Nicolas RESSAYRE	(Examineur)

Variétés de Richardson : multiplicités et désingularisation

Une variété de Richardson est l'intersection d'une variété de Schubert directe avec une variété de Schubert opposée dans une variété de drapeaux. Dans cette thèse, on s'intéresse aux singularités des variétés de Richardson. Un résultat de Kreiman et Lakshmibai donne la multiplicité d'un point T -fixe sur une variété de Richardson. Dans le chapitre I, on prouve qu'en caractéristique nulle, leur formule est valable en un point quelconque, pourvu que la variété de drapeaux soit cominusculaire.

On considère ensuite une désingularisation d'une variété de Richardson de la variété des drapeaux complets de type A_n , obtenue comme sous-variété d'une variété de Bott-Samelson. On dispose d'une famille naturelle de fibrés en droites sur les variétés de Bott-Samelson, et leurs espaces de sections ont été étudiés par Lakshmibai et Magyar, qui en donnent une base indexée par des objets combinatoires, appelés tableaux standard. On prouve dans le chapitre II que cette base est compatible avec la désingularisation de la variété de Richardson lorsque le fibré en droites est très ample. On obtient de cette façon une base indexée par des tableaux particuliers, appelés w_0 -standard.

Mots-clés : variétés de Richardson, variétés de Schubert, variétés de drapeaux, cominusculaire, variétés de Bott-Samelson, multiplicité d'un point singulier, désingularisation, théorie des monômes standard.

Richardson varieties: multiplicities and desingularization

A Richardson variety is the intersection of a direct Schubert variety with an opposite Schubert variety inside a flag variety. In this thesis, we are interested in the singularities of Richardson varieties. A result of Kreiman and Lakshmibai gives the multiplicity at a T -fixed point on a Richardson variety. In chapter I, we prove that in characteristic zero, their formula is true for an arbitrary point, provided the flag variety is cominusculaire.

Next, we consider a desingularization of a Richardson variety in the full flag variety of type A_n , obtained as a subvariety of a Bott-Samelson variety. There is a natural family of line bundles on Bott-Samelson varieties, and their spaces of sections have been studied by Lakshmibai and Magyar, who give a basis of these spaces indexed by combinatorial objects called standard tableaux. We prove in chapter II that this basis is compatible with the desingularization of the Richardson variety when the line bundle is very ample. In this way, we obtain a basis indexed by particular tableaux, the so-called w_0 -standard ones.

Key words: Richardson varieties, Schubert varieties, flag varieties, cominusculaire, Bott-Samelson varieties, multiplicity of a singular point, desingularization, Standard Monomial Theory.

Classification AMS : 14M15 14B05 14L30 05E10 14M17 20G05

Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications (LAMAV)
Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Le Mont-Houy 59313 Valenciennes Cedex 9

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Christian OHN pour m'avoir guidé dans mes premiers pas de chercheur, pour sa patience et sa disponibilité. Le sujet qu'il m'a proposé, très enrichissant, m'a permis de découvrir de belles mathématiques. J'ai beaucoup appris à son contact, en mathématiques bien entendu, mais également en ce qui concerne l'enseignement. Je lui dois énormément, et ne l'en remercierai jamais assez.

Je remercie également Aziz EL KACIMI ALAOUI pour avoir accepté d'encadrer cette thèse. Il m'a communiqué sa passion pour la Géométrie au cours des années que j'ai passées à l'université de Valenciennes.

Ma gratitude va à Michel BRION et Stéphane GAUSSENT qui ont accepté la lourde tâche de rapporter sur ma thèse. Le présent travail a ainsi pu bénéficier de leurs remarques judicieuses.

Je remercie Bernard LECLERC et Nicolas RESSAYRE de me faire l'honneur de participer au jury de thèse, et de s'être intéressés de près à mon travail.

Merci à l'ensemble des membres du laboratoire pour m'avoir accueilli comme un collègue, en particulier Olivier BIREMBAUX, avec qui j'ai eu de nombreuses discussions concernant l'enseignement, et à Nabila DAIFI pour son aide administrative.

Enfin, je remercie ma famille et ma compagne Agnès LE ROUX pour m'avoir soutenu dans mes études et en particulier durant ces trois années de thèse.

Table des matières

Introduction	3
1. Généralités	4
2. Singularités des variétés de Schubert	9
3. Multiplicité d'un point sur une variété de Schubert	17
4. Théorie des monômes standard	22
5. Désingularisation des variétés de Schubert	24
6. Variétés de Richardson	24
7. Résultats de la thèse	27
Chapter I. Multiplicity on a Richardson variety in a cominuscle G/P	31
1. Local coordinates	31
2. Central projection and proof of Theorem 0.7.1	35
3. \mathbf{C} -action on G/P	36
4. Proof of Proposition I.2.1	37
5. Proof of Proposition I.4.5	39
Appendix: Singularities of Schubert varieties in $SO(2n+1)/P_1$	40
Chapter II. Standard Monomial Theory for desingularized Richardson varieties in the flag variety $GL(n)/B$	43
1. Desingularized Richardson varieties	43
2. Background on SMT for Bott-Samelson varieties	47
3. Linear Independence	48
4. Standard monomials that do not vanish on $\Gamma_{\mathbf{i}}$ are w_0 -standard	51
5. Basis of $H^0(\Gamma_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i},\mathbf{m}})$	58
Bibliographie	69

Introduction

On étudie dans cette thèse les singularités des variétés de Richardson. Une variété de Richardson est l'intersection d'une variété de Schubert directe et d'une variété de Schubert opposée dans une variété de drapeaux (toutes ces notions seront précisées par la suite). Les variétés de Richardson doivent leur nom aux travaux de Richardson [54] sur les classes doubles de groupes algébriques, mais apparaissent déjà dans [29, 59] pour l'étude de la structure multiplicative (donnée par le cup-produit) de l'anneau de cohomologie singulière de la grassmannienne. En effet, les cellules de Schubert fournissent une décomposition cellulaire de la grassmannienne, de sorte que les classes fondamentales des variétés de Schubert constituent une base additive de l'anneau de cohomologie de la grassmannienne. La structure multiplicative est alors entièrement connue dès lors que l'on sait multiplier deux classes de variétés de Schubert. Or on peut modifier l'une des deux variétés de Schubert en une variété de Schubert opposée qui a la même classe fondamentale. Le cup-produit des deux classes fondamentales est alors la classe fondamentale d'une variété de Richardson.

Les cellules de Richardson apparaissent explicitement dans [17]. Ces dernières fournissent une décomposition de la grassmannienne plus fine que la décomposition de Bruhat classique. Les variétés de Richardson apparaissent dans des domaines aussi variés que la K -théorie équivariante [40], la positivité dans les groupes de Grothendieck [8], la théorie des monômes standard [10], et la géométrie de Poisson [21]. Récemment, Knutson, Lam et Speyer ([33]) ont étudié une décomposition de la grassmannienne plus fine encore, donnée par les variétés positroïdales ouvertes. Une variété positroïdale peut être définie comme la projection d'une variété de Richardson de la variété des drapeaux complets dans la grassmannienne. Les variétés positroïdales ont par la suite été généralisées d'une part par Knutson, Lam et Speyer dans [34], et d'autre part par Billey et Coskun dans [2], où ils s'intéressent notamment à leurs singularités.

Bien que le lieu singulier d'une variété de Richardson soit connu, il n'en est pas de même pour la multiplicité d'un point. Un résultat de Kreiman et Lakshmibai [38] établit la multiplicité d'un *point T -fixe* sur une variété de Richardson $X_w^v \subset G/P$ lorsque le sous-groupe parabolique P est minuscule. Dans le chapitre I, on prouve qu'en caractéristique nulle, leur formule est encore vraie pour *tout point* de X_w^v lorsque P est cominuscule.

Un autre aspect de l'étude des singularités d'une variété X consiste à en construire une désingularisation, *i.e.* une variété irréductible lisse Z munie d'un

morphisme birationnel $Z \rightarrow X$. Pour les variétés de Schubert, on connaît des désingularisations : elles sont données par les variétés de Bott-Samelson ([6, 16, 22, 13, 20]). Pour ces dernières, on dispose d'une famille naturelle de fibrés en droites $(L_{\mathbf{m}})$, $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^r$, où $r = \dim Z$. En type A, Lakshmibai et Magyar [42] ont donné une base de l'espace des sections de ces fibrés, paramétrée par une famille de tableaux. Ce résultat a ensuite été généralisé par Lakshmibai, Littelmann et Magyar [41] en type quelconque. En ce qui concerne les variétés de Richardson dans la variété des drapeaux complets de type A, on considère dans le chapitre II une désingularisation Γ obtenue comme sous-variété d'une variété de Bott-Samelson Z . On prouve que si $L_{\mathbf{m}}$ est très ample, alors la base de $H^0(Z, L_{\mathbf{m}})$ donnée par Lakshmibai et Magyar est compatible avec Γ , ce qui signifie que les éléments de cette base qui restent non nuls quand on les restreint à Γ forment encore une base de $H^0(\Gamma, L_{\mathbf{m}})$. Ce résultat est vrai en caractéristique quelconque.

Nous donnerons au §7 de cette introduction des énoncés précis de ces deux résultats, ainsi que les méthodes utilisées. Afin de les situer dans un contexte plus large, nous rassemblons dans les §§1–6 certains résultats connus concernant les singularités des variétés de Schubert et des variétés de Richardson.

1. Généralités

Historiquement, les variétés de Schubert ont été introduites pour résoudre des problèmes de géométrie énumérative. Par exemple, étant données quatre droites de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ en position générale, on cherche le nombre de droites qui les rencontrent. Ce type de problèmes énumératifs est aujourd'hui connu sous le nom de « problèmes de Schubert » ([57]). En 1874, Schubert développa un principe de continuité, appelé « principe de conservation du nombre ». Les méthodes de géométrie énumérative ainsi développées étaient intuitives, ce qui amena Hilbert à formuler son quinzième problème :

« Établissement rigoureux de la Géométrie énumérative de Schubert »

Détermination rigoureuse des nombres de la géométrie énumérative, et cela en fixant d'une manière plus précise les limites de leur validité, et, en particulier, des nombres que Schubert a trouvés en s'appuyant sur le principe de son calcul énumératif, dit de la position spéciale ou de la conservation du nombre.

La résolution de ce problème a nécessité l'utilisation d'outils tels que l'homologie singulière, la théorie algébrique de l'intersection, et a conduit à la définition moderne des variétés de Schubert (le problème de Schubert consiste alors à étudier l'intersection de quatre variétés de Schubert dans la grassmannienne $G_{2,4}$). La géométrie des variétés de Schubert est aussi utilisée en Physique ([35]), par exemple en théorie de l'information quantique ([15]).

Dans toute la suite, on travaille sur un corps algébriquement clos k . La grassmannienne $G_{d,n}$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de k^n de dimension d . On peut réaliser $G_{d,n}$ comme une variété algébrique projective via le plongement

de Plücker :

$$p : \begin{array}{ccc} G_{d,n} & \rightarrow & \mathbf{P}(\Lambda^d k^n) \\ \langle v_1, \dots, v_d \rangle & \mapsto & [v_1 \wedge \dots \wedge v_d], \end{array}$$

où $[v_1 \wedge \dots \wedge v_d]$ représente la droite engendrée par $v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ dans l'espace des puissances extérieures $\Lambda^d k^n$.

On pose

$$I_{d,n} = \{\mathbf{i} = i_1 \dots i_d \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq n\}.$$

Les éléments de $I_{d,n}$ sont appelés *multi-indices* (ou *colonnes* dans le chapitre II). Soit (e_1, \dots, e_n) une base de k^n . Pour $\mathbf{i} = i_1 \dots i_d \in I_{d,n}$, on pose $e_{\mathbf{i}} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$. La famille $(e_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I_{d,n}}$ est une base de $\Lambda^d k^n$, et on note $(p_{\mathbf{i}})$ sa base duale. Les $p_{\mathbf{i}}$ sont appelés *coordonnées de Plücker*. Si l'on écrit les vecteurs v_1, \dots, v_d en colonne dans la base (e_1, \dots, e_n) , on obtient une matrice M et le scalaire $p_{\mathbf{i}}(v_1 \wedge \dots \wedge v_d)$ est alors le déterminant de la matrice obtenue à partir de M en ne conservant que les lignes i_1, \dots, i_d .

L'ensemble $p(G_{d,n})$ est caractérisé dans $\mathbf{P}(\Lambda^d k^n)$ par un système d'équations quadratiques, appelées *relations de Plücker*, que voici :

$$\sum_{\lambda=1}^{d+1} (-1)^\lambda p_{i_1 \dots i_{d-1} j_\lambda} p_{j_1 \dots \widehat{j}_\lambda \dots j_{d+1}} = 0,$$

où i_1, \dots, i_{d-1} et j_1, \dots, j_{d+1} parcourent $\{1, \dots, n\}$. La notation $j_1 \dots \widehat{j}_\lambda \dots j_{d+1}$ signifie que l'on supprime j_λ dans $j_1 \dots j_{d+1}$.

Un *drapeau* F est la donnée d'une suite croissante d'espaces vectoriels F^i , *i.e.*

$$F = (0 \subsetneq F^1 \subsetneq F^2 \subsetneq \dots \subsetneq F^p = k^n).$$

Le drapeau F est *complet* si $p = n$. L'ensemble de tous les drapeaux complets de k^n est noté $F\ell(n)$.

Fixons un drapeau complet $F = (0 \subset F^1 \subset \dots \subset F^{n-1} \subset F^n = \mathbf{C}^n)$. On définit alors les *cellules de Schubert* de la façon suivante :

$$C_{\mathbf{i}} = \{V \in G_{d,n} \mid \forall 1 \leq j \leq d, \dim(V \cap F^k) = j \text{ si } i_j \leq k < i_{j+1}\}$$

et les *variétés de Schubert*

$$X_{\mathbf{i}} = \overline{C_{\mathbf{i}}},$$

l'adhérence étant prise au sens de la topologie de Zariski dans $G_{d,n}$. On peut définir un ordre partiel sur $I_{d,n}$, appelé *ordre de Bruhat*, de la façon suivante :

$$\mathbf{j} = j_1 \dots j_d \leq \mathbf{i} = i_1 \dots i_d \iff j_1 \leq i_1, j_2 \leq i_2, \dots, j_d \leq i_d.$$

La géométrie des variétés de Schubert est étroitement liée à la combinatoire de $I_{d,n}$. On dispose par exemple du théorème suivant.

THÉORÈME 0.1.1.

- (1) $X_{\mathbf{j}} \subset X_{\mathbf{i}} \iff \mathbf{j} \leq \mathbf{i}$.
- (2) $X_{\mathbf{i}} = \coprod_{\mathbf{j} \leq \mathbf{i}} C_{\mathbf{j}}$ (*Décomposition de Bruhat*).

La dimension d'une variété de Schubert $X_{\mathbf{i}}$ est donnée par la formule

$$\dim(X_{\mathbf{i}}) = \sum_{t=1}^d i_t - t.$$

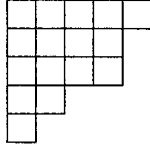
En particulier, puisque $G_{d,n}$ est la variété de Schubert $X_{n-d+1\dots n}$, on obtient $\dim(G_{d,n}) = d(n-d)$. On peut également donner la codimension de $X_{\mathbf{i}}$ dans $G_{d,n}$:

$$\text{codim}(X_{\mathbf{i}}) = \sum_{t=1}^d (n-d+t-i_t).$$

On pose alors $\lambda_t = n-d+t-i_t$. La suite $\lambda = (\lambda_t)_t$ est décroissante au sens large. On appelle une telle suite *partition*, et on la représente souvent à l'aide d'un *diagramme de Young* D_λ . Ce diagramme est constitué de d lignes, la première ligne contenant λ_1 cases, la seconde λ_2 , et ainsi de suite. En d'autres termes,

$$D_\lambda = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Par exemple, le diagramme de Young associé à la partition $(5, 4, 4, 2, 1)$ est



La codimension de $X_{\mathbf{i}}$ est alors le nombre de cases du diagramme de Young correspondant.

Cette description en termes de diagrammes de Young interviendra de manière essentielle dans la recherche des singularités de $X_{\mathbf{i}}$ (voir Section 2).

La théorie des variétés de Schubert a ensuite été généralisée dans le cadre d'espaces homogènes d'un groupe algébrique semi-simple quelconque, que l'on suppose de plus simplement connexe¹. On considère alors dans G un *sous-groupe de Borel* B , c'est-à-dire un sous-groupe fermé, connexe, résoluble, maximal pour ces propriétés, ainsi qu'un *tore* (*i.e.* un groupe isomorphe à un produit de copies de k^*) maximal $T \subset B$. Soit $W = N_G(T)/T$, où $N_G(T)$ est le normalisateur de T dans G . On note $X(T)$ le groupe des caractères de T , *i.e.* le groupe dont les éléments sont les morphismes de groupes algébriques $T \rightarrow k^*$. Le groupe W agit sur $X(T)$ de la façon suivante. Soient $w \in W$, $n_w \in N_G(T)$ un représentant de w , et $\lambda \in X(T)$. On pose alors $w.\lambda : t \in T \mapsto \lambda(n_w^{-1} t n_w)$. On considère le \mathbf{R} -espace vectoriel $X = X(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ W -invariant.

Soit V une représentation de dimension finie de G . Sous l'action du tore T , on obtient une décomposition

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X(T)} V_\alpha$$

où

$$V_\alpha = \{v \in V \mid t.v = \alpha(t)v \quad \forall t \in T\}.$$

Lorsque $V_\alpha \neq 0$, le caractère α est appelé *poide* de la représentation V , et les éléments de V_α sont appelés *vecteurs de poide* α . Les poide non nuls de la représentation adjointe de G sur son algèbre de Lie \mathfrak{g} sont appelés *racines*, et forment un *système (abstrait) de racines* R de X , *i.e.* satisfont les propriétés suivantes :

- R est fini, engendre X , et ne contient pas 0.

¹Pour la géométrie de G/P , on peut toujours supposer G simplement connexe. Mais il est parfois utile de ne pas travailler avec cette hypothèse. Par exemple, on suppose G adjoint dans le chapitre I.

- Pour tout $\alpha \in R$, les seuls multiples de α dans R sont α et $-\alpha$.
- Soit s_α la réflexion d'hyperplan l'orthogonal de α , *i.e.*

$$s_\alpha(x) = x - \frac{2\langle x, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha.$$

Pour tout $\alpha \in R$, R est stable par s_α .

- Si α et β sont deux racines, alors $s_\alpha(\beta) - \beta$ est un multiple entier de α .

Il est utile de poser $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. C'est la *coracine* associée à α . La dernière condition s'écrit alors

$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbf{Z}.$$

On peut retrouver tous les poids à partir de R (lorsque G est simplement connexe). Un *poids abstrait* ϖ est un vecteur de X satisfaisant, pour toute racine α , $\langle \varpi, \alpha^\vee \rangle \in \mathbf{Z}$.

Si G est simplement connexe, tout poids abstrait est le poids d'une représentation de dimension finie.

La donnée de B définit un système de *racines positives* : c'est l'ensemble des racines de B , *i.e.* les poids de la représentation adjointe de B . C'est un sous-ensemble de R , que l'on note R^+ . De plus, il existe des racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ telles que toute racine positive s'exprime comme combinaison linéaire des α_i à coefficients entiers positifs. Les autres racines de R s'expriment quant à elles comme combinaison linéaire à coefficients entiers négatifs ; elles sont appelées *racines négatives*. Les racines α_i sont dites *simples*, et $n = \dim T$ est le *rang* de G . On note S l'ensemble des racines simples. Une \mathbf{Z} -base du réseau des poids abstraits est alors donnée par les poids fondamentaux : le i -ème poids fondamental ϖ_i est défini par

$$\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On démontre que W est engendré par les réflexions simples, *i.e.* les réflexions s_α pour α racine simple.

Étant donnée une racine β , il existe un morphisme de groupes algébriques $\theta_\beta : k \rightarrow G$ satisfaisant

$$\forall t \in T, \forall x \in k, \quad t\theta_\beta(x)t^{-1} = \theta_\beta(\beta(t)x),$$

et θ_β est unique à reparamétrisation près. L'image de k par θ_β est notée U_β , et appelée *sous-groupe unipotent associé* à β .

Enfin, on considère P un sous-groupe parabolique de G contenant B . Le quotient G/P est alors muni d'une structure de variété algébrique projective. On note $R(P)$ le radical de P , et $R_u(P)$ son radical unipotent. On définit R_P^\pm de la façon suivante :

$$R^+ \setminus R_P^+ = \{\beta \in R^+ \mid U_\beta \subset R_u(P)\}.$$

On pose alors $R_P^- = -R_P^+$ et $R_P = R_P^+ \cup R_P^-$. C'est un sous-système de racines de R . On dit que c'est le *système de racines associé* à P . L'ensemble S_P des racines simples de ce système de racines est $S \cap R_P$, et R_P^+ en est l'ensemble des racines positives.

Réciproquement, si J est un sous-ensemble de S , alors il existe un sous-groupe parabolique de G contenant B dont le système de racines simples associé est J : il

suffit de considérer le sous-groupe engendré par B et les $U_{-\alpha}$ pour $\alpha \in R^+$ tel que $\alpha = \sum_{\beta \in J} a_\beta \beta$.

Ainsi, on dispose d'une correspondance bijective entre les sous-groupes paraboliques de G contenant B et les parties de S . De plus, les sous-groupes paraboliques maximaux contenant B sont en bijection avec S : si α est une racine simple, le sous-groupe parabolique associé à $S \setminus \{\alpha\}$ est maximal. Le sous-groupe parabolique maximal associé à la i -ème racine simple α_i est noté P_i . On dit aussi que P_i est associé au poids fondamental ϖ_i .

On pose $W_P = N_P(T)/T$, c'est le groupe de Weyl associé à P . Ce groupe est engendré par les s_α pour $\alpha \in S_P$.

Pour $w \in W/W_P$, on note e_w l'élément $n_w P \in G/P$, où $n_w \in N_G(T)$ est un représentant de w (dans la suite, on confondra bien souvent w et n_w). Le groupe G agit naturellement sur G/P par multiplication à gauche. Les points T -fixes de G/P sont précisément les e_w pour $w \in W/W_P$. La B -orbite de e_w est notée C_w et est appelée *cellule de Schubert*. Son adhérence pour la topologie de Zariski est notée X_w , et est appelée *variété de Schubert*. Puisque C_w est une B -orbite, c'est une variété algébrique irréductible lisse localement fermée. On en déduit que les variétés de Schubert sont également irréductibles.

On peut munir W/W_P d'un ordre partiel \leq , appelé *ordre de Bruhat* (aussi appelé ordre de Bruhat-Chevalley). Il peut être défini de la façon suivante : puisque W est engendré par les réflexions simples s_i associées aux racines simples α_i , tout élément w de W se décompose sous la forme d'un produit de réflexions simples. Bien sûr, cette décomposition n'est pas unique. On dit d'une décomposition qu'elle est réduite lorsqu'elle est de longueur minimale. Toutes les décompositions réduites de w sont de même longueur $l(w)$, on dit que c'est la *longueur* de w . Si v et w sont deux éléments de W , on dit que $v \leq w$ si de toute décomposition réduite $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$, on peut obtenir une décomposition réduite de v en supprimant des lettres s_{i_j} . On définit ensuite l'ordre de Bruhat sur le quotient W/W_P en constatant que chaque classe wW_P contient un unique élément minimal pour \leq . On dit alors que $vW_P \leq wW_P$ si $\min(vW_P) \leq \min(wW_P)$. On note aussi W^P l'ensemble des représentants minimaux des éléments de W/W_P , et on identifie souvent W/W_P et W^P .

De nouveau, la géométrie des variétés de Schubert est liée à la combinatoire de W/W_P .

THÉORÈME 0.1.2. Soient $v, w \in W^P$.

- (1) $X_v \subset X_w \iff v \leq w$.
- (2) $X_w = \coprod_{v \leq w} C_v$ (*Décomposition de Bruhat*).

On peut aussi donner la dimension d'une variété de Schubert :

$$\dim(X_w) = l(w).$$

Les grassmanniennes rentrent dans ce cadre plus général : il suffit de prendre $G = SL(n)$ le groupe des matrices de déterminant 1 à coefficients complexes, B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, T le sous-groupe des matrices

diagonales, et P l'ensemble des matrices par blocs

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right),$$

où A est une matrice carrée de taille d .

Le groupe G agit transitivement sur $G_{d,n}$, et le stabilisateur de $\langle e_1, \dots, e_d \rangle$ est P , de sorte que G/P s'identifie à $G_{d,n}$. Le groupe de Weyl W est isomorphe au groupe de permutations S_n , et W_P à $S_d \times S_{n-d}$, de sorte que W/W_P est en bijection avec l'ensemble $I_{d,n}$. De plus, on vérifie que cette identification est un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés. On vérifie également que les cellules de Schubert C_i sont bien les B -orbites du point T -fixe $e_i = \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_d} \rangle$.

La variété des drapeaux complets $Fl(n)$ correspond au cas où $P = B$. Dans ce cas, W_P est trivial, de sorte que les variétés de Schubert sont indexées par le groupe des permutations S_n .

2. Singularités des variétés de Schubert

Dans cette section, nous ne donnons que certains résultats concernant les singularités des variétés de Schubert. Pour d'autres résultats et les preuves, on pourra consulter [3], ainsi que les références qui s'y trouvent. Néanmoins, nous n'utiliserons pas tous les résultats présentés ici.

On rappelle à présent la définition de variété lisse. Étant donné un point m sur une variété algébrique X , on note $\mathcal{O}_{X,m}$ l'anneau local de X en m , et \mathfrak{m} son unique idéal maximal. L'espace tangent $T_m X$ de X en m est le dual de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Le point m est lisse si $\dim(T_m X) = \dim_m(X)$, où $\dim_m(X)$ est la dimension locale de X en m , i.e. la plus grande dimension des composantes irréductibles de X contenant m .

Dans [12], Chevalley montre que les variétés de Schubert de G/B sont lisses en codimension 1, i.e. le lieu singulier d'une variété de Schubert est de codimension au moins 2. En fait, dans ce même article, Chevalley émet l'hypothèse que les variétés de Schubert sont lisses. On sait aujourd'hui que ce n'est pas vrai : les variétés de Schubert X_{3412} et X_{4231} dans $SL(4)/B$ sont singulières (ce qui fut découvert au cours d'un séminaire de Demazure sur son travail [16]).

Le lieu singulier des variétés de Schubert a été complètement décrit pour certaines variétés de drapeaux. Dans tous les cas, il est clair que le lieu singulier d'une variété de Schubert X_w est fermé et B -stable, donc se décompose en une réunion de variétés de Schubert. Ainsi, il suffit de déterminer les points T -fixes singuliers pour obtenir le lieu singulier tout entier.

2.1. Lieu singulier des variétés de Schubert de $G_{d,n}$. D'après [46, 60], on dispose d'une caractérisation combinatoire simple pour déterminer le lieu singulier d'une variété de Schubert $X_i \subset G_{d,n}$. On commence par associer à i la partition

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d)$$

avec $\lambda_t = n - d + t - i_t$, que l'on représente par un diagramme de Young D_λ (voir le paragraphe concernant la codimension d'une variété de Schubert X_i dans la section 1). On se permettra dans cette section de confondre i , λ et D_λ : par exemple,

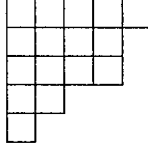
on écrira X_λ , on parlera des cases de λ , etc. Un *coin* de λ est un couple $(i, j) \in D_\lambda$ tel que $j = \lambda_i > \lambda_{i+1}$.

On dispose de la description suivante du lieu singulier de X_λ :

THÉORÈME 0.2.1 ([60]). *Si la case (i, j) est un coin de λ , avec $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq n - d$, on ajoute au diagramme de λ la case $(i + 1, j + 1)$, et l'on complète en une partition minimale. Soit S_λ l'ensemble de toutes les partitions obtenues de cette façon. Alors*

$$\text{Sing}(X_\lambda) = \bigcup_{\mu \in S_\lambda} X_\mu.$$

EXEMPLE 0.2.2. Déterminons le lieu singulier de $X_{13479} \subset G_{5,10}$. Le multi-*indice* $\underline{i} = 13479$ correspond à la partition $\lambda = (5, 4, 4, 2, 1)$, et on obtient le diagramme :



Il y a trois coins : le premier en position $(1, 5)$, le deuxième en position $(3, 4)$, et enfin le dernier en position $(4, 2)$. Le premier ne doit pas être pris en compte car la case $(1 + 1, 5 + 1)$ ne se trouve pas dans le rectangle 5×5 . Donc S_λ est constitué des deux partitions $(5, 5, 5, 5, 1)$ et $(5, 4, 4, 3, 3)$.

D'où la décomposition du lieu singulier de X_λ en composantes irréductibles :

$$\text{Sing}(X_\lambda) = X_{12349} \cup X_{13467}.$$

COROLLAIRE 0.2.3. *Les seules variétés de Schubert lisses sont les sous-grassmanniennes.*

2.2. Lieu singulier des variétés de Schubert de $SL(n)/B$. On connaît également une caractérisation combinatoire des variétés de Schubert lisses dans la variété des drapeaux complets :

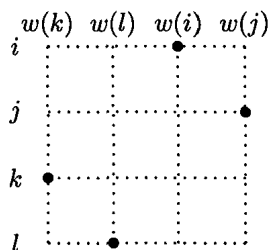
THÉORÈME 0.2.4 (Lakshmibai-Sandhya, [43]). *La variété de Schubert $X_w \subset Fl(n)$ est singulière si et seulement s'il existe des entiers $i < j < k < l$ tels que l'une des deux conditions ci-dessous soit satisfaite :*

- $w(k) < w(l) < w(i) < w(j)$;
- $w(l) < w(j) < w(k) < w(i)$.

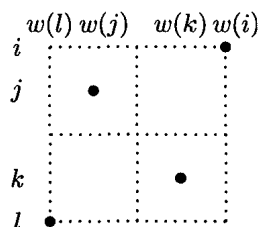
Un quadruplet $w(k) < w(l) < w(i) < w(j)$ est appelé *configuration 3412* de w , et un quadruplet $w(l) < w(j) < w(k) < w(i)$ une *configuration 4231* de w .

Dans ce même article, Lakshmibai et Sandhya proposent une conjecture qui détermine le lieu singulier d'une variété de Schubert. Cette dernière s'exprime plus facilement en termes de diagramme de permutations. Le *diagramme* d'une permutation w est l'ensemble des couples $(i, w(i))$. On peut représenter ce diagramme de la façon suivante : dans un carré $n \times n$, on marque d'un \bullet les points de coordonnées $(i, w(i))$ (comme pour une matrice, i indique la ligne, et $w(i)$ la colonne).

