



**HAL**  
open science

# Proposition de lois de commande pour la stabilisation de modèles flous

Laurent Vermeiren

## ► To cite this version:

Laurent Vermeiren. Proposition de lois de commande pour la stabilisation de modèles flous. Automatique / Robotique. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 1998. Français. NNT : 1998VALE0024 . tel-03461742

**HAL Id: tel-03461742**

**<https://uphf.hal.science/tel-03461742>**

Submitted on 1 Dec 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

1998 VALE 00 24



N° d'ordre 98-32

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES  
ET DU HAINAUT-CAMBRÉSIS

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR D'UNIVERSITÉ**

spécialité

**AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES INDUSTRIELS ET HUMAINS**

par

**Laurent VERMEIREN**

Maître ès sciences

## **PROPOSITION DE LOIS DE COMMANDE POUR LA STABILISATION DE MODÈLES FLOUS**

Soutenue le 10 décembre 1998 devant la commission d'examen :

MM. Pierre  
Laurent  
Thierry Marie  
Noël  
Didier

**BORNE**  
**FOULLOY**  
**GUERRA**  
**MALVACHE**  
**WILLAEYS**

Professeur à l'école centrale de Lille  
Professeur à l'université de Savoie  
Maître de conférences à l'université de Valenciennes  
Professeur à l'université de Valenciennes  
Professeur à l'université de Valenciennes

(rapporteur)  
(rapporteur)









N° d'ordre 98-32

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES  
ET DU HAINAUT-CAMBRÉSIS

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR D'UNIVERSITÉ**

spécialité

**AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES INDUSTRIELS ET HUMAINS**

par

**Laurent VERMEIREN**

Maître ès sciences

**PROPOSITION DE LOIS DE COMMANDE  
POUR LA STABILISATION DE MODÈLES FLOUS**

Soutenue le 10 décembre 1998 devant la commission d'examen :

MM. Pierre  
Laurent  
Thierry Marie  
Noël  
Didier

**BORNE  
FOULLOY  
GUERRA  
MALVACHE  
WILLAEYS**

Professeur à l'école centrale de Lille  
Professeur à l'université de Savoie  
Maître de conférences à l'université de Valenciennes  
Professeur à l'université de Valenciennes  
Professeur à l'université de Valenciennes

(rapporteur)  
(rapporteur)



*À mon épouse Priscille  
À la mémoire de ma mère  
À la mémoire de ma grand mère  
À ma famille et mes amis...*



*"Il y a deux catégories de chercheurs dont les uns ne seraient que des manœuvres, tandis que les autres auraient pour mission d'inventer. L'invention doit être partout, jusque dans les plus humbles recherches de faits, jusque dans l'expérience la plus simple. Là où il n'y a pas un effort personnel et même original, il n'y a même pas un commencement de science."*

Henri BERGSON.



# Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué dans le cadre d'une allocation de recherche du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche avec le Laboratoire d'Automatique et de Mécanique Industrielles et Humaines (LAMIH) sous la direction conjointe de Monsieur Thierry Marie GUERRA, Maître de Conférences et de Monsieur le Professeur Didier WILLAEYS.

Qu'ils trouvent ici, l'expression de ma profonde gratitude pour la liberté et la confiance qu'ils ont su m'accorder tout au long de mes travaux de recherche.

Je tiens, également, à remercier Monsieur le Professeur Noël MALVACHE, Directeur du LAIH, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire et de son équipe et de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

Je suis profondément reconnaissant, à Monsieur le Professeur Pierre BORNE, pour son accueil chaleureux et pour m'avoir fait l'honneur de rapporter ce mémoire.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur Laurent FOULLOY, pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux, pour avoir rapporté avec soin ce mémoire.

Je remercie, tout particulièrement, Monsieur Thierry Marie GUERRA, Maître de Conférences, pour son aide et ses précieux conseils, son soutien continu et sa disponibilité.

Ma reconnaissance va également à Messieurs Gino PAGANELLI et Pascal LEBRUN qui ont réalisé les deux applications trouvées dans ce mémoire, respectivement la voiture électrique et la plate-forme du pendule inversé. Merci à Gino alias "Electric Man", pour cette aventure extraordinaire des trois mousquetaires au Rallye international de voitures électriques de La Rochelle, à Pascal, pour cette plate-forme qui nous a beaucoup apporté dans le domaine de la commande en temps réel.

Un grand merci à Messieurs Olivier PETIT et François DELMOTTE, qui ont eu l'amabilité de relire ce mémoire, en saluant tout particulièrement Olivier pour sa disponibilité et son soutien quotidien.

Enfin merci, à la secrétaire et à toute l'équipe du LAMIH, aux thésards Carlos GOMES, Salvatore ARAMINI et Yann MORERE, à Monsieur Dominique ROGER, Maître de Conférences et Jonathan TOMASZEWSKI, pour leur disponibilité et leur bonne humeur.

J'exprime une pensée toute particulière pour mon épouse, Priscille, pour sa patience et son soutien.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
Références personnelles .....	4
<b>Chapitre 1. La commande floue</b>	<b>7</b>
1.1. Introduction .....	8
1.2. Mise en œuvre d'un régulateur flou .....	9
1.2.1. Fuzzification des entrées .....	10
1.2.2. Base de règles et méthodes d'inférence .....	11
1.2.2.1. Règles floues - matrices d'inférences/des règles .....	11
1.2.2.2. Raisonnement flou .....	13
1.2.2.2.1. Raisonnement basé sur l'inférence de règles floues .....	13
1.2.2.2.2. Raisonnement basé sur la logique floue .....	16
1.2.3. Défuzzification .....	17
1.2.4. Choix des différents paramètres d'un régulateur flou .....	18
1.3. Différents types de régulateur flou .....	19
1.3.1. Régulateurs flous à structure PID (RF-P, RF-PD, RF-PI, RF-PID) .....	19
1.3.2. Régulateur flou de type Sugeno (RF-Sugeno) .....	21
1.4. Modèle flou du type Takagi Sugeno Kang (TSK) .....	22
1.5. Stabilité des modèles flous .....	24
1.5.1. Méthodes qualitatives et géométriques .....	25
1.5.2. Mise sous forme d'un problème de Lur'e .....	26
1.5.3. Approche par la méthode de Lyapunov .....	28
1.6. Conclusion .....	29
<b>Chapitre 2. Étude des modèles flous de type TSK</b>	<b>31</b>
2.1. Introduction .....	32
2.2. Étude de la stabilité du modèle complet :	
Modèle flou - Régulateur flou .....	33
2.2.1. Construction du régulateur flou .....	34
2.2.2. Conditions de stabilité .....	35
2.2.3. Exemple .....	36
2.2.4. Inégalité Matricielle Linéaire (LMI) .....	40
2.2.5. Conditions de stabilité relâchées .....	43

2.2.6. Prise en compte de la partie antécédent des règles.....	44
2.2.6.1. /Kim & al. 95/.....	44
2.2.6.2. /Marin 95b/.....	45
2.3. Étude de la stabilité du modèle complet :	
Modèle flou - Régulateur flou - Observateur flou.....	47
2.3.1. Observateur flou.....	48
2.3.2. Etude du modèle complet dans le cas particulier des variables de prémises mesurables.....	49
2.3.3. Etude du modèle complet dans le cas général.....	52
2.4. Conclusion.....	53

### **Chapitre 3. Lois de commande pour modèles flous continus** **55**

3.1. Introduction.....	56
3.2. Modèles SIMO.....	57
3.2.1. Approche utilisant la stabilisation simultanée d'une famille de modèles linéaires.....	57
3.2.2. Approche utilisant la division par.....	63
3.2.3. Cas particuliers.....	67
3.2.4. Exemples.....	73
3.2.4.1. Exemple 1.....	73
3.2.4.2. Exemple 2.....	76
3.2.5. Modèle complet.....	79
3.2.5.1. Approche par SSF.....	79
3.2.5.2. Cas particuliers CDF.....	81
3.3. Modèles MIMO.....	82
3.3.1. Loi de commande.....	83
3.3.2. Modèle complet.....	85
3.3.3. Exemple 1.....	87
3.4. Conclusion.....	88

### **Chapitre 4. Application à deux procédés réels** **91**

4.1. Introduction.....	92
4.2. Commande d'un véhicule électrique.....	92
4.2.1. Le véhicule et la chaîne de traction.....	93
4.2.2. Stratégie de commande adoptée.....	95
4.2.2.1. Domaine de fonctionnement : la tension Induit est inférieure à la tension batterie ( $U < U_{batt}$ ).....	96
4.2.2.2. Domaine de fonctionnement : la tension Induit a atteint la tension batterie ( $U = U_{batt}$ ).....	96
4.2.2.3. La commande du moteur.....	97
4.2.3. Résultats.....	98
4.3. Application à un pendule inversé.....	100
4.3.1. Description de la plate-forme d'essais.....	100
4.3.2. Modèle de connaissance du système.....	102
4.3.3. Essais en simulation.....	103
4.3.3.1. Obtention d'un modèle flou.....	104

4.3.3.2. Comparaison de différentes lois de commande .....	106
4.3.4. Essais en commande temps réel.....	111
4.3.4.1. Balancement du pendule.....	111
4.3.4.2. Commande Linéaire Quadratique.....	114
4.3.4.3. Régulateur flou de type PDC.....	114
4.3.4.4. Régulateur de type SSF.....	115
4.3.4.5. Régulateur flou à ensemble de règles de cardinalité réduite .....	116
4.3.4.6. Comparaison des différentes commandes .....	118
4.4. Conclusion.....	124
<b>Chapitre 5. Extensions et perspectives</b> .....	<b>127</b>
5.1. Introduction.....	128
5.2. Extension au cas discret .....	128
5.2.1. Cas particulier.....	128
5.2.2. Exemple .....	131
5.3. Perspectives.....	135
5.4. Conclusion.....	137
<b>Conclusion générale</b> .....	<b>139</b>
<b>Bibliographie</b> .....	<b>143</b>
<b>Annexe</b> .....	<b>157</b>



# Introduction générale

Devant les problèmes délicats de la modélisation et de la commande de systèmes complexes, les outils utilisés deviennent de plus en plus pointus. Une approche ayant connu des développements importants ces dernières années est la commande floue, dont les applications sont nombreuses, surtout au Japon /Dubois & Prade 91/. Citons entre autres : un organe de conduite pour le métro de Sendai, le contrôle de balancement de charges pour un pont roulant, la commande d'un four à ciment, la purification de l'eau, la stabilisation d'images de caméscopes...