Ainsi, une configuration 3412 correspond au diagramme



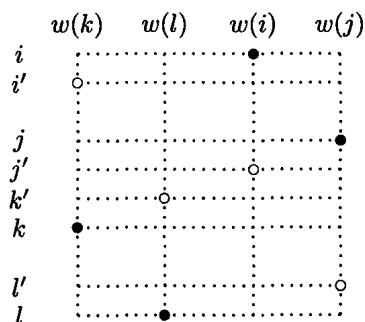
et une configuration 4231 correspond au diagramme



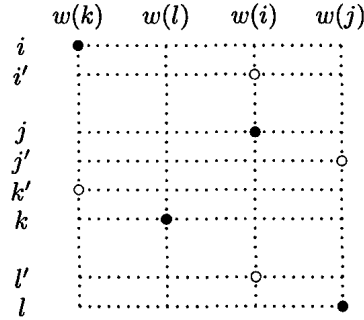
On peut représenter deux permutations w et v sur un même diagramme : les points $(i, w(i))$ sont toujours marqués par un disque noir \bullet , et les points $(i, v(i))$ par un disque blanc \circ .

CONJECTURE 0.2.5 (Lakshmibai-Sandhya, [43]). Soit $w \in S_n$. On considère l'ensemble Z_w des permutations v satisfaisant l'une des deux conditions ci-dessous.

- Il existe une configuration 3412 de w telle que les points du diagramme de v sur les colonnes correspondantes soient dans une configuration 1324, comme dans le diagramme ci-dessous :

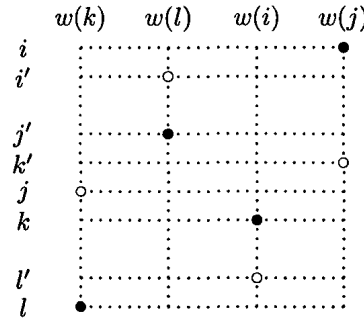


Soient v' la permutation obtenue en transformant la configuration 3412 de w en une configuration 1324, et w' la permutation obtenue en transformant la configuration 1324 de v en une configuration 3412 :

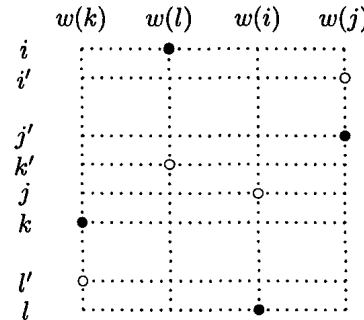


On demande alors que $v' \leq v$ et $w' \leq w$.

- Il existe une configuration 4231 de w telle que les points du diagramme de v sur les colonnes correspondantes soient dans une configuration 2413.



Soient v' la permutation obtenue en transformant la configuration 4231 de w en une configuration 2413, et w' la permutation obtenue en transformant la configuration 2413 de v en une configuration 4231.

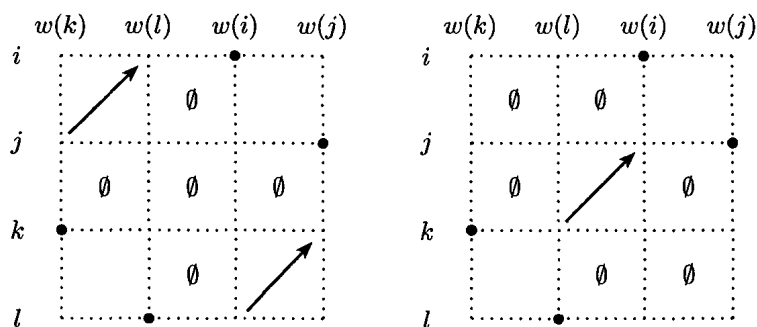


On demande alors que $v' \geq v$ et $w' \leq w$.

Alors le lieu singulier de X_w est la réunion des variétés de Schubert X_v pour v maximal dans Z_w .

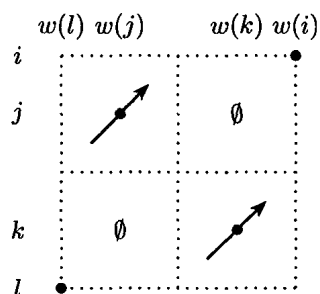
Gasharov [19] a prouvé un sens de cette conjecture : les points de X_v , $v \in Z_w$, sont singuliers dans X_w . Depuis, suite aux travaux [32, 52, 14, 4], le lieu singulier est parfaitement connu. En particulier, leurs résultats prouvent la conjecture de Lakshmibai-Sandhya.

Une configuration 3412 de w est dite *minimale* si elle est représentée par l'un des deux diagrammes ci-dessous.



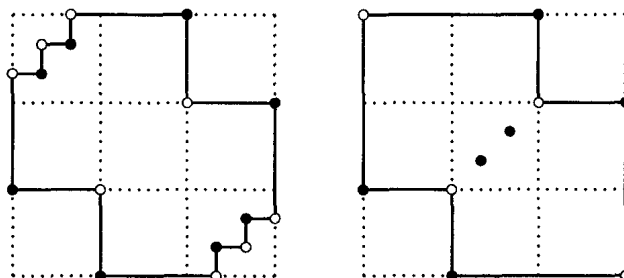
Dans ces diagrammes, les zones où sont dessinées \emptyset ne contiennent aucun point du diagramme de w , et celles où sont dessinées une flèche peuvent contenir des points du diagramme, mais ceux-ci doivent être disposés selon la direction Nord-Est.

Une configuration 4231 de w est minimale si elle correspond au diagramme ci-dessous.

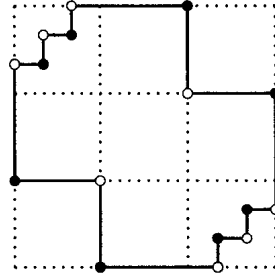


Étant donnée une permutation w et une configuration minimale, on construit une nouvelle permutation v en modifiant localement le graphe de w de la façon suivante.

Pour les configurations 3412 :



Pour une configuration 4231 :



On note $C(w)$ l'ensemble des permutations v ainsi construites.

THÉORÈME 0.2.6 ([32, 52, 14, 4]). *Le lieu singulier de X_w est la réunion des variétés de Schubert X_v pour $v \in C(w)$.*

2.3. Lieu singulier des variétés de Schubert dans un G/P minuscule.

Un poids fondamental ϖ est dit *minuscule* si $\langle \varpi, \beta^\vee \rangle \leq 1$ pour toute racine positive β . Il est dit *cominuscule* si le poids dual ϖ^\vee est minuscule relativement au système de racines dual R^\vee . De façon équivalente, ϖ est cominuscule si la racine simple associée α est cominuscule, *i.e.* si α apparaît avec un coefficient 1 dans la décomposition de la plus grande racine de R^+ . La liste des poids minuscules et cominuscules est donnée dans le tableau ci-dessous (la numérotation des poids fondamentaux est celle de Bourbaki [7]) :

A_n	● — 1 — ● — 2 — ● — 3 — ... — ● — $n-1$ — ● — n
B_n	⊙ — 1 — ○ — 2 — ○ — 3 — ... — ○ — $n-1$ — ● — n
C_n	● — 1 — ○ — 2 — ○ — 3 — ... — ○ — $n-1$ — ⊙ — n
D_n	● — 1 — ○ — 2 — ○ — 3 — ... — ○ — $n-2$ — ● — $n-1$ — ● — n
E_6	● — 1 — ○ — 3 — ○ — 4 — ○ — 5 — ● — 6
E_7	○ — 1 — ○ — 3 — ○ — 4 — ○ — 5 — ○ — 6 — ● — 7

● minuscule ⊙ cominuscule ● minuscule et cominuscule

Le sous-groupe parabolique P associé à ϖ , ainsi que l'espace homogène G/P , sont alors aussi qualifiés de *minuscules* (resp. *cominuscules*).

Lorsque G/P est minuscule, Brion et Polo ([11]) ont étudié le lieu singulier d'une variété de Schubert $X_w \subset G/P$ le long de la cellule C_v en utilisant une

variété T -stable $\mathcal{N}(v, w)$, appelée *transversale*. Cela leur a permis de déterminer le lieu singulier de X_w , ainsi que la multiplicité de e_v dans X_w lorsque X_v est une composante irréductible de X_w .

THÉORÈME 0.2.7 ([11]). *Soit X_w une variété de Schubert dans un G/P minuscule. Soit Q le plus grand sous-groupe parabolique tel que X_w soit stable par multiplication à gauche par Q . Alors le lieu singulier de X_w est $X_w \setminus Qe_w$.*

On dispose aussi de descriptions purement combinatoires similaires au cas de la grassmannienne.

Type B. Soit $V = k^{2n+1}$ muni de la forme quadratique non dégénérée

$$Q(x_1, \dots, x_n, z, y_1, \dots, y_n) = x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1 + z^2.$$

Le groupe $G = SO(V)$ est le groupe des isomorphismes linéaires qui préservent la forme quadratique Q . Soit P le sous-groupe parabolique maximal associé au dernier poids fondamental ϖ_n . Le quotient G/P s'identifie alors à l'ensemble des espaces totalement isotropes maximaux. Ils sont tous de dimension n . De plus,

$$W^P = \left\{ a_1 \dots a_n \mid \begin{array}{l} \bullet \ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2n, \ a_i \neq n+1. \\ \bullet \ \text{Si } i \in \{a_1, \dots, a_n\}, \text{ alors } 2n+2-i \notin \{a_1, \dots, a_n\} \end{array} \right\}.$$

On peut associer une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ à $a_1 \dots a_n \in W^P$ en posant

$$\lambda_{n+1-i} = \begin{cases} a_i - i & \text{si } a_i \leq n \\ a_i - i - 1 & \text{si } a_i > n. \end{cases}$$

On obtient de cette façon une partition auto-duale. Étant donnés deux diagrammes de Young $\lambda \subset \mu$, on note λ/μ l'ensemble des cases qui se trouvent dans λ mais pas dans μ .

THÉORÈME 0.2.8 ([45]). *Soit λ une partition auto-duale. Alors*

$$\text{Sing}(X_\lambda) = \bigcup_{\mu \in S_\lambda} X_\mu$$

où S_λ est l'ensemble des partitions $\mu \supset \lambda$ satisfaisant l'une des conditions ci-dessous :

- soit λ/μ est la somme disjointe de deux équerres duales l'une de l'autre ;
- soit λ/μ est la somme de deux équerres duales l'une de l'autre connectées par une case ;
- soit λ/μ est une équerre auto-duale.

Type C. Soit $V = k^{2n}$ muni de la forme symplectique Q de matrice

$$E = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$$

où J est la matrice carrée de taille n , avec des 1 le long de l'antidiagonale, et des 0 ailleurs.

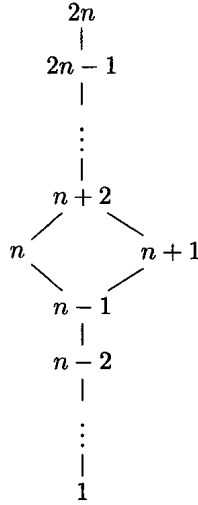
Le groupe $G = Sp(V)$ est le groupe des isomorphismes linéaires qui préservent la forme symplectique Q . Soit P le sous-groupe parabolique maximal associé au premier poids fondamental ϖ_1 . Le quotient G/P s'identifie alors à $\mathbf{P}(V)$, et les variétés de Schubert sont des sous-espaces projectifs. En particulier, elles sont toutes lisses.

Type D. Soit $V = k^{2n}$ muni de la forme quadratique

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1.$$

On note G le sous-groupe des transformations linéaires qui préservent la forme quadratique Q .

L'ensemble W^{P_1} s'identifie à $\{1, \dots, 2n\}$ muni de l'ordre de Bruhat suivant :



La variété de Schubert $X_{2n} = G/P_1$ est bien sûr lisse. Les variétés X_{n+1} , X_n , X_{n-1}, \dots, X_1 sont lisses. Enfin $\text{Sing}(X_{2n-i}) = X_i$ pour $1 \leq i \leq n-2$.

Soient P (resp. Q) le groupe parabolique associé au poids fondamental ϖ_n (resp. ϖ_{n-1}). L'ensemble des sous-espaces de V totalement isotropes maximaux est G -stable et possède deux orbites. L'une s'identifie à G/P et l'autre à G/Q . De plus,

$$W^P = \left\{ a_1 \dots a_n \left| \begin{array}{l} \bullet \ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2n \\ \bullet \ \#\{i \mid a_i > n\} \text{ est pair} \\ \bullet \ \text{pour } 1 \leq i \leq 2n, \text{ si } i \in \{a_1, \dots, a_n\}, \\ \text{alors } 2n+1-i \notin \{a_1, \dots, a_n\} \end{array} \right. \right\}.$$

L'ensemble W^Q est plus difficile à décrire : on peut l'identifier à un sous-ensemble propre de

$$\left\{ a_1 \dots a_{n-1} \left| \begin{array}{l} \bullet \ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} \leq 2n \\ \bullet \ \text{pour } 1 \leq i \leq 2n, \text{ si } i \in \{a_1, \dots, a_{n-1}\}, \\ \text{alors } 2n+1-i \notin \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \end{array} \right. \right\}.$$

Pour $w \in W$, on note $w^{(d)}$ le représentant minimal de wW_{P_d} . On identifie $w^{(n-1)}$ au multi-indice $a_1 \dots a_{n-1}$ de la façon suivante. On pose

$$u_i = \begin{cases} s_{\alpha_n} & \text{si } i = n, \\ s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_n} & \text{si } 1 \leq i \leq n-2, \\ e & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Pour $i \neq n-1$, soient y_1^i, \dots, y_{n-1}^i les $n-1$ premières entrées de wu_i , que l'on réordonne de façon croissante pour obtenir un multi-indice \mathbf{y}^i . L'ensemble $\{\mathbf{y}^i \mid 0 \leq i \leq n, i \neq n-1\}$ est totalement ordonné (pour l'ordre de Bruhat sur $I_{n-1,2n}$), et $w^{(n-1)}$ est le plus petit élément parmi $\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{n-2}, \mathbf{y}^n$.

Les variétés G/P et G/Q sont isomorphes, et les variétés de Schubert sont en correspondance via cet isomorphisme. De plus, G/P et $SO(2n-1)/P_{n-1}$ sont isomorphes, et les variétés de Schubert se correspondent via cet isomorphisme. Ainsi, la détermination du lieu singulier des variétés de Schubert de G/P et de G/Q se déduit de celle pour les groupes de type B_{n-1} .

Soit W' le groupe de Weyl de $SO(2n-1)$. Les isomorphismes mentionnés ci-dessus induisent des bijections $\delta : W^P \rightarrow W^Q$, $\theta : W'^{P_{n-1}} \rightarrow W^P$ qui conservent l'ordre de Bruhat.

On construit la bijection δ de la façon suivante. Soit $a_1 \dots a_n \in W^P$. Si $a_n = n$, alors $a_1 \dots a_n = 1 \dots n$. On pose dans ce cas $\delta(a_1 \dots a_n) = 1 \dots n-1$. Si $a_n > n$, alors soit n , soit $n+1$ appartient à $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$. On obtient $\delta(a_1 \dots a_n)$ en remplaçant n (resp. $n+1$) par $n+1$ (resp. par n) dans $a_1 \dots a_{n-1}$.

La bijection θ est obtenue en posant $\theta(a_1 \dots a_{n-1}) = a_1 \dots a_{n-1}a_n$, où on pose $a_n = n$ ou $n+1$ pour que $\#\{i \mid 1 \leq i \leq n, a_i > n\}$ soit pair.

2.4. Le cas de $Sp(n)/P_n$. Soit $V = k^{2n}$ muni de la forme symplectique Q , comme dans le paragraphe précédent, et P le sous-groupe parabolique maximal associé au poids fondamental ϖ_n . Ce poids n'est pas minuscule, mais est cominuscule. Le quotient G/P s'identifie à l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de V . De plus,

$$W^P = \left\{ a_1 \dots a_n \mid \begin{array}{l} \bullet \ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2n, \\ \bullet \ \text{Si } i \in \{a_1, \dots, a_n\}, \text{ alors } 2n+1-i \notin \{a_1, \dots, a_n\} \end{array} \right\}.$$

On peut associer une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ à $a_1 \dots a_n \in W^P$ en posant $\lambda_{n+1-i} = a_i - i$. De cette façon, on obtient une partition auto-duale.

THÉORÈME 0.2.9 ([45]). *Soit λ une partition auto-duale. Alors*

$$\text{Sing}(X_\lambda) = \bigcup_{\mu \in S_\lambda} X_\mu,$$

où S_λ est l'ensemble des partitions $\mu \supset \lambda$ satisfaisant l'une des conditions ci-dessous :

- soit λ/μ est la somme de deux équerres duales l'une de l'autre ;
- soit λ/μ est une équerre auto-duale, non réduite à une unique case.

3. Multiplicité d'un point sur une variété de Schubert

Rappelons la définition de la multiplicité μ d'un point m sur une variété algébrique X . On considère l'anneau gradué associé à l'anneau local $\mathcal{O}_{X,m}$:

$$gr(\mathcal{O}_{X,m}) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathfrak{m}^d / \mathfrak{m}^{d+1},$$

et on note h_m sa fonction de Hilbert :

$$h_m(d) = \dim(\mathfrak{m}^d / \mathfrak{m}^{d+1}).$$

On sait par le théorème de Hilbert que la fonction h_m est polynomiale pour les grandes valeurs de d :

$$\exists P_m \in k[T] \text{ tel que } \forall d \gg 0, \quad P_m(d) = h_m(d).$$

Le polynôme P_m est appelé *polynôme de Hilbert*, et encode de nombreuses informations sur la géométrie de X au voisinage de m . Le degré e de P_m est égal à $\dim(X) - 1$. De plus, son coefficient dominant est de la forme $\frac{\mu}{e!}$, pour $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. C'est cet entier μ qui est appelé *multiplicité* de m sur X .

3.1. Multiplicité d'une variété de Schubert dans $G_{d,n}$. On considère une variété de Schubert $X_{\mathbf{i}} \subset G_{d,n}$, ainsi qu'un point T -fixe $e_{\mathbf{j}} \in X_{\mathbf{i}}$, de sorte que $\mathbf{j} \leq \mathbf{i}$. On note $\mu_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$ la multiplicité de $e_{\mathbf{j}}$ sur $X_{\mathbf{i}}$, et λ (resp. μ) la partition associée à \mathbf{i} (resp. \mathbf{j}).

En 1990, Kreiman et Lakshmibai ([39]) donnent une formule récursive pour calculer $\mu_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$. On commence par définir le \mathbf{i} -degré d'un multi-indice \mathbf{j} :

$$\deg_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) = \#\{t \mid j_t \notin \mathbf{i}\}.$$

On remarque que $\deg_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) = \deg_{\mathbf{j}}(\mathbf{i})$. La multiplicité est alors donnée par :

$$\mu_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) \deg_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) = \sum \mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{j}),$$

où la somme est portée sur l'ensemble des multi-indices \mathbf{k} tels que $\mathbf{j} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{i}$ et $\sum_t k_t = (\sum_t i_t) - 1$ (c'est-à-dire tels que $X_{\mathbf{k}}$ soit une hypersurface de $X_{\mathbf{i}}$ contenant $e_{\mathbf{j}}$).

On obtient ainsi récursivement $\mu_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$ si l'on connaît $\mu_{\mathbf{j}}(\mathbf{j})$. Or $e_{\mathbf{j}}$ est lisse dans $X_{\mathbf{j}}$: s'il ne l'était pas, sa B -orbite $C_{\mathbf{j}}$ serait dans le lieu singulier, et puisque ce dernier est fermé, il serait égal à $X_{\mathbf{j}}$ tout entier ! Ainsi $\mu_{\mathbf{j}}(\mathbf{j}) = 1$.

Il existe également des formules fermées (*i.e.* non récursives) qui donnent $\mu_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$, qui se présentent sous la forme de déterminants ([1, 27]). Par exemple, on a la formule de Rosenthal-Zelevinsky ([56]) ci-dessous. On pose $s_l = \#\{s \mid j_s > i_l\}$.

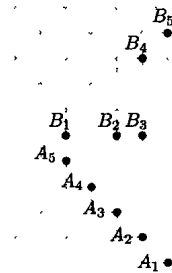
$$(*) \quad \mu_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) = (-1)^{s_1 + \dots + s_d} \begin{vmatrix} \binom{i_1}{-s_1} & \dots & \dots & \binom{i_d}{-s_d} \\ \binom{i_1}{1-s_1} & \dots & \dots & \binom{i_d}{1-s_d} \\ \vdots & & & \vdots \\ \binom{i_1}{d-1-s_1} & \dots & \dots & \binom{i_d}{d-1-s_d} \end{vmatrix}.$$

Dans cette formule, on utilise la convention que le coefficient binomial $\binom{i}{s}$ est nul pour s strictement négatif.

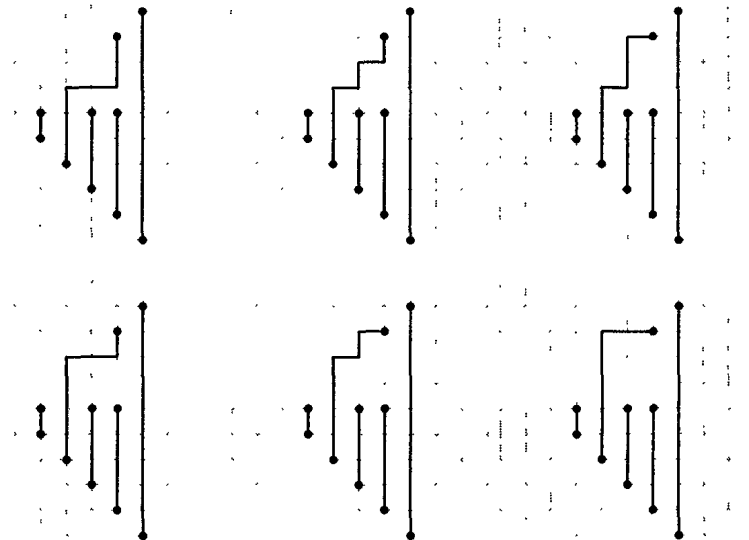
Peu après, Krattenthaler ([36]) interprète combinatoirement cette formule déterminantale. En effet, via le lemme de Gessel-Viennot, ce déterminant compte le nombre de familles de chemins connectant certains points. Plus précisément, on considère les deux familles de points de \mathbb{Z}^2 suivantes. On pose $A_l = (-l + 1, l - 1)$ et $B_l = (-s_l, s_l + i_l)$, pour $l = 1, \dots, d$. Il s'agit de trouver tous les chemins dans \mathbb{Z}^2 , dont l'origine est l'un des points de $\{A_l \mid 1 \leq l \leq d\}$, et d'extrémité l'un des points de $\{B_k \mid 1 \leq k \leq d\}$, satisfaisant les conditions suivantes : un tel chemin est constitué de segments verticaux et horizontaux, les segments verticaux doivent

être dirigés vers le nord, et les chemins horizontaux vers l'est. On note $\mathcal{P}_\lambda(\mu)$ l'ensemble des familles de chemins ne s'intersectant pas et satisfaisant les conditions précédentes. Le déterminant (*) est alors le cardinal de $\mathcal{P}_\lambda(\mu)$.

Par exemple, si l'on pose $i = 13479$ et $j = 12349$, il s'agit de trouver le nombre de familles de chemins ne s'intersectant pas dans le diagramme ci-dessous, connectant les points A_1, \dots, A_5 aux points B_1, \dots, B_5 :



On constate qu'il y a 6 familles de chemins possibles, représentées ci-dessous.



Ceci est cohérent avec la formule de Rosenthal-Zelevinsky puisque

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & 36 \\ 0 & 3 & 6 & 21 & 84 \\ 1 & 3 & 4 & 35 & 126 \end{vmatrix} = 6.$$

3.2. Multiplicité d'une variété de Schubert dans $SL(n)/B$. On ne connaît que très peu de résultats concernant la multiplicité d'un point sur une variété de Schubert de $SL(n)/B$. Pour $n = 5$ ou 6 , la multiplicité du point le plus singulier dans une variété de Schubert a été calculée par Woo [62].

3.3. Multiplicité d'une variété de Schubert dans certains G/P minuscules ou cominusculs. De même que dans le cas des grassmanniennes, on connaît une formule récursive qui donne la multiplicité d'un point sur un G/P dans les cas suivants :

- $G = SL(n)$, $P = P_d$ pour d quelconque,
- $G = SO(2n+1)$, $P = P_n$,
- $G = Sp(2n)$, $P = P_1, P_n$,
- $G = SO(2n)$, $P = P_1, P_{n-1}, P_n$.

Pour pouvoir écrire cette formule, nous avons besoin des coordonnées de Plücker associées à des poids extrémaux.

On note ϖ le poids fondamental associé à P . Soit V^ϖ la représentation de plus haut poids ϖ . Le groupe G agit sur $\mathbf{P}(V^\varpi)$, et on démontre que P est le stabilisateur de la droite engendrée par le vecteur v_ϖ de plus haut poids ϖ . Ainsi, en identifiant G/P avec la G -orbite de $\langle v_\varpi \rangle$, on obtient un plongement $G/P \hookrightarrow \mathbf{P}(V^\varpi)$. Les poids de V^ϖ qui se trouvent dans la W -orbite de ϖ sont appelés *poids extrémaux*. De plus, la W -orbite de ϖ est en bijection avec W/W_P . Soient $w \in W^P$, et $\lambda = w\varpi$. L'espace V_λ des vecteurs de poids λ est de dimension 1. On fixe alors un vecteur v_w non nul de $V_{w\varpi}$, et on complète ensuite la famille (v_w) en une base de vecteurs-poids de V^ϖ . Si $gP \in G/P$, alors $p_w(gP)$ est la coordonnée de gv_ϖ suivant le vecteur v_w . On dit que p_w est la *coordonnée de Plücker* associée au poids extrémal $w\varpi$.

De ce point de vue, les G/P minuscules jouent un rôle particulier, puisque P est minuscule si et seulement si tous les poids de la représentation V^ϖ sont extrémaux.

On note $\mu_w(v)$ la multiplicité de e_v dans $X_w \subset G/P$.

Étant donné $u \in W$, on note $u^{(P)}$ le représentant minimal de uW_P . On note (X_β) une base de Chevalley de \mathfrak{g} , i.e. X_β est un vecteur non nul de poids β pour la représentation adjointe \mathfrak{g} . On pose

$$R_P(w, v) = \{\beta \in v(R^+ \setminus R_P^+) \mid w \geq (s_\beta v)^{(P)}\}.$$

On considère l'ensemble

$$N_P(w) = \{D = X_{-\beta_s} \dots X_{-\beta_1} \mid \beta_i \in R_P(w, v), Dp_w = a_D p_v, a_D \in k^*\},$$

où $D = X_{-\beta_s} \dots X_{-\beta_1}$ est vu comme un élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} . L'entier s est appelé *ordre* de D . Tous les éléments de $N_P(w)$ ont même ordre : c'est le w -*degré* de v , noté $\deg_w(v)$.

THÉORÈME 0.3.1 ([45]).

- Soit G/P minuscule de type A, B, C ou D . Alors

$$\mu_w(v) \deg_w(v) = \sum \mu_u(v),$$

où la somme porte sur tous les diviseurs X_u de X_w contenant e_v .

- Soit $G = Sp(2n)/P_n$. Alors

$$\mu_w(v) \deg_w(v) = \sum \mu_u(v) m(w, u),$$

où la somme porte sur tous les diviseurs X_u de X_w contenant e_v , et $m(w, u) = \langle \varpi_n, \beta^\vee \rangle$ si $u = s_\beta w$, $\beta \in R^+$.

Suite aux travaux de Ikeda et Naruse [31] sur la cohomologie T -équivariante des variétés de Schubert, on connaît également une formule combinatoire qui donne $\mu_w(v)$ dans certains G/P minuscules ou cominusculs. Elle s'exprime en termes de

diagrammes de Young excités. La définition de l'excitation d'un diagramme dépend du type de G .

Type A_n . On sait que les variétés de Schubert X_λ sont indexées par les diagrammes de Young D_λ associés aux partitions λ . Étant donné un diagramme de Young D_μ et $C \subset D_\mu$, on choisit une case c de C telle que $c + (1, 0)$, $c + (0, 1)$ et $c + (1, 1)$ soient dans $D_\mu \setminus C$. On remplace alors dans C la case c par $c + (1, 1)$. On obtient de cette façon un diagramme C' . Le passage de C à C' est appelé *excitation élémentaire*. Un diagramme D est appelé *état excité* de D_λ si l'on peut obtenir D en appliquant des excitations élémentaires à D_λ . On note alors $\mathcal{E}_\mu(\lambda)$ l'ensemble de tous les états excités de D_λ .

Type C_n . À un élément $a_1 \dots a_n$ de W^P , P le groupe parabolique associé au dernier poids fondamental ϖ_n (voir § 2.4), on associe une partition stricte $\lambda = (\lambda_1 > \dots > \lambda_n)$ de la façon suivante. On considère la partition $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ associée au multi-indice $a_1 \dots a_n$, puis on pose $\lambda_i = \max(\Lambda_i - i + 1, 0)$. On représente ensuite cette partition par un diagramme de Young décalé SD_λ : la première ligne du diagramme contient λ_1 cases, la seconde ligne contient λ_2 cases, mais est décalée d'un cran vers la droite, puis la troisième ligne contient λ_3 cases et est décalée de deux crans vers la droite, et ainsi de suite. En d'autres termes,

$$SD_\lambda = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq d, i \leq j \leq \lambda_j + i - 1\}.$$

On peut alors définir une excitation élémentaire de type I de façon similaire au type A. Soit SD_μ le diagramme décalé associé à la permutation stricte μ , et $C \subset SD_\mu$. On choisit une case c de C satisfaisant l'une des deux conditions suivantes :

- (1) $c = (i, j)$, $i < j$ et $c + (1, 0)$, $c + (0, 1)$ et $c + (1, 1)$ appartiennent à $SD_\mu \setminus C$.
- (2) $c = (i, i)$ et $c + (0, 1)$ et $c + (1, 1)$ appartiennent à $SD_\mu \setminus C$.

Alors on obtient un diagramme C' en remplaçant dans C la case c par $c + (1, 1)$. Le passage de C à C' est appelé *excitation élémentaire de type I*.

Soient $v \leq w \in W^P$ et $SD_\mu \supset SD_\lambda$ les diagrammes de Young décalés correspondants. Un diagramme D' est un état excité de type I de SD_λ si D' est obtenu en n'appliquant à SD_λ que des excitations élémentaires de type I. On note $\mathcal{E}_\mu^I(\lambda)$ l'ensemble de tous les états excités de type I de SD_λ .

Type D_{n+1} . Soit P le parabolique associé au dernier poids fondamental ϖ_{n+1} . À un élément $a_1 \dots a_{n+1}$ de W^P (voir § 2.3), on associe une partition stricte $\lambda = (\lambda_1 > \dots > \lambda_{n+1})$ de la façon suivante. On considère la partition $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n+1})$ associée au multi-indice $a_1 \dots a_n a_{n+1}$, puis on pose $\lambda_i = \max(\Lambda_i - i, 0)$. On représente ensuite cette partition par un diagramme de Young décalé SD_λ comme pour le type C.

On peut alors définir une excitation élémentaire de type II de la façon suivante. Soit SD_μ le diagramme décalé associé à une partition stricte μ . On choisit une case c de C satisfaisant l'une des deux conditions suivantes :

- (1) $c = (i, j)$, $i < j$ et $c + (1, 0)$, $c + (0, 1)$ et $c + (1, 1)$ appartiennent à $SD_\mu \setminus C$.
- (2) $c = (i, i)$ et $c + (0, 1)$, $c + (1, 1)$, $c + (1, 2)$, et $c + (2, 2)$ appartiennent à $SD_\mu \setminus C$.

Dans le cas (1), on obtient C' en remplaçant dans C la case c par $c + (1, 1)$. Dans le cas (2), on remplace c par $c + (2, 2)$. Le passage de C à C' est appelé *excitation élémentaire de type II*.

Soit $v \leq w \in W^P$ et $SD_\mu \supset SD_\lambda$ les diagrammes de Young décalés correspondants. Un diagramme D' est un état excité de type II de SD_λ si D' est obtenu en n'appliquant à SD_λ que des excitations élémentaires de type II. On note $\mathcal{E}_\mu^{\text{II}}(\lambda)$ l'ensemble de tous les états excités de type II de SD_λ .

THÉORÈME 0.3.2 ([31]). *Soit G un groupe algébrique simple de type A_n (resp. C_n, D_{n+1}), et $P = P_d, 1 \leq d \leq n$ (resp. $P = P_n, P = P_{n+1}$). On considère $\mathbf{j} \leq \mathbf{i}$ dans $I_{d,n}$, (resp. $v \leq w$ dans W^P). La multiplicité de $e_{\mathbf{j}}$ (resp. e_v) sur $X_{\mathbf{i}}$ (resp. sur X_w) est notée $\mu_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$ (resp. $\mu_w(v)$). Soient μ la partition associée à \mathbf{j} (resp. la partition stricte associée à v) et λ la partition associée à \mathbf{i} (resp. la partition stricte associée à w). Alors $\mu_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) = \# \mathcal{E}_\mu^{\text{I}}(\lambda)$ (resp. $\mu_w(v) = \# \mathcal{E}_\mu^{\text{I}}(\lambda), \mu_w(v) = \# \mathcal{E}_\mu^{\text{II}}(\lambda)$).*

3.4. Multiplicité d'une variété de Schubert dans un G/P quelconque.

THÉORÈME 0.3.3 ([11]). *Soient $v \leq w$ des représentants maximaux de leur classe modulo W_P . Soit I un sous-ensemble de $S \cap v(R_P)$. On note Q_I le sous-groupe parabolique de G associé à I , et R_I (resp. R_I^+) le système de racines (resp. positives) associé. On suppose que $X_w = Q_I X_{s_\beta v}$ pour un $\beta \in S \cap v(R^+ \setminus R_P^+)$. On pose $d = l(w) - l(v)$. Alors*

$$\mu_w(v) = (d-1)! \prod_{\gamma \in R_I^+ \setminus R_{I_0}^+} \frac{\langle -\beta, \gamma \rangle}{\langle \rho, \gamma \rangle}.$$

L'hypothèse est vérifiée si P est minuscule et si X_v est une composante irréductible de X_w .

4. Théorie des monômes standard

4.1. Cas des grassmanniennes. La grassmannienne $G_{d,n}$ peut être réalisée comme sous-variété d'un espace projectif via le plongement de Plücker. La géométrie de $G_{d,n}$ est alors encodée dans son anneau des coordonnées homogènes $k[G_{d,n}]$. C'est un anneau gradué

$$k[G_{d,n}] = \bigoplus_m k[G_{d,n}]_m,$$

et on sait que les $k[G_{d,n}]_m$ sont des espaces vectoriels de dimension finie. Hodge est parvenu à donner une base explicite de ces espaces vectoriels.

DÉFINITION 0.4.1. Un monôme $p_{\mathbf{i}_1} \dots p_{\mathbf{i}_m}$ en les coordonnées de Plücker est dit *standard* si $\mathbf{i}_1 \geq \dots \geq \mathbf{i}_m$.

THÉORÈME 0.4.2 (Hodge, [28]). *L'ensemble des monômes standard $p_{\mathbf{i}_1} \dots p_{\mathbf{i}_m}$ forme une base de $k[G_{d,n}]$.*

De plus, Hodge ([28]) a prouvé que cette base est compatible avec les variétés de Schubert : les monômes standard qui ne s'annulent pas identiquement sur une variété de Schubert $X_{\mathbf{i}}$ forment encore une base de $k[X_{\mathbf{i}}]$. De plus, cette compatibilité est aussi combinatoire, en ce sens qu'un monôme standard $p_{\mathbf{i}_1} \dots p_{\mathbf{i}_m}$ ne s'annule pas identiquement sur $X_{\mathbf{i}}$ si et seulement si $\mathbf{i} \geq \mathbf{i}_1$.

Le but de la SMT (Standard Monomial Theory) est de généraliser ce type de résultats aux variétés de Schubert quelconques, aux variétés de Bott-Samelson, etc.

4.2. Cas de $SL(n)/B$. On réalise $F\ell(n)$ comme une sous-variété du produit $G_{1,n} \times G_{2,n} \times \cdots \times G_{n-1,n}$. Soient $p : G_{d,n} \hookrightarrow \mathbf{P}(\Lambda^d k^n)$ le plongement de Plücker, et $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites tautologique sur $\mathbf{P}(\Lambda^d k^n)$. On note encore $\mathcal{O}(1)$ le pull-back $p^*(\mathcal{O}(1))$. On dispose ainsi d'une famille de fibrés en droites sur $F\ell(n)$ indexée par \mathbf{Z}^{n-1} : pour $\mathbf{m} = m_1 \dots m_{n-1}$, on pose $\mathcal{O}(\mathbf{m}) = \mathcal{O}(1)^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(1)^{\otimes m_{n-1}}$. L'espace vectoriel $H^0(F\ell(n), \mathcal{O}(\mathbf{m}))$ des sections de $\mathcal{O}(\mathbf{m})$ est de dimension finie : il est engendré par les produits de la forme $p_{i_1} \dots p_{i_M}$ ($M = \sum m_i$) dont les m_{n-1} premiers facteurs sont des coordonnées de Plücker dans $G_{n-1,n}$, les m_{n-2} suivants dans $G_{n-2,n}$, et ainsi de suite. À un tel produit, on associe le tableau de Young dont les colonnes successives sont $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_M$, et on notera $\lambda(\mathbf{m})$ la partition correspondante. Par exemple, pour $\mathbf{m} = 121$, le tableau associé à $p_{124}p_{13}p_{23}p_3 \in H^0(F\ell(n), \mathcal{O}(121))$ est

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

et donc $\lambda(121) = (4, 3, 1)$.

On dit d'un tableau de Young qu'il est *semi-standard* si ses colonnes sont strictement croissantes de haut en bas et ses lignes croissantes au sens large de gauche à droite (c'est le cas dans l'exemple ci-dessus).

THÉORÈME 0.4.3 (Hodge, [28]). *Les coordonnées de Plücker indexées par les tableaux de Young semi-standard associés à la partition $\lambda(\mathbf{m})$ forment une base de $H^0(F\ell(n), \mathcal{O}(\mathbf{m}))$.*

REMARQUE 0.4.4. Contrairement au cas de $G_{d,n}$, la théorie des monômes standard présentée ci-dessus n'est pas compatible avec les variétés de Schubert. Par exemple, dans $F\ell(3)$, considérons les deux tableaux de Young semi-standard suivants.

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}.$$

Bien que les sections $p_{T_1} = p_{12}p_3$ et $p_{T_2} = p_{13}p_2$ soient linéairement indépendantes sur $F\ell(3)$, elles ne le sont plus sur la variété de Schubert X_w pour $w = [312]$, i.e. w envoie 1 sur 3, 2 sur 1 et 3 sur 2.

On peut le voir sur l'ouvert affine $O_T = p_T \neq 0$, où $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$, dont une paramétrisation est

$$(x, y, z) \mapsto (F^1 \subset F^2) \in F\ell(3),$$

où F^1 est la droite engendrée par $(1, x, y)$ et F^2 le plan engendré par $(1, x, y)$ et $(0, 1, z)$.

Dans ces coordonnées, on obtient

$$p_{T_1} = y, \quad p_{T_2} = xz,$$

qui sont bien linéairement indépendants dans $k[x, y, z]$. L'idéal de la variété affine $Y_w = X_w \cap O_T$ est engendré par $y - xz$, de sorte que

$$(p_{T_1})|_{Y_w} = y = xz = (p_{T_2})|_{Y_w} \in k[x, y, z]/(y - xz).$$

Cette SMT en type A_n interviendra dans le chapitre II. Une SMT a été établie en types classiques A, B, C et D par Lakshmibai et Seshadri [44], puis en type quelconque par Littelmann [50], sur la base de son modèle des chemins [48, 49].

5. Désingularisation des variétés de Schubert

Les variétés de Bott-Samelson, initialement introduites pour étudier la topologie des espaces symétriques (voir [6]), désingularisent les variétés de Schubert. Elles sont définies de la façon suivante. Soit $i \leq n$, on dit que g_1B et g_2B sont *i-adjacents*, situation notée $g_1B \overset{i}{\sim} g_2B$ si $g_1P_i^{\min} = g_2P_i^{\min}$, où P_i^{\min} désigne le groupe parabolique minimal associé à la i -ème racine simple.

Une *galerie* de type $\mathbf{i} = i_1 \dots i_r$ est une suite

$$g_0B \overset{i_1}{\sim} g_1B \overset{i_2}{\sim} \dots \overset{i_r}{\sim} g_rB.$$

On note $Z_{\mathbf{i}}(g_0B)$ l'ensemble de toutes les galeries de type \mathbf{i} dont le point de départ est g_0B . C'est une sous-variété de $(G/B)^r$, appelée *variété de Bott-Samelson*.

Soit $X_w \subset G/B$. On choisit une décomposition réduite $w = s_{i_1} \dots s_{i_r}$, et on pose $\mathbf{i} = i_1 \dots i_r$. La variété de Bott-Samelson $Z_{\mathbf{i}} = Z_{\mathbf{i}}(eB)$ est irréductible et lisse. Soit pr_r la restriction à $Z_{\mathbf{i}}$ de la projection

$$(g_0B, g_1B, \dots, g_rB) \in (G/B)^r \mapsto g_rB \in G/B.$$

Le morphisme $\text{pr}_r : Z_{\mathbf{i}} \rightarrow X_w$ est birationnel, *i.e.* $Z_{\mathbf{i}}$ est une désingularisation de X_w .

Étant donné $\mathbf{m} = m_1 \dots m_r \in \mathbf{Z}^r$, on lui associe un fibré en droites $L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}}$ sur $Z_{\mathbf{i}}$ en restreignant le fibré $L_{m_1, \varpi_{i_1}} \otimes \dots \otimes L_{m_r, \varpi_{i_r}}$. Ce fibré est très ample si et seulement si pour tout j , $m_j > 0$ ([47]). Lakshmibai, Littelmann et Magyar ont donné dans [41] une base de $H^0(Z_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}})$ indexée par des tableaux satisfaisant certaines conditions combinatoires. Lakshmibai et Magyar ([42]) ont précédemment donné une telle base de $H^0(Z_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}})$ lorsque G/B est $Fl(n)$. Les tableaux qui indexent cette base sont appelés *tableaux standard*, et sont définis à l'aide d'une suite de sous-mots de \mathbf{i} , appelée *relèvement*.

6. Variétés de Richardson

Soit B^- le sous-groupe de Borel opposé à B , *i.e.* l'unique sous-groupe de Borel tel que $B \cap B^- = T$. Une *cellule de Schubert opposée* C^v ($v \in W^P$) de G/P est la B^- -orbite du point T -fixe e_v . La *variété de Schubert opposée* X^v est l'adhérence de C^v . Soit w_0 l'élément le plus long dans W^P . On déduit les propriétés d'une variété de Schubert opposée X^v à partir de celles des variétés de Schubert directes en remarquant que $X^v = w_0X_{w_0v}$. En particulier,

THÉORÈME 0.6.1.

$$(1) X^w \subset X^v \iff w \geq v.$$

$$(2) X^v = \coprod_{w \geq v} C^w.$$

$$(3) \text{codim}_{G/P} X^v = l(v).$$

DÉFINITION 0.6.2. L'intersection d'une variété de Schubert directe X_w et d'une variété de Schubert opposée X^v est appelée *variété de Richardson*, et est notée X_w^v . De même, l'intersection d'une cellule de Schubert directe C_w et d'une cellule de Schubert opposée C^v est appelée *cellule de Richardson*, et est notée C_w^v .

Par exemple, on a $X_w^e = X_w$ (e est la classe modulo W_P du neutre de W) et $X_{w_0}^v = X^v$. On résume dans le théorème ci-dessous quelques propriétés des variétés de Richardson.

THÉORÈME 0.6.3 (Richardson, [54]).

- (1) $X_w^v \neq \emptyset \iff v \leq w$.
- (2) X_w^v est irréductible.
- (3) C_w^v est isomorphe à un produit de copies de k et de k^* .
- (4) $X_w^v = \coprod_{v \leq x \leq w} C_x^v$.
- (5) $X_w^v = \overline{C_w^v}$.
- (6) $\dim(X_w^v) = l(w) - l(v)$, ou de façon équivalente, l'intersection de X_w et X^v est propre.
- (7) En tout point m de C_w^v , on a $T_m(X_w^v) = T_m(X_w) \cap T_m(X^v)$, i.e. l'intersection de X_w et X^v est génériquement transverse.

Il existe une théorie des monômes standard pour les variétés de Richardson dans G/P , P un sous-groupe parabolique quelconque ([40]). De nouveau, cette base utilise les chemins LS.

On peut facilement décrire le lieu singulier d'une variété de Richardson $X_w^v = X_w \cap X^v \subset G/P$ (voir par exemple [2]) :

$$\text{Sing}(X_w^v) = (\text{Sing}(X_w) \cap X^v) \cup (X_w \cap \text{Sing}(X^v)).$$

Comme pour les variétés de Schubert, il existe plusieurs formules donnant la multiplicité d'un point T -fixe sur une variété de Richardson lorsque G/P est minuscule. Mais contrairement au cas des variétés de Schubert, la connaissance de la multiplicité d'un point T -fixe ne suffit plus à déterminer la multiplicité en un point quelconque, les variétés de Richardson étant seulement T -stables.

Soit e_k un point T -fixe sur la variété de Richardson $X_1^j \subset G_{d,n}$. On note μ_1^j (resp. μ_i, μ^j) sa multiplicité sur X_1^j (resp. sur X_i, X^j). Kreiman et Lakshmibai [38] ont donné la formule récursive ci-dessous.

$$\mu_1^j (\deg_k i + \deg_k j) = \sum_{i' \in \partial_{i,k}^+} \mu_{i'}^j + \sum_{j' \in \partial_{j,k}^-} \mu_1^{j'}$$

où

$$\begin{aligned} \partial_{i,k}^+ &= \{i' \in I_{d,n} \mid i \geq i' \geq k \text{ et } \dim X_{i'} = \dim X_i - 1\} \\ \partial_{j,k}^- &= \{j' \in I_{d,n} \mid j \leq j' \leq k \text{ et } \dim X^{j'} = \dim X^j - 1\}. \end{aligned}$$

À partir de cette formule, Kreiman et Lakshmibai établissent que $\mu_1^j = \mu_i \mu^j$. En particulier, on a la formule déterminantale suivante.

$$\mu_1^j = (-1)^c \det \begin{pmatrix} \binom{i_1}{-s_1} & \cdots & \binom{i_d}{-s_d} \\ \binom{i_1}{1-s_1} & \cdots & \binom{i_d}{1-s_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{i_1}{d-1-s_1} & \cdots & \binom{i_d}{d-1-s_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{n+1-j_d}{-r_d} & \cdots & \binom{n+1-j_1}{-r_1} \\ \binom{n+1-j_d}{1-r_d} & \cdots & \binom{n+1-j_1}{1-r_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{n+1-j_d}{d-1-r_d} & \cdots & \binom{n+1-j_1}{d-1-r_1} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} s_l &= \#\{t \mid k_t > i_l\}, \\ r_l &= \#\{t \mid k_t < j_l\}, \\ c &= s_1 + \cdots + s_d + r_1 + \cdots + r_d. \end{aligned}$$

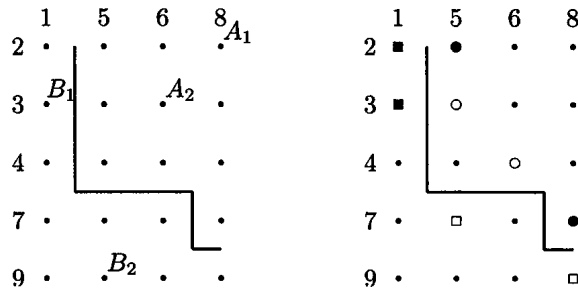
Dans [37], ce même résultat est obtenu en utilisant des méthodes différentes, qui permettent de donner une formule en termes de familles de chemins ne s'intersectant pas, généralisant ainsi la formule de Krattenthaler (voir § 3.1). La construction est la suivante. Les chemins seront tracés dans le rectangle $\bar{k} \times \mathbf{k}$, où $\bar{k} = \{k \leq n \mid k \notin \mathbf{k}\}$. On distingue deux sous-ensembles de $\bar{k} \times \mathbf{k}$: sa partie négative $(\bar{k} \times \mathbf{k})^-$, qui est l'ensemble des couples $(e, f) \in \bar{k} \times \mathbf{k}$ tels que $e < f$, et sa partie positive $(\bar{k} \times \mathbf{k})^+$, qui est l'ensemble des couples $(e, f) \in \bar{k} \times \mathbf{k}$ tels que $e > f$.

On note $\mathbf{a} = \mathbf{j} \setminus \mathbf{k}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{k} \setminus \mathbf{j}$. On ordonne les éléments de \mathbf{a} de façon croissante : $a_1 < \cdots < a_r$, et on ordonne ceux de \mathbf{b} de la façon suivante. Soit b_r le plus petit élément de \mathbf{b} tel que $b_r > a_r$, puis b_{r-1} le plus petit élément de $\mathbf{b} \setminus \{b_r\}$ tel que $b_{r-1} > a_{r-1}$, et ainsi de suite. On pose alors $A_l = (a_l, b_l)$ pour tout $l \leq r$.

De même on pose $\mathbf{c} = \mathbf{i} \setminus \mathbf{k}$ et $\mathbf{d} = \mathbf{k} \setminus \mathbf{i}$. On ordonne les éléments de \mathbf{c} de façon croissante : $c_1 < \cdots < c_s$, et on ordonne ceux de \mathbf{d} de la façon suivante. Soit d_1 le plus grand élément de \mathbf{d} tel que $d_1 < c_1$, puis d_2 le plus grand élément de $\mathbf{d} \setminus \{d_1\}$ qui soit plus petit que c_2 , et ainsi de suite. On pose alors $B_k = (c_k, d_k)$ pour tout $k \leq s$.

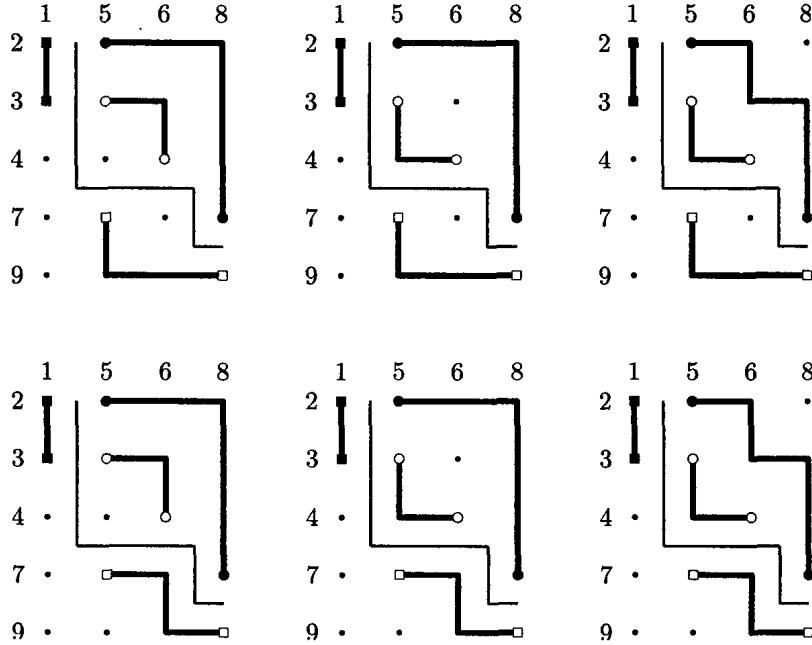
Pour chaque point A_l , soit $\lfloor A_l \rfloor$ (resp. $\lceil A_l \rceil$) le point de $(\bar{k} \times \mathbf{k})^-$ qui est le plus à gauche sur le segment horizontal passant par A_l (resp. le point qui est le plus bas sur le segment vertical passant par A_l). De façon similaire, pour tout point B_k , on note $\lfloor B_k \rfloor$ (resp. $\lceil B_k \rceil$) le point de $(\bar{k} \times \mathbf{k})^+$ qui est le plus à droite sur le segment horizontal passant par B_k (resp. le point le plus haut sur le segment vertical passant par B_k).

Par exemple, pour $\mathbf{j} = 1235$, $\mathbf{i} = 3689$ et $\mathbf{k} = 1568$ dans $I_{4,9}$,



Dans les diagrammes ci-dessus, la ligne brisée sépare $(\bar{k} \times \mathbf{k})^-$ et $(\bar{k} \times \mathbf{k})^+$. On a représenté dans le diagramme de droite $\lfloor A_l \rfloor$ et $\lceil A_l \rceil$ par un \bullet , et $\lfloor A_2 \rfloor$ et $\lceil A_2 \rceil$ par un \circ . (Et de même avec B_1, B_2).

La multiplicité de $e_{\mathbf{k}}$ dans $X_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}}$ est alors le nombre de familles de chemins ne s'intersectant pas et connectant deux points de même type, *i.e.* connectant $\lfloor A_l \rfloor$ à $\lfloor B_k \rfloor$ et $\lceil A_l \rceil$ à $\lceil B_k \rceil$ pour tout l, k . Dans l'exemple ci-dessus, il y a 6 possibilités :



Comme on peut le voir sur cet exemple, la multiplicité se présente sous la forme d'un produit, puisque les chemins tracés dans $(\bar{k} \times k)^-$ ne peuvent rencontrer ceux qui se trouvent dans $(\bar{k} \times k)^+$. Or, les points $[A_l]$ et $[A_l]$ ne dépendent que de j et k . Ainsi, si on applique la même méthode pour le calcul de $\mu_{1\dots d}^j$, on aura les mêmes points $[A_l]$ et $[A_l]$, seuls les points dans $(\bar{k} \times k)^+$ changent. On les note $[B'_k]$ et $[B'_k]$. On peut vérifier que ces derniers sont disposés de sorte qu'il n'y qu'une seule famille de chemins connectant $[B'_k]$ à $[B'_k]$ pour tout k . Par conséquent, le nombre de familles de chemins connectant $[A_l]$ à $[A_l]$ ($l = 1, \dots, r$) est égal à $\mu_{1\dots d}^j = \mu^j$. De même, le nombre de familles de chemins connectant $[B_k]$ à $[B_k]$ ($k = 1, \dots, s$) est égal à $\mu_1^{n-d+1\dots n}$. D'où $\mu_1^j = \mu_1 \mu^j$.

L'égalité $\mu_1^j = \mu_1 \mu^j$ peut être généralisée au cas où G/P est minuscule.

THÉORÈME 0.6.4 ([38]). Soient P un sous-groupe parabolique minuscule de G , et $v \leq \tau \leq w$ dans W^P . On note μ_w (resp. μ^v , μ_w^v) la multiplicité du point T -fixe e_τ sur X_w (resp. sur X^v , sur X_w^v). Alors

$$(1) \quad \mu_w^v = \mu_w \mu^v.$$

La preuve de ce théorème repose sur le fait que si P est minuscule, lorsque l'on se place sur l'unique ouvert T -stable \mathcal{O}_τ contenant e_τ , alors $Y_w = X_w \cap \mathcal{O}_\tau$ et $Y^v = X^v \cap \mathcal{O}_\tau$ sont des cônes de sommet e_τ , de sorte que μ_w^v s'interprète comme degré du cône $Y_w \cap Y^v$. On conclut alors avec le théorème de Bézout (voir [38], Remark 7.6.6). Le fait que Y_w et Y^v soient des cônes de sommet e_τ est encore vrai si P est cominuscule.

7. Résultats de la thèse

Dans le chapitre I, on établit le théorème suivant.

THÉORÈME 0.7.1. *On suppose que $k = \mathbf{C}$. Soit $m \in X_w^v$ un point quelconque, et μ_w (resp. μ^v, μ_w^v) la multiplicité de m sur X_w (resp. X^v, X_w^v). On suppose que P est cominusculaire. Alors la formule (1) est encore vraie.*

Ce résultat permet bien de calculer la multiplicité sur X_w^v , puisque l'on connaît les multiplicités sur X_w et sur X^v : en type A, C, D, E, on peut appliquer les résultats du paragraphe 3.3. Le type B est élémentaire, et couvert dans l'annexe du chapitre I.

Pour prouver ce théorème, on se place de nouveau sur l'ouvert \mathcal{O}_τ (voir la discussion qui suit le théorème 0.6.4), où $\tau \in W^P$ est tel que $m \in C_\tau$. Dans le cas où P est cominusculaire, la variété $Y_w = X_w \cap \mathcal{O}_\tau$ est toujours un cône affine de sommet m , mais ce n'est pas nécessairement le cas pour Y^v . On ne peut donc plus utiliser directement le théorème de Bézout. Par contre, on peut utiliser une formule (voir [53], Theorem 5.11) basée sur une projection centrale, qui relie la multiplicité d'un point sur une variété projective et les degrés de certaines variétés projectives. (Cette formule n'est valable qu'en caractéristique nulle, d'où l'hypothèse $k = \mathbf{C}$ dans le théorème 0.7.1.) Plus précisément, étant donné une variété projective $X \subset \mathbf{P}^N$ et un point m de X , on note p_m la projection de centre m sur un hyperplan ne contenant pas m . Alors la multiplicité $\text{mult}_X(m)$ de m sur X est donnée par la formule

$$\deg X - \text{mult}_X(m) = \begin{cases} \deg(p_m)|_X \deg(p_m X) & \text{si } X \text{ n'est pas un cône de sommet } m, \\ 0 & \text{si } X \text{ est un cône de sommet } m, \end{cases}$$

où $\deg X$ désigne le degré de X , $\deg(p_m)|_X$ est le degré de l'application rationnelle p_m restreint à X , et $p_m X$ est l'adhérence (pour la topologie de Zariski) de $p_m(X \setminus \{m\})$. Par définition, si X est un cône de sommet m , $\deg(p_m)|_X = 0$. Ainsi, cette formule généralise le raisonnement mené pour prouver le théorème 0.6.4.

On identifie \mathcal{O}_τ à un espace affine \mathbf{A}^N , et on applique la formule ci-dessus à l'adhérence projective de $X_w^v \cap \mathcal{O}_\tau \subset \mathbf{A}^N \subset \mathbf{P}^N$. De plus, si P est cominusculaire, on peut relier p_m à une \mathbf{C} -action sur G/P , laquelle permet de prouver toutes les propriétés dont on a besoin pour p_m .

Dans le chapitre II, on se place de nouveau en caractéristique quelconque, et on étudie une désingularisation d'une variété de Richardson $X_w^v \subset Fl(n)$. Plus précisément, soit $w = s_{i_1} \dots s_{i_d}$ une décomposition réduite, $Z = Z_{i_1 \dots i_d}(F_{\text{can}}) \rightarrow X_w$ la désingularisation de Bott-Samelson associée, et de même $Z' = Z_{i_r i_{r-1} \dots i_{d+1}}(F_{\text{op can}}) \rightarrow X^v$ pour une décomposition réduite $w_0 v = s_{i_r} s_{i_{r-1}} \dots s_{i_{d+1}}$, où $F_{\text{op can}}$ est le point T -fixe e_{w_0} . Alors le produit fibré $Z \times_{Fl(n)} Z'$ a été considéré comme une désingularisation de X_w^v dans [9], mais ici, il sera plus pratique de le réaliser comme la fibre $\Gamma_{\mathbf{i}}$ ($\mathbf{i} = i_1 \dots i_d i_{d+1} \dots i_r$) de la projection $Z_{\mathbf{i}} = Z_{\mathbf{i}}(F_{\text{can}}) \rightarrow Fl(n)$ au-dessus de $F_{\text{op can}}$.

Le résultat principal de ce chapitre montre que si $L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}}$ est très ample, alors la théorie des monômes standard de Lakshmibai-Magyar sur $Z_{\mathbf{i}}$ est compatible avec $\Gamma_{\mathbf{i}}$.

THEOREM 0.7.2. *On suppose que \mathbf{m} est régulier, i.e. pour tout j , $m_j > 0$. Les monômes standard p_T tels que $(p_T)|_{\Gamma_{\mathbf{i}}} \neq 0$ forment encore une base de $H^0(\Gamma_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}})$. En outre, $(p_T)|_{\Gamma_{\mathbf{i}}} \neq 0$ si et seulement si T admet un relèvement $J_{11} \supset \dots \supset J_{r_m}$, tel que chaque sous-mot J_{k_m} contient une expression réduite de w_0 .*

On prouve ce théorème en trois étapes :

- (1) On dit que T (ou p_T) est w_0 -standard si la condition ci-dessus sur (J_{km}) est vérifiée. On prouve par récurrence sur $M = \sum_{j=1}^r m_j$ que les monômes w_0 -standard p_T sont linéairement indépendants sur $\Gamma_{\mathbf{i}}$. (Ici l'hypothèse de régularité sur \mathbf{m} n'est pas nécessaire.)
- (2) Dans le cas régulier, on prouve qu'un monôme standard p_T ne s'annule pas identiquement sur $\Gamma_{\mathbf{i}}$ si et seulement s'il est w_0 -standard, en utilisant certaines propriétés combinatoires du produit de Demazure (voir Définition II.4.2). Il s'ensuit que les monômes w_0 -standard forment une base de l'anneau des coordonnées homogènes de $\Gamma_{\mathbf{i}}$ (quand on plonge $\Gamma_{\mathbf{i}}$ dans un espace projectif via le fibré en droites très ample $L_{\mathbf{i},\mathbf{m}}$).
- (3) On utilise des techniques cohomologiques pour prouver que l'application de restriction

$$H^0(Z_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i},\mathbf{m}}) \rightarrow H^0(\Gamma_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i},\mathbf{m}})$$

est surjective. Plus précisément, on définit une famille $(Y_{\mathbf{i}}^u)$ de sous-variétés de $Z_{\mathbf{i}}$ indexée par S_n , satisfaisant $Y_{\mathbf{i}}^e = Z_{\mathbf{i}}$ et $Y_{\mathbf{i}}^{w_0} = \Gamma_{\mathbf{i}}$. On construit une suite de S_n , $e = u_0 < u_1 < \dots < u_N = w_0$, telle que pour tout t , $Y_{\mathbf{i}}^{u_{t+1}}$ soit définie dans $Y_{\mathbf{i}}^{u_t}$ par l'annulation d'une seule coordonnée de Plücker p_{κ} , de telle sorte que l'on puisse prouver que chaque restriction $H^0(Y_{\mathbf{i}}^{u_t}, L_{\mathbf{i},\mathbf{m}}) \rightarrow H^0(Y_{\mathbf{i}}^{u_{t+1}}, L_{\mathbf{i},\mathbf{m}})$ est surjective en utilisant des théorèmes d'annulation (Corollary II.5.7 et Theorem II.5.23). Ceci prouve que les monômes w_0 -standard engendrent $H^0(\Gamma_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i},\mathbf{m}})$.