Malgré le nombre important des applications développées, il manque des outils permettant d'analyser les systèmes de contrôle flou. En d'autres termes, comme le notent K. Tanaka & M. Sugeno /Tanaka & Sugeno 92/, ce dernier étant un des pionniers de la régulation floue au Japon, *"on a besoin d'une théorie des systèmes flous comme celle des systèmes linéaires"*.

En effet, comme dans le cas linéaire, il est nécessaire de développer une théorie des modèles flous : en particulier l'analyse de la stabilité des boucles de régulation floue comprenant un régulateur et/ou un observateur flou. Cependant, cette analyse est difficile puisqu'un régulateur flou est par essence non linéaire.

La mise en œuvre de régulateurs flous pour des systèmes monovariables, ainsi que l'étude de leur stabilité et de leurs performances, sont devenus d'un usage commun /Lee 90/ /Driankov & al. 93/ /Guerra & Ouattara 93/, même s'il reste des travaux à réaliser au niveau de l'écriture systématique de toutes les parties d'un régulateur flou. Par contre, les synthèses de régulateurs dans le cas des systèmes SIMO (Single Input Multiple Output) et des systèmes MIMO (cas multivariable) sont beaucoup plus récentes et font l'objet de nombreuses recherches aujourd'hui /Ma & al. 98/ /Tanaka & al. 98/. Ce fait est dû dans une grande partie aux avancées des outils informatiques et mathématiques.

En particulier, les techniques récentes basées sur les programmes d'optimisation convexe d'un type particulier, les programmes semidéfinis (SDP) /El Ghaoui 97/ avec contraintes dites "Inégalités Matricielles Linéaires" (LMIs), permettent de résoudre une large classe de problèmes d'analyse et de synthèse de lois de commande en automatique.

L'intérêt principal de la formulation LMI est la possibilité de les résoudre numériquement de manière efficace à l'aide de méthodes récentes de points intérieurs /Nesterov & Nemirovsky 94/. Elle ouvre ainsi la voie à une nouvelle génération d'outils de CAO pour l'automatique.

Des propriétés de stabilité peuvent alors être déduites en résolvant un ensemble d'inégalités linéaires matricielles (LMIs). Par exemple l'approche basée sur une PDC (Parallel Distributed Compensation) qui permet d'élaborer des lois de commande par retour d'état flou ainsi que des observateurs flous /Tanaka & al. 98/.

Ainsi, ce mémoire propose quelques travaux visant à appliquer la méthode de Lyapunov servant de base à la synthèse des lois de commande à de nouvelles structures basées sur la logique floue en utilisant le potentiel offert par une formulation sous forme LMIs. L'intérêt de cette approche est d'obtenir des lois de commande et des observateurs non linéaires d'une façon presque naturelle à partir d'un modèle flou du procédé.

Le mémoire de thèse se décompose en cinq parties.

**La commande floue (chapitre 1) :** le but de ce chapitre est de rappeler brièvement les grandes lignes de la commande floue. Dans un premier temps les différentes parties composant un régulateur flou ainsi que les différents types de régulateur sont rapidement présentés. Ensuite le modèle flou de type Takagi Sugeno Kang (TSK) /Takagi & Sugeno 85/ /Sugeno & Kang 88/ est rappelé. La fin de ce premier chapitre donne des résultats concernant la stabilité de ces modèles flous.

**Étude des modèles flous de type TSK (chapitre 2) :** Ce chapitre a pour objet de présenter certains travaux permettant d'étudier l'analyse de la stabilité des boucles de régulation comprenant un modèle flou de type TSK. Quelques théorèmes donnant des conditions garantissant la stabilité d'une boucle de régulation floue obtenue à partir de la seconde méthode de Lyapunov sont rappelés. Les lois de commande élaborées sont soit des lois linéaires, soit des lois de commande floues basées sur un concept appelé PDC (Parallel Distributed Compensation).

**Lois de commande pour modèles flous continus (chapitre 3) :** Ce chapitre propose de nouvelles lois de commande pour les modèles flous continus SIMO et MIMO de type TSK, comprenant un régulateur flou et/ou un observateur flou. Des conditions de stabilité mises sous la forme de LMIs sont données ainsi qu'un principe de séparation. Ce chapitre montre que dans certains cas, des conditions moins conservatives de stabilité peuvent être trouvées par rapport aux conditions obtenues avec des lois basées sur une PDC.

**Application à deux procédés réels (chapitre 4) :** Ces différentes recherches ont également débouchées sur des applications concrètes développées au sein du LAMIH (Laboratoire d'Automatique et de Mécanique Industrielles et Humaines). La première concerne la régulation floue d'un véhicule électrique /Vermeiren & al. 97a/, et se place dans le cadre de l'approche par logique floue synthétisant une loi de commande à partir de l'expertise de l'opérateur humain.

La seconde application concerne la commande en simulation et en temps réel d'un système bien connu : le pendule inversé /Vermeiren & al. 97b/. La plate-forme d'essais permet la validation de diverses lois de commande basées sur des modèles classiques, linéaires ou non, ou un modèle flou de type TSK.

**Extensions et perspectives (chapitre 5) :** Ce dernier chapitre présente quelques extensions immédiates des lois de commande proposées au cas discret. Encore une fois, il est montré sur un exemple qu'il est possible d'obtenir des résultats moins conservatifs que ceux trouvés dans la littérature.

## Références personnelles

### Reuves

- T.M. Guerra, L. Vermeiren, F. Delmotte et P. Borne  
*Lois de commande pour systèmes flous continus*  
(soumise à la revue RAIRO-APII-JESA) 1998
- T.M. Guerra et L. Vermeiren  
*Control laws for continuous Fuzzy Systems*  
(acceptée dans la revue Fuzzy Sets and Systems) 1998
- L. Vermeiren, T.M. Guerra et G. Paganelli  
*Application of fuzzy set theory to electric car control*  
Cybernetics and Systems, vol 28, n°8, pp 675-693 , 1997

### Conférences avec comité de lecture

- T.M. Guerra et L. Vermeiren  
*Control laws for continuous fuzzy systems*  
5<sup>th</sup> International Conference on Advanced Computer Systems ACS, Szczecin, Poland,  
pp 368-375, 1998
- T.M. Guerra et L. Vermeiren  
*Lois de commande pour systèmes flous continus*  
4<sup>me</sup> Conférence des Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications  
LFA, Rennes, pp 11-18, Cépaduès-Editions, 1998
- L. Vermeiren, P. Lebrun, T.M. Guerra et N. Duhem  
*Comparaison de différentes commandes en temps réel d'un pendule inversé*  
3<sup>me</sup> Conférence des Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications  
LFA, Lyon, pp 17-24, Cépaduès-Editions, 1997
- L. Vermeiren, T.M. Guerra et S. Ouattara  
*An example of multivariable system regulated by fuzzy control*  
3<sup>rd</sup> European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing EUFIT, Aachen,  
Germany, vol 2, pp 1129-1133, 1995

### **Conférences sur invitation**

- T.M. Guerra, O. Petit, G. Paganelli et L. Vermeiren  
*Introduction à la commande floue et exemples d'applications*  
1<sup>er</sup> Séminaire "Développements récents en modélisation et commande des processus industriels" du Groupe Commande Robuste du GRAISyHM, Lille, 1998
- T.M. Guerra, G. Paganelli, L. Vermeiren, P. Pacaux, O. Petit, J.P. Fourcroy et T. Destoop,  
*Deux applications industrielles en logique floue*  
Séminaire "Logique floue et Réseaux neuronaux", Toulon, 1997
- G. Paganelli, T.M. Guerra et L. Vermeiren  
*Électrification d'un véhicule de série : des composants à la commande floue*  
Colloque "Actionneurs & Véhicules Électriques", Amiens, 1995
- T.M. Guerra, G. Paganelli et L. Vermeiren  
*Application de la régulation floue à la commande d'un véhicule électrique*  
1<sup>er</sup> Symposium "perspectives et applications de la logique floue en Europe", Lille, 1994

### **Enveloppe Soleau**

- T.M. Guerra, L. Vermeiren et G. Paganelli  
*Application de la régulation floue pour la commande de l'excitation variable d'un moteur électrique, Enveloppe Soleau n°27962*  
Institut National de la Propriété Industrielle, 1996



# Chapitre 1.

## La commande floue

L'objet de ce chapitre est de présenter rapidement les différentes parties composant un régulateur flou, les différents types de régulateur, le modèle de type Takagi Sugeno Kang /Takagi & Sugeno 85/ /Sugeno & Kang 88/. Quelques résultats concernant la stabilité des boucles de régulation comprenant un régulateur flou sont également donnés.