D'autres bases pour les variétés de Bott-Samelson ont été construites dans [61], et les produits fibrés $Z \times_{F\ell(n)} Z'$ ont été étudiés avec ce point de vue dans [18].

CHAPTER I

Multiplicity on a Richardson variety in a cominuscle G/P

Notations are as in the Introduction, but we assume here that G is adjoint.

Assumption. For the rest of the chapter, the parabolic subgroup P is assumed to be cominuscle, and $k = \mathbf{C}$.

1. Local coordinates

Recall that U_β is the root subgroup associated with β .

Let $m \in X_w^v$. Then m lies in a Schubert cell C_τ for some $\tau \in W^P$. Let

$$U_\tau^- = \prod_{\beta \in \tau(R^+ \setminus R_P^+)} U_{-\beta}$$

and $\mathcal{O}_\tau = U_\tau^- \cdot e_\tau$, where $e_\tau = \tau P$. We identify $U_{-\beta}$ with \mathbf{C} via an isomorphism $\theta_{-\beta} : \mathbf{C} \rightarrow U_{-\beta}$ satisfying

$$t\theta_{-\beta}(x)t^{-1} = \theta_{-\beta}\left(\frac{1}{\beta(t)}x\right)$$

for all $t \in T$ and all $x \in \mathbf{C}$. Let N be the cardinality of $R^+ \setminus R_P^+$. We identify \mathcal{O}_τ with the affine space \mathbf{A}^N via the isomorphism

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{A}^N & \longrightarrow & \mathcal{O}_\tau \\ (x_{-\beta})_{\beta \in \tau(R^+ \setminus R_P^+)} & \longmapsto & \prod_{\beta \in \tau(R^+ \setminus R_P^+)} \theta_{-\beta}(x_{-\beta}) \cdot e_\tau. \end{array}$$

(In particular, N is the dimension of G/P .)

LEMMA I.1.1. *Let $\beta \in R$, and $\tau \in W^P$. Then U_β fixes e_τ if and only if $-\beta \notin \tau(R^+ \setminus R_P^+)$.*

Proof. Let $\beta \in R$, and $\tau \in W^P$. Then

$$\begin{aligned} U_\beta \cdot e_\tau = e_\tau &\iff \tau^{-1}U_\beta \tau P = P \\ &\iff U_{\tau^{-1}\beta} \subset P \\ &\iff \tau^{-1}\beta \in R^+ \text{ or } -\tau^{-1}\beta \in R_P^+ \\ &\iff -\beta \notin \tau(R^+) \text{ or } -\beta \in \tau(R_P^+) \\ &\iff -\beta \notin \tau(R^+ \setminus R_P^+). \quad \square \end{aligned}$$

LEMMA I.1.2. *The Schubert cell C_τ is the affine subspace of \mathcal{O}_τ defined by the vanishing of the coordinates $x_{-\beta}$ with $\beta \in R^+$.*

Proof. Since B is the semi-direct product of T and the unipotent subgroup U , we have $C_\tau = U.e_\tau$. Moreover, for any ordering of positive roots $\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$,

$$U = \prod_{i=1}^p U_{\beta_i}.$$

We choose an ordering such that the positive roots β with $-\beta \notin \tau(R^+ \setminus R_P^+)$ appear at the end. Then, by the preceding lemma, we have:

$$C_\tau = \prod_{\substack{\beta \in \tau(R^+ \setminus R_P^+) \\ \beta < 0}} U_{-\beta}.e_\tau \subset \mathcal{O}_\tau. \quad \square$$

The following lemma will be useful for the next section.

LEMMA I.1.3. *For all $\beta, \gamma \in \tau(R^+ \setminus R_P^+)$ and for all $x, y \in \mathbf{C}$, the elements $\theta_\beta(x)$ and $\theta_\gamma(y)$ commute.*

Proof. We use the following expansion for the commutator (cf. [58], proposition 8.2.3):

$$\theta_\beta(x)\theta_\gamma(y)\theta_\beta(x)^{-1}\theta_\gamma(y)^{-1} = \prod_{\substack{i\beta+j\gamma \in R \\ i,j > 0}} \theta_{i\beta+j\gamma}(c_{\beta,\gamma,i,j} x^i y^j),$$

where $c_{\beta,\gamma,i,j}$ are some constants in \mathbf{C} . Since the commutator must lie in U_τ^- , it suffices to prove that the roots of the form $i\beta + j\gamma$ do not lie in $\tau(R^+ \setminus R_P^+)$. Now, P is the parabolic subgroup associated with the simple root α . Since α is cominuscule, a positive root δ lies in $R^+ \setminus R_P^+$ if and only if α occurs with coefficient 1 in the expression of δ . Clearly, α occurs with a coefficient $i + j$ in $\tau^{-1}(i\beta + j\gamma)$. \square

REMARK I.1.4. Identifying \mathcal{O}_τ with U_τ^- , it follows from Lemma I.1.3 that the isomorphism of algebraic varieties (2) $\mathbf{A}^N \rightarrow \mathcal{O}_\tau$ is also an isomorphism of unipotent groups.

EXAMPLE I.1.5. Let $G = SL_n(\mathbf{C})$. It is a group of type A_{n-1} . The torus T is the group of diagonal matrices of determinant 1, and the Borel subgroup B is the group of upper triangular matrices of determinant 1. The roots are denoted $\alpha_{i,j}$, where

$$\alpha_{i,j} : T \rightarrow \mathbf{C}^* : \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n \end{pmatrix} \mapsto \frac{t_i}{t_j}.$$

The positive roots are the $\alpha_{i,j}$ with $i < j$, and the simple roots are the $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$). Let $\omega = \omega_d$ be the fundamental weight associated with the simple root α_d . The corresponding parabolic subgroup P is

$$P = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0_{(n-d) \times d} & * \end{array} \right) \right\}.$$

The group G acts transitively on the Grassmannian $G_{d,n}$ of d -spaces in \mathbf{C}^n , and P is the isotropy subgroup of the vector space generated by e_1, \dots, e_d , where (e_1, \dots, e_n)

is the canonical basis of \mathbf{C}^n . The Weyl group W of this root system is S_n , and W_P is isomorphic to $S_d \times S_{n-d}$, so

$$W^P = I_{d,n} = \{i = i_1 \dots i_d \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq n\}.$$

The Lie algebra \mathfrak{g} of G is the space of traceless matrices. Let \mathfrak{t} be the Lie algebra of the torus T . We have the weight decomposition of \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbf{C}E_{i,j}$$

where $E_{i,j}$ is the elementary matrix with a 1 on the row i and column j , and zero elsewhere. Thus, the root subgroups are given by

$$U_{\alpha_{i,j}} = \{I_n + xE_{i,j} \mid x \in \mathbf{C}\}$$

and the isomorphism $\theta_{\alpha_{i,j}}$ is just $x \mapsto \exp(xE_{i,j})$. Moreover,

$$R^+ \setminus R_P^+ = \{\alpha_{i,j} \mid i \leq d < j\},$$

so in this case, Lemma I.1.3 becomes an elementary matrix computation.

Returning to the general case, we denote by $(m_{-\beta} \mid \beta \in \tau(R^+ \setminus R_P^+))$ the coordinates of m , that is,

$$m = \prod_{\beta \in \tau(R^+ \setminus R_P^+)} \theta_{-\beta}(m_{-\beta}).e_\tau.$$

NOTATIONS I.1.6. We set:

$$Y_w = X_w \cap \mathcal{O}_\tau, \quad Y^v = X^v \cap \mathcal{O}_\tau, \quad Y_w^v = X_w^v \cap \mathcal{O}_\tau.$$

These sets are affine varieties, *i.e.* Zariski-closed in $\mathcal{O}_\tau = \mathbf{A}^N$.

We now investigate if these affine varieties are cones over m .

PROPOSITION I.1.7. *The varieties Y_w , Y^v and Y_w^v are cones over e_τ .*

Proof. Let $\varpi^\vee : \mathbf{C}^* \rightarrow T$ be the fundamental coweight associated to P . Since ϖ^\vee is minuscule, the pairing $\langle \varpi^\vee, \gamma \rangle$ is equal to 1 if $\gamma \in R^+ \setminus R_P^+$ (and to 0 if $\gamma \in R_P^+$). Now multiplication in \mathbf{A}^N by a scalar ξ is then given by conjugation in U_τ^- by $\tau(\varpi^\vee)(\xi)^{-1} \in T$: indeed, for $\beta = \tau(\gamma)$ with $\gamma \in R^+ \setminus R_P^+$, and for $z \in \mathbf{C}$, we have

$$(3) \quad \tau(\varpi^\vee)(\xi)^{-1} \theta_{-\beta}(z) \tau(\varpi^\vee)(\xi) = \theta_{-\beta}(\xi^{\langle \tau(\varpi^\vee), \beta \rangle} z) = \theta_{-\beta}(\xi^{\langle \varpi^\vee, \gamma \rangle} z) = \theta_{-\beta}(\xi z).$$

Let $x \in Y_w$ (resp. $x \in Y^v$), and $(x_{-\beta})$ be its coordinates. Then the point that has coordinates $(\xi x_{-\beta})$ is $t.x$, where $t = \tau(\varpi^\vee)(\xi) \in T$. Therefore, this point lies in $X_w \cap \mathcal{O}_\tau$ (resp. in $X^v \cap \mathcal{O}_\tau$), since X_w (resp. X^v) is T -stable. It follows that Y_w , Y^v , and therefore Y_w^v are cones over e_τ . \square

PROPOSITION I.1.8. *The variety Y_w is a cone over m .*

Proof. Consider the translation that maps e_τ to m . It is given in coordinates by $(x_{-\beta}) \mapsto (x_{-\beta} + m_{-\beta})$. But if x has coordinates $(x_{-\beta})$, then, by Remark I.1.4 the point of coordinates $(x_{-\beta} + m_{-\beta})$ corresponds to $b.x$, where $b = \prod_{\beta} \theta_{-\beta}(m_{-\beta})$. Since $m_{-\beta} = 0$ for all $\beta > 0$, we have $b \in B$ according to Lemma I.1.2. Now b leaves Y_w invariant and maps e_τ to m . \square

However, the opposite Schubert variety Y^v need not be a cone over m .

EXAMPLE I.1.9. We take the same notations as in Example I.1.5. In particular, using the identification $W^P = I_{d,n}$, we denote a Schubert variety in $G_{d,n}$ by $X_{i_1 \dots i_d}$, and similarly for opposite Schubert and Richardson varieties. In the Grassmannian $G_{3,7}$, consider the Richardson variety X_{356}^{125} . The coordinates on the open set \mathcal{O}_{256} are parametrized by the set $\{12, 15, 16, 32, 35, 36, 42, 45, 46, 72, 75, 76\}$ where ij stands for the root $\alpha_{i,j}$. More precisely, we have:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^{12} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{256} \\ (x_{12}, x_{15}, \dots, x_{76}) & \mapsto & \begin{bmatrix} x_{12} & x_{15} & x_{16} \\ 1 & 0 & 0 \\ x_{32} & x_{35} & x_{36} \\ x_{42} & x_{45} & x_{46} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_{72} & x_{75} & x_{76} \end{bmatrix}. \end{array}$$

Here, a matrix between brackets actually stands for the 3-space in \mathbf{C}^7 generated by its columns. The equations of X_{356} are:

$$\begin{cases} x_{72} = x_{75} = x_{76} = 0 \\ x_{42} = 0 \end{cases}$$

The equations of X^{125} are:

$$\begin{cases} x_{15}x_{36} - x_{35}x_{16} = 0 \\ x_{15}x_{46} - x_{45}x_{16} = 0 \\ x_{35}x_{46} - x_{45}x_{36} = 0 \end{cases}$$

Let

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in X_{356}^{125}.$$

We set:

$$\begin{cases} y_{16} = x_{16} - 1 \\ y_{36} = x_{36} + 1 \\ y_{ij} = x_{ij} & \text{if } ij \notin \{16, 36\} \end{cases}$$

The equations in these new coordinates are:

$$\begin{cases} y_{72} = y_{75} = y_{76} = 0 \\ y_{42} = 0 \end{cases}$$

for X_{356} and

$$\begin{cases} y_{15}(y_{36} - 1) - y_{35}(y_{16} + 1) = 0 \\ y_{15}y_{46} - y_{45}(y_{16} + 1) = 0 \\ y_{35}y_{46} - y_{45}(y_{36} - 1) = 0 \end{cases}$$

for X^{125} . While the equations for X_{356} remain homogeneous, those for X^{125} do not.

If Y^v is indeed a cone over m , then we have the following result. The proof is taken from [38], Remark 7.6.6.

PROPOSITION I.1.10. *Assume Y^v is a cone over m . Let μ_w (resp. μ^v, μ_w^v) be the multiplicity of m on X_w (resp. X^v, X_w^v). Then*

$$(4) \quad \mu_w^v = \mu_w \mu^v.$$

Proof. In this case, $Y_w^v = Y_w \cap Y^v$ is a cone (over m) as well, so we may consider the projective varieties $\mathbf{P}(Y_w)$, $\mathbf{P}(Y^v)$ and $\mathbf{P}(Y_w^v)$, consisting of lines through m . Then μ_w (resp. μ^v, μ_w^v) is just the degree of $\mathbf{P}(Y_w)$ (resp. $\mathbf{P}(Y^v), \mathbf{P}(Y_w^v)$). We conclude with Bézout's theorem since $\mathbf{P}(Y_w)$ and $\mathbf{P}(Y^v)$ intersect transversely (cf. [54], Corollary 1.5). \square

ASSUMPTION I.1.11. For the rest of the chapter, we assume that Y^v is not a cone over m .

It is not clear however whether Y_w^v is a cone or not. This problem will be solved in Section 4.

2. Central projection and proof of Theorem 0.7.1

We shall compute the multiplicity of a point $m \in Y_w^v$ by relating it to degrees of projections, which requires us to work in a projective setting. More precisely, embed \mathbf{A}^N into \mathbf{P}^N via

$$\begin{aligned} \iota : \quad \mathbf{A}^N &\hookrightarrow \mathbf{P}^N = \{[\xi : x_{-\beta}]\} \\ (x_{-\beta}) &\mapsto [1 : x_{-\beta}] \end{aligned}$$

and consider the projective closures

$$Z_w = \overline{\iota(Y_w)}, \quad Z^v = \overline{\iota(Y^v)}, \quad Z_w^v = \overline{\iota(Y_w^v)}.$$

We also identify \mathbf{P}^{N-1} with the hyperplane at infinity $\xi = 0$ and consider the central projection $p_m : \mathbf{P}^N \rightarrow \mathbf{P}^{N-1}$, sending any point $x \neq m$ to the intersection of the line (mx) with \mathbf{P}^{N-1} . If $X \subset \mathbf{P}^N$ is any projective variety and $m \in X$, then we have the following formula (cf. [53], Theorem 5.11):

$$(5) \quad \deg X - \text{mult}_m X = \begin{cases} \deg(p_m)|_X \deg(p_m X) & \text{if } X \text{ is not a cone over } m, \\ 0 & \text{if } X \text{ is a cone over } m, \end{cases}$$

where $\deg X$ is the degree of X , $\deg(p_m)|_X$ is the degree of the rational map p_m restricted to X , and $p_m X$ denotes the Zariski closure of $p_m(X \setminus \{m\})$.

PROPOSITION I.2.1.

- (a) $\deg Z_w^v = \deg Z_w \deg Z^v$.
- (b) Z_w^v is not a cone over m .
- (c) $\deg(p_m)|_{Z_w^v} = \deg(p_m)|_{Z^v}$.
- (d) $\deg(p_m Z_w^v) = \deg Z_w \deg(p_m Z^v)$.

We defer the proof to Section 4.

Proof of Theorem 0.7.1. Using (5) and Proposition I.2.1, we obtain

$$\begin{aligned}
 \mu_w^v &= \deg Z_w^v - \deg(p_m)|_{Z_w^v} \deg(p_m Z_w^v) \\
 &= \deg Z_w \deg Z^v - \deg(p_m)|_{Z^v} \deg Z_w \deg(p_m Z^v) \\
 &= \deg Z_w [\deg Z^v - \deg(p_m)|_{Z^v} \deg(p_m Z^v)] \\
 &= \mu_w \mu^v. \quad \square
 \end{aligned}$$

REMARK I.2.2. In particular, this result enables us to find the singular locus of X_w^v in terms of those of X_w and X^v : the point m is smooth on X_w^v if and only if $\mu_w^v = 1$ if and only if $\mu_w = \mu^v = 1$, that is, if and only if m is smooth on both X_w and X^v . Note that this may also be seen more directly, using the fact that X_w and X^v intersect properly and transversely at any point at which $\mu_w = \mu^v = 1$ (*cf.* [54] Corollary 1.5, or [2] Corollary 2.9).

3. \mathbf{C} -action on G/P

In this section, we introduce the main tool that will permit us to prove Proposition I.2.1 in the next section. Let $e_\tau, m \in \mathcal{O}_\tau$ be as before: we shall construct an action of (the additive group) \mathbf{C} on G/P for which e_τ and m are in the same orbit.

Consider first the map

$$\begin{aligned}
 \varphi^* : \mathbf{C}^* &\rightarrow B \\
 \xi &\mapsto \varphi_\xi = \tau(\varpi^\vee)(\xi)^{-1} b_\tau(\varpi^\vee)(\xi),
 \end{aligned}$$

where $b \in B \cap \mathcal{U}_\tau^-$ is the element defined in the proof of Proposition I.1.8. The computation (3) shows that this map extends to a group homomorphism $\varphi : \mathbf{C} \rightarrow B$. The natural B -action on G/P thus induces a \mathbf{C} -action:

$$\begin{aligned}
 \Phi : \mathbf{C} \times G/P &\rightarrow G/P \\
 (\xi, x) &\mapsto \varphi_{-\xi} \cdot x
 \end{aligned}$$

Moreover, \mathcal{O}_τ is invariant under this action (again by (3)). Actually, \mathbf{C} acts on $\mathcal{O}_\tau = \mathbf{A}^N$ by translations: indeed, we get the following commutative diagram

$$(6) \quad \begin{array}{ccc}
 \mathbf{C} \times \mathbf{A}^N & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{A}^N \\
 \downarrow f & & \downarrow p_{e_\tau} \\
 \mathbf{P}^N & \xrightarrow[p_m]{} & \mathbf{P}^{N-1}
 \end{array} \quad \begin{array}{ccc}
 (\xi, x_{-\beta}) & \xrightarrow{\Phi} & (x_{-\beta} - \xi m_{-\beta}) \\
 \downarrow f & & \downarrow p_{e_\tau} \\
 [\xi : x_{-\beta}] & \xrightarrow[p_m]{} & [0 : x_{-\beta} - \xi m_{-\beta}]
 \end{array}$$

Let us now restrict to Y_w^v : since it is a cone over e_τ , a point $[\xi : x]$ lies in Z_w^v if and only if $x \in Y_w^v$. It follows that $f(\mathbf{C} \times Y_w^v) = Z_w^v$. Thus, the commutative diagram (6) restricts to

$$(7) \quad \begin{array}{ccc}
 \mathbf{C} \times Y_w^v \setminus \{(\xi, \xi m_{-\beta}) \mid \xi \in \mathbf{C}\} & \xrightarrow{\Phi} & \Phi(\mathbf{C} \times Y_w^v) \setminus \{e_\tau\} \\
 \downarrow f & & \downarrow p_{e_\tau} \\
 Z_w^v \setminus \{m\} & \xrightarrow[p_m]{} & \mathbf{P}^{N-1}
 \end{array}$$

REMARK I.3.1. Since (6) is a fibre product diagram, any fibre $\Phi^{-1}(\lambda y)$ (for $\lambda \neq 0$ and $[y] \in \mathbf{P}^{N-1}$) is mapped isomorphically via f to the fibre $p_m^{-1}([y])$. Since we have the equalities $f(\mathbf{C} \times Y_w) = Z_w$, $f(\mathbf{C} \times Y^v) = Z^v$, $f(\mathbf{C} \times Y_w^v) = Z_w^v$ and $\mathbf{C} \times Y_w = f^{-1}(Z_w)$, $\mathbf{C} \times Y^v = f^{-1}(Z^v)$, $\mathbf{C} \times Y_w^v = f^{-1}(Z_w^v)$, the fibres of $\Phi|_{\mathbf{C} \times Y_w}$, $\Phi|_{\mathbf{C} \times Y^v}$, $\Phi|_{\mathbf{C} \times Y_w^v}$ over a point λy are isomorphic to the fibres of $p_m|_{Z_w}$, $p_m|_{Z^v}$, $p_m|_{Z_w^v}$ over the point $[y]$.

In the next section, this remark will allow us to relate the degree of p_m in diagram (7) to that of Φ .

4. Proof of Proposition I.2.1

Proof of (a). Since Y_w, Y^v , and Y_w^v are (affine) cones over e_τ , it is clear that $Z_w^v = Z_w \cap Z^v$. In addition, this intersection is proper and generically transverse ([54], Corollary 1.5), hence $\deg Z_w^v = \deg Z_w \deg Z^v$ by Bézout's theorem.

NOTATIONS I.4.1. We denote by F_w^v the closure in \mathbf{A}^N of $\Phi(\mathbf{C} \times Y_w^v)$, and by d_w^v the degree of $p_m : Z_w^v \setminus \{m\} \rightarrow p_m Z_w^v$ whenever it makes sense (*i.e.* when Z_w^v is not a cone). We define F_w, F^v, d^v in a similar way.

PROPOSITION I.4.2. *When defined, the degree d_w^v is equal to the degree of $\Phi : \mathbf{C} \times Y_w^v \rightarrow F_w^v$.*

Proof. This follows from Remark I.3.1. \square

LEMMA I.4.3. *The following properties are equivalent:*

- Z_w^v is a cone over m ,
- $F_w^v = Y_w^v$,
- every fibre of $\Phi : \mathbf{C} \times Y_w^v \rightarrow F_w^v$ has dimension 1.

In particular, they are true for $v = e$, hence $F_w = Y_w = \Phi(\mathbf{C} \times Y_w)$.

Proof. By Remark I.3.1, we see that the dimension of a generic fibre of Φ equals the dimension of a generic fibre of p_m . Now Z_w^v is a cone over m if and only if every fibre of p_m has dimension 1, if and only if $\dim F_w^v = \dim Y_w^v$. But $Y_w^v = \Phi(0 \times Y_w^v) \subset F_w^v$ and the varieties Y_w^v and F_w^v are irreducible, so Z_w^v is a cone over m if and only if $F_w^v = Y_w^v$. \square

Proof of (b) and (c). By Proposition I.4.2, it suffices to compare the degree d^v of $\Phi^v : \mathbf{C} \times Y^v \rightarrow F^v$ with the degree d_w^v of $\Phi_w^v : \mathbf{C} \times Y_w^v \rightarrow F_w^v$. First, the fibre of a point $x \in G/P$ for Φ is

$$\Phi^{-1}(x) = \{(\xi, \Phi(-\xi, x)) \mid \xi \in \mathbf{C}\}.$$

In particular, a point lies in $\text{Im}(\Phi^v)$ (resp. in $\text{Im}(\Phi_w^v)$) if and only if its \mathbf{C} -orbit meets Y^v (resp. Y_w^v). There exists an open set Ω^v of F^v in which the fibre of every point y consists of d^v points. Then d^v is just the number of points in the \mathbf{C} -orbit of y that belong to Y^v . Now set $y = (y-\beta)_{\beta \in \tau(R^+ \setminus R_P^+)}$ and let

$$c = \prod_{\substack{\beta \in \tau(R^+ \setminus R_P^+) \\ \beta < 0}} \theta_{-\beta}(y-\beta) \quad c^- = \prod_{\substack{\beta \in \tau(R^+ \setminus R_P^+) \\ \beta > 0}} \theta_{-\beta}(-y-\beta),$$

so we have $c.e_\tau = c^-.y =: x$. Since $c \in B$, $x \in C_\tau \subset Y_w$. Now c^- commutes with φ_ξ for all $\xi \in \mathbf{C}$, hence every point in $c^-(\Omega^v)$ has a \mathbf{C} -orbit which meets Y^v in

exactly d^v points. In particular, $F_w^v \neq Y_w^v$, since otherwise every fibre of Φ_w^v would have dimension 1 (by Lemma I.4.3), which is not the case for the fibre of x . This already shows (b), so it makes sense to talk about the degree d_w^v of Φ_w^v . Thus, let Ω_w^v be an open set of F_w^v such that for every point z in Ω_w^v , the fibre of z consists of d_w^v points. Since $x \in c^-(\Omega^v)$, $c^-(\Omega^v) \cap F_w^v$ and Ω_w^v are non-empty open sets of the irreducible variety F_w^v , so they must meet. Taking z in this intersection, we see that $d_w^v = d^v$, which shows (c). \square

PROPOSITION I.4.4. *The intersection $F_w \cap F^v$ is proper and transverse on an open set of F_w^v .*

Proof. The transversality of the intersection $F_w \cap F^v$ on a generic point in F_w^v follows from the transversality of the intersection of a direct Schubert variety and an opposite Schubert variety. More precisely, let $(F_w)_{sm}$ be the open set of smooth points of F_w . Taking a point smooth on Y_w^v shows that $\Omega_w = (F_w)_{sm} \cap F_w^v$ is a non-empty open set of F_w^v . Let $(F^v)_{sm}$ be the open set of smooth points of F^v . Again, $\Omega^v = (F^v)_{sm} \cap F_w^v \neq \emptyset$. Indeed, take a smooth point x of F^v belonging to $\Phi(\mathbf{C} \times Y^v)$. We have seen in the previous proof that from x we can construct an isomorphism c^- of F^v mapping x to a point of F_w^v , which thus remains smooth on F^v . The two non-empty open subsets Ω_w and Ω^v of the irreducible variety F_w^v have a non-empty intersection Ω_w^v . Now $O_w^v = \Phi^{-1}(\Omega_w^v) \cap (\mathbf{P}^1 \times Y_w^v)_{sm} \neq \emptyset$ since $\mathbf{P}^1 \times Y_w^v$ is irreducible. We claim that $\Phi : O_w^v \rightarrow \Omega_w^v$ is dominant. Indeed, we must show that every open subset U of Ω_w^v meets $\Phi(O_w^v)$. Since U is open in F_w^v , $U \cap \Phi(\mathbf{C} \times Y_w^v) \neq \emptyset$. So it makes sense to talk about $\Phi^{-1}(U)$, which is an open set of $\mathbf{C} \times Y_w^v$. Thus, $\Phi^{-1}(U) \cap O_w^v \neq \emptyset$, which implies $U \cap \Phi(O_w^v) \neq \emptyset$. Since $\Phi : O_w^v \rightarrow \Omega_w^v$ is dominant, we know that $\Phi(O_w^v)$ contains a non-empty open set Ω of Ω_w^v . Let us summarize the properties of Ω : it is a non-empty open subset of F_w^v , whose every point y is smooth in both F_w and F^v , and $y = \Phi(p)$ with p smooth in $\mathbf{C} \times Y_w^v$, so p is smooth in both $\mathbf{C} \times Y_w$ and $\mathbf{C} \times Y^v$.

Let $y = \Phi(p) \in \Omega$ be such a point. We view the map $\Phi : \mathbf{C} \times \mathbf{A}^N \rightarrow \mathbf{A}^N : (\xi, x) \mapsto \varphi_{-\xi} \cdot x$ as a map $\Phi : \mathbf{C}^{N+1} \rightarrow \mathbf{C}^N$. It is linear and surjective. Thus,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^N &\supset T_y(F_w) + T_y(F^v) \supset d\Phi_p(T_p(\mathbf{C} \times Y_w)) + d\Phi_p(T_p(\mathbf{C} \times Y^v)) \\ &\supset d\Phi_p(\mathbf{C} \oplus (T_p Y_w + T_p Y^v)) \\ &\supset d\Phi_p(\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}^N) \\ &\supset \mathbf{C}^N. \end{aligned}$$

This transversality result proves that the intersection is proper: indeed, on one hand, $\dim(F_w \cap F^v) \geq \dim(F_w) + \dim(F^v) - N$, but on the other hand,

$$\begin{aligned} \dim(F_w \cap F^v) &\leq \dim(T_y(F_w \cap F^v)) \leq \dim(T_y F_w \cap T_y F^v) \\ &\leq \dim(T_y F_w) + \dim(T_y F^v) - \dim(T_y F_w + T_y F^v) \\ &\leq \dim(F_w) + \dim(F^v) - N. \quad \square \end{aligned}$$

PROPOSITION I.4.5. *We have the equality $F_w^v = F_w \cap F^v$. In particular, the intersection $F_w \cap F^v$ is generically transverse.*

This result will be proved in the next section.

Proof of (d). Since $y = \Phi(\xi, x)$ implies $zy = \Phi(z\xi, zx)$ for all $z \in \mathbf{C}$, $\Phi(\mathbf{C} \times Y_w^v)$ is a cone over e_τ , and so is its closure F_w^v . But by the commutative diagram (7),

$$p_{e_\tau}(F_w^v \setminus \{e_\tau\}) \subset \overline{p_{e_\tau}(\Phi(\mathbf{C} \times Y_w^v) \setminus \{e_\tau\})} = p_m Z_w^v.$$

Comparing dimensions, we see that $p_{e_\tau} F_w^v = p_m Z_w^v$, i.e. $p_m Z_w^v$ is the projective variety at infinity of the cone F_w^v . In particular, $\deg(p_m Z_w^v) = \deg(F_w^v)$, and similarly $\deg(p_m Z_w) = \deg(F_w)$ and $\deg(p_m Z^v) = \deg(F^v)$. Equality (d) now follows from Proposition I.4.4 and Bézout's theorem, noting that $\deg(p_m Z_w) = \deg(Z_w)$. \square

5. Proof of Proposition I.4.5

Since $\Phi(\mathbf{C} \times Y_w^v) \subset \Phi(\mathbf{C} \times Y_w) \cap \Phi(\mathbf{C} \times Y^v)$, we obtain $F_w^v \subset F_w \cap F^v$. Moreover, the first inclusion is an equality: indeed, if $z = \Phi(\xi, x) \in Y_w$ with $\xi \in \mathbf{C}$, $x \in Y^v$, then $x = \Phi(-\xi, z) \in Y_w$ since $\Phi(\mathbf{C} \times Y_w) = Y_w$, so $z = \Phi(\xi, x) \in \Phi(\mathbf{C} \times Y_w^v)$.