1.1. Introduction.....	8
1.2. Mise en œuvre d'un régulateur flou.....	9
1.2.1. Fuzzification des entrées.....	10
1.2.2. Base de règles et méthodes d'inférence.....	11
1.2.2.1. Règles floues - matrices d'inférences/des règles.....	11
1.2.2.2. Raisonnement flou.....	13
1.2.2.2.1. Raisonnement basé sur l'inférence de règles floues.....	13
1.2.2.2.2. Raisonnement basé sur la logique floue.....	16
1.2.3. Défuzzification.....	17
1.2.4. Choix des différents paramètres d'un régulateur flou.....	18
1.3. Différents types de régulateur flou.....	19
1.3.1. Régulateurs flous à structure PID (RF-P, RF-PD, RF-PI, RF-PID).....	19
1.3.2. Régulateur flou de type Sugeno (RF-Sugeno).....	21
1.4. Modèle flou du type Takagi Sugeno Kang (TSK).....	22
1.5. Stabilité des modèles flous.....	24
1.5.1. Méthodes qualitatives et géométriques.....	25
1.5.2. Mise sous forme d'un problème de Lur'e.....	26
1.5.3. Approche par la méthode de Lyapunov.....	28
1.6. Conclusion.....	29

## 1.1. Introduction

Depuis ces vingt dernières années, l'utilisation de la théorie des ensembles flous dans la modélisation et la commande des systèmes complexes industriels est devenu un outil à part entière. Le concept d'ensemble flou a été proposé en 1965 à l'Université de Berkeley en Californie par le professeur Lofti Zadeh /Zadeh 65/, et initialement introduit en France par le professeur Arnold Kaufmann /Kaufmann 73/.

Le principe de la régulation floue a été expérimenté avec succès sur une turbine à vapeur dès 1974, par l'équipe du professeur E.H. Mamdani, au Queen Mary College de Londres /Mamdani 74/. Ces résultats étaient bientôt confirmés et développés par plusieurs équipes en Europe de l'Ouest dont celle des professeurs D. Willaëys et N. Malvache à l'université de Valenciennes /Willaëys & Malvache 78/, puis ensuite par l'institut de Technologie de Tokyo /Sugeno 85/ et de quelques autres universités japonaises /Bellon & al. 89/. Citons notamment la première application industrielle d'envergure de la société Hitachi, en 1986, après plusieurs années d'études, d'un organe de conduite pour un système de transport ferroviaire à Sendai, dans le nord du Japon, dont les performances (précision d'arrêt, confort des passagers, énergie consommée) rivalisent avec celles d'un système de commande classique /Miyamoto & al. 87/.

En l'état actuel, les deux domaines d'applications de la logique floue qui deviennent de plus en plus important, sont /Bühler 94/ :

- la conception de régulateurs pour des procédés difficilement modélisables,
- la conception de régulateurs non linéaires pour des procédés modélisables.

Dans le premier cas, la régulation floue se distingue d'une régulation classique par le fait que l'approche par logique floue synthétise une loi de commande à partir de l'expertise de l'opérateur humain, alors que les approches classiques de l'automatique consistent à élaborer une loi de commande à partir d'un modèle mathématique du procédé. Tout l'intérêt de la commande floue pour des procédés complexes, difficiles à modéliser, réside donc dans le recueil de l'expertise d'un opérateur humain sachant piloter, ou ayant une bonne connaissance de la commande du procédé. La difficulté réside, évidemment dans l'obtention de cette expertise.

Dans le deuxième cas, la structure non linéaire du régulateur flou peut améliorer les performances en terme de précision, de stabilité et de robustesse des lois de commande linéaires. Il peut être appliqué en utilisant des modèles classiques, linéaires ou non, ou des modèles flous spécifiques, de type Takagi-Sugeno-Kang (TSK) par exemple /Takagi & Sugeno 85/.

Ce chapitre présente dans un premier temps, les propriétés de base de la commande floue, le lecteur peut se reporter à d'autres publications ou ouvrages pour avoir un aperçu général sur ces aspects /Sugeno 85/ /Lee 90/ /Guerra & al. 92/ /Driankov & al. 93/ /Bülher 94/. La synthèse des régulateurs flous se faisant souvent de manière heuristique, le régulateur obtenu est souvent spécifique au système à commander ce qui empêche l'existence d'un formalisme global et rend l'analyse de la stabilité difficile. Néanmoins, des résultats significatifs concernant la stabilité des boucles de régulation utilisant des régulateurs flous ont été obtenus et sont traités dans la deuxième partie du chapitre.

## 1.2. Mise en œuvre d'un régulateur flou

La commande floue a les mêmes objectifs de régulation et de poursuite qu'une commande réalisée en automatique classique. Cependant, il est possible de se passer d'un modèle explicite du procédé à commander. C'est le plus souvent, le savoir-faire d'un expert ou d'opérateurs qualifiés manipulant le procédé qui est pris en compte pour l'élaboration de la loi de commande.

Cette approche est basée sur deux concepts essentiels : celui de la décomposition d'une plage de variation d'une variable sous forme de nuances linguistiques : "faible", "moyen", "élevé"... et des règles provenant de l'expertise de l'opérateur humain, qui expriment, sous forme linguistique, comment doivent évoluer les commandes du système en fonction des variables observées :

**"Si** l'erreur est positivement grande **et**  
la variation de l'erreur est positivement grande  
**alors** la variation de la sortie est très négative".

Ces concepts sont basés sur une partie de la théorie des sous-ensembles flous introduite par Zadeh /Zadeh 65/.

Un régulateur flou peut être présenté de différentes façons, mais en général la présentation adoptée se scinde en trois parties /Sugeno 85/ /Guerra & Ouattara 93/ : la fuzzification qui permet de passer de variables réelles à des variables floues, le cœur du régulateur représenté par les règles reliant les entrées et sorties, et enfin l'inférence et la défuzzification qui permettent à partir des ensembles flous d'entrée de déterminer la valeur réelle de sortie, figure 1.1. L'ensemble des entrées du procédé est noté  $U$  (ensemble des actions calculées par le régulateur flou appliqué au procédé commandé), l'ensemble des

sorties observées  $S$ , l'ensemble des consignes  $C$  et l'ensemble des entrées du régulateur flou  $X$  (par exemple taille, température, pression, angle, vitesse, humidité). L'ensemble des gains de normalisation des entrées  $GE$  et les gains de sorties  $GS$  du régulateur permettent d'adapter le domaine de définition des différentes variables (par exemple écart de réglage, dérivée approximative d'une grandeur ou d'autres grandeurs internes).

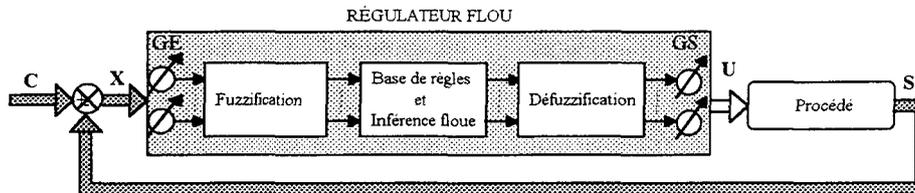


Figure 1.1 : Schéma de principe de la régulation floue

Les paragraphes suivants décrivent les trois blocs du régulateur flou.

### 1.2.1. Fuzzification des entrées

L'objectif de la fuzzification est de transformer les variables déterministes d'entrée en variables floues, c'est-à-dire en variables linguistiques, en définissant des fonctions d'appartenance pour ces différentes variables d'entrée.

Les fonctions d'appartenance peuvent avoir différentes formes ; mais les formes trapézoïdales, triangulaires ou issues de modèles mathématiques sont les plus couramment utilisées /Lee 90/.

Les grandeurs physiques d'entrée  $X$  sont réduites à des grandeurs normalisées  $x$  dans une plage de variation, souvent  $[-1 \ 1]$ , appelée univers de discours, qui peut-être soit discret, soit continu. Bien souvent, cet univers de discours est borné, en appliquant une limitation sur la valeur numérique de  $|x| \leq 1$ , pour pallier le problème des grandes variations de  $X$ . Les gains de normalisation caractérisent les facteurs d'échelle entre  $x$  et  $X$ .

Dans le cas d'un univers de discours continu, le nombre de valeurs linguistiques (très négatif, négatif, zéro, positif, très positif ...) représenté par des fonctions d'appartenance pour une variable  $x_1$  peut varier (par exemple trois, cinq ou sept). Un exemple de fuzzification continue est illustré figure 1.2 pour une seule variable de  $x$ , avec des fonctions d'appartenance trapézoïdales ; les valeurs linguistiques correspondantes sont caractérisées par

des symboles tels que N pour négatif, Z pour zéro, et P pour positif. Ainsi  $x_1 = 0,2$  devient après fuzzification le sous-ensemble flou  $\tilde{x}_1 = (0 \ 0,8 \ 0,2)$ .

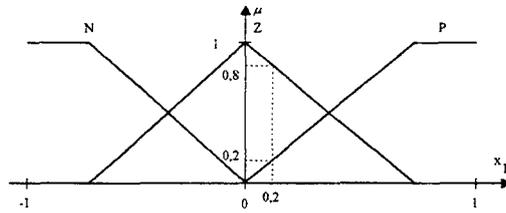


Figure 1.2 : Fuzzification continue avec trois fonctions d'appartenance

En général, les fonctions d'appartenance prennent leur valeur dans l'intervalle  $[0 \ 1]$ .

Le paragraphe suivant traite de la deuxième étape qui consiste à établir les règles à partir de ces variables floues, et à les évaluer.

### 1.2.2. Base de règles et méthodes d'inférence

Tout d'abord, une description linguistique des règles, ainsi que les matrices d'inférences ou matrices des règles sont présentées.

#### 1.2.2.1. Règles floues - matrices d'inférences/des règles

Les règles floues représentent le cœur du régulateur, et permettent d'exprimer sous forme linguistique les variables d'entrée du régulateur aux variables de commande du système.

Un type de règle peut-être par exemple :

Si  $x_1$  est "positif" et  $x_2$  est "zéro" alors  $u$  est "négatif"

où  $x_1$  et  $x_2$  représentent deux variables d'entrée du régulateur telles que : l'écart de réglage, sa variation et  $u$  la commande. L'expérience dans l'élaboration de ces règles joue un rôle important.

Cependant, la littérature nous donne quelques méthodes qui peuvent être mises en œuvre pour recueillir ces règles, pouvant être classées en deux types d'études.

Dans le cas d'un système classique, où les entrées et sorties du régulateur sont bien définies, il est inutile de passer par une étape d'extraction de connaissances pour les déterminer /Mizumoto 88/ /Cao & Kandel 89/ /Silver & Ying 89/ /Ying & al. 90/. En général, le nombre de règles est peu important, de quatre à une vingtaine.

Dans le cas d'un système complexe, ces méthodes sont basées sur le savoir-faire de l'opérateur humain où celui-ci décrit lui-même des stratégies de commande /Mamdani & Assilian 75/ /Terano & al. 88/ /Yu & al. 90/.

Une représentation graphique de l'ensemble des règles, appelée matrice d'inférence ou matrice des règles, couramment utilisée dans la littérature /Kickert & Mamdani 78/ /Braae & Rutherford 79/ /Mizumoto 88/ /Boverie & al. 91/, permet de synthétiser le cœur du régulateur flou.

Le tableau 1.1 représente un exemple de matrice d'inférence pour les deux variables linguistiques d'entrée  $x_1$  et  $x_2$  et la variable floue de sortie  $u$  utilisées au paragraphe précédent. Les symboles TP et TN représentent respectivement Très Négatif et Très Positif.

		$x_2$		
		N	Z	P
$x_1$	$u$			
	N	TP	P	Z
	Z	P	Z	N
	P	Z	N	TN

Tableau 1.1 : Exemple de matrice d'inférence

La case en grisé du tableau 1.1 représente la règle :

Si  $x_1$  est "positif" et  $x_2$  est "zéro" alors  $u$  est "négatif"

Lorsque toutes les cases de la matrice d'inférence sont remplies (comme pour l'exemple du tableau 1.1), il s'agit de règles d'inférence complètes, dans le cas contraire, de règles d'inférence incomplètes. Cependant, cette représentation graphique devient plus complexe, s'il y a plus de trois variables linguistiques d'entrée.

Après avoir présenté la manière d'établir les règles du régulateur flou, il est nécessaire d'en déduire une sortie par raisonnement, qui est présenté dans le sous-paragraphe suivant.

### 1.2.2.2. Raisonnement flou

Le raisonnement flou a pour objectif de déterminer en fonction des variables linguistiques d'entrée  $x$ , issues de la fuzzification des variables réelles d'entrée  $X$  et des règles floues de commande, un ensemble flou de valeurs possibles pour la variable linguistique de sortie  $u$ .

Il y a en général deux façons de raisonner. La première est basée sur l'inférence de règles floues, et la deuxième sur la logique floue.

#### 1.2.2.2.1. Raisonnement basé sur l'inférence de règles floues

Cette méthode d'inférence est directement issue de celles basées sur les systèmes experts /Mizumoto & Zimmermann 82/ /Dubois & Prade 84/ /Guerra 91/.

Cette façon de raisonner dépend des implications utilisées, de la forme des fonctions d'appartenance et utilise des méta-implication du type :

Si  $x_1$  est P alors  $u$  est N

Cette méta-implication souvent appelée relation (notée R), peut être représentée par une fonction d'appartenance  $\mu_R(x_1, u)$  dépendant des fonctions d'appartenance  $\mu_P(x_1)$  et  $\mu_N(u)$ . Citons quelques modélisations possibles :

$\mu_R(x_1, u) = \min[\mu_P(x_1), \mu_N(u)]$	/Mamdani 74/
$\mu_R(x_1, u) = \mu_P(x_1) \cdot \mu_N(u)$	/Larsen 80/
$\mu_R(x_1, u) = \min[1, 1 - \mu_P(x_1) + \mu_N(u)]$	/Zadeh 75/
$\mu_R(x_1, u) = 1 - \mu_P(x_1) + \mu_P(x_1) \cdot \mu_N(u)$	/Mizumoto & Zimmermann 82/

Cependant, cette méta-implication ne peut être utilisée que si " $x_1$  est P" existe. Or, dans beaucoup de cas, on cherche à déduire des résultats avec un P' qui diffère de P. Pour cela, une extension du modus ponens défini en logique, appelée le modus ponens généralisé proposé par Zadeh /Zadeh 77/, est utilisée pour déterminer une conclusion pour chaque règle en fonction de la prémisse de celle-ci. Ce type d'inférence correspond au schéma suivant :

<p>Si <math>x_1</math> est P alors <math>u</math> est N</p> <p><math>x_1</math> est P'</p> <hr style="width: 50%; margin: 10px auto;"/> <p><math>u</math> est N'</p>
--

Le résultat " $u$  est N" peut alors être obtenu en utilisant une modélisation dépendant d'un opérateur de composition  $\circ$  /Dubois & Prade 84/ :

$$\mu_N(u) = \sup(\mu_P(x_1) \circ \mu_R(x_1, u))$$

L'application à la commande se fait de la manière suivante :

Soit la règle de commande  $R_i$  : Si  $x_1$  est P et  $x_2$  est Z alors  $u$  est N

où P, Z et N représentent les valeurs linguistiques floues respectivement définies sur les univers de discours des variables linguistiques  $x_1$ ,  $x_2$  et  $u$ .

Si à un instant  $t$ ,  $x_1$  et  $x_2$  prennent respectivement les valeurs  $x_{10}$  et  $x_{20}$ , les valeurs de vérité (ou degré d'appartenance) des deux prédicats " $x_1$  est P" et " $x_2$  est Z" seront respectivement égales à  $\mu_P(x_{10})$  et  $\mu_Z(x_{20})$ , et celle de la proposition floue " $u$  est N" sera  $\mu_N(u)$ .

Ainsi, le résultat de l'inférence, représentant la valeur de vérité de la règle  $R_i$  (noté  $\mu_{R_i}$ ), sera fonction des différents degrés d'appartenance cités ci-dessus, ainsi que des opérateurs (ET,  $f$ ) choisis pour modéliser la conjonction "et" et l'implication "Si ... alors ...".

$$\mu_{R_i}(x_{10}, x_{20}, u) = f(ET[\mu_P(x_{10}), \mu_Z(x_{20})], \mu_N(u)) \quad /Guerra \& Ouattara 93/$$

Le choix des opérateurs aboutit à des résultats différents, comme le montre les figures 1.3 à 1.5 ( $\mu_{R_i}(x_{10}, x_{20}, u)$  est représenté en grisé).

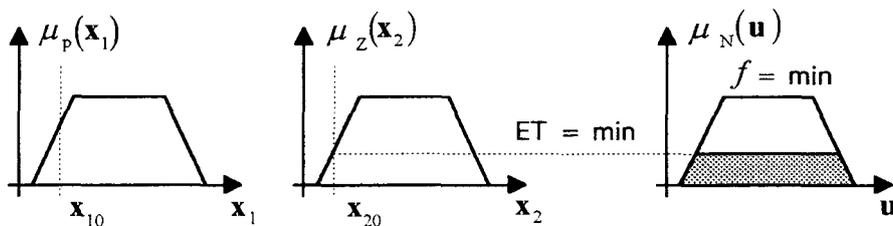


Figure 1.3 :  $ET(a, b) = \min(a, b)$ ,  $f(a, b) = \min(a, b)$

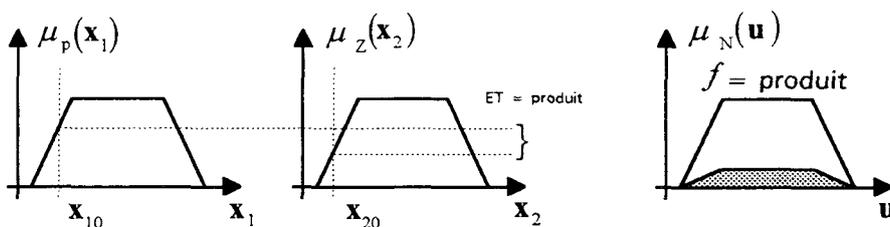


Figure 1.4 :  $ET(a, b) = a \cdot b$ ,  $f(a, b) = a \cdot b$

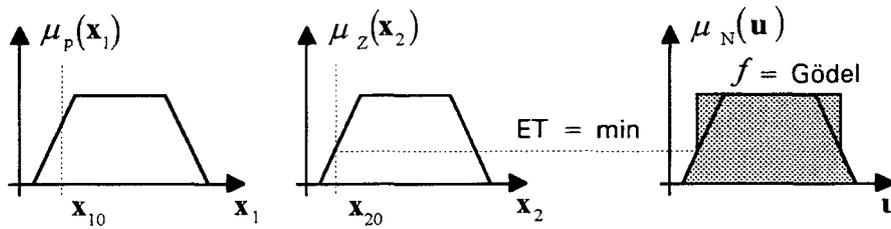


Figure 1.5 :  $ET(a,b) = \min(a,b)$ , logique de Gödel :  $f(a,b) = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ b & \text{sinon} \end{cases}$

Ensuite, après avoir évalué chaque règle, il est nécessaire de reconstruire la sortie globale du régulateur, c'est-à-dire prendre en compte l'ensemble des valeurs de vérité  $\mu_{R_i}(x_{10}, x_{20}, u)$  des règles  $R_i$ .