However, the inclusion $F_w \cap F^v \subset F_w^v$ requires some work. Let $\mathcal{U} = \{(\xi, x, \Phi(\xi, x)) \mid \xi \in \mathbf{C}, x \in G/P\}$ and Γ be its closure in $\mathbf{P}^1 \times G/P \times G/P$ (so Γ is the graph of Φ viewed as a rational map). We have a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & & (\xi, x, y) \\ \pi_1 \times \pi_2 \downarrow & \searrow \pi_3 & \downarrow \pi_1 \times \pi_2 \\ \mathbf{P}^1 \times G/P & \xrightarrow[\Phi]{} & G/P \\ & & (\xi, x) \xrightarrow[\Phi]{} \Phi(\xi, x) \end{array}$$

The morphism $\pi_1 \times \pi_2 : \Gamma \rightarrow \mathbf{P}^1 \times G/P$ is surjective, and restricts to an isomorphism between \mathcal{U} and $\mathbf{C} \times G/P$. In particular, Γ is an irreducible projective variety of dimension $N + 1$.

Likewise, let $\mathcal{U}_w = \{(\xi, x, \Phi(\xi, x)) \mid \xi \in \mathbf{C}, x \in X_w\}$ and Γ_w be its closure, and similarly for \mathcal{U}^v , \mathcal{U}_w^v , Γ^v , Γ_w^v . Then $\pi_3(\Gamma_w) = \pi_3(\mathcal{U}_w) = \overline{\pi_3(\mathcal{U}_w)}$ in G/P , so $\pi_3(\Gamma_w) \cap \mathcal{O}_\tau$ is the closure of $\pi_3(\mathcal{U}_w) \cap \mathcal{O}_\tau = \Phi(\mathbf{C} \times Y_w)$ in \mathcal{O}_τ . Proceeding similarly with Γ^v and Γ_w^v , we obtain

$$\pi_3(\Gamma_w) \cap \mathcal{O}_\tau = F_w, \quad \pi_3(\Gamma^v) \cap \mathcal{O}_\tau = F^v, \quad \pi_3(\Gamma_w^v) \cap \mathcal{O}_\tau = F_w^v.$$

We now need to study the π_3 -fibre of a point in F_w . Actually, if y is in Y_w , then its fibre lies entirely in Γ_w . Indeed, U_τ^- naturally acts on G/P and on Γ via $g \cdot (\xi, x, y) = (\xi, g \cdot x, g \cdot y)$ (since U_τ^- is Abelian), and the morphism π_3 is U_τ^- -equivariant. It follows that whenever two points in G/P belong to the same U_τ^- -orbit, their fibres are isomorphic. Now since $\pi_3 : \Gamma \rightarrow G/P$ is dominant, there is an open set in G/P in which every point has a fibre of pure dimension 1. Since \mathcal{O}_τ is open in G/P , it meets this open set, and since \mathcal{O}_τ is a U_τ^- -orbit in G/P , y itself has a fibre of pure dimension 1.

Now fix an irreducible component C of $\pi_3^{-1}(y)$. Then

$$(\pi_1 \times \pi_2(C)) \cap (\mathbf{C} \times G/P) \subset \Phi^{-1}(y).$$

If $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, then the left hand side of this inclusion is non-empty and of dimension 1. Since $\Phi^{-1}(y)$ is isomorphic to the \mathbf{C} -orbit of y , it is itself irreducible

of dimension (at most) 1, hence the inclusion becomes an equality. Taking closures, we then obtain $C = \overline{\{(\xi, x, y) | (\xi, x) \in \Phi^{-1}(y)\}}$; in particular, C is the unique irreducible component of $\pi_3^{-1}(y)$ that intersects \mathcal{U} . Note also that $C \subset \Gamma_w$.

Now let C' be an irreducible component of $\pi_3^{-1}(y)$ different from C , so that $C' \subset \{\infty\} \times G/P \times \{y\}$. Let $\Gamma_\infty \subset \Gamma$ be the subvariety $\pi_1^{-1}(\infty)$. We have a U_τ^- -equivariant morphism $\pi : \Gamma_\infty \rightarrow G/P : (\infty, x, y) \mapsto y$, so C' is an irreducible subvariety of the fibre $\pi^{-1}(y)$. Since $\Gamma_\infty \subsetneq \Gamma$, its dimension is at most N . Because of the equivariance of π , we see that \mathcal{O}_τ is in the image of π , so π is surjective. Decomposing Γ_∞ into irreducible components $\Gamma_\infty = C_1 \cup \dots \cup C_r$, we obtain $G/P = \pi(C_1) \cup \dots \cup \pi(C_r)$, so that for some i , $\pi : C_i \rightarrow G/P$ is onto. Renumbering the C_i , we may assume that for some $t \geq 1$, C_1, \dots, C_t are mapped surjectively to G/P , and C_{t+1}, \dots, C_r are not. For $i \leq t$, there is an open set U_i of G/P such that each element on U_i has a finite fibre in C_i . For $i > t$, let U_i be the open set $G/P \setminus \pi(C_i)$. Taking the intersection $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$, we obtain a non-empty open set of G/P satisfying the following property: for each $z \in U$, the fibre of z in Γ_∞ consists of a finite number of points. Again, U meets the open orbit \mathcal{O}_τ , so this property is true for every point in \mathcal{O}_τ , in particular for y . So C' is included in the finite fibre $\pi^{-1}(y)$: a contradiction. Therefore, C' cannot exist, *i.e.* $\pi_3^{-1}(y) = C \subset \Gamma_w$ is irreducible, and not contained in $\{\infty\} \times G/P \times G/P$.

Assume now that $F_w^v \neq F_w \cap F^v$. By Proposition I.4.4, F_w^v and $F_w \cap F^v$ have the same dimension, thus $F_w \cap F^v$ is not irreducible. Let F be an irreducible component of the intersection $F_w \cap F^v$ different from F_w^v . Let $y \in F$, and assume that $y \notin F_w^v$. Then $y \notin \pi_3(\mathcal{U}^v)$, so $\pi_3^{-1}\{y\} \subset \Gamma^v \setminus \mathcal{U}^v \subset \{\infty\} \times G/P \times G/P$. But $y \in F_w$, and we have seen that in this case $\pi_3^{-1}(y)$ is never contained in $\{\infty\} \times G/P \times G/P$. This gives a contradiction. \square

Appendix: Singularities of Schubert varieties in $SO(2n+1)/P_1$

In this Appendix, we shall determine the singular locus of Schubert varieties in G/P , where G is of type B_n and P is cominuscule. So let $V = \mathbf{C}^{2n+1}$ together with a non-degenerate symmetric bilinear form (\cdot, \cdot) given in the canonical basis (e_1, \dots, e_{2n+1}) by the anti-diagonal matrix E with 1's all along the anti-diagonal. The expression of the quadratic form Q associated with (\cdot, \cdot) is

$$Q(x_1, \dots, x_{2n+1}) = x_{n+1}^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i x_{2n+2-i}.$$

Let $G = SO(V)$, $B \subset G$ the subgroup of upper triangular matrices, and $T \subset G$ the subgroup of diagonal matrices. Then B is a Borel subgroup of G and T is a maximal torus of G . The group G acts naturally on V , and e_1 is a highest weight vector, of weight ω_1 (the unique cominuscule weight of G), so that G/P_1 gets identified with the G -orbit of the line generated by e_1 :

$$G/P_1 = \{[x_1 : \dots : x_{2n+1}] \mid Q(x_1, \dots, x_{2n+1}) = 0\}$$

In this setting, the Schubert varieties are given by

$$X_i = \{[x_1 : \dots : x_i : 0 : \dots : 0] \mid Q(x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0) = 0\},$$

with $1 \leq i \leq 2n+1$, but $i \neq n+1$. Indeed, let $x = [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : 0 : \dots : 0]$ with $Q(x) = 0$, and let us prove that $x \in C_i$, that is, there exists $b \in B$ such

that $x = b.e_i$. A straightforward calculation shows that we may take the columns b_1, \dots, b_{2n+1} of b as follows:

- Case 1: $i < n + 1$.

$$b_j = \begin{cases} e_j & \text{if } j \neq i \text{ and } j \leq 2n + 2 - i \\ x & \text{if } j = i \\ e_j - x_{2n+2-j}e_{2n+2-i} & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Case 2: $i > n + 1$.

$$b_j = \begin{cases} e_j & \text{if } j \leq 2n + 2 - i \\ x & \text{if } j = i \\ e_j - x_{2n+2-j}e_{2n+2-i} & \text{otherwise} \end{cases}$$

The Jacobian criterion easily shows that $\text{Sing } X_i$ is equal to X_{2n+1-i} if $i > n+1$, and empty if $i < n+1$. Moreover, since X_i is defined by a single quadratic equation, the multiplicity of a singular point must be equal to 2. Hence there are two cases for the multiplicity $\mu_i(x)$ of a point $x = [x_1 : \dots : x_i : 0 : \dots : 0]$ on X_i :

- Case 1: $i < n + 1$. Then $\mu_i(x) = 1$.
- Case 2: $i > n + 1$. Then

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x_i = \dots = x_{2n+2-i} = 0, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Of course, we have the same result for the opposite Schubert varieties

$$X^j = \{[0 : \dots : 0 : x_j : \dots : x_{2n+1}] \mid Q(0, \dots, 0, x_j, \dots, x_{2n+1}) = 0\}$$

There are again two cases for the multiplicity $\mu^j(x)$ of $x = [0 : \dots : 0 : x_j : \dots : x_{2n+1}]$ on X^j :

- Case 1: $j < n + 1$. Then

$$\mu^j(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x_j = \dots = x_{2n+2-j} = 0, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Case 2: $j > n + 1$. Then $\mu^j(x) = 1$.

Note that a Richardson variety X_i^j ($j \leq i$) also is a quadric in a projective space, so the multiplicity of a point $m \in X_i^j$ must be at most 2. But by Theorem 0.7.1, if m were singular in both X_i and in X^j , then its multiplicity would be 4. This means that $\text{Sing } X_i \cap \text{Sing } X^j = \emptyset$, a fact that can also be verified directly: indeed, if this intersection is non-empty, then $2n + 3 - j \leq 2n + 1 - i$, so $j \leq i \leq j - 2$, a contradiction.

CHAPTER II

Standard Monomial Theory for desingularized Richardson varieties in the flag variety $GL(n)/B$

1. Desingularized Richardson varieties

The notations are as in the Introduction. In addition, if $k, l \in \mathbf{Z}$, then we denote by $[k, l]$ the set $\{k, k+1, \dots, l\}$, and by $[l]$ the set $[1, l]$. For a permutation $w \in S_n$, we also use the one line notation $\{w(1)w(2)\dots w(n)\}$.

We first recall a number of results on Bott-Samelson varieties (see *e.g.* [51]).

DEFINITION II.1.1. Two flags F, G in $F\ell(n)$ are called *i-adjacent* if they coincide except (possibly) at their components of dimension i , a situation denoted by $F \stackrel{i}{\sim} G$.

NOTATIONS II.1.2. For $i \in [n]$, we denote by $F\ell(\hat{i})$ the variety of partial flags

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{i-1} \subset V_{i+1} \subset \dots \subset V_n, \quad (\dim V_j = j),$$

and by $\psi_i : F\ell(n) \rightarrow F\ell(\hat{i})$ the natural projection.

Then F and G are *i-adjacent* if and only if they have the same image by ψ_i .

Consider a word $\mathbf{i} = i_1 \dots i_r$ in $[n-1]$, with $w(\mathbf{i}) = s_{i_1} \dots s_{i_r} \in S_n$ not necessarily reduced. A *gallery of type \mathbf{i}* is a sequence of the form

$$(8) \quad F_0 \stackrel{i_1}{\sim} F_1 \stackrel{i_2}{\sim} \dots \stackrel{i_r}{\sim} F_r.$$

For a given flag F_0 , the *Bott-Samelson variety* of type \mathbf{i} starting at F_0 is the set of all galleries (8), *i.e.* the fibred product

$$Z_{\mathbf{i}}(F_0) = \{F_0\} \times_{F\ell(\hat{i}_1)} F\ell(n) \times_{F\ell(\hat{i}_2)} \dots \times_{F\ell(\hat{i}_r)} F\ell(n)$$

(a subvariety of $F\ell(n)^r$). In particular, $Z_{i_1 \dots i_r}(F_0)$ is a \mathbf{P}^1 -fibration over $Z_{i_1 \dots i_{r-1}}(F_0)$, which shows by induction over r that Bott-Samelson varieties are smooth.

Each subset $J = \{j_1 < \dots < j_k\} \subset [r]$ defines a subword $\mathbf{i}(J) = (i_{j_1}, \dots, i_{j_k})$ of \mathbf{i} . We then write $Z_J(F_0)$ instead of $Z_{\mathbf{i}(J)}(F_0)$, and we view it as the subvariety of $Z_{\mathbf{i}}(F_0)$ consisting of all galleries (8) such that $F_{j-1} = F_j$ whenever $j \notin J$.

We denote by $F_{\text{can}} : \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \dots \subset \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ the flag associated to the canonical basis, and by $F_{\text{op can}} : \langle e_n \rangle \subset \langle e_n, e_{n-1} \rangle \subset \dots \subset \langle e_n, e_{n-1}, \dots, e_1 \rangle$ the opposite canonical flag. Note that $F_{\text{op can}} = e_{w_0}$.

In the sequel, we shall only need galleries starting at F_{can} or at $F_{\text{op can}}$; in particular, we write $Z_{\mathbf{i}} = Z_{\mathbf{i}}(F_{\text{can}})$.

The (diagonal) B -action on $F\ell(n)^r$ leaves $Z_{\mathbf{i}}$ invariant. In particular, the T -fixed points of $Z_{\mathbf{i}}$ are the galleries of the form

$$F_{\text{can}} \stackrel{i_1}{\sim} e_{u_1} \stackrel{i_2}{\sim} e_{u_1 u_2} \stackrel{i_3}{\sim} \dots \stackrel{i_r}{\sim} e_{u_1 \dots u_r},$$

where each $u_j \in S_n$ is either e or s_{i_j} . This gallery will be denoted $e_J \in Z_1$, where $J = \{j \mid u_j = s_{i_j}\} = \{j_1 < \dots < j_k\}$.

For $j \in [r]$, we denote by $\text{pr}_j : Z_1 \rightarrow \text{Fl}(n)$ the projection sending the gallery (8) to F_j . Note that $w(\mathbf{i}(J)) = s_{i_{j_1}} \dots s_{i_{j_k}} = u_1 \dots u_r$, so $\text{pr}_r(e_J) = e_{u_1 \dots u_r} = e_{w(\mathbf{i}(J))}$.

When \mathbf{i} is reduced, i.e. $w = s_{i_1} \dots s_{i_r}$ is a reduced expression in S_n , a flag F lies in the Schubert variety X_w if and only if there is a gallery of type $\mathbf{i} = i_1 \dots i_r$ from F_{can} to F , hence the last projection pr_r takes Z_1 surjectively to X_w . Moreover, this surjection is birational: it restricts to an isomorphism over the Schubert cell $C_w = B \cdot e_w$: thus, $\text{pr}_r : Z_1 \rightarrow X_w$ is a desingularization of X_w , and likewise for the last projection $Z_1(F_{\text{Op can}}) \rightarrow X^{w_0 w}$.

When \mathbf{i} is not necessarily reduced, $\text{pr}_r(Z_1)$ may be described as follows. Recall [42, Definition-Lemma 1] that the poset $\{w(\mathbf{i}(J)) \mid J \subset [r]\}$ admits a unique maximal element, denoted by $w_{\max}(\mathbf{i})$ (so $w_{\max}(\mathbf{i}) = w(\mathbf{i})$ if and only if \mathbf{i} is reduced):

PROPOSITION II.1.3. *Let \mathbf{i} be an arbitrary word. Then $\text{pr}_r(Z_1)$ is the Schubert variety X_w , where $w = w_{\max}(\mathbf{i})$.*

Proof. Since $\text{pr}_r(Z_1)$ is B -stable, it is a union of Schubert cells. But Z_1 is a projective variety, so the morphism pr_r is closed, hence $\text{pr}_r(Z_1)$ is a union of Schubert varieties, and therefore a single Schubert variety X_w since Z_1 is irreducible. Moreover, the T -fixed points e_J in Z_1 project to the T -fixed points $e_{w(\mathbf{i}(J))}$ in X_w , and all T -fixed points of X_w are obtained in this way (indeed, if e_w is such a point, then the fibre $\text{pr}_r^{-1}(e_w)$ is T -stable, so it must contain some e_J by Borel's fixed point theorem). In particular, e_w corresponds to a choice of $J \subset \{1, \dots, r\}$ such that $w(\mathbf{i}(J))$ is maximal, hence the result. \square

We now turn to the description of a desingularization of a Richardson variety $X_w^v = X_w \cap X^v$, $v \leq w \in S_n$. Let $Z = Z_{i_1 \dots i_d}$ for some reduced decomposition $w = s_{i_1} \dots s_{i_d}$ and $Z' = Z_{i_r \dots i_{d+1}}(F_{\text{Op can}})$ for some reduced decomposition $w_0 v = s_{i_r} s_{i_{r-1}} \dots s_{i_{d+1}}$. Since Z desingularizes X_w and Z' desingularizes X^v , a natural candidate for a desingularization of X_w^v is the fibred product $Z \times_{\text{Fl}(n)} Z'$. However, we wish to see this variety in a slightly different way: an element of $Z \times Z'$ is a pair of galleries

$$\begin{aligned} & F_{\text{can}} \xrightarrow{i_1} F_1 \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_d} F_d, \\ & F_{\text{Op can}} \xrightarrow{i_r} G_{r-1} \xrightarrow{i_{r-1}} \dots \xrightarrow{i_{d+1}} G_d, \end{aligned}$$

and it belongs to $Z \times_{\text{Fl}(n)} Z'$ when the end points F_d and G_d coincide: in this case, by reversing the second gallery, they concatenate to form a longer gallery

$$F_{\text{can}} \xrightarrow{i_1} F_1 \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_d} F_d \xrightarrow{i_{d+1}} \dots \xrightarrow{i_r} F_{\text{Op can}}.$$

Thus, $Z \times_{\text{Fl}(n)} Z'$ identifies with the set of all galleries in $Z_1 = Z_{i_1 \dots i_r}$ that end in $F_{\text{Op can}}$, i.e. with the fibre

$$\Gamma_1 = \text{pr}_r^{-1}(F_{\text{Op can}})$$

of the last projection $\text{pr}_r : Z_1 \rightarrow \text{Fl}(n)$. By construction, the d th projection pr_d then maps Γ_1 onto the Richardson variety X_w^v .

PROPOSITION II.1.4. *In the above notation, the d th projection $\text{pr}_d : \Gamma_1 \rightarrow X_w^v$ is a desingularization, i.e. pr_d is birational, and the variety Γ_1 is smooth and irreducible.*

Proof. We first compute the dimension of Γ_1 : since pr_r is surjective, there exists a non-empty open set O in $F\ell(n)$ such that every point $F \in O$ has a fibre of pure dimension $\dim(Z_1) - \dim(F\ell(n))$. Since the flag variety $F\ell(n)$ is irreducible, O meets the open set $C_{w_0} = B.e_{w_0}$. Let $F \in O \cap C_{w_0}$. Since pr_r is B -equivariant, the fibres of F and $F_{\text{op can}} = e_{w_0}$ are isomorphic. In particular, they have the same dimension, so $\dim(\Gamma_1) = \dim(Z_1) - \dim(F\ell(n))$.

Next we show that Γ_1 is smooth. Let $\gamma \in \Gamma_1$. We want to prove that the tangent space $T_\gamma(\Gamma_1)$ of Γ_1 at γ and Γ_1 have the same dimension. Let $\Omega = \text{pr}_r^{-1}(C_{w_0})$. Let U be the maximal unipotent subgroup of B . This subgroup acts simply transitively on the Schubert cell C_{w_0} . Consider the morphism

$$\begin{aligned} s: C_{w_0} = U.e_{w_0} &\rightarrow \Omega \\ u.e_{w_0} &\mapsto u.\gamma \end{aligned}$$

Since pr_r is U -equivariant, we have $\text{pr}_r \circ s = \text{id}_{C_{w_0}}$. Differentiating this equality in e_{w_0} gives $d\text{pr}_r(\gamma) \circ ds(e_{w_0}) = \text{id}_{T_{e_{w_0}}F\ell(n)}$. In particular, the linear map $d\text{pr}_r(\gamma): T_\gamma(Z_1) \rightarrow T_{e_{w_0}}(F\ell(n))$ is surjective. Moreover, $T_\gamma(\Gamma_1) \subset \ker(d\text{pr}_r(\gamma))$. From this, we deduce

$$\begin{aligned} \dim(\Gamma_1) &\leq \dim T_\gamma(\Gamma_1) \leq \dim T_\gamma(Z_1) - \dim T_{e_{w_0}}(F\ell(n)) \\ &\leq \dim Z_1 - \dim F\ell(n) \quad (\text{since } Z_1 \text{ and } F\ell(n) \text{ are both smooth}) \\ &\leq \dim \Gamma_1, \end{aligned}$$

hence Γ_1 is smooth.

Now we show that Γ_1 is irreducible. Let C_1, \dots, C_e be the irreducible components of Γ_1 . Since Γ_1 is smooth, the C_j are also the connected components of Γ_1 . The variety Ω is open in Z_1 . In particular, Ω is irreducible. Since pr_r is B -equivariant,

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^e \bigcup_{b \in B} bC_i.$$

Let $\Omega_i = \bigcup_{b \in B} bC_i$. The morphism $f: U \times \Gamma_1 \rightarrow \Omega, (b, \gamma) \mapsto b.\gamma$ is an isomorphism. In particular, $\Omega_i = f(U \times C_i)$ is an irreducible closed set in Ω . So $\Omega = \bigcup_{i=1}^e \Omega_i$ is a disjoint decomposition of Ω into irreducibles. Hence $e = 1$, and Γ_1 is irreducible.

Finally, to show that $\Gamma_1 \rightarrow X_w^v$ is birational, we consider the projections $\text{pr}_d: Z \rightarrow X_w$ and $\text{pr}_{r-d}: Z' \rightarrow X^v$. Since they are birational, there exist open subsets $U_w \subset X_w$ and $O \subset Z$ isomorphic under pr_d , and open subsets $U^v \subset X^v$ and $O' \subset Z'$ isomorphic under pr_{r-d} . Then the open set $(O \times O') \cap (Z \times_{F\ell(n)} Z')$ of $Z \times_{F\ell(n)} Z'$ is isomorphic to the open set $U_w \cap U^v$ of X_w^v under $\text{pr}_d: Z \times_{F\ell(n)} Z' \rightarrow X_w^v$. Since X_w^v and $Z \times_{F\ell(n)} Z' \cong \Gamma_1$ are irreducible, these open subsets must be dense. The birationality of $\text{pr}_d: \Gamma_1 \rightarrow X_w^v$ follows. \square

REMARK II.1.5. In characteristic 0, it can be proved more directly that the fibred product $Z \times_{F\ell(n)} Z'$ is smooth using Kleiman's transversality theorem (*cf.* [24], Theorem 10.8). Moreover, this theorem also states that every irreducible component of $Z \times_{F\ell(n)} Z'$ is of dimension $\dim(Z) + \dim(Z') - \dim(F\ell(n))$. To prove the irreducibility, consider ∂Z (resp. $\partial Z'$) the union of all Bott-Samelson varieties X with $X \subsetneq Z$ (resp. $X \subsetneq Z'$). By Kleiman's transversality theorem, the dimension of $(\partial Z \times_{F\ell(n)} Z') \cup (Z \times_{F\ell(n)} \partial Z')$ is less than $\dim(Z \times_{F\ell(n)} Z')$. So, on one hand, the fibred-product $O = (Z \setminus \partial Z) \times_{F\ell(n)} (Z' \setminus \partial Z')$ meets each irreducible

component of $Z \times_{F\ell(n)} Z'$, hence O is dense. On the other hand, O is isomorphic to the Richardson cell C_w^v , hence O is irreducible. Therefore, $Z \times_{F\ell(n)} Z'$ is irreducible.

For \mathbf{i} an arbitrary word, we may still consider the variety $\Gamma_{\mathbf{i}}$ of galleries of type \mathbf{i} , beginning at F_{can} and ending at $F_{\text{op can}}$. In general this variety is no longer birational to a Richardson variety. But we still have

PROPOSITION II.1.6. *Let $\mathbf{i} = i_1 \dots i_r$ be an arbitrary word, and consider the projection $\text{pr}_j : \Gamma_{\mathbf{i}} \rightarrow F\ell(n)$. Then $\text{pr}_j(\Gamma_{\mathbf{i}})$ is the Richardson variety X_y^x where $y = w_{\max}(i_1 \dots i_j)$ and $x = w_0 w_{\max}(i_{j+1} \dots i_r)^{-1}$. Moreover, $\Gamma_{\mathbf{i}}$ is smooth and irreducible.*

Proof. The variety $\Gamma_{\mathbf{i}}$ is isomorphic to the fibred product

$$Z_{i_1 \dots i_j} \times_{F\ell(n)} Z_{i_{r \dots i_{j+1}}}(F_{\text{op can}}),$$

hence

$$\begin{aligned} \text{pr}_j(\Gamma_{\mathbf{i}}) &= \text{pr}_j(Z_{i_1 \dots i_j}) \cap \text{pr}_{r-j}(Z_{i_{r \dots i_{j+1}}}(F_{\text{op can}})) \\ &= X_{w_{\max}(i_1 \dots i_j)} \cap w_0 X_{w_{\max}(i_{r \dots i_{j+1}})} \\ &= X_y^x. \end{aligned}$$

Eventually, we may prove that $\Gamma_{\mathbf{i}}$ is smooth and irreducible exactly as in the proof of Proposition II.1.4. \square

EXAMPLE II.1.7. We consider the Richardson variety $X_w^v \subset F\ell(4)$ with $w = [4231]$ and $v = [2143]$. A flag $F = (F^1 \subset F^2 \subset F^3 \subset F^4 = k^4)$ belongs to the Schubert variety X_w if and only if F^2 meets $\langle e_1, e_2 \rangle$.

Since $w = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$ is a reduced decomposition, the Bott-Samelson variety Z_{12321} desingularizes X_w . An element of Z_{12321} is a gallery

$$F_{\text{can}} \overset{1}{-} F_1 \overset{2}{-} F_2 \overset{3}{-} F_3 \overset{2}{-} F_4 \overset{1}{-} F_5.$$

A flag G belongs to the opposite Schubert variety if and only if $G^1 \subset \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ and $G^3 \supset \langle e_4 \rangle$.

Similarly, $w_0 v = s_2 s_1 s_3 s_2$ is a reduced decomposition, so the Bott-Samelson variety $Z_{2312}(F_{\text{op can}})$ desingularizes the opposite Schubert variety X^v . An element of $Z_{2312}(F_{\text{op can}})$ is a gallery

$$F_{\text{op can}} \overset{2}{-} G_8 \overset{1}{-} G_7 \overset{3}{-} G_6 \overset{2}{-} G_5.$$

Therefore, an element of the variety $\Gamma_{123212312}$ has the form

$$\gamma = (F_{\text{can}} \overset{1}{-} F_1 \overset{2}{-} F_2 \overset{3}{-} F_3 \overset{2}{-} F_4 \overset{1}{-} F_5 \overset{2}{-} G_6 \overset{3}{-} G_7 \overset{1}{-} G_8 \overset{2}{-} F_{\text{op can}}).$$

The projection

$$\text{pr}_5 : \gamma \mapsto F_5 = G_5$$

maps $\Gamma_{123212312}$ birationally to X_w^v .

There are only two singular points on X_w^v , namely e_w and e_v . Their fibres $\text{pr}_5^{-1}(e_w)$ and $\text{pr}_5^{-1}(e_v)$ are 1-dimensional. Indeed, given a gallery $\gamma \in \Gamma_{\mathbf{i}}$, let V_j be the i_j -th component of $\text{pr}_j(\gamma)$. Since $\text{pr}_{j-1}(\gamma) \stackrel{i_j}{\supset} \text{pr}_j(\gamma)$, we know $\text{pr}_j(\gamma)$ as soon as we know $\text{pr}_{j-1}(\gamma)$ and V_j . Thus, a gallery can be given by the sequence V_1, \dots, V_9 . With this description, a gallery in the fibre of e_w is then given by

$$\langle e_2 \rangle, \langle e_2, e_3 \rangle, \langle e_2, e_3, e_4 \rangle, \langle e_2, e_4 \rangle, \langle e_4 \rangle, \langle e_4, x e_2 + y e_3 \rangle, \langle e_2, e_3, e_4 \rangle, \langle e_4 \rangle, \langle e_3, e_4 \rangle,$$

with $[x : y] \in \mathbf{P}^1$.

Similarly, the fibre of e_v is given by

$\langle xe_1 + ye_2 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_2, e_4 \rangle, \langle e_2, e_3, e_4 \rangle, \langle e_4 \rangle, \langle e_3, e_4 \rangle,$
with $[x : y] \in \mathbf{P}^1$.

2. Background on SMT for Bott-Samelson varieties

In this section, we recall from [42] the main definitions and results about Standard Monomial Theory for Bott-Samelson varieties.

DEFINITIONS II.2.1. A *tableau* is a sequence $T = t_1 \dots t_p$ with $t_j \in [n]$. If $T = t_1 \dots t_p$ and $T' = t'_1 \dots t'_p$ are two tableaux, then the *concatenation* $T * T'$ is the tableau $t_1 \dots t_p t'_1 \dots t'_p$. We denote by \emptyset the empty tableau, so that $T * \emptyset = \emptyset * T = T$.

A *column* κ of size i is a tableau $\kappa = t_1 \dots t_i$ with $1 \leq t_1 < \dots < t_i \leq n$. The set of all columns of size i is denoted by $I_{i,n}$. The *Bruhat order* on $I_{i,n}$ is defined by

$$\kappa = t_1 \dots t_i \leq \kappa' = t'_1 \dots t'_i \iff t_1 \leq t'_1, \dots, t_i \leq t'_i.$$

The symmetric group S_n acts on $I_{i,n}$: if $w \in S_n$ and $\kappa = t_1 \dots t_i \in I_{i,n}$, then $w\kappa$ is the column obtained by rearranging the tableau $w(t_1) \dots w(t_i)$ in an increasing sequence.

For $i \in [n]$, the *fundamental weight column* ϖ_i is the sequence $12 \dots i$.

We shall be interested in a particular type of tableau, called standard.

DEFINITIONS II.2.2. Let $\mathbf{i} = i_1 \dots i_r$, and $\mathbf{m} = m_1 \dots m_r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^r$. A *tableau of shape* (\mathbf{i}, \mathbf{m}) is a tableau of the form

$$\kappa_{11} * \dots * \kappa_{1m_1} * \kappa_{21} * \dots * \kappa_{2m_2} * \dots * \kappa_{r1} * \dots * \kappa_{rm_r}$$

where κ_{km} is a column of size i_k for every k, m . (If $m_k = 0$, there is no column in the corresponding position of T .)