Dans ce but, les règles sont connectées par des "Sinon", qui s'interprètent dans le cas où  $\mu_{R_i}(x_{10}, x_{20}, u)$  est contenue dans  $\mu_N(u)$ , par une co-norme triangulaire, dans le cas contraire, une norme triangulaire /Mizumoto & Zimmermann 82/.

L'inférence sur l'ensemble des  $n$  règles du régulateur flou donne donc le résultat suivant :  $\mu_u(u) = ELSE_{i=1}^n \mu_{R_i}(x_{10}, x_{20}, u)$

L'obtention de l'ensemble flou  $u$  diffère selon le choix du "Sinon". La figure 1.6 permet d'illustrer cette inférence, pour un régulateur à deux règles :

$R_1$  : Si  $x_1$  est P et  $x_2$  est P alors  $u$  est N

$R_2$  : Si  $x_1$  est N et  $x_2$  est N alors  $u$  est P

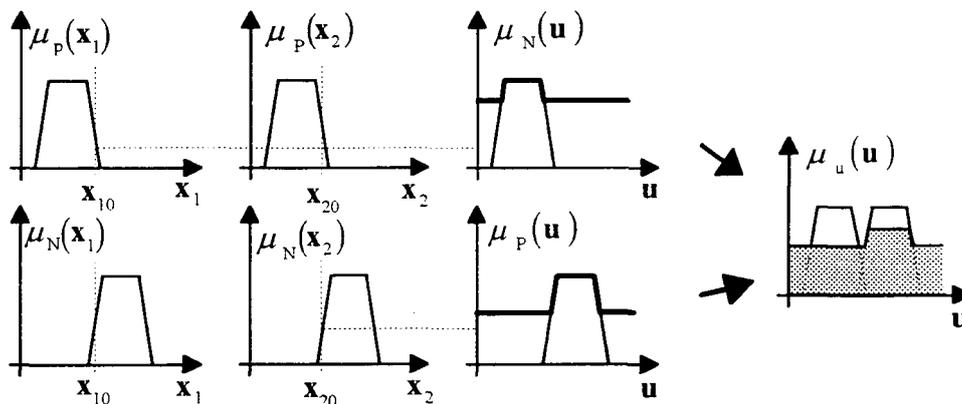


Figure 1.6 : Obtention de  $\mu_u(u)$  pour un régulateur à deux règles avec  $ET(a,b) = \min(a,b)$ , implication booléenne :  $f(a,b) = \max(1-a,b)$ ,  $SINON = \min(a,b)$

Après avoir présenté la première approche basée sur le raisonnement flou par inférences, la partie suivante présente la seconde qui est basée sur la logique floue.

*1.2.2.2.2. Raisonnement basé sur la logique floue*

Cette seconde approche est issue de la logique floue et plus particulièrement de la logique de Lukasiewicz /Kaufmann 73/. Il n'y a plus à proprement parler de modélisation de l'inférence /Sugeno 85/.

Contrairement au raisonnement par inférences, où toute combinaison différente des entrées donne une nouvelle règle (même si la valeur linguistique de sortie est identique), le raisonnement fondé sur la logique floue, consiste pour une seule règle à prendre en compte l'ensemble des combinaisons des entrées qui aboutissent à la même valeur linguistique de sortie. Dans ce cas, les prémisses des règles ayant une même conclusion sont liées par un connecteur "ou" pour ne former qu'une seule règle.

À chaque règle  $R_i$ , est associée un poids  $w_i$ . Ce poids dépend de la prémisse de chaque règle  $i$ , mais également des opérateurs "et" et "ou".

Par exemple, les trois règles suivantes au sens de la première méthode :

- Si  $x_1$  est TP et  $x_2$  est TN alors  $u$  est N
- Sinon Si  $x_1$  est P et  $x_2$  est N alors  $u$  est N
- Sinon Si  $x_1$  est N et  $x_2$  est N alors  $u$  est N

se transforment dans le cas de la régulation par logique floue à une seule règle :

- Si  $x_1$  est TP et  $x_2$  est TN
- ou  $x_1$  est P et  $x_2$  est N
- ou  $x_1$  est N et  $x_2$  est N
- alors  $u$  est N

Le poids associé à cette règle est donné par /Guerra & al. 92/:

$$w_i = OU_i \left( ET \left[ \mu_{x_{1j}}(x_{10}), \mu_{x_{2k}}(x_{20}) \right] \right)$$

où  $i$  est l'indice de la règle,  $j$  et  $k$  les indices correspondant aux valeurs linguistiques prises en compte pour les variables floues (dans l'exemple : TP, P, N pour  $x_1$  et TN, N pour  $x_2$ ), et /

le nombre de prédicats de la prémisse connectés par des "ou". La sortie peut se résumer à un ensemble flou comme dans le cas du raisonnement par inférences.

Les sorties issues de l'évaluation des règles sont donc encore floues ; par conséquent une étape de défuzzification est nécessaire, ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

### 1.2.3. Défuzzification

Cette dernière étape appelée défuzzification consiste à prendre une décision, c'est-à-dire, obtenir une commande réelle à partir de la commande obtenue sous forme d'ensemble flou.

Dans le cas d'un *raisonnement basé sur l'inférence de règles floues*, plusieurs algorithmes existent. Mais les deux méthodes les plus utilisées sont le Centre de Gravité (CG) et la Moyenne des Maxima (MM) dont les définitions sont les suivantes :

$$u_{CG}^* = \frac{\int_{-1}^1 u \cdot \mu_u(u) \cdot du}{\int_{-1}^1 \mu_u(u) \cdot du}, \quad u_{MM}^* = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n} \quad \text{où les } n u_i \text{ sont définis tels que : } \mu_u(u_i) = \max_u(\mu_u(u))$$

La figure 1.7 présente les résultats obtenus par ces deux méthodes, pour un ensemble flou de sortie donné.

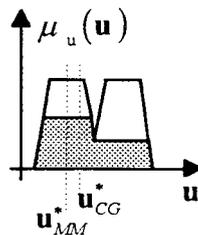


Figure 1.7 : Défuzzification de la sortie floue  
(CG = Centre de Gravité, MM = Moyenne des Maxima)

La défuzzification par Centre de Gravité nécessite un calcul assez important, surtout pour une commande en temps réel.

Dans l'autre cas, celui d'un raisonnement basé sur la logique floue, la défuzzification peut s'effectuer de deux manières possibles : sous la forme linéaire (L) ou non linéaire (NL) /Silver & Ying 89/ /Ying & al. 90/. Les définitions sont les suivantes :

$$u_L^* = \sum_{i=1}^n w_i \cdot u_i, \quad u_{NL}^* = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot u_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \text{ où } n \text{ représente le nombre de règles.}$$

La présentation des différentes parties d'un régulateur flou étant terminée, le prochain paragraphe traite rapidement de l'influence des différents paramètres des régulateurs.

### 1.2.4. Choix des différents paramètres d'un régulateur flou

La figure 1.8 résume l'ensemble des paramètres variables dans le cas d'un raisonnement basé sur la logique floue.

L'ensemble des paramètres à régler est très important : nombre et forme des valeurs linguistiques des entrées, nombre et forme des valeurs linguistiques des sorties, choix des différentes logiques, choix de la méthode de défuzzification...

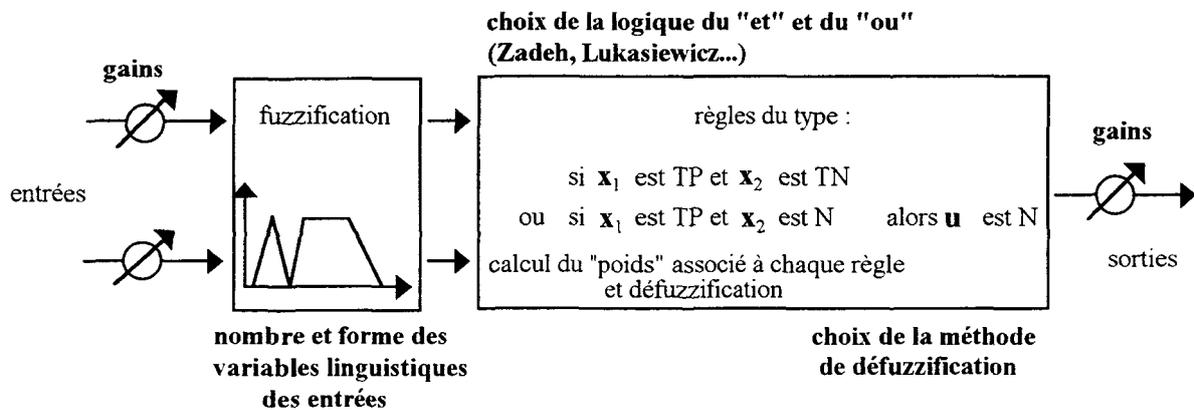


Figure 1.8 : Régulateur flou basé sur la logique floue

Les paramètres pouvant varier sont indiqués en gras (d'après /Guerra & al. 92/)

L'analyse de l'influence de ces paramètres n'est évidemment pas une chose facile. Néanmoins, plusieurs études ont tenté en partie de faire varier certains de ces paramètres pour dégager quelques règles. Pour une vue plus générale de ces différents résultats le lecteur peut se reporter à /Bühler 94/ /Driankov & al. 93/ par exemple.