A *lifting* of T is a sequence of subwords of \mathbf{i}

$$J_{11} \supset \dots \supset J_{1m_1} \supset J_{21} \supset \dots \supset J_{2m_2} \supset \dots \supset J_{r1} \supset \dots \supset J_{rm_r}$$

such that $J_{km} \cap [k]$ is a reduced subword of \mathbf{i} and $w(\mathbf{i}(J_{km} \cap [k]))\varpi_{i_k} = \kappa_{km}$. If such a lifting exists, then the tableau T is said to be *standard*.

REMARK II.2.3. The last equality in the definition of a lifting may be viewed geometrically as follows. If $J \subset [r]$ and $j \in [r]$, then $\text{pr}_j : Z_1 \rightarrow F\ell(n)$ maps $Z_J \subset Z_1$ onto a Schubert variety $X_w \subset F\ell(n)$ (cf. Proof of Proposition II.1.3). In the notations of Section 1, the images of T -fixed points of Z_J under pr_j are of the form $\text{pr}_j(e_K) = e_{u_1 \dots u_j} = e_{w(\mathbf{i}(K \cap [j]))}$ with K running over all subsets of J , hence $w = w_{\max}(\mathbf{i}(J \cap [j]))$. In turn, the image of $\text{pr}_j(Z_J)$ by the projection $F\ell(n) \rightarrow G_{i_j, n}$ is equal to the Schubert variety $X_{w\varpi_j}$: for $J = J_{km}$ in the above lifting, this projection is therefore equal to $X_{\kappa_{km}}$. We shall follow up on this point of view in Remark II.4.7.

NOTATION II.2.4. Each column $\kappa \in I_{i,n}$ identifies with a weight of $GL(n)$, in such a way that the fundamental weight column ϖ_i corresponds to the i th fundamental weight of $GL(n)$. Therefore, we also denote by ϖ_i this fundamental weight.

We recall the Plücker embedding: given an i -subspace V of k^n , choose a basis v_1, \dots, v_i of V , and let M be the matrix of the vectors v_1, \dots, v_i written in the basis (e_1, \dots, e_n) . We associate to each column $\kappa = t_1 \dots t_i$ the minor $p_\kappa(V)$ of M on rows t_1, \dots, t_i . Then the map $p : V \mapsto [p_\kappa(V) \mid \kappa \in I_{i,n}]$ is the Plücker embedding.

Let $\pi_i : Fl(n) \rightarrow G_{i,n}$ be the natural projection. We denote by L_{ω_i} the line bundle $(p \circ \pi_i)^* \mathcal{O}(1)$.

Now consider the tensor product $L_{\omega_{i_1}}^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes L_{\omega_{i_r}}^{\otimes m_r}$ on $Fl(n)^r$, and denote by $L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}}$ its restriction to $Z_{\mathbf{i}} \subset Fl(n)^r$.

DEFINITION II.2.5. To a tableau $T = \kappa_{11} * \dots * \kappa_{1m_1} * \dots * \kappa_{r1} * \dots * \kappa_{rm_r}$, one associates the section $p_T = p_{\kappa_{11}} \otimes \dots \otimes p_{\kappa_{1m_1}} \otimes \dots \otimes p_{\kappa_{r1}} \otimes \dots \otimes p_{\kappa_{rm_r}}$ of $L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}}$. If T is standard of shape (\mathbf{i}, \mathbf{m}) , then p_T is called a *standard monomial of shape (\mathbf{i}, \mathbf{m})* .

THEOREM II.2.6 ([42]).

- (1) *The standard monomials of shape (\mathbf{i}, \mathbf{m}) form a basis of the space of sections $H^0(Z_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}})$.*
- (2) *For $i > 0$, $H^i(Z_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}}) = 0$.*
- (3) *The variety $Z_{\mathbf{i}}$ is projectively normal for any embedding induced by a very ample line bundle $L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}}$.*

3. Linear Independence

EXAMPLE II.3.1. We want to see on Example II.1.7 how one may construct an SMT for the varieties $\Gamma_{\mathbf{i}}$.

Consider the line bundle $L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}}$ on $Z_{\mathbf{i}}$ where $\mathbf{i} = 123212312$ and $\mathbf{m} = 200010111$. We consider the restriction map $H^0(Z_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}}) \rightarrow H^0(\Gamma_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}})$, and a natural idea to get a basis of $H^0(\Gamma_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}})$ is to take all the standard monomials that do not belong to its kernel.

So let $T = \kappa_{11} * \kappa_{12} * \kappa_{51} * \kappa_{71} * \kappa_{81} * \kappa_{91}$ be a tableau of shape (\mathbf{i}, \mathbf{m}) . The monomial p_T does not vanish identically on $\Gamma_{\mathbf{i}}$ if and only if $\kappa_{11}, \kappa_{12} \in \{1, 2\}$, $\kappa_{51} \neq 1$, $\kappa_{71} = 234$, $\kappa_{81} = 4$, $\kappa_{91} = 34$.

One may check (by computer) that there are 708 standard tableaux. Among these tableaux, 9 do not vanish identically:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2 * 2 * \emptyset * \emptyset * \emptyset * 4 * \emptyset * 234 * 4 * 34 & T_4 &= 2 * 1 * \emptyset * \emptyset * \emptyset * 4 * \emptyset * 234 * 4 * 34 \\ T_2 &= 2 * 2 * \emptyset * \emptyset * \emptyset * 3 * \emptyset * 234 * 4 * 34 & T_5 &= 2 * 1 * \emptyset * \emptyset * \emptyset * 3 * \emptyset * 234 * 4 * 34 \\ T_3 &= 2 * 2 * \emptyset * \emptyset * \emptyset * 2 * \emptyset * 234 * 4 * 34 & T_6 &= 2 * 1 * \emptyset * \emptyset * \emptyset * 2 * \emptyset * 234 * 4 * 34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_7 &= 1 * 1 * \emptyset * \emptyset * \emptyset * 4 * \emptyset * 234 * 4 * 34 \\ T_8 &= 1 * 1 * \emptyset * \emptyset * \emptyset * 3 * \emptyset * 234 * 4 * 34 \\ T_9 &= 1 * 1 * \emptyset * \emptyset * \emptyset * 2 * \emptyset * 234 * 4 * 34 \end{aligned}$$

Moreover, the tableaux T_i admit the following liftings (J_{km}^i)

$$\begin{array}{lll}
J_{11}^1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{11}^4 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{11}^7 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \\
J_{21}^1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{21}^4 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{21}^7 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \\
J_{51}^1 = \{3,4,5,6,7,8,9\} & J_{51}^4 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{51}^7 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \\
J_{71}^1 = \{3,4,5,6,7,8,9\} & J_{71}^4 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{71}^7 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \\
J_{81}^1 = \{3,4,5,6,7,9\} & J_{81}^4 = \{2,3,4,5,6,7,9\} & J_{81}^7 = \{2,3,4,5,6,7,9\} \\
J_{91}^1 = \{3,4,5,6,7,9\} & J_{91}^4 = \{2,3,4,5,6,7\} & J_{91}^7 = \{2,3,4,5,6,7\} \\
\\
J_{11}^2 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{11}^5 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{11}^8 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \\
J_{21}^2 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{21}^5 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{21}^8 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \\
J_{51}^2 = \{1,2,3,5,6,7,8,9\} & J_{51}^5 = \{2,3,5,6,7,8,9\} & J_{51}^8 = \{2,3,5,6,7,8,9\} \\
J_{71}^2 = \{1,2,3,5,6,8,9\} & J_{71}^5 = \{2,3,5,6,7,8,9\} & J_{71}^8 = \{2,3,5,6,7,8,9\} \\
J_{81}^2 = \{1,2,3,5,6,8,9\} & J_{81}^5 = \{2,3,5,6,7,8,9\} & J_{81}^8 = \{2,3,5,6,7,8,9\} \\
J_{91}^2 = \{1,2,3,5,6,8\} & J_{91}^5 = \{2,3,5,6,7,8\} & J_{91}^8 = \{2,3,5,6,7,8\} \\
\\
J_{11}^3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{11}^6 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{11}^9 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \\
J_{21}^3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{21}^6 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} & J_{21}^9 = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \\
J_{51}^3 = \{1,2,3,4,6,7,8,9\} & J_{51}^6 = \{3,5,6,7,8,9\} & J_{51}^9 = \{3,5,6,7,8,9\} \\
J_{71}^3 = \{1,2,3,4,8,9\} & J_{71}^6 = \{3,5,6,7,8,9\} & J_{71}^9 = \{3,5,6,7,8,9\} \\
J_{81}^3 = \{1,2,3,4,8,9\} & J_{81}^6 = \{3,5,6,7,8,9\} & J_{81}^9 = \{3,5,6,7,8,9\} \\
J_{91}^3 = \{1,2,3,4,8,9\} & J_{91}^6 = \{3,5,6,7,8,9\} & J_{91}^9 = \{3,5,6,7,8,9\}
\end{array}$$

These liftings have the following property: $w_{\max}(\mathbf{i}(J_{km}^i)) = w_0$ for each k, m . We then say that T_i is w_0 -standard. It can be checked that the standard tableaux that are not w_0 -standard vanish identically on Γ_1 .

To see that the remaining monomials p_{T_i} are linearly independent, we may work on an open affine set. There exists an open set Ω of Z_1 such that $\Gamma_1 \cap \Omega$ is isomorphic to the affine space k^3 (see Definition II.5.10 and Proposition II.5.19). Here, we have

$$\varphi : (x, y, z) \mapsto (V_1, \dots, V_9),$$

for

$$\begin{array}{ll}
V_1 = \langle xe_1 + e_2 \rangle & V_2 = \langle xe_1 + e_2, -xye_1 + e_3 \rangle \\
V_3 = \langle xe_1 + e_2, -xye_1 + e_3, e_4 \rangle & V_4 = \langle xe_1 + e_2, -xyze_1 + ze_3 + e_4 \rangle \\
V_5 = \langle yze_2 + ze_3 + e_4 \rangle & V_6 = \langle yze_2 + ze_3 + e_4, ye_2 + e_3 \rangle \\
V_7 = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle & V_8 = \langle e_4 \rangle \\
V_9 = \langle e_3, e_4 \rangle &
\end{array}$$

We denote again by p_T the polynomial $\varphi^*((p_T)|_\Omega)$. We then have

$$\begin{array}{lll}
p_{T_1} = 1, & p_{T_4} = x, & p_{T_7} = x^2, \\
p_{T_2} = z, & p_{T_5} = xz, & p_{T_8} = x^2z, \\
p_{T_3} = yz, & p_{T_6} = xyz, & p_{T_9} = x^2yz.
\end{array}$$

It is clear that these monomials are linearly independent in $k[x, y, z]$.

Definitions II.3.2 below will generalize the behaviour of the liftings (J_{km}^i) observed in this example.

DEFINITIONS II.3.2. Let T be a standard tableau of shape (\mathbf{i}, \mathbf{m}) . We say that T (or the monomial p_T) is w_0 -standard if there exists a lifting (J_{km}) of T such that each subword J_{km} contains a reduced expression of w_0 .

More generally, if $J \subset [r]$ contains a reduced expression for w_0 , then $\Gamma_J = Z_J \cap \Gamma_{\mathbf{i}} \neq \emptyset$, and we say that T (or p_T) is w_0 -standard on Γ_J if there exists a lifting (J_{km}) of T such that for every k, m , $J \supset J_{km}$ and J_{km} contains a reduced expression of w_0 .

Similarly, T (or p_T) is said to be w_0 -standard on a union $\Gamma = \Gamma_{J_1} \cup \dots \cup \Gamma_{J_k}$ if T is w_0 -standard on at least one of the components $\Gamma_{J_1}, \dots, \Gamma_{J_k}$. We then denote by $\mathcal{S}(\Gamma)$ the set of all w_0 -standard tableaux on Γ .

We need some results about *positroid varieties*. References for these varieties can be found in [33].

Let π_i be the canonical projection $Fl(n) \rightarrow G_{i,n}$. In general, the projection of a Richardson variety $X_w^v \subset Fl(n)$ is no longer a Richardson variety. But $\pi_i(X_w^v)$ is still defined inside the Grassmannian $G_{i,n}$ by the vanishing of some Plücker coordinates. More precisely, consider the set $\mathcal{M} = \{\kappa \in I_{i,n} \mid e_\kappa \in \pi_i(X_w^v)\}$. Then

$$\Pi = \pi_i(X_w^v) = \{V \in G_{i,n} \mid \kappa \notin \mathcal{M} \implies p_\kappa(V) = 0\}.$$

The poset \mathcal{M} is a *positroid* (see the paragraph following Lemma 3.20 in [33]), and the variety Π is called a *positroid variety*.

LEMMA II.3.3. *With the notation above,*

$$\mathcal{M} = \{\kappa \in I_{i,n} \mid \exists u \in [v, w], u\varpi_i = \kappa\}.$$

Proof. Let $u \in [v, w]$ and $\kappa = u\varpi_i$. Then $e_u \in X_w^v$, so $e_\kappa = \pi_i(e_u) \in \Pi$. Hence $\kappa \in \mathcal{M}$.

Conversely, let $\kappa \in \mathcal{M}$. The fibre $\pi_i^{-1}\{e_\kappa\}$ in X_w^v is a non-empty T -stable variety, hence, by Borel's fixed point theorem, this variety has a T -fixed point e_u , $u \in S_n$. It follows that $u \in [v, w]$ and $u\varpi_i = \kappa$. \square

THEOREM II.3.4. *For every subword J_1, \dots, J_k containing a reduced expression of w_0 , the w_0 -standard monomials on the union $\Gamma = \Gamma_{J_1} \cup \dots \cup \Gamma_{J_k}$ are linearly independent.*

Proof. We imitate the proof of the corresponding proposition for Bott-Samelson varieties appearing in [42, Section 3.2]. Let \mathcal{T} be a non-empty subset of $\mathcal{S}(\Gamma)$, and assume that we are given a linear relation among monomials p_T for T in \mathcal{T} :

$$(*) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}} a_T p_T(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Moreover, we may assume that the coefficients appearing in this relation are all non-zero. We shall proceed by induction on the length of tableaux, that is, on $M = \sum_{i=1}^r m_i$.

If $M = 1$, then \mathbf{m} has the form $0 \dots 1 \dots 0$, that is, we have $m_e = 1$ for some e , and $m_i = 0$ for all $i \neq e$. The tableaux T that appear in relation $(*)$ are of the form $T = \kappa_e$, where $\kappa_e \in I_{i_e, n}$. If $\gamma = (F_{\text{can}}, F_1, \dots, F_r = F_{\text{op can}}) \in \Gamma$

then $p_T(\gamma) = p_{\kappa_e}(F_e)$. Thus, we have a linear relation of Plücker coordinates in a union of Richardson varieties in $Fl(n)$, hence a linear relation on one of these Richardson varieties. But Standard Monomial Theory for Richardson varieties (cf. [40], Theorem 32) shows that such a relation cannot exist.

Now assume that $M > 1$, and $\mathbf{m} = 0 \dots 0 m_e \dots m_r$ with $m_e > 0$. Here, we denote by κ_{km}^T the columns of a tableau T . Consider an element κ minimal among the first columns of the tableaux of \mathcal{T} , that is,

$$\kappa \in \min\{\kappa_{e1}^T \mid T \in \mathcal{T}\}.$$

We consider the set $\mathcal{T}(\kappa)$ of tableaux T in \mathcal{T} with $\kappa_{e1}^T = \kappa$. For every $T \in \mathcal{T}(\kappa)$, fix a maximal lifting $J_{e1}^T \supset \dots \supset J_{rm_r}^T$ containing a reduced expression of w_0 and with J_{e1}^T contained in one of the subwords J_1, \dots, J_k , so that $\Gamma \supset \Gamma_{J_{e1}^T} \neq \emptyset$. Thus, we can restrict the relation (*) on

$$\Gamma(\kappa) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}(\kappa)} \Gamma_{J_{e1}^T}.$$

If $T \in \mathcal{T}(\kappa)$, then $T = \kappa * T'$, and T' is a w_0 -standard tableau on $\Gamma(\kappa)$ of shape $(\mathbf{i}, 0 \dots 0 m_e - 1 \dots m_r)$.

If $T \notin S(\kappa)$, then $\kappa_{e1}^T \not\leq \kappa$, so $p_{\kappa_{e1}^T}$ vanishes identically on the Schubert variety $X_\kappa \subset G_{i_e, n}$, hence on each Schubert variety $X_{w_{\max}(i(J_{e1}^T))}$ for $S \in \mathcal{T}(\kappa)$. In particular, $p_{\kappa_{e1}^T}$ vanishes on $\Gamma(\kappa)$, and p_T as well.

Restrict relation (*) to $\Gamma(\kappa)$:

$$p_\kappa(\gamma) \sum_{T \in \mathcal{T}(\kappa)} a_T p_{T'}(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma(\kappa).$$

This product vanishes on each irreducible $\Gamma_{J_{e1}^T}$ ($T \in \mathcal{T}(\kappa)$). Now, p_κ does not vanish identically on $\Gamma(J_{e1}^T)$. Indeed, we know by Proposition II.1.6 that $\text{pr}_e(\Gamma(J_{e1}^T))$ is the Richardson variety X_y^x with $y = w(i(J_{e1}^T)) \geq x$. Since $\kappa = y w_{i_e}$, by Lemma II.3.3 p_κ does not vanish identically on X_y^x , hence does not vanish identically on $\Gamma(J_{e1}^T)$.

So we may simplify by p_κ on the irreducible $\Gamma_{J_{e1}^T}$, hence a linear relation between w_0 -standard monomials on $\Gamma(\kappa)$ of shape $(\mathbf{i}, 0 \dots 0 m_e - 1 \dots m_r)$. By induction over M , $a_T = 0$ for all $T \in \mathcal{T}(\kappa)$: a contradiction. \square

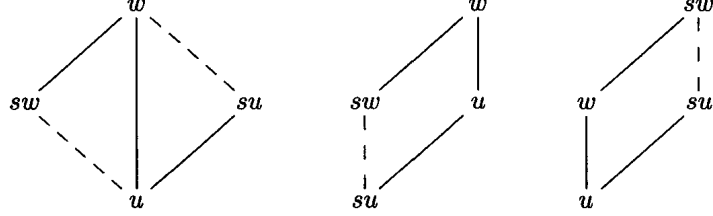
4. Standard monomials that do not vanish on Γ_1 are w_0 -standard

In this section, we shall prove that the standard monomials that do not vanish identically on Γ_1 are w_0 -standard, provided certain assumptions over \mathbf{m} , which cover the regular case (i.e. $m_i > 0$ for every i).

LEMMA II.4.1 (Lifting Property [5, Proposition 2.2.7]). *Let s be a simple transposition, and $u < w$ in S_n .*

- If $u < su$ and $w > sw$, then $u \leq sw$ and $su \leq w$.
- If $u > su$ and $w > sw$, then $su \leq sw$.
- If $u < su$ and $w < sw$, then $su \leq sw$. \square

We may represent these situations by the pictures below



DEFINITION II.4.2. Let $x, y \in S_n$. The Demazure product $x * y$ is the unique maximal element of the poset $\mathcal{D}(x, y) = \{uv \mid u \leq x, v \leq y\}$.

PROPOSITION II.4.3 ([55, 26]). Let $x, y \in S_n$. The double coset $B(x*y)B$ is the unique $B \times B$ -double coset that is open in $BxB yB$. In particular, $*$ is associative. \square

LEMMA II.4.4. Let s be a simple transposition, and $x \in S_n$. Then $x * s = \max(x, xs)$. Similarly, $s * x = \max(x, sx)$.

Proof. We shall prove that $x * s = \max(x, xs)$, the proof of $s * x = \max(x, sx)$ being similar.

- Case 1: $x > xs$. Let $u \leq x$. If $us < u$, then $us \leq x$. If $us > u$, then by Lemma II.4.1, we have $us \leq x$. Hence every element of $\mathcal{D}(x, s)$ is less than or equal to x , so $x * s = x = \max(x, xs)$.
- Case 2: $x < xs$. Let $u \leq x$. If $us < u$, then $us \leq xs$. If $us > u$, then by Lemma II.4.1, $us \leq xs$. Thus, every element of $\mathcal{D}(x, s)$ is less than or equal to xs , so $x * s = xs = \max(x, xs)$. \square

LEMMA II.4.5. Let J be a subword of \mathbf{i} . For every $k \in [r]$,

$$w_{\max}(\mathbf{i}(J)) = w_{\max}(\mathbf{i}(J \cap [k])) * w_{\max}(\mathbf{i}(J \cap [k+1, r])).$$

Proof. Let

$$\begin{aligned} w &= w_{\max}(\mathbf{i}(J)) \\ x &= w_{\max}(\mathbf{i}(J \cap [k])) \\ y &= w_{\max}(\mathbf{i}(J \cap [k+1, r])) \end{aligned}$$

Each element uv of $\mathcal{D}(x, y)$ has a decomposition of the form $w(\mathbf{i}(K_1))w(\mathbf{i}(K_2))$ with $K_1 \subset J \cap [k]$ and $K_2 \subset J \cap [k+1, r]$. Hence,

$$uv = w(\mathbf{i}(K_1 \cup K_2)) \leq w,$$

so $x * y \leq w$.

Conversely, let $K' \subset J$ be such that $w(\mathbf{i}(K')) = w$ is a reduced decomposition. Since

$$w = w(\mathbf{i}(K' \cap [k]))w(\mathbf{i}(K' \cap [k+1, r])),$$

we have $w \in \mathcal{D}(x, y)$, hence $w \leq x * y$. \square

LEMMA II.4.6 ([25, 2.2.(4)]). If $x' \leq x$ and $y' \leq y$, then $x' * y' \leq x * y$.

Proof. By Proposition II.4.3, we have

$$B(x' * y')B \subset \overline{BxB} \overline{ByB} \subset \overline{BxB yB} = \overline{B(x * y)B},$$

hence $x' * y' \leq x * y$. \square

Let T be a standard tableau of shape (\mathbf{i}, \mathbf{m}) , and e be the least integer such that $m_e \neq 0$, so $\mathbf{m} = 0 \dots 0 m_e \dots m_r$. We give the construction of a particular type of liftings of T (called optimal), in light of the following

REMARK II.4.7. Let (K_{km}) be an arbitrary lifting of T and set

$$w_{km} = w(\mathbf{i}(K_{km} \cap [k])),$$

so that $w_{km}\varpi_k = \kappa_{km}$. By Remark II.2.3, $\text{pr}_k(Z_{K_{km}}) = X_{w_{km}}$, with the following consequences.

- For each k , $K_{k1} \supset \dots \supset K_{km_k}$ yields $w_{k1} \geq \dots \geq w_{km_k}$.
- Let l be the least integer such that $l > k$ and $m_l \neq 0$. Then $K_{km_k} \supset K_{l,1}$ yields $\text{pr}_l(Z_{K_{l,1}}) \subset \text{pr}_l(Z_{K_{km_k}})$, hence

$$w(\mathbf{i}(K_{l,1} \cap [l])) \leq w_{\max}(\mathbf{i}(K_{km_k} \cap [l])).$$

By Lemma II.4.5,

$$w_{\max}(\mathbf{i}(K_{km_k} \cap [l])) = w(\mathbf{i}(K_{k,m_k} \cap [k])) * w_{\max}(\mathbf{i}(K_{k,m_k} \cap [k+1, l])).$$

So

$$w_{l,1} \leq w_{k,m_k} * w_{\max}(\mathbf{i}(K_{k,m_k} \cap [k+1, l])).$$

We shall also need a result due to V. Deodhar:

NOTATION II.4.8. Let $\kappa \in I_{i,n}$ and $w \in S_n$. We set

$$\mathcal{E}(w, \kappa) = \{v \in S_n \mid v \leq w, v\varpi_i = \kappa\}.$$

LEMMA II.4.9 ([41, Lemma 11]). *Let $\kappa \in I_{i,n}$, and $w \in S_n$. If $\mathcal{E}(w, \kappa) \neq \emptyset$, then it admits a unique maximal element.* \square

REMARK II.4.10. The above lemma admits the following geometric interpretation. Let q be the restriction to X_w of the canonical projection $Fl(n) \rightarrow G_{i,n}$. Since q is B -equivariant, $q^{-1}(X_\kappa)$ is a union of Schubert varieties, namely

$$q^{-1}(X_\kappa) = \bigcup_{v \in \mathcal{E}(w, \kappa)} X_v.$$

By Lemma II.4.9, we conclude that $q^{-1}(X_\kappa)$ is a single Schubert variety.

There exists a dual version of the lemma: if $w\varpi_i \geq \kappa$, then the set

$$\{v \in S_n \mid v \geq w, v\varpi_i = \kappa\}$$

admits a unique minimal element. Hence, $q^{-1}(X^\kappa)$ is a single opposite Schubert variety.

We now construct elements $v_{km} \in S_n$ inductively, as follows. At the first step, consider the set

$$\mathcal{E}(w_{\max}(i_1 \dots i_e), \kappa_{e1}).$$

Since it contains w_{e1} , it is nonempty, so it has a maximal element v_{e1} , which is unique thanks to Lemma II.4.9. Now assume that $v_{km} \geq w_{km}$ has already been constructed. We then proceed in the same way to construct $v_{k,m+1}$ (if $m < m_k$) or $v_{l,1}$ (if $m = m_k$, and $l > k$ is the least integer such that $m_l \neq 0$):

- If $m < m_k$, then the set $\mathcal{E}(v_{k,m}, \kappa_{k,m+1})$ is nonempty (since it contains $w_{k,m+1}$), so let $v_{k,m+1}$ be its unique maximal element.
- If $m = m_k$, then let $v'_{k,m} = v_{k,m} * w_{\max}(i_{k+1} \dots i_l)$. By Lemma II.4.6,

$$w_{k,m} * w_{\max}(i(K_{k,m} \cap [k+1, l])) \leq v'_{k,m}.$$

Thus, by Remark II.4.7 the set $\mathcal{E}(v'_{k,m}, \kappa_{l,1})$ contains $w_{l,1}$, so it is nonempty. Let $v_{l,1}$ be its unique maximal element.

REMARK II.4.11. Although the *existence* of the v_{km} depends on that of the w_{km} (i.e. on the existence of a lifting of the tableau T), the *values* of the v_{km} only depend on the tableau T itself.

Next, we construct subsets $E_{km} \subset [k]$, again inductively. Since

$$v_{e1} \leq w_{\max}(i_1 \dots i_e),$$

choose $E_{e1} \subset \{i_1 \dots i_e\}$ such that v_{e1} admits a reduced expression of the form $\mathbf{i}(E_{e1})$. If $E_{k,m}$ such that $v_{k,m} = w(\mathbf{i}(E_{k,m}))$ has already been constructed, then define $E_{k,m+1}$ (if $m < m_k$) or $E_{l,1}$ (if $m = m_k$) as follows:

- If $m < m_k$, then $v_{k,m+1} \leq v_{k,m} = w(\mathbf{i}(E_{k,m}))$, so choose $E_{k,m+1} \subset E_{k,m}$ such that $v_{k,m+1}$ admits a reduced expression of the form $\mathbf{i}(E_{k,m+1})$.
- If $m = m_k$, then by Lemma II.4.5

$$v_{l,1} \leq v'_{k,m_k} = w_{\max}(i(E_{km_k} \cup \{k+1, \dots, l\})),$$

so choose $E_{l,1} \subset E_{km_k} \cup \{k+1, \dots, l\}$ such that $v_{l,1}$ admits a reduced expression of the form $\mathbf{i}(E_{l,1})$.

DEFINITION II.4.12. With the above notation, set $J_{km} = E_{km} \cup [k+1, r]$ for each k, m . We will call (J_{km}) an *optimal lifting* of the tableau T .

REMARK II.4.13. The optimal lifting is not unique. However, while it depends on the choice of reduced expressions for the v_{km} , it is still independent on the choice of the initial lifting (K_{km}) .

EXAMPLE II.4.14. Consider the tableau $T = 123 * 13 * 3 * 134 * 24 * 124$ of shape $(321323213, 1111110000)$. This tableau is standard, and we shall construct an optimal lifting of T .

- $v_{11} = \max \mathcal{E}(s_3, 123) = e$.
- $v_{21} = \max \mathcal{E}(e * s_2, 13) = s_2$.
- $v_{31} = \max \mathcal{E}(s_2 * s_1, 3) = s_2 s_1$.
- $v_{41} = \max \mathcal{E}(s_2 s_1 * s_3, 134) = s_2 s_1 s_3$.
- $v_{51} = \max \mathcal{E}(s_2 s_1 s_3 * s_2, 24) = s_1 s_3 s_2$.
- $v_{61} = \max \mathcal{E}(s_1 s_3 s_2 * s_3, 124) = s_1 s_3$.

Hence

$$\begin{aligned} J_{11} &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J_{21} &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J_{31} &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J_{41} &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J_{51} &= \{3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J_{61} &= \{3,4,7,8,9,10\} \end{aligned}$$

is an optimal lifting of T . Another optimal lifting of T is

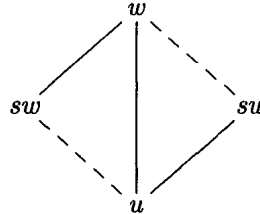
$$\begin{aligned} J'_{11} &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J'_{21} &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J'_{31} &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J'_{41} &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J'_{51} &= \{3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J'_{61} &= \{3,6,7,8,9,10\} \end{aligned}$$

LEMMA II.4.15. *Let $w \in S_n$ and $\kappa \in I_{i,n}$ be such that $\mathcal{E}(w, \kappa) \neq \emptyset$. Consider a simple transposition s such that $sw < w$.*

- (1) *If $s\kappa > \kappa$, then $\max \mathcal{E}(w, \kappa) = \max \mathcal{E}(sw, \kappa)$.*
- (2) *If $s\kappa \leq \kappa$, then $\max \mathcal{E}(w, \kappa) = s * \max \mathcal{E}(sw, s\kappa)$.*

Proof. Let $u = \max \mathcal{E}(w, \kappa)$.

- Case 1: assume that $su > u$. Then, by Lemma II.4.1,

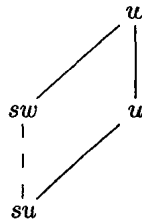


we have $u \leq sw$ and $su \leq w$. Hence $s\kappa \geq \kappa$, but by maximality of u , $su \notin \mathcal{E}(w, \kappa)$, hence $s\kappa > \kappa$. Since $u \leq sw$, $u \in \mathcal{E}(sw, \kappa)$, so

$$u \leq \max \mathcal{E}(sw, \kappa) \leq \max \mathcal{E}(w, \kappa) = u.$$

This proves the part (1) of the lemma.

- Case 2: $su < u$. Then $s\kappa \leq \kappa$, and by Lemma II.4.1,



we have $su \leq sw$, so $su \in \mathcal{E}(sw, s\kappa)$, hence $su \leq v = \max \mathcal{E}(sw, s\kappa)$. We distinguish two subcases:

- Subcase 1: $s\kappa < \kappa$. Then $sv > v$. Since we also have $su < u$, it follows from Lemma II.4.1 that $v \leq su$. Similarly, $sv > v$, together with $sw < w$ imply that $sv \leq w$, so $sv \in \mathcal{E}(w, \kappa)$, hence $sv \leq u$. By Lemma II.4.1, we have $v \leq su$. So $v = su$, or equivalently

$$u = sv = \max(v, sv) = s * v.$$

- Subcase 2: $s\kappa = \kappa$.

- * If $u \leq sw$, then $u \in \mathcal{E}(sw, \kappa)$, so $u \leq v$. But $v \leq u$, so $u = v$.
- * If $u \not\leq sw$, then $su \in \mathcal{E}(sw, \kappa)$, so $su \leq v \leq u$. In other words, $v \in \{u, su\}$.

In each of these two situations, we have $u = v$ or $u = sv$. But, if $sv > v$ then $u \neq v$ (since $su < u$), so $u = sv = \max(v, sv) = s * v$. If $sv < v$, then $u \neq sv$, so

$$u = v = s * v. \quad \square$$

Let $w = s_{i_1} \dots s_{i_j}$ be a reduced expression. The lemma above gives an algorithm to find a reduced expression of $u = \max \mathcal{E}(w, \kappa)$, say $u = w(\mathbf{i}(J))$, with $J \subset [j]$: let $s = s_{i_1}$, and compare $s\kappa$ with κ .

- If $s\kappa > \kappa$, then $u = \max \mathcal{E}(sw, \kappa)$.
- If $s\kappa \leq \kappa$, then $u = s * \max \mathcal{E}(sw, s\kappa)$.

We then compute $\max \mathcal{E}(sw, s\kappa)$ or $\max \mathcal{E}(sw, \kappa)$ in the same way, using the decomposition $sw = s_{i_2} \dots s_{i_j}$.

EXAMPLE II.4.16. In S_4 , take $w = [4231] = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$ and $\kappa = 13$. We shall compute $u = \max \mathcal{E}(w, \kappa)$ with the previous algorithm. Note that $\kappa \leq 24 = w\varpi_2$, hence $\mathcal{E}(w, \kappa) \neq \emptyset$.

- $s_1 \kappa = 23 > \kappa$, so $u = \max \mathcal{E}(s_2 s_3 s_2 s_1, \kappa)$,
- $s_2 \kappa = 12 \leq \kappa$, so $u = s_2 * \max \mathcal{E}(s_3 s_2 s_1, 12)$,
- $s_3(12) = 12$, so $u = s_2 * s_3 * \max \mathcal{E}(s_2 s_1, 12)$,
- $s_2(12) = 13 > 12$, so $u = s_2 * s_3 * \max \mathcal{E}(s_1, 12)$,
- $s_1(12) = 12$, so $u = s_2 * s_3 * s_1 * \max \mathcal{E}(e, 12)$.

Now, $\max(e, 12) = e$, so $u = s_2 * s_3 * s_1 = s_2 s_3 s_1 = [3142]$.

LEMMA II.4.17 ([5, Proposition 2.4.4]). *Let $\kappa \in I_{i,n}$. The set $\{v \in S_n \mid v\varpi_i = \kappa\}$ admits a unique minimal element u . Moreover, if $v \in S_n$ satisfies $v\varpi_i = \kappa$, then v admits a unique factorization $v = uw'$ with $v'\varpi_i = \varpi_i$. This factorization is length-additive, in the sense that $l(v) = l(u) + l(v')$. \square*

REMARK II.4.18. Lemmas II.4.1, II.4.4, II.4.6, Definition II.4.2 and Proposition II.4.3 are true for every Weyl group. Lemmas II.4.9, II.4.17, and Remark II.4.10 are also true if we replace S_n by a Weyl group W , $I_{i,n}$ by the set W^P of minimal representatives of the quotient W/W_P , W_P a parabolic subgroup of W , and $v\varpi_i = \kappa$ by $v \equiv \kappa \pmod{W_P}$.

LEMMA II.4.19. *Denote by u_d the minimal permutation such that $u_d \varpi_d = w_0 \varpi_d$. Let $w \geq u$, and κ a column of arbitrary size $i \leq n$ such that $\mathcal{E}(w, \kappa) \neq \emptyset$. Assume that $x = \max \mathcal{E}(w, \kappa) \geq u$. Then*

$$\forall v \geq u, \mathcal{E}(v, \kappa) \neq \emptyset \implies \max \mathcal{E}(v, \kappa) \geq u.$$

Proof. Since $v \geq u$, we have $v\varpi_d = w_0\varpi_d$, hence by Lemma II.4.17, $v = uv'$ with v' in the stabilizer of ϖ_d . Moreover, this decomposition is length-additive, so if $u = s_{i_1} \dots s_{i_j}$ and $v' = s_{i_{j+1}} \dots s_{i_k}$ are reduced expressions, then $s_{i_1} \dots s_{i_j} s_{i_{j+1}} \dots s_{i_k}$ is a reduced expression of v . Similarly, we decompose $x = ux'$ with $x'\varpi_d = \varpi_d$. We then obtain

$$x > s_{i_1}x > \dots > s_{i_j} \dots s_{i_1}x = x',$$

hence

$$\kappa \geq s_{i_1}\kappa \geq \dots \geq s_{i_j} \dots s_{i_1}\kappa.$$

Now, we apply the procedure described after Lemma II.4.15 for the decomposition $v = s_{i_1} \dots s_{i_j} s_{i_{j+1}} \dots s_{i_k}$. The above inequalities show that $\max \mathcal{E}(v, \kappa)$ is of the form $s_{i_1} * \dots * s_{i_j} * z$. But, by Lemma II.4.6, we have

$$\begin{aligned} s_{i_1} * \dots * s_{i_j} * z &\geq s_{i_1} * \dots * s_{i_j} \\ &\geq s_{i_1} \dots s_{i_j} \\ &\geq u. \quad \square \end{aligned}$$

NOTATION II.4.20. For $k \in [n-1]$, let j_k be the greatest integer such that $i_{j_k} = k$.

THEOREM II.4.21. *Assume that for every k , $m_{j_k} > 0$. Then the standard monomials p_T of shape (\mathbf{i}, \mathbf{m}) that do not vanish identically on $\Gamma_{\mathbf{i}}$ are w_0 -standard.*

Proof. Consider an optimal lifting (J_{km}) of T . Let $(F_{\text{can}}, F_1, \dots, F_r) \in \Gamma_{\mathbf{i}}$ be a gallery such that $p_T(F_{\text{can}}, F_1, \dots, F_r) \neq 0$. By definition of j_k , the flags F_{j_k} and $F_{\text{Op can}}$ share the same k -subspace, which then is the T -fixed point (e_n, \dots, e_{n-k+1}) . Hence, $\kappa_{j_k, 1} = \dots = \kappa_{j_k, m_{j_k}} = w_0\varpi_k$.

Arrange the integers j_1, \dots, j_{n-1} in an increasing sequence: $j_{l_1} < \dots < j_{l_{n-1}}$.

We shall prove that if $k > j_l$, then $v_{km} \geq u_l$. Since $p_T(F_{\text{can}}, F_1, \dots, F_r) \neq 0$, we have $p_{\kappa_{km}}(F_k) \neq 0$, hence $p_{\kappa_{km}}$ does not vanish identically on the Richardson variety X_w^v , where $w = w_{\max}(i_1 \dots i_k)$ and $v = w_0(w_{\max}(i_{k+1} \dots i_r))^{-1}$. This means that $p_{\kappa_{km}}$ does not vanish identically on the positroid variety $\pi(X_w^v)$, where $\pi : Fl(n) \rightarrow G_{i_k, n}$. By Lemma II.3.3, there exists $u \in [v, w]$ such that $u\varpi_{i_k} = \kappa_{km}$. It follows that the maximal element x_l of $\mathcal{E}(w, \kappa_{km})$ is greater than u . But, since $k > j_l$, a reduced expression of w_0v^{-1} consists of letters taken from $i_{k+1} \dots i_r$, where no l appears. Thus, $w_0v^{-1}\varpi_l = \varpi_l$, so $v\varpi_l = w_0\varpi_l$, that is, $v \geq u_l$. Hence $x_1 \geq u \geq v \geq u_l$. We then conclude with Lemma II.4.19.

Now, we consider subwords J_{km} with $k \leq j_{l_1}$. In this case, $k \leq j_t$ ($t \geq 1$), so we have the inequalities $w(\mathbf{i}(J_{j_t, 1} \cap [j_t])) \leq w_{\max}(\mathbf{i}(J_{km}))$, hence

$$w_{\max}(\mathbf{i}(J_{km}))\varpi_t \geq w(\mathbf{i}(J_{j_t, 1} \cap [j_t]))\varpi_t = \kappa_{j_t, 1} = w_0\varpi_t,$$

i.e. $w_{\max}(\mathbf{i}(J_{km}))\varpi_t = w_0\varpi_t$. So $w_{\max}(\mathbf{i}(J_{km})) = w_0$.

If $j_{l_t} < k \leq j_{l_{t+1}}$, then we have, in one hand, $w_{\max}(\mathbf{i}(J_{km})) \geq w(\mathbf{i}(J_{j_{l_t}, 1}))$ for every $p \geq t+1$, so $w_{\max}(\mathbf{i}(J_{km}))\varpi_{l_p} \geq \kappa_{l_p, 1} = w_0\varpi_{l_p}$, hence $w_{\max}(\mathbf{i}(J_{km}))\varpi_{l_p} = w_0\varpi_{l_p}$. On the other hand, $w_{\max}(\mathbf{i}(J_{km})) \geq v_{km} \geq u_{l_q}$ for every $q \leq t$, hence $w_{\max}(\mathbf{i}(J_{km}))\varpi_{l_q} = w_0\varpi_{l_q}$. It follows that $w_{\max}(\mathbf{i}(J_{km})) = w_0$. \square

REMARK II.4.22. The assumption $m_{j_k} > 0$ for every k is necessary: recall the tableau $T = 123 * 13 * 3 * 134 * 24 * 124$ of Example II.4.14. It is standard of shape

(3213233213, 1111110000), and one may check that p_T does not vanish identically on Γ_1 . However, an optimal lifting of T is given by

$$\begin{aligned} J_{11} &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J_{21} &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J_{31} &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J_{41} &= \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J_{51} &= \{3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ J_{61} &= \{3, 6,7,8,9,10\} \end{aligned}$$

and we have $w_{\max}(\mathbf{i}(J_{61})) = s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 = [4231] \neq w_0$, hence T is not w_0 -standard.

5. Basis of $H^0(\Gamma_1, L_{1,\mathbf{m}})$

Assume that \mathbf{m} is regular. We shall prove that the w_0 -standard monomials of shape (\mathbf{i}, \mathbf{m}) form a basis of the space of sections $H^0(\Gamma_1, L_{1,\mathbf{m}})$. By Theorems II.3.4 and II.4.21, we just have to show that the restriction map

$$H^0(Z_1, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^0(\Gamma_1, L_{1,\mathbf{m}})$$

is surjective. The idea is to find a sequence of varieties $(Y_1^{u_t})$, parametrized by $u_t \in S_n$, such that

- $Y_1^{u_0} = Z_1$ and $Y_1^{u_N} = \Gamma_1$,
- $Y_1^{u_{t+1}}$ is a hypersurface in $Y_1^{u_t}$,
- each restriction map $H^0(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^0(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}})$ is surjective.

EXAMPLE II.5.1. Let $n = 4$ and $\mathbf{i} = 123212312$. Consider the following reduced expression

$$w_0 = s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 = s_{a_6} s_{a_5} \cdots s_{a_1},$$

and set

$$\begin{cases} u_0 = e, \\ u_{t+1} = s_{a_{t+1}} u_t \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

The sequence (u_t) is increasing, and $u_6 = w_0$. Thus, we obtain a sequence of opposite Schubert varieties

$$Fl(n) = X^{u_0} \supset X^{u_1} \supset \cdots \supset X^{u_6} = \{F_{\text{op can}}\}.$$

Let $F = (F^1 \subset F^2 \subset F^3 \subset F^4 = k^4)$ be a flag.

- We have the equivalence

$$\begin{aligned} F \in X^{s_1} &\iff F^1 \in \langle e_2, e_3, e_4 \rangle \\ &\iff p_1(F) = 0. \end{aligned}$$

So X^{u_1} is defined inside X^{u_0} by the vanishing of $p_1 = p_{\kappa_0}$.

- Assume $F \in X^{u_1}$. Then

$$F \in X^{s_2 s_1} \iff F^1 \in \langle e_3, e_4 \rangle$$

$$\iff p_2(F) = 0, \text{ since we already know that } p_1(F) = 0.$$

Hence X^{u_2} is defined inside X^{u_1} by the vanishing of $p_2 = p_{\kappa_1}$.

- Similarly, X^{u_3} is defined inside X^{u_2} by the vanishing of $p_3 = p_{\kappa_2}$.
- The opposite Schubert variety X^{u_4} is defined inside X^{u_3} by the vanishing of $p_{14} = p_{\kappa_3}$.
- X^{u_5} is defined inside X^{u_4} by the vanishing of $p_{24} = p_{\kappa_4}$.

- X^{u_6} is defined inside X^{u_5} by the vanishing of $p_{134} = p_{\kappa_5}$.

We then set $Y_1^{u_t} = \text{pr}_9^{-1}(X^{u_t})$. Thus, $Y_1^{u_0} = Z_1$, $Y_1^{u_6} = \Gamma_1$. Moreover, $Y_1^{u_{t+1}}$ is defined inside $Y_1^{u_t}$ by the vanishing of p_{κ_t} , where we view κ_t as a tableau of shape $(123212312, \mathbf{a}'_t)$, where

$$\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}'_3 = 000000010, \mathbf{a}'_4 = \mathbf{a}'_5 = 000000001, \mathbf{a}'_6 = 000000100.$$

This example leads us to work with the following varieties. Consider the last projection $\text{pr}_r : Z_1 \rightarrow F\ell(n)$. Fix $u \in S_n$ and a reduced decomposition

$$w_0 u = s_{k_l} s_{k_{l-1}} \dots s_{k_1}.$$

Consider the opposite Schubert variety $X^u \subset F\ell(n)$ and set

$$Y_1^u = \text{pr}_r^{-1}(X^u) \subset Z_1.$$

In particular, $Y_1^e = Z_1$ and $Y_1^{w_0} = \Gamma_1$.

PROPOSITION II.5.2. *The variety Y_1^u is irreducible, and if $\mathbf{i}' = i_1 \dots i_r k_1 \dots k_l$, then the projection $F\ell(n)^{r+l} \rightarrow F\ell(n)^r$ onto the r first factors restricts to a morphism*

$$\varphi : \Gamma_{\mathbf{i}'} \rightarrow Y_1^u$$

that is birational, hence surjective.

Proof. Recall that a flag F lies in X^u if and only if it can be connected to $F_{\text{Op can}}$ by a gallery of type $k_1 \dots k_l$. Hence Y_1^u consists of all galleries

$$F_{\text{can}} \xrightarrow{i_1} F_1 \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_r} F_r$$

that can be extended to a gallery of the form

$$F_{\text{can}} \xrightarrow{i_1} F_1 \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_r} F_r \xrightarrow{k_1} \dots \xrightarrow{k_l} F_{\text{Op can}}.$$

Thus, φ indeed takes values in Y_1^u and is surjective. The irreducibility of Y_1^u follows.

Moreover, in the diagram

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{\mathbf{i}'} \cong Z_1 \times_{F\ell(n)} Z_{k_1 \dots k_l}(F_{\text{Op can}}) & \longrightarrow & Z_{k_1 \dots k_l}(F_{\text{Op can}}) \\ \downarrow & & \downarrow \text{pr}_l \\ Z_1 & \xrightarrow{\text{pr}_r} & F\ell(n), \end{array}$$

pr_l is an isomorphism over C^u , and the morphism $\text{id} \times (\text{pr}_l^{-1} \circ \text{pr}_r)$ from $\text{pr}_r^{-1}(C^u) \subset Y_1^u$ to $Z_1 \times_{Z_{k_1 \dots k_l}(F_{\text{Op can}})}$ is an inverse of φ over $\text{pr}_r^{-1}(C^u)$, hence φ is birational. \square

COROLLARY II.5.3. *Take the notations of the previous proposition, and consider the j th projection $\text{pr}_j : Z_1 \rightarrow F\ell(n)$. Then $\text{pr}_j(Y_1^u)$ is the Richardson variety X_y^x for $y = w_{\max}(i_1 \dots i_j)$ and $x = w_0 w_{\max}(i_{j+1} \dots i_r k_1 \dots k_l)^{-1}$.*

Proof. Note that $\text{pr}_j(Y_1^u) = \text{pr}_j(\varphi(\Gamma_{\mathbf{i}'})) = \text{pr}_j(\Gamma_{\mathbf{i}'})$ since $j \in [r]$. Proposition II.1.6 leads to the result. \square

NOTATIONS II.5.4. As in Example II.5.1, consider the reduced decomposition

$$w_0 = s_1(s_2s_1)\dots(s_{n-1}\dots s_1) = s_{a_n}\dots s_{a_1},$$

and set $u_t = s_{a_t}\dots s_1$, $u_0 = e$.

Consider the sequence of columns κ_t defined in the following way.

- The $n - 1$ first columns are $\kappa_0 = 1$, $\kappa_1 = 2, \dots, \kappa_{n-2} = n - 1$.
- The $n - 2$ next columns are $1 * n$, $2 * n, \dots, n - 2 * n$.
- The $n - 3$ next ones are of size 3: $1 * w_0\varpi_2$, $2 * w_0\varpi_2, \dots, n - 3 * w_0\varpi_2$.
- We proceed in the same way for the other columns until we get $\kappa_{N-1} = 1 * w_0\varpi_{n-2}$.

We denote by b_t the size of κ_t , so that $\kappa_t = u_t\varpi_{b_t}$. We set $\kappa'_t = u_{t+1}\varpi_{b_t}$.

In the sequel, we say that a variety Y is defined in X by the vanishing of f if

$$y \in Y \iff y \in X \text{ and } f(y) = 0.$$

This does not necessarily mean that f generates the ideal of Y in the coordinate ring of X .

LEMMA II.5.5. For every $t \in [0, N - 1]$, the opposite Schubert variety $X^{u_{t+1}} \subset Fl(n)$ is defined inside X^{u_t} by the vanishing of p_{κ_t} .

Proof. We begin by proving the following

Claim For every t , the opposite Schubert variety $X^{u_{t+1}\varpi_{b_t}} \subset G_{b_t, n}$ is defined inside $X^{u_t\varpi_{b_t}} = X^{\kappa_t}$ by the vanishing of p_{κ_t} .

Indeed, recall that a b_t -space V belongs to the opposite Schubert variety X^{κ_t} if and only if for every $\kappa \not\geq \kappa_t$, $p_\kappa(V) = 0$, and similarly for $X^{\kappa'_t}$. Thus, we have to describe the set

$$E_t = \{\kappa \not\geq \kappa'_t \mid \kappa \geq \kappa_t\}.$$

We distinguish two cases.

- Case 1: $b_{t+1} = b_t$. Then $\kappa'_t = u_{t+1}\varpi_{b_t} = \kappa_{t+1}$. But κ_t is of the form $p * w_0\varpi_{b_t-1}$, and $\kappa_{t+1} = (p+1) * w_0\varpi_{b_t-1}$. So $\kappa_t < \kappa'_t$, hence $\kappa_t \in E_t$. Let $\kappa \in E_t$ with $\kappa \neq \kappa_t$. Then $\kappa > \kappa_t$, so $\kappa \geq \kappa_{t+1}$: a contradiction. Hence, the claim is proved in this case.
- Case 2: $b_{t+1} = b_t + 1$. Then $\kappa'_t = u_{t+1}\varpi_{b_t} = w_0\varpi_{b_t} = (n - b_t + 1) * w_0\varpi_{b_t-1}$, and $\kappa_t = (n - b_t) * w_0\varpi_{b_t-1}$. Again, $\kappa_t \in E_t$. If $\kappa \in E_t$ and $\kappa > \kappa_t$, then $\kappa = w_0\varpi_{b_t}$: a contradiction. This proves the claim.

Now, let q be the restriction to X^{u_t} of the canonical projection $Fl(n) \rightarrow G_{b_t, n}$. We have to show that $X^{u_{t+1}} = q^{-1}(X^{\kappa'_t})$. since $u_t\varpi_{b_t} \neq \kappa'_t$, u_{t+1} is a minimal element of the poset $\{u \geq u_t, u\varpi_{b_t} = \kappa'_t\}$, so by Remark II.4.10 $q^{-1}(X^{\kappa'_t}) = X^{u_{t+1}}$. \square

NOTATION II.5.6. For every $t \in [0, N - 1]$, we set $l_t = j_{b_t}$, that is the largest integer j such that $i_j = b_t$.

COROLLARY II.5.7. With the notation of Lemma II.5.5, the variety $Y_1^{u_{t+1}}$ is defined inside $Y_1^{u_t}$ by the vanishing of p_T , where $T = \emptyset * \dots * \kappa_t * \dots * \emptyset$ is a tableau of shape $(i, 0 \dots 1 \dots 0)$, the 1 being at position l_t .

Proof. Write $\varpi = \varpi_{b_t}$ and $\kappa = \kappa_t$. Let γ be a gallery

$$F_{\text{can}} \xrightarrow{i_1} F_1 \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{b_t} F_{\kappa_t} \text{---} \dots \text{---} F_r$$

in $Y_1^{u_t}$. This gallery belongs to $Y_1^{u_t+1}$ if and only if $F_r \in X^{u_t+1}$. Since we already know that $F_r \in X^{u_t}$, we have

$$\gamma \in Y_1^{u_t+1} \iff p_\kappa(F_r) = 0 \iff p_\kappa(\pi_{b_t} F_r) = 0,$$

where the first equivalence follows from Lemma II.5.5 and the second from the fact that κ is of size b_t . By definition of l_t , no adjacency after F_{j_t} is an b_t -adjacency, hence $\pi_{b_t} F_{j_t} = \pi_{b_t} F_{j_t+1} = \dots = \pi_{b_t} F_r$, and therefore,

$$p_\kappa(F_r) = 0 \iff p_\kappa(F_{j_t}) = 0 \iff p_T(\gamma) = 0,$$

where $T = \emptyset * \dots * \kappa * \dots * \emptyset$ with κ in position l_t . \square

NOTATIONS II.5.8. We fix an $\mathbf{a} = a_1 \dots a_r$ with $a_i > 0$ for every i . The associated line bundle $L_{i,\mathbf{a}}$ is very ample, so it induces an embedding of Z_1 in some projective space $\mathbf{P}_\mathbf{a}$. We denote by R_t the homogeneous coordinate ring of $Y_1^{u_t}$ viewed as a subvariety of $\mathbf{P}_\mathbf{a}$.

REMARK II.5.9. For the rest of this section, if a notion depends on an embedding, such as projective normality, or the homogeneous coordinate ring of a variety, it will be implicitly understood that we work with the line bundle $L_{i,\mathbf{a}}$.

The ring R_{t+1} is a quotient R_t/I_t , and we shall determine the ideal I_t . We begin by computing the equations of $Y_1^{u_t+1}$ in an affine open set of $Y_1^{u_t}$.

DEFINITION II.5.10. We shall define an affine open set Ω of Z_1 , isomorphic to the affine space k^r . This construction is taken from [23].

First, we define inductively a sequence of permutations (σ_j) with $\sigma_N = w_0$:

$$\begin{cases} \sigma_0 = e, \\ \sigma_{j+1} = \sigma_j * s_{i_{j+1}} \quad \forall j \geq 0. \end{cases}$$

Moreover, we set $v_{j+1} = \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1} \in \{e, s_{i_{j+1}}\}$.

Next, consider the 1-parameter unipotent subgroup U_β associated to a root β , with its standard parametrization $\epsilon_\beta : k \rightarrow U_\beta$ (i.e. the matrix $\epsilon_\beta(x)$ has 1s on the diagonal, the entry corresponding to β equal to x , and 0s elsewhere). We also denote by $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ the simple roots and by P_j the minimal parabolic subgroup associated to α_j , i.e. the subgroup generated by B and by $U_{-\alpha_j}$.

We set $\beta_j = v_j(-\alpha_{i_j})$ and consider the morphism

$$\begin{aligned} k^r &\rightarrow P_1 = P_{i_1} \times \dots \times P_{i_r} \\ (x_1, \dots, x_r) &\mapsto (A_1, \dots, A_r) \end{aligned}$$

with $A_j = \epsilon_{\beta_j}(x_j)v_j$. Set $B_j = A_1 \dots A_j$.

Finally, let

$$\begin{aligned} \varphi : \quad k^r &\rightarrow Z_1 \\ (x_1, \dots, x_r) &\mapsto (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \end{aligned}$$

for $\gamma_j = B_j F_{\text{can}}$.

The image of φ is denoted by Ω : it is an open set in Z_1 , and $\varphi : k^r \rightarrow \Omega$ is an isomorphism.

NOTATION II.5.11. Let $\kappa = k_1 \dots k_i$ and $\tau = t_1 \dots t_i$ be two columns of the same size. Given a matrix M , we denote by $M[\kappa, \tau]$ the determinant of the submatrix of M obtained by taking the rows k_1, \dots, k_i and the columns t_1, \dots, t_i . Moreover, $M[\kappa, [i]]$ is simply denoted by $M[\kappa, i]$.

EXAMPLE II.5.12. We work on Example II.5.1, where $\mathbf{i} = 123212312$, and we set $\mathbf{a} = 111111111$. The sequence (σ_j) is given by

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= [1234], & \sigma_1 &= [2134], & \sigma_2 &= [2314], \\ \sigma_3 &= [2341], & \sigma_4 &= [2431], & \sigma_5 &= [4231], \\ \sigma_6 &= [4321], \\ \sigma_7 &= \sigma_8 = \sigma_9 = \sigma_6.\end{aligned}$$

and the sequence (v_j) is

$$\begin{aligned}v_1 &= s_1, & v_2 &= s_2, & v_3 &= s_3, \\ v_4 &= s_2, & v_5 &= s_1, & v_6 &= s_2, \\ v_7 &= v_8 = v_9 = e.\end{aligned}$$

Let $T_0 = 2 * 23 * 234 * 24 * 4 * 34 * 234 * 4 * 34$. It can be shown that Ω is exactly the open set $\{\gamma \in Z_1 \mid p_{T_0}(\gamma) \neq 0\}$.

Now, direct computations show that the affine variety $Y_1^{s_1} \cap \Omega \subset k^9$ is defined by the equation

$$Q(x_1, \dots, x_9) = x_8(x_1x_6 + x_2) + x_1x_5 + x_2x_4 + x_3 = 0.$$

Since $Y_1^{s_1} \cap \Omega$ is irreducible (as an open set of the irreducible $Y_1^{s_1}$), this equation is also irreducible and generates the ideal of $Y_1^{s_1} \cap \Omega$. Thus, if f is a linear combination of monomials p_T with T of shape (\mathbf{i}, \mathbf{m}) such that f vanishes identically on $Y_1^{s_1}$, then $\frac{f}{T_0} \in k[x_1, \dots, x_9]$ vanishes on $Y_1^{s_1} \cap \Omega$, hence

$$\frac{f}{T_0} \in Qk[x_1, \dots, x_9].$$

But we know that each coordinate x_j is a quotient f_j/T_0^k of degree 0 for an $f_j \in R_0 = k[Z_1]$, and also that

$$x_8(x_1x_6 + x_2) + x_1x_5 + x_2x_4 + x_3 = \frac{p_{T_1}}{p_{T_0}},$$

where $T_1 = 2 * 23 * 234 * 24 * 4 * 34 * 234 * 1 * 34$. It follows that f is a multiple of p_{T_1} , hence $f \in p_1 H^0(Z_1, L_{1, \mathbf{a}'})$ where $\mathbf{a}' = 111111101$.

Hence, the ideal I_1 of $Y_1^{u_1}$ in R_0 is $p_1 H^0(Z_1, L_{1, \mathbf{a}'})$. We shall generalize this computation below.

LEMMA II.5.13. *For every j ,*

$$U_{\beta_1} v_1 \dots U_{\beta_j} v_j = U_{\beta_1} U_{\sigma_1(\beta_2)} \dots U_{\sigma_{j-1}(\beta_j)} \sigma_j \subset B \sigma_j.$$

Proof. The equality follows from the formula

$$\sigma U_\beta = U_{\sigma(\beta)} \sigma, \quad \forall \sigma \in S_n.$$

For the inclusion, we proceed by induction over j . Since $\beta_1 = (i_1, i_1 + 1)$ and $v_1 = s_{i_1}$, $U_{\beta_1} v_1 \subset B v_1 = B \sigma_1$.

Assume that the property holds for $j \geq 1$, that is $U_{\beta_1} v_1 \dots U_{\beta_j} v_j \subset B \sigma_j$.

If $\sigma_j s_{i_{j+1}} < \sigma_j$, then $\sigma_{j+1} = \sigma_j$, $v_{j+1} = e$, $\beta_{j+1} = (i_{j+1} + 1, i_{j+1})$, and $\sigma_j(\beta_{j+1}) = (\sigma_j(i_{j+1} + 1), \sigma_j(i_{j+1}))$.

$$\begin{aligned}\sigma_j s_{i_{j+1}} < \sigma_j &\iff \sigma_j(i_{j+1}) > \sigma_j(i_{j+1} + 1) \\ &\iff U_{\sigma_j(\beta_{j+1})} \subset B.\end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned} U_{\beta_1} v_1 \dots U_{\beta_j} v_j U_{\beta_{j+1}} v_{j+1} &\subset B\sigma_j U_{\beta_{j+1}} \\ &\subset BU_{\sigma_j(\beta_{j+1})} \sigma_j \\ &\subset B\sigma_{j+1}. \end{aligned}$$

Similarly, if $\sigma_j s_{i_{j+1}} > \sigma_j$, then $\sigma_{j+1} = \sigma_j s_{i_{j+1}}$, $v_{j+1} = s_{i_j}$ and $\beta_{j+1} = \alpha_{i_{j+1}}$. Hence

$$\begin{aligned} U_{\beta_1} v_1 \dots U_{\beta_j} v_j U_{\beta_{j+1}} v_{j+1} &\subset B\sigma_j U_{\beta_{j+1}} s_{i_j} \\ &\subset BU_{\sigma_j \beta_{j+1}} \sigma_j s_{i_j} \\ &\subset B\sigma_{j+1}. \quad \square \end{aligned}$$

NOTATION II.5.14. Let κ be a column of size i . We set $O_\kappa = \{F \in Fl(n) \mid p_\kappa(F) \neq 0\}$.

PROPOSITION II.5.15. Let $w \in S_n$ and $\kappa = w\varpi_i \in I_{i,n}$. Then $X_w \cap O_\kappa = \coprod_{v \in \mathcal{E}(w, \kappa)} C_v$.