Des études concernant les fonctions d'appartenance ont été menées /Mizumoto 88/ /Bühler 94/ /Driankov & al. 93/, néanmoins la forme et le nombre des fonctions d'appartenance sont très dépendants de l'application et ne peuvent se dissocier de la partie règles floues. Pour le raisonnement flou, il semble qu'à partir du moment où les opérateurs utilisés respectent certaines propriétés, ils ne constituent pas un paramètre primordial du régulateur. Des études ont également été menées concernant les gains de normalisation /Sugiyama 88/ /Ouattara & al. 96/, et là encore les résultats obtenus sont très dépendants des modèles de systèmes utilisés et des autres paramètres du régulateur flou mis en œuvre.

Il faut de plus se méfier de certaines conclusions qui peuvent provenir du fait de l'étude d'un paramètre particulier en laissant les autres invariants. Par exemple, l'implication floue de Kleene-Dienes, dans /Mizumoto 88/, se révèle catastrophique pour la commande. Il se trouve que l'auteur étudiait l'influence de paramètres dans le cas d'un découpage avec fonctions d'appartenance triangulaires. En remplaçant ces fonctions par des trapèzes à fort recouvrement, ce qui utilise le fait que cette implication prend en compte l'incertitude, les résultats obtenus sont très performants /Rambault 93/.

Finalement il ressort de ces études un certain nombre de règles de bon sens du type : il faut faire des partitions floues qui prennent en compte des caractéristiques du procédé (non linéarités, bruit...) mais il n'y a pas de résultats définitifs.

### 1.3. Différents types de régulateur flou

Cette classification est basée sur la manière dont la commande du système est obtenue en fonction des différents paramètres d'entrée du régulateur /Driankov & al. 93/.

#### 1.3.1. Régulateurs flous à structure PID (RF-P, RF-PD, RF-PI, RF-PID)

Dans cette classe de régulateurs, quatre formes classiques sont distinguées, en fonction de leur équivalence aux régulateurs classiques. Par analogie, la fonction reliant la sortie du régulateur à ses entrées devient non linéaire.

##### \* *Régulateur Flou Proportionnel (RF-P)*

La loi de commande d'un régulateur flou de ce type est proportionnelle à la valeur de l'erreur entre la sortie du système et la consigne ; les règles sont de la forme :

Si  $e(k)$  est E alors  $u(k)$  est U.

La loi de commande s'apparente à celle d'un régulateur Proportionnel classique avec un gain non linéaire :

$$u(k) = K_p(k)e(k) \quad (1.1)$$

\* *Régulateur Flou Proportionnel Dérivé (RF-PD)*

Pour ce type de régulateur, la commande du système s'obtient en fonction des erreurs et de leurs dérivées premières suivant des règles de la forme : Si  $e(k)$  est E et  $De(k)$  est DE alors  $u(k)$  est U.

La loi de commande du régulateur PD classique équivalent est :

$$u(k) = K_p(k)e(k) + K_D(k)(e(k) - e(k-1)) \quad (1.2)$$

\* *Régulateur Flou Proportionnel Intégral (RF-PI)*

C'est le plus classique des régulateurs à structure PID utilisés pour des systèmes d'ordre inférieur ou égal à 2. Une règle s'écrit alors sous la forme : Si  $e(k)$  est E et  $De(k)$  est DE alors  $Du(k)$  est DU. Le régulateur PI classique équivalent s'écrivant :

$$\Delta u(k) = K_p(k)(e(k) - e(k-1)) + K_I(k)e(k) \quad (1.3)$$

\* *Régulateur Flou Proportionnel Intégral et Dérivée (RF-PID)*

Ce dernier type de régulateur utilise l'erreur, l'intégrale de l'erreur et la variation de l'erreur pour élaborer les règles. Avec :  $\delta e(k) = \sum_{i=1}^{i=k-1} e(i)$ , les règles sont de la forme :

Si  $e(k)$  est E et  $De(k)$  est DE et  $\delta e(k)$  est SE alors  $u(k)$  est U.

Plusieurs auteurs ont alors proposé des équivalences entre ces RF et leur version linéaire, entre autres /Ying & al. 90/ /Galichet & Foulloy 95/.

À partir de ces régulateurs flous de base, beaucoup de propositions d'algorithmes de commande tournant autour de ces différentes versions ont été faites. Pour des systèmes comportant des retards importants et/ou variables, l'adjonction d'un prédicteur de Smith a été

proposée /Boverie & al. 91/. Pour les systèmes d'ordre élevés, plutôt que d'augmenter le nombre d'entrées du régulateur et risquer une "explosion" combinatoire de la base de règles /Boverie & al. 92/ ont proposé un régulateur flou de type incrémental.

Un grand nombre de versions de tous ces régulateurs a été testé intensivement sur un Benchmark pour régulateurs adaptatifs /Masten & Cohen 90/ dans le cadre du projet CSN (Commande Symbolique et Neuro-mimétique) du Groupement de Recherche en Automatique du C.N.R.S. Une partie des résultats a été regroupée dans le volume spécial du Journal Européen des Systèmes Automatisés 30 (n°5) de 1996, les autres résultats peuvent être consultés au travers des rapports du projet CSN.

Dans le contexte de l'adaptation d'une technique de commande classique, des auteurs ont également proposés d'adapter la commande par mode glissant à un régulateur flou (RF-MG), voir par exemple /Driankov & al. 93/ /Glower & Munighan 97/.

Enfin, des propositions de versions adaptatives directes ou indirectes ont également vu le jour, voir /Ouattara 96/ par exemple.

Quand les boucles de régulations utilisent des retours de sortie, ils prennent alors la même place que les régulateurs équivalents. Néanmoins, il est également possible d'envisager des régulateurs flous utilisant une approche dans l'espace d'état, c'est l'objet du paragraphe suivant.

### 1.3.2. Régulateur flou de type Sugeno (RF-Sugeno)

En supposant accessibles les différentes variables d'état  $X(k)$  du système, les règles sont exprimées de la manière suivante /Takagi & Sugeno 85/ /Tanaka & Sugeno 92/ avec les  $N(n+1)$  coefficients  $p_i^j$  des règles  $R_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ) :

$$R_j : \text{Si } x_1(k) \text{ est } X_1 \text{ et } \dots \text{ } x_n(k) \text{ est } X_n \text{ alors } u^j(k) = p_0^j + \sum_{i=1}^{i=n} p_i^j x_i(k)$$

À chaque règle  $R_j$  est associé un poids  $w_j$  correspondant à la façon de modéliser l'implication floue et l'opérateur "ET". La commande finale est alors calculée comme suit :

$$u(k) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i u^i(k)}{\sum_{i=1}^r w_i}$$

Une solution permettant d'utiliser ce type de commande est d'obtenir un modèle basé sur la même approche. La structure de ces modèles flous est décrite ci-après.

## 1.4. Modèle flou du type Takagi Sugeno Kang (TSK)

Ce type de modèle flou est très intéressant pour la représentation de systèmes non linéaires tels que les systèmes électriques, mécaniques ou chaotiques et a été proposé par /Takagi & Sugeno 85/ /Sugeno & Kang 88/. Il est décrit par des règles floues "Si ... alors" qui représentent localement des relations linéaires d'entrées-sorties d'un système.

Avec les notations :

$R^i$  : ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) la  $i^{\text{ème}}$  règle,  $r$  étant le nombre de règles "Si ... alors",

$F_j^i$  : ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) les sous-ensembles flous des prémisses,

$x(t) \in R^n$  le vecteur d'état,

$u(t) \in R^m$  le vecteur des entrées,

$y(t) \in R^q$  le vecteur des sorties,

$A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$ ,  $C_i \in R^{q \times n}$  et

$z_1(t) \sim z_p(t)$  les variables des prémisses (variables d'état et/ou entrées),

les modèles flous TSK sont représentés sous la forme suivante, où MFC et MFD indiquent respectivement, les modèles flous continus et les modèles flous discrets :

Modèles flous continus (MFC) :

Règle  $R^i$  du modèle :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.4)$$

Chaque équation de sortie représentée par des relations dans l'espace d'état  $A_i x(t) + B_i u(t)$  est appelé un "sous-modèle". À chaque règle  $R^i$  est attribué un poids  $w_i(z(t))$  qui dépend de la valeur de vérité (ou degré d'appartenance) des  $z_j(t)$  aux sous-ensembles flous  $F_j^i$ , notée  $F_j^i(z_j(t))$ , et du choix de la modélisation du connecteur (opérateur) "et" reliant les prémisses.

Le connecteur "et" est souvent choisi comme étant le produit, d'où :

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z_j(t)) \quad i = 1, 2, \dots, r \text{ avec } w_i(z(t)) \geq 0, \text{ pour tout } t, \quad (1.5)$$

puisque les fonctions d'appartenance prennent leur valeur dans l'intervalle [0, 1].

À partir des poids attribués à chaque règle, les sorties finales des modèles flous sont inférées de la manière suivante, qui correspond à une défuzzification barycentrique :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \quad y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (1.6)$$

qui peuvent être réécrites :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \quad y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) \quad (1.7)$$

avec :  $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$  et bien entendu :  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ , pour tout  $t$ .

De façon tout à fait analogue, les modèles flous TSK discrets sont définis comme suit :

Modèles flous discrets (MFD) :

Règle  $R^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , du modèle :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} x(t+1) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

Les sorties finales des modèles flous sont inférées de la manière suivante :

$$x(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \quad y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (1.9)$$

qui peuvent également être réécrites :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \quad y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) \quad (1.10)$$

Une extension possible du modèle flou présenté ci-dessus permet de prendre en compte des incertitudes dans les paramètres des prémisses /Tanaka & Sano 94/, dans le cas discret. De plus, il est également utilisé pour les modèles non linéaires incertains en introduisant les incertitudes du modèle dans les parties conclusion des règles floues.

Le potentiel offert par ce type de représentation permet l'utilisation de toutes les techniques associées. Elle permet notamment de traiter les problèmes multivariés et d'aborder le problème de la stabilité à l'aide de la méthode de Lyapunov.

Plusieurs approches sont possibles pour obtenir des modèles écrits sous cette forme. Une première approche est, à partir d'un modèle mathématique non linéaire d'obtenir un modèle flou soit de façon "directe" voir /Tanaka & al. 98/ et l'exemple 1 du chapitre 2, soit par linéarisation autour de plusieurs points de fonctionnement /Tanaka & Sano 95/ /Ma & al. 98/. Une deuxième approche dans le cas discret (MFD) fait appel à une identification floue, des exemples d'algorithmes sont présentés dans /Takagi & Sugeno 85/ /Sugeno & Kang 88/ /Ouattara 96/.

Après avoir présenté les différentes notions associées à la commande floue, le paragraphe suivant présente brièvement quelques travaux ayant trait à l'analyse de la stabilité des boucles de régulation comportant un régulateur flou.

### 1.5. Stabilité des modèles flous

Bien que l'analyse de la stabilité d'un modèle flou soit particulièrement difficile, puisqu'il est de nature non linéaire, il est important lors de la réalisation d'un régulateur flou et/ou d'un modèle flou d'analyser celle des boucles de régulation. C'est dans ce sens que certaines études ont été proposées /Ollero & al. 95/ /Driankov & al. 93/ /Bülher 94/ /Wang 94/ /Marin 95a/ /Fuh & Tung 97/ /Tanaka & al. 98/.

Une des approches que l'on retrouve souvent dans la littérature consiste à utiliser un régulateur flou, qui est l'élément non linéaire, avec un modèle à contrôler linéaire. Dans cette approche, le modèle flou est considéré comme une classe particulière de modèles non linéaires.

La figure 1.9, issue de /Driankov & al. 93/ résume les différentes méthodes utilisées dans l'analyse des systèmes de régulation utilisant un régulateur flou.

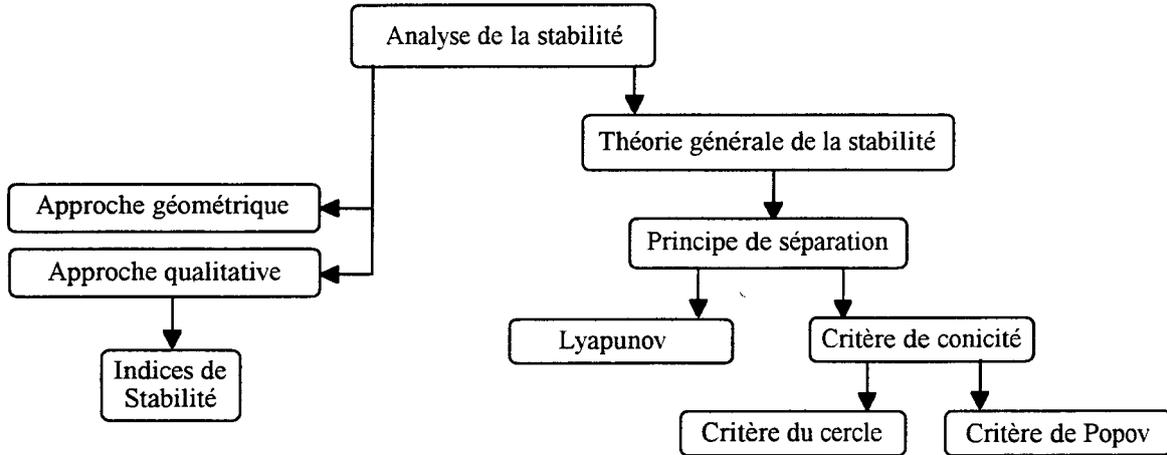


Figure 1.9 : Analyse de la stabilité des systèmes de régulation floue /Driankov & al. 93/

Sans être exhaustif, les parties suivantes décrivent quelques résultats obtenus à l'aide de ces différentes approches.

### 1.5.1. Méthodes qualitatives et géométriques

Une des premières approches pour l'analyse de la stabilité d'une boucle de régulation utilisant un régulateur flou est due à /Braae & Rutherford 79/. Elle utilise le plan de phase, elle est donc réduite principalement à des systèmes du second ordre pour des problèmes évidents d'interprétation des représentations graphiques. /Ollero & al. 95/ ont proposé une interprétation géométrique dans l'espace d'état basée sur les vecteurs associés au modèle et au régulateur flou, figure 1.10. Ils s'intéressent aux modèles décrits par :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + b\Phi(x) \text{ ou } \Phi(x) \text{ est une fonction non linéaire représentant le régulateur flou.}$$

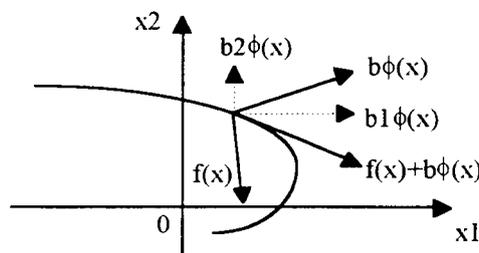


Figure 1.10 : Vecteurs associés au régulateur flou et au modèle

Le comportement général de ces modèles dépend de  $f(x)$  et de  $\Phi(x)$ , la direction du vecteur associé au régulateur flou est liée à  $b$  et son amplitude est donnée par  $b\Phi(x)$ , figure 1.10. Le plan de phase est alors découpé en fonction de la partition des entrées du régulateur flou et une analyse qualitative permet facilement de caractériser le comportement du système en boucle fermée et peut également servir à modifier les règles.

On peut formaliser le problème de l'analyse de la stabilité en utilisant des outils de l'analyse qualitative des systèmes dynamiques non linéaires /Driankov & al. 93/. Des indices locaux ou globaux peuvent être obtenus. Dans ce cas on s'intéresse aux modèles du type :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + b\Phi(x) \text{ ou } \Phi(x) \text{ est une fonction non linéaire représentant le régulateur flou.}$$

En utilisant le Jacobien  $J$  du modèle en boucle fermée, et le fait qu'il y a généralement deux façons pour un système d'être instable, bifurcation statique (une valeur propre stable réelle traverse l'axe imaginaire) et bifurcation dynamique, ou bifurcation de Hopf (une paire de pôles complexes traverse l'axe imaginaire en ayant des parties réelles positives), /Ollero & al. 95/ proposent de quantifier l'éloignement par rapport à ces instabilités par :

$$I_1 = (-1)^n \det(J) \text{ pour une bifurcation statique ;}$$

$$I_1' = \det(H_{n-1}) \text{ pour une bifurcation de Hopf, avec } H_{n-1} \text{ le mineur principal d'ordre } n-1 \text{ de la matrice de Hurwitz.}$$

Ils proposent de plus de mesurer la robustesse par rapport à l'apparition de points d'équilibre parasites en utilisant :  $I_2 = \min_{B'} \|f(x) + b\Phi(x)\|$ ,  $B'$  est le sous-espace auxiliaire défini par :  $\frac{f_1(x)}{b_1} = \frac{f_2(x)}{b_2} = \dots = \frac{f_n(x)}{b_n}$  en excluant un voisinage autour de 0.

Une autre famille permettant l'analyse de la stabilité est basée sur le problème de Lur'e /Loria & Ortega 96/.

### 1.5.2. Mise sous forme d'un problème de Lur'e

Les approches utilisent le problème de stabilité absolue connue aussi comme le problème de Lur'e. On considère un système stable ou non  $H_1(s)$  en contre-réaction avec un opérateur statique non linéaire  $H_2$  dont la sortie  $y_2 = H_2 y_1$  appartient au secteur  $\text{sec}[a, b]$ , figure 1.11, i.e :  $y_2(0) = 0$  et  $a \leq \frac{y_2(\sigma)}{\sigma} \leq b, \forall \sigma \neq 0$ .

On s'intéresse à chercher des conditions sur  $a, b, H_1(s)$  telles que le système bouclé soit stable /Loria & Ortega 96/.

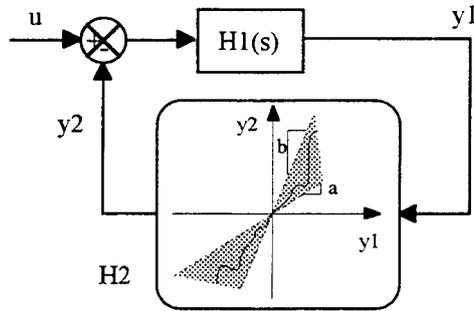


Figure 1.11 : Problème de Lur'e

Le fait que  $H_2$  soit un opérateur statique n'empêche pas l'utilisation de régulateurs de type RF-PI ou RF-PID, simplement, la partie intégrale est rajoutée au système.

Si la non-linéarité  $H_2$  est sans mémoire il est possible d'utiliser le critère du cercle dans le cas d'un régulateur flou SISO. Une autre alternative est basée sur le critère de Popov.

Pour les modèles linéaires SISO stables ou en limite de stabilité, le critère de Popov peut-être une solution, moyennant quelques modifications de la boucle de régulation. Effectivement, ce critère utilise un élément non linéaire à une entrée, figure 1.11. Néanmoins, plusieurs possibilités sont envisageables. Par exemple, /Rambault 93/ propose l'extension du critère de Popov à un élément non linéaire à deux entrées, figure 1.12, correspondant à un RF-PI. Pour ce faire, il majore la surface de commande par un plan qui correspond à un PI en considérant  $\delta e$  comme un paramètre. De cette façon, il se retrouve avec une non linéarité à une entrée.