Proof. Let q be the restriction to X_w of the canonical projection $Fl(n) \rightarrow G_{i,n}$. Then we have $X_w \cap O_\kappa = q^{-1}(X_\kappa \cap q(O_\kappa))$. It is well known that $X_\kappa \cap q(O_\kappa) = C_\kappa$. But we have the equality

$$q^{-1}(C_\kappa) = \coprod_{v \in \mathcal{E}(w, \kappa)} C_v. \quad \square$$

PROPOSITION II.5.16. There exists a tableau T_0 of shape (\mathbf{i}, \mathbf{a}) such that

$$\Omega = \{\gamma \in Z_{\mathbf{i}} \mid p_{T_0}(\gamma) \neq 0\}.$$

In particular, φ induces an isomorphism $\varphi^* : (R_0)_{(p_{T_0})} \rightarrow k[x_1, \dots, x_r]$, where $(R_0)_{(p_{T_0})}$ is the subring of elements of degree 0 in the localized ring $(R_0)_{p_{T_0}}$, i.e.

$$(R_0)_{(p_{T_0})} = \bigcup_{d \geq 0} \left\{ \frac{f}{p_{T_0}^d} \mid f \in R_0 \text{ is homogeneous of degree } d \right\}.$$

Proof. Let $T_0 = (\sigma_1 \varpi_{i_1})^{*a_1} * (\sigma_2 \varpi_{i_2})^{*a_2} * \dots * (\sigma_r \varpi_{i_r})^{*a_r}$. Then

$$\{\gamma \in Z_{\mathbf{i}} \mid p_{T_0}(\gamma) \neq 0\} = \prod_{j=1}^r \text{pr}_j^{-1} \left(O_{\sigma_j \varpi_{i_j}} \right).$$

We know that

$$\text{pr}_j(\Omega) = U_{\beta_1} v_1 \dots U_{\beta_j} v_j F_{\text{can}}.$$

Thus, by Lemma II.5.13, $\text{pr}_j(\Omega) \subset B\sigma_j F_{\text{can}} = C_{\sigma_j}$. But if $F \in C_{\sigma_j}$, then its i_j -th constituent F^{i_j} belongs to $C_{\sigma_j \varpi_{i_j}}$, so

$$p_{\sigma_j \varpi_{i_j}}(F) = p_{\sigma_j \varpi_{i_j}}(F^{i_j}) \neq 0.$$

This proves the inclusion

$$\Omega \subset \prod_{j=1}^r \text{pr}_j^{-1} \left(O_{\sigma_j \varpi_{i_j}} \right).$$

For the opposite inclusion, we proceed by induction over r .

If $r = 1$, then $\Omega = \{F_{\text{can}}\} \times U_{\beta_1} v_1 F_{\text{can}}$, with $v_1 = s_{i_1}$ and $\beta_1 = \alpha_{i_1}$. Hence $\Omega = \{F_{\text{can}}\} \times C_{s_{i_1}}$. By Lemma II.5.15, $X_{s_{i_1}} \cap O_{s_{i_1} \varpi_{i_1}} = C_{s_{i_1}}$, so

$$\text{pr}_1^{-1}(O_{\sigma_1 \varpi_{i_1}}) = \{F_{\text{can}} \stackrel{i_1}{\leftarrow} F^1 \mid F^1 \in C_{s_{i_1}}\}.$$

Thus $\Omega = \text{pr}_1^{-1}(O_{\sigma_1 \varpi_{i_1}})$.

Let $r > 1$ and assume that the property holds for $r-1$. Let $\gamma \in \prod_{j=1}^r \text{pr}_j^{-1}(O_{\sigma_j \varpi_{i_j}})$.

By induction, there exist A_1, \dots, A_{r-1} such that $A_j \in U_{\beta_j} v_j$ and $\gamma_j = A_1 \dots A_j F_{\text{can}}$ for $j \leq r-1$. Since $\gamma_{r-1} \stackrel{i_r}{\leftarrow} \gamma_r$, there exists $p \in P_{i_r}$ such that $A_1 \dots A_{r-1} p F_{\text{can}} = \gamma_r$. Now, $P_{i_r} F_{\text{can}}$ is a T -stable curve and we have

$$P_{i_r} F_{\text{can}} = U_{-\alpha_{i_r}} F_{\text{can}} \cup \{s_{i_r} F_{\text{can}}\} = U_{\alpha_{i_r}} s_{i_r} F_{\text{can}} \cup \{F_{\text{can}}\}.$$

If $v_r = e$, then $\sigma_r = \sigma_{r-1}$ and $\beta_r = -\alpha_{i_r}$. By Lemma II.5.13, $\gamma_r \in B\sigma_{r-1} p F_{\text{can}}$. If $p F_{\text{can}} = s_{i_r} F_{\text{can}}$, then $\gamma_r \in C_{\sigma_r s_r}$. But by Lemma II.5.15, γ_r belongs to a Schubert cell C_v with $v \varpi_{i_r} = \sigma_r \varpi_{i_r}$. Since $\sigma_r \varpi_{i_r} \neq \sigma_r s_r \varpi_{i_r}$, we have a contradiction. Hence $p F_{\text{can}} \in U_{-\alpha_{i_r}} F_{\text{can}}$. So we may choose p in U_{β_r} , which proves that $\gamma \in \Omega$.

If $v_r = s_{i_r}$, we prove similarly that $p F_{\text{can}} \neq F_{\text{can}}$, so we may choose p in $U_{\alpha_{i_r}} s_{i_r} = U_{\beta_r} v_r$, thus $\gamma \in \Omega$. \square

REMARK II.5.17. Consider an arbitrary tableau T of shape (\mathbf{i}, \mathbf{a}) . Then we may compute $\varphi^* \left(\frac{p_T}{p_{T_0}} \right)$ in the following way. Write

$$T = \kappa_{11} * \dots * \kappa_{1a_1} * \dots * \kappa_{r1} * \dots * \kappa_{ra_r},$$

then

$$\varphi^* \left(\frac{p_T}{p_{T_0}} \right) (x_1, \dots, x_r) = B_1[\kappa_{11}, i_1] \dots B_1[\kappa_{1a_1}, i_1] \dots B_r[\kappa_{r1}, i_r] \dots B_r[\kappa_{ra_r}, i_r].$$

PROPOSITION II.5.18. Denote by $Q_{ij} \in k[x_1, \dots, x_r]$ the entries of B_r :

$$B_r = \begin{pmatrix} Q_{1,1} & Q_{2,1} & \dots & \dots & Q_{n-1,1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ Q_{n-1,1} & 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The polynomials Q_{ij} all have distinct linear parts.

Proof. It suffices to prove that $B_r w_0 \in B$, but this follows from Lemma II.5.13:

$$B_r \in U_{\beta_1} v_1 \dots U_{\beta_r} v_r F_{\text{can}} \subset B\sigma_r = Bw_0.$$

We may obtain the linear part of the Q_{ij} by derivating B_r . From the expression $B_r = \epsilon_{\beta_1}(x_1) v_1 \dots \epsilon_{\beta_r}(x_r) v_r$, we see that

$$\frac{\partial B_r}{\partial x_j}(0) = E_{\sigma_{j-1}(\beta_j)} w_0.$$

This already proves that the linear parts of the Q_{ij} are distinct. We shall now prove that every elementary matrix E_{ki} occurs as a derivative of B_r , that is, each pair

$(i, i+1)$ equals some $\sigma_{j-1}(\beta_j)$, or equivalently, $U_{\beta_1}U_{\sigma_1\beta_2}\dots U_{\sigma_{r-1}\beta_r} = U$ (where U is the unipotent part of B). Since $\text{pr}_r(\Omega) = C_{w_0}$, we have

$$U_{\beta_1}U_{\sigma_1(\beta_2)}\dots U_{\sigma_{r-1}(\beta_r)}F_{\text{can}} = U_{\beta_1}v_1\dots U_{\beta_r}v_rF_{\text{can}} = Uw_0F_{\text{can}}.$$

Since the stabilizer of w_0F_{can} in U is trivial, we conclude that $U_{\beta_1}U_{\sigma_1\beta_2}\dots U_{\sigma_{r-1}\beta_r} = U$. \square

PROPOSITION II.5.19. *The ideal of $Y_1^{u_{t+1}} \cap \Omega$ in the coordinate ring of $Y_1^{u_t} \cap \Omega$ is generated by Q_{κ_{t1}, b_t} , where κ_{t1} is the first entry of the column κ_t . Moreover,*

$$Q_{\kappa_{t1}, b_t} = \varphi^* \left(\frac{p_{T_t}}{p_{T_0}} \right)$$

where T_t is the tableau obtained from T_0 by replacing its last column of size b_t by κ_t .

Moreover, the varieties $Y_1^{u_t} \cap \Omega$ are isomorphic to affine spaces.

Proof. We already know that $Y_1^{u_{t+1}}$ is defined inside $Y_1^{u_t}$ by the vanishing of p_{κ_t} : given a gallery $\gamma = (F_{\text{can}} \xrightarrow{i_1} F_1 \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_r} F_r)$ in $Y_1^{u_t}$, we know by Corollary II.5.7 that $\gamma \in Y_1^{u_{t+1}}$ if and only if $p_{\kappa_t}(F_{l_t}) = 0$.

In Ω , this corresponds to the vanishing of $B_{l_t}[\sigma_{l_t}\varpi_{b_t}, b_t]$. Now, as in the proof of Lemma II.5.13,

$$B_r = B_{l_t}bv_{l_{t+1}}\dots v_r$$

for some $b \in U$. The j th column of $B_{l_t}b$ is then a linear combination of the columns $1, \dots, j$ of B_{l_t} . So

$$(B_{l_t}b)[\sigma_{l_t}\varpi_{b_t}, b_t] = B_{l_t}[\sigma_{l_t}\varpi_{b_t}, b_t].$$

Moreover, by definition of l_t , the permutation $v_{l_{t+1}}\dots v_r$ stabilizes the fundamental weight column ϖ_{b_t} , so $B_{l_t}b$ and B_r have the same first b_t columns up to a permutation, hence

$$B_{l_t}[\sigma_{l_t}\varpi_{b_t}, b_t] = \pm B_r[\sigma_{l_t}\varpi_{b_t}, b_t].$$

A straightforward computation shows that this determinant is $\pm Q_{\kappa_{t1}, b_t}$.

To prove that $\varphi^* \left(\frac{p_{T_t}}{p_{T_0}} \right) = \pm Q_{\kappa_{t1}, b_t}$, note that

$$\varphi^* \left(\frac{p_{T_t}}{p_{T_0}} \right) = B_1[\sigma_1\varpi_{i_1}, i_1] \dots B_{j_t}[\sigma_{j_t}\varpi_{b_t}, b_t] \dots B_r[\sigma_r\varpi_{i_r}, i_r].$$

Now, by Lemma II.5.13, $B_j = b_j\sigma_j$ for some $b_j \in B$. So, for $j \neq l_t$,

$$B_j[\sigma_j\varpi_{i_j}, i_j] = \pm b_j[\sigma_j\varpi_{i_j}, \sigma_j\varpi_{i_j}] = \pm 1.$$

Hence $Y_1^{u_{t+1}} \cap \Omega$ is defined by the equation $Q_{\kappa_{t1}, b_t} = 0$. But this polynomial is of the form $x_{p_t} - Q'$ for some variable $x_{p_t} \in \{x_1, \dots, x_r\}$, so we may substitute x_{p_t} by Q' in the coordinate ring of $Y_1^{u_t} \cap \Omega$ to obtain the coordinate ring of $Y_1^{u_{t+1}} \cap \Omega$. Thus, by induction over t , we see that the coordinate ring of $Y_1^{u_{t+1}} \cap \Omega$ is isomorphic to $k[x_i \mid i \neq p_0, \dots, p_t]$. In particular, this ring is a Unique Factorization Domain. Therefore, the irreducible polynomial Q_{κ_{t1}, b_t} generates the ideal of $Y_1^{u_{t+1}}$ in the coordinate ring of $Y_1^{u_t}$. \square

NOTATIONS II.5.20. We set $\mathbf{a}'_t = 0 \dots -1 \dots 0$, the -1 again being at position l_t . Let S_t be the R_t -graded module associated to the coherent sheaf L_{l_t, \mathbf{a}'_t} , that is,

$$S_t = \bigoplus_{d=0}^{+\infty} H^0(Y_1^{u_t}, L_{l_t, d\mathbf{a} + \mathbf{a}'_t}).$$

ASSUMPTION II.5.21. We assume that $\mathbf{a} + \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{a}'_t$ is regular.

COROLLARY II.5.22. Denote by $\mathcal{O}_{Y_1^{u_t}}$ the structural sheaf of $Y_1^{u_t}$ and assume that $Y_1^{u_t}$ is projectively normal. Then the sequence of R_t -modules

$$(*) \quad 0 \rightarrow S_t \rightarrow R_t \rightarrow R_{t+1} \rightarrow 0$$

is exact, where the first map is the multiplication by p_{κ_t} and the second is the natural projection.

The exact sequence (*) induces an exact sequence of sheaves of $\mathcal{O}_{Y_1^{u_t}}$ -modules

$$0 \rightarrow L_{1,\mathbf{m}+\mathbf{a}'_t} \rightarrow L_{1,\mathbf{m}} \rightarrow (L_{1,\mathbf{m}})|_{Y_1^{u_{t+1}}} \rightarrow 0$$

and a long exact sequence in cohomology

$$(**) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}+\mathbf{a}'_t}) & \longrightarrow & H^0(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}}) & \longrightarrow & H^0(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}}) \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & & & & & H^{i-1}(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}}) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & H^i(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}+\mathbf{a}'_t}) \longrightarrow H^i(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}}) \longrightarrow H^i(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}}) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & H^{i+1}(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}+\mathbf{a}'_t}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Proof. Since $Y_1^{u_t}$ is projectively normal, we know that

$$R_t = \bigoplus_{d=0}^{+\infty} H^0(Y_1^{u_t}, L_{1,d\mathbf{a}}),$$

hence the sequence

$$0 \longrightarrow S_t \xrightarrow{\mu} R_t \xrightarrow{q} R_{t+1} \longrightarrow 0$$

is well defined. Moreover, we already know by Corollary II.5.7 that $q \circ \mu = 0$.

Let f be an homogeneous element of degree d in R_t , and suppose that $q(f) = 0$, that is, f vanishes identically on $Y_1^{u_{t+1}}$. Then $\frac{f}{p_{T_0}^d}$ vanishes identically on $Y_1^{u_{t+1}} \cap \Omega$,

hence $\varphi^* \left(\frac{f}{p_{T_0}^d} \right) \in k[x_1, \dots, x_r]$ is a multiple of $Q_{\kappa_{t1}, b_t} = \varphi^* \left(\frac{p_{T_t}}{p_{T_0}} \right)$. It follows that f is a multiple p_{T_t} , hence $f \in p_{\kappa_t} S_t = \mu(S_t)$.

If we consider the coherent sheaves associated to these R_t -modules and tensor them by $L_{1,\mathbf{m}}$, then we get the exact sequence of sheaves of $\mathcal{O}_{Y_1^{u_t}}$ -modules

$$0 \rightarrow L_{1,\mathbf{m}+\mathbf{a}'_t} \rightarrow L_{1,\mathbf{m}} \rightarrow (L_{1,\mathbf{m}})|_{Y_1^{u_{t+1}}} \rightarrow 0,$$

which gives the long exact sequence (**). \square

THEOREM II.5.23.

- (1)_t For every t , the variety $Y_1^{u_t}$ is projectively normal.
- (2)_t For every $i > 0$, and every \mathbf{m} such that $\mathbf{m}_t = \mathbf{m} + \mathbf{a}'_0 + \cdots + \mathbf{a}'_{t-1}$ is regular, $H^i(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}}) = 0$. In particular, $H^i(Y_1^{u_t}, L_{1,d\mathbf{a}}) = 0$ for every $d \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$.
- (3)_t If $t \geq 0$ and \mathbf{m}_{t+1} is regular, then the restriction map $H^0(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^0(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}})$ is surjective.

Proof. We proceed by induction over t .

For $t = 0$, $Y_1^{u_0} = Z_1$. By Theorem II.2.6, Z_1 is projectively normal, and $H^i(Z_1, L_{1,\mathbf{m}}) = 0$ for $i > 0$. Assume now that $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m} + \mathbf{a}'_0$ is regular. Since Z_1 is projectively normal, by Corollary II.5.22, we have the exact sequence

$$0 \rightarrow H^0(Z_1, L_{1,\mathbf{m}_1}) \rightarrow H^0(Z_1, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^0(Y_1^{u_1}, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^1(Z_1, L_{1,\mathbf{m}_1}).$$

Since $H^1(Z_1, L_{1,\mathbf{m}_1}) = 0$, the restriction map $H^0(Z_1, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^0(Y_1^{u_1}, L_{1,\mathbf{m}})$ is surjective.

Assume that the theorem is true for a $t \geq 0$.

We shall prove that (1)_{t+1} is true. By induction, $Y_1^{u_t}$ is projectively normal, so the sequence

$$0 \rightarrow H^0(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}+\mathbf{a}'_t}) \rightarrow H^0(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^0(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^1(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}+\mathbf{a}'_t})$$

is exact. Moreover, for $d \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, by (2)_t we have $H^1(Y_1^{u_t}, L_{1,d\mathbf{a}}) = 0$, hence an exact sequence

$$0 \rightarrow S_t \rightarrow R_t \rightarrow \bigoplus_{d \geq 0} H^0(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,d\mathbf{a}}) \rightarrow 0.$$

Since the sequence

$$0 \rightarrow S_t \rightarrow R_t \rightarrow R_{t+1} \rightarrow 0$$

is also exact, we have $R_{t+1} = \bigoplus_{d \geq 0} H^0(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,d\mathbf{a}})$, that is, $Y_1^{u_{t+1}}$ is projectively normal.

We now prove that (2)_{t+1} is true. Let \mathbf{m} be such that \mathbf{m}_{t+1} is regular. Note that \mathbf{m}_t is also regular. Since $Y_1^{u_t}$ is projectively normal, we have the exact sequence

$$H^i(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^i(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^{i+1}(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}+\mathbf{a}'_t}).$$

Now, by (2)_t,

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_t \text{ regular} &\implies H^i(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}}) = 0, \\ \mathbf{m}_{t+1} \text{ regular} &\implies H^{i+1}(Y_1^{u_t}, L_{1,\mathbf{m}+\mathbf{a}'_t}) = 0. \end{aligned}$$

Thus, $H^i(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}}) = 0$.

Finally, we prove (3)_{t+1}. Since $Y_1^{u_{t+1}}$ is projectively normal, we have the exact sequence

$$0 \rightarrow H^0(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}+\mathbf{a}'_{t+1}}) \rightarrow H^0(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^0(Y_1^{u_{t+2}}, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^1(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}+\mathbf{a}'_{t+1}}).$$

Since \mathbf{m}_{t+2} is regular, we have by (2)_{t+1} that $H^1(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}+\mathbf{a}'_{t+1}}) = 0$, hence the restriction map $H^0(Y_1^{u_{t+1}}, L_{1,\mathbf{m}}) \rightarrow H^0(Y_1^{u_{t+2}}, L_{1,\mathbf{m}})$ is surjective. \square

COROLLARY II.5.24. *If $\mathbf{m}_N = \mathbf{m} + \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{a}'_t$ is regular, then a basis of $H^0(\Gamma_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}})$ is given by the w_0 -standard monomials of shape (\mathbf{i}, \mathbf{m}) .*

Proof. Since the restriction $H^0(Z_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}}) \rightarrow H^0(\Gamma_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}})$ is surjective, the standard monomials p_T that do not vanish identically on $\Gamma_{\mathbf{i}}$ form a generating set. By Theorem II.4.21, these monomials are exactly the w_0 -standard monomials. By Theorem II.3.4, these monomials are linearly independent. \square

PROPOSITION II.5.25. *Let p_T be a standard monomial of shape (\mathbf{i}, \mathbf{m}) , with \mathbf{m} arbitrary. Then p_T decomposes as a linear combination of w_0 -standard monomials on $\Gamma_{\mathbf{i}}$.*

Proof. With the notation of Theorem II.4.21, the result is true if \mathbf{m}_N is regular. If this is not the case, then we set $\mathbf{b} = b_1 \dots b_r$ with

$$b_j = \begin{cases} N & \text{if } j = l_t \text{ for some } t, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and $\mathbf{m}' = \mathbf{m} + \mathbf{b}$. Now, \mathbf{m}' satisfies the assumption of Theorem II.4.21. We multiply p_T by $p_{\kappa_1}^N \dots p_{\kappa_{n-1}}^N$ to obtain a new monomial p'_T , where $\kappa_j = w_0 \varpi_j$. So p'_T is of shape $(\mathbf{i}, \mathbf{m}')$ and does not vanish identically on $\Gamma_{\mathbf{i}}$. Now, p'_T may be non standard, so we decompose it as a linear combination of w_0 -standard monomials of shape $(\mathbf{i}, \mathbf{m}')$ on $\Gamma_{\mathbf{i}}$, thanks to Corollary II.5.24:

$$p_T (p_{\kappa_1} \dots p_{\kappa_{n-1}})^N = p_{T'} = \sum_{T''} a_{T''} p_{T''}.$$

Since a w_0 -standard monomial does not vanish identically on $\Gamma_{\mathbf{i}}$, the columns κ that are in position j_k in a tableau T'' are maximal, *i.e.* equal to $w_0 \varpi_k$. Hence we may factor this linear combination by $(p_{\kappa_1} \dots p_{\kappa_{n-1}})^N$, so that p_T is a linear combination of w_0 -standard monomials. \square

COROLLARY II.5.26. *A basis of $H^0(\Gamma_{\mathbf{i}}, L_{\mathbf{i}, \mathbf{m}})$ is given by the w_0 -standard monomials of shape (\mathbf{i}, \mathbf{m}) . \square*

REMARK II.5.27. In the regular case ($m_i > 0$ for every i), the basis given by standard monomials is compatible with $\Gamma_{\mathbf{i}}$: this is no longer the case if \mathbf{m} is not regular, see Remark II.4.22.

Bibliographie

- [1] S. Abhyankar, *Enumerative combinatorics of Young tableaux*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 115, Marcel Dekker, Inc., New-York (1988).
- [2] S. Billey, I. Coskun, *Singularities of generalized Richardson varieties*, Preprint <http://arxiv.org/abs/1008.2785>.
- [3] S. Billey, V. Lakshmibai, *Singular Loci of Schubert varieties*, Progress in Mathematics, 182, Birkhäuser.
- [4] S. Billey, G. Warrington, *Maximal singular loci of Schubert varieties in $SL(n)/B$* , Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3915–3945.
- [5] A. Björner, F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Graduate Texts in Mathematics, 231, Springer, New-York, 2005.
- [6] R. Bott, H. Samelson, *Applications of the theory of Morse to symmetric spaces*, Amer. J. Math. **80**, (1958), 964–1029.
- [7] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Livre IX : Groupes et algèbres de Lie, Chapitres IV, V, VI, Hermann, Paris, 1968.
- [8] M. Brion, *Positivity in the Grothendieck group of complex flag varieties*, J. Algebra **258** (2002), no. 1, 137–159.
- [9] M. Brion, *Lectures on the geometry of flag varieties*, Topics in cohomological studies of algebraic varieties, 33–85, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2005.
- [10] M. Brion, V. Lakshmibai, *A geometric approach to Standard Monomial Theory*, Representation theory **7** (2003), 651–680.
- [11] M. Brion, P. Polo, *Generic singularities of certain Schubert varieties*, Math. Z. **231** (1999), no. 2, 301–324.
- [12] C. Chevalley, *Sur les décompositions cellulaires des espaces G/B* , Proc. Symp. Prue. Math., **56** (1994), 53–61.
- [13] C. Contou-Carrère, *Géométrie des groupes semi-simples, résolutions équivariantes et lieu singulier de leurs variétés de Schubert*, Thèse d’État, Université de Montpellier II, 1983.
- [14] A. Cortez, *Singularités génériques et quasi-résolutions des variétés de Schubert pour le groupe linéaire*, Adv. Math. **178** (2003), no. 2, 396–445.
- [15] S. Daftuar, P. Hayden, *Quantum state transformations and the Schubert calculus*, Preprint <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0410052>.
- [16] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 53–88.
- [17] V. Deodhar, *On some geometric aspects of Bruhat orderings. I. A finer decomposition of Bruhat cells*, Invent. Math. **79** (1985), no. 3, 499–511.
- [18] P. Foth, S. Kim, *Standard Monomial Theory of RR varieties*, Preprint <http://arxiv.org/abs/1009.1645>.
- [19] V. Gasharov, *Sufficiency of Lakshmibai-Sandhya singularity conditions for Schubert varieties*, Compositio Math. **126** (2001), no. 1, 47–56.
- [20] S. Gaussent, *The fibre of the Bott-Samelson resolution*, Indag. Math. (N.S.) **12** (2001), no. 4, 453–468.
- [21] K. Goodearl, M. Yakimov, *Poisson structures on affine spaces and flag varieties. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 11, 5753–5780.

- [22] H. Hansen, *On cycles in flag manifolds*, Math. Scand. **33** (1973), 269–274.
- [23] M. Härterich, *The T -equivariant Cohomology of Bott-Samelson varieties*, Preprint <http://arxiv.org/abs/math/0412337>.
- [24] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [25] X. He, T. Lam, *Projected Richardson varieties and affine Schubert varieties*, Preprint <http://arxiv.org/abs/1106.2586>.
- [26] X. He, J. Lu, *Title : On intersections of certain partitions of a group compactification*, <http://arxiv.org/abs/0907.1137>.
- [27] J. Herzog, N. Trung, *Gröbner bases and multiplicity of determinantal and Pfaffian ideals*, Adv. Math., **96** (1992), 1–37.
- [28] W. V. D. Hodge, *Some enumerative results in the theory of forms*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **39**, (1943). 22–30.
- [29] W. Hodge, D. Pedoe, *Methods of algebraic geometry. Vol. II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [30] T. Ikeda, *Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian*, Adv. Math. **215** (2007), no. 1, 1–23.
- [31] T. Ikeda, H. Naruse, *Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 10, 5193–5221.
- [32] C. Kassel, A. Lascoux, C. Reutenauer, *The singular locus of a Schubert variety*, J. Algebra **269** (2003), no. 1, 74–108.
- [33] A. Knutson, T. Lam, D. Speyer, *Positroid varieties I : Juggling and Geometry*, Preprint <http://arxiv.org/abs/0903.3694>.
- [34] A. Knutson, T. Lam, D. Speyer, *Projections of Richardson Varieties*, Preprint <http://arxiv.org/abs/1008.3939>.
- [35] B. Kostant, *Structure of the truncated icosahedron (e.g. Fullerene or C_{60} , viral coatings) and a 60-element conjugacy class in $PSL(2, 11)$* , Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), no. 1, 163–195.
- [36] C. Krattenthaler, *On multiplicities of points on Schubert varieties in Grassmannians*, Sémin. Lothar. Combin. **45** (2000/01), Art. B45c, 11 pp. (electronic).
- [37] V. Kreiman, *Local properties of Richardson varieties in the Grassmannian via a bounded Robinson-Schensted-Knuth correspondance*, J. Algebraic Combin. **27** (2008), no. 3, 351–382.
- [38] V. Kreiman, V. Lakshmibai, *Richardson Varieties in the Grassmannian*, in “Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory”, 573–597, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004.
- [39] V. Kreiman, V. Lakshmibai, *Multiplicities of singular points in Schubert varieties of Grassmannians*, Algebra, arithmetic and geometry with applications (West Lafayette, IN, 2000), 553–563, Springer, Berlin, 2004.
- [40] V. Lakshmibai, P. Littelmann, *Richardson varieties and equivariant K -theory*, J. Algebra **260** (2003), no. 1, 230–260.
- [41] V. Lakshmibai, P. Littelmann, P. Magyar, *Standard monomial theory for Bott-Samelson varieties*, Compositio Math. **130** (2002), no. 3, 293–318.
- [42] V. Lakshmibai, P. Magyar, *Standard monomial theory for Bott-Samelson varieties of $GL(n)$* , Publ. Res. Inst. Math. Sci. **34** (1998), no. 3, 229–248.
- [43] V. Lakshmibai, B. Sandhya, *Criterion for smoothness of Schubert varieties in $SL(n)/B$* , Proc. Indian Acad. Sci. (Math Sci.) **100** (1990), no. 1, 45–52.
- [44] V. Lakshmibai, C. S. Seshadri, *Geometry of G/P . V*, J. Algebra **100** (1986), no. 2, 462–557.
- [45] V. Lakshmibai, J. Weyman, *Multiplicities of Points on a Schubert Variety in a Minuscule G/P* , Adv. Math. **84** (1990), no. 2, 179–208.
- [46] A. Lascoux, *Foncteurs de Schur et grassmannienne*, thèse, Université de Paris VII, 1977.
- [47] N. Lauritzen, J. Thomsen, *Line bundles on Bott-Samelson varieties*, J. Algebraic Geom. **13** (2004), no. 3, 461–473.

- [48] P. Littelmann, *A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras*, Invent. Math. **116** (1994), no. 1-3, 329–346.
- [49] P. Littelmann, *Paths and root operators in representation theory*, Ann. of Math. (2) **142** (1995), no. 3, 499–525.
- [50] P. Littelmann, *Contracting modules and standard monomial theory for symmetrizable Kac-Moody algebras*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), no. 3, 551–567.
- [51] P. Magyar, *Schubert polynomials and Bott-Samelson varieties*, Comment. Math. Helv. **73** (1998), no. 4, 603–636.
- [52] L. Manivel, *Le lieu singulier des variétés de Schubert*, Internat. Math. Res. Notices 2001, no. 16, 849–871.
- [53] D. Mumford, *Algebraic Geometry. I. Complex Projective Varieties*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 221. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [54] R. Richardson, *Intersections of double cosets in algebraic groups*, Indag. Math. (N.S.) **3** (1992), no. 1, 69–77.
- [55] R. Richardson, T. Springer, *Combinatorics and geometry of K -orbits on the flag manifold*, Linear algebraic groups and their representations (Los Angeles, CA, 1992), 109–142, Contemp. Math., 153, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [56] J. Rosenthal, A. Zelevinsky, *Multiplicities of Points on Schubert Varieties in Grassmannians* J. Algebraic Combin. **13** (2001), no. 2, 213–218.
- [57] H. Schubert, *Kalkül der Abzählenden Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1874.
- [58] T. Springer, *Linear Algebraic Groups*, Progress in Mathematics, 9, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.
- [59] R. Stanley, *Some combinatorial aspects of the Schubert calculus*, Combinatoire et représentation du groupe symétrique (Actes Table Ronde CNRS, Univ. Louis-Pasteur Strasbourg, Strasbourg, 1976), pp. 217–251. Lecture Notes in Math., Vol. **579**, Springer, Berlin, 1977.
- [60] T. Svanes, *Coherent cohomology on Schubert subschemes of flag schemes and applications*, Adv. Math. **14** (1974), 369–453.
- [61] B. Taylor, *A straightening algorithm for row-convex tableaux*, J. Algebra **236** (2001), no. 1, 155–191.
- [62] A. Woo, *Multiplicities of the Most Singular Point on Schubert varieties on $GL(n)/B$ for $n = 5, 6$* , Preprint <http://arxiv.org/abs/math/0407158>.

Bibliothèque Universitaire de Valenciennes



00900817