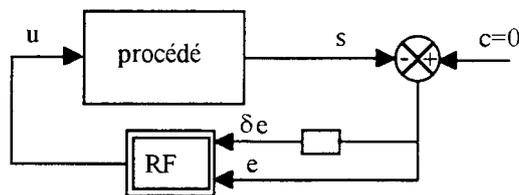


Figure 1.12 : Structure utilisant un régulateur flou

/Bühler 94/ propose une solution dans le cas général de modèles SISO stables ou avec des pôles sur l'axe réel. Il utilise pour cela la représentation d'état du système et

plusieurs transformations linéaires des grandeurs d'entrée du régulateur flou qui permettent de se ramener à l'utilisation du critère de Popov.

/Bühler 94/ propose un autre algorithme basé sur la conjecture d'Aiserman, i.e., le secteur de stabilité selon Popov coïncide avec celui selon Hurwitz. En remplaçant la non-linéarité présente du régulateur flou par une caractéristique linéaire équivalente, il propose dans le cas où la conjecture est vérifiée, un critère basé sur le lieu des racines qui permettent en plus de prendre en compte certaines performances (amortissement des phénomènes transitoires).

/Melin & Vidolov 96/ s'intéressent au cas de modèles SISO stables ou marginalement stables (un pôle à l'origine) dans le cas des systèmes de la figure 1.12. Dans un premier temps pour des RF-PD et RF-PI particuliers à deux règles /Vidolov 93/, ils déterminent les conditions de stabilité suffisantes rendant la boucle fermée stable par l'utilisation du théorème de Kalman-Yacubovitch. Les résultats sont ensuite étendus à un régulateur à 4 règles /Ying & al. 90/. Enfin, en prenant en compte un régulateur utilisant une partition stricte d'ensembles flous triangulaires permettant notamment d'avoir au plus 4 règles actives à la fois et d'avoir  $\sum_{i=1}^r w_i = 1$ , les résultats obtenus restent valables.

Toutes ces méthodes impliquent des restrictions sur les systèmes étudiés. L'approche par le critère de Popov suppose par exemple un modèle de type fonction de transfert rationnelle pour des systèmes stables ou marginalement stables. Néanmoins, pour les systèmes instables on peut envisager l'utilisation d'une loi linéaire stabilisant le système et utiliser un critère sur ce système bouclé.

Une autre voie concerne alors les synthèses plus générales basées notamment sur la méthode de Lyapunov.

### 1.5.3. Approche par la méthode de Lyapunov

On s'intéresse à la stabilité globale des systèmes mis sous la forme d'un modèle de type TSK. Le paragraphe suivant rappelle les conditions de base de stabilité du modèle flou.

**Définition 1.5.1 :** Un modèle flou de type TSK est dit *localement stable* si tous ses sous-modèles sont stables.

**Définition 1.5.2 :** Un modèle flou stable est dit être *globalement stable*.

Les théorèmes suivants basés sur la seconde méthode de Lyapunov donnent quelques conditions suffisantes permettant de garantir la stabilité de (1.7) et (1.10).

**Théorème 1.5.1 (MFC)** /Tanaka & Sugeno 92/ : L'équilibre d'un modèle flou continu décrit par (1.7) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P$  commune définie positive telle que :

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.11)$$

**Théorème 1.5.2 (MFD)** /Tanaka & Sugeno 92/ : L'équilibre d'un modèle flou discret décrit par (1.10) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P$  commune définie positive telle que :

$$A_i^T P A_i - P < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.12)$$

Ces théorèmes sont réduits respectivement aux théorèmes de la stabilité selon la seconde méthode de Lyapunov pour les modèles linéaires continus et discrets lorsque  $r = 1$ .

L'intérêt des modèles de la forme TSK est leur mise sous une forme permettant l'utilisation de la représentation d'état, et donc de tout le potentiel attaché à cette représentation. Chaque règle représente une relation linéaire locale dans l'espace d'état, toutes les non linéarités étant reportées dans les parties prémisses des règles. Une dernière non linéarité est présente et due à la partie défuzzification. Les conditions de stabilité obtenues sont évidemment conservatives puisque la partie prémisse des règles n'est pas prise compte. D'autres voies ont été explorées, certaines sont reprises chapitre 2.

Enfin d'autres approches concernant la stabilité des boucles de régulation contenant un régulateur flou existent, basées sur le critère de conicité /Aracil & al. 91/, ou l'approche par la passivité. /Sio & Lee 98/, par exemple, ont utilisé l'approche par la passivité pour des RF-PID et ont appliqué leur approche sur des systèmes non linéaires.

## 1.6. Conclusion

Les récents progrès théoriques et le nombre de plus en plus important des applications industrielles (plus de 1500 applications à caractère industriel recensées en 1994) de la commande floue semblent donner une place respectable à cette approche /Terano & al. 94/.

En effet, des applications de la commande floue existent maintenant dans des domaines très variés, tels que la robotique, les machines-outils, les véhicules, le domaine

ferroviaire, les applications domestiques (climatisation, douche, appareils photographiques, appareils électroménagers)...

Il semble que la réalisation d'un contrôleur flou soit particulièrement recommandée lorsque le procédé est mal connu ou difficile à décrire, dû à une complexité trop importante. Dans ce cas, la facilité de mise en œuvre dépend bien entendu de l'application, la difficulté résidant dans l'obtention de l'expertise liée à l'application.

Il subsiste quelques points difficiles notamment en ce qui concerne le problème du choix des techniques spécifiques aux contrôleurs flous à mettre en œuvre pour un type de procédé donné. Ce problème est compensé par la facilité de mise en œuvre des contrôleurs flous et leur aptitude à implémenter l'expertise humaine sous forme de règles. Néanmoins, même avec ces limitations, des comparaisons entre des commandes classiques et floues ont été effectuées, entre autres /RAIRO-APII-JESA volume 30, 1996/ /Boverie & al. 91/ ont montré que l'approche floue tient une place respectable par rapport aux autres méthodes.

Un reproche initialement fait à la commande floue est le manque de théorie d'analyse de la stabilité et de la robustesse au sens classique du terme : quantification et calculs des marges et conditions de stabilité... Les travaux réalisés par plusieurs équipes dans ce domaine a permis de répondre en partie à ces questions, même si pour le moment les conditions obtenues sont le plus souvent des conditions suffisantes de stabilité, et peuvent donc se révéler conservatives.

# Chapitre 2. Étude des modèles flous de type TSK

Ce chapitre a pour objet de présenter certains travaux permettant d'étudier l'analyse de la stabilité des boucles de régulation comprenant un modèle flou de type TSK (Takagi Sugeno Kang). Quelques théorèmes donnant des conditions garantissant la stabilité d'une boucle de régulation floue obtenue à partir de la seconde méthode de Lyapunov sont rappelés.

2.1. Introduction.....	32
2.2. Étude de la stabilité du modèle complet :	
Modèle flou - Régulateur flou.....	33
2.2.1. Construction du régulateur flou.....	34
2.2.2. Conditions de stabilité.....	35
2.2.3. Exemple.....	36
2.2.4. Inégalité Matricielle Linéaire (LMI).....	40
2.2.5. Conditions de stabilité relâchées.....	43
2.2.6. Prise en compte de la partie antécédent des règles .....	44
2.2.6.1. /Kim & al. 95/ .....	44
2.2.6.2. /Marin 95b/.....	45
2.3. Étude de la stabilité du modèle complet :	
Modèle flou - Régulateur flou - Observateur flou.....	47
2.3.1. Observateur flou.....	48
2.3.2. Etude du modèle complet dans le cas particulier des variables de prémisses mesurables.....	49
2.3.3. Etude du modèle complet dans le cas général .....	52
2.4. Conclusion .....	53

## 2.1. Introduction

Un des concepts les plus importants concernant les propriétés des systèmes commandés est l'analyse de la stabilité. C'est pourquoi dans la littérature, et vu l'intérêt considérable apporté à la commande floue aujourd'hui, le problème de l'analyse de la stabilité d'une boucle de régulation comprenant un modèle flou de type TSK, qui est essentiellement non linéaire, est considérée aux travers de différents travaux /Tanaka & Sugeno 92/ /Tanaka & Sano 93/ /Marin 95b/ /Wang & al. 96/ /Thathachar & Viswanath 97/ /Ma & al. 98/.

Dans la première partie du chapitre, des conditions de stabilité des boucles de régulation pour les modèles flous de type TSK comportant un régulateur flou de type PDC (Parallel Distributed Compensation) sont présentées /Tanaka & Sano 94/ /Tanaka & al. 98/. Ces travaux donnent quelques théorèmes sur la stabilité des modèles flous complets, en utilisant la seconde méthode de Lyapunov. L'inconvénient principal est d'obtenir des conditions suffisantes de stabilité qui peuvent se révéler conservatives, puisque seule la partie conclusion des règles est utilisée. Pour remédier à ce problème, il est possible de prendre en compte la partie prémisses des règles, par l'intermédiaire du support des ensembles flous /Kim & al. 95/ /Marin 95a/.

L'obtention du régulateur flou peut se faire en résolvant un ensemble d'inégalités linéaires matricielles (LMIs). Le potentiel offert par une formulation sous forme LMIs (Inégalité Matricielle Linéaire) et l'existence d'algorithmes efficaces pour leur résolution /Boyd & al. 94/ /Gahinet & al. 95/ est alors abordé.

Enfin, le vecteur d'état n'étant pas toujours entièrement accessible, la construction d'un observateur flou basé sur le modèle flou de type TSK est traité. Deux cas sont distingués. Le premier concerne un observateur flou dont les variables des prémisses sont mesurables, et dans ce cas un principe de séparation existe /Ma & al. 98/. Le deuxième concerne un observateur flou dont les variables des prémisses ne sont pas toutes mesurables. Dans ce cas, la mise sous forme de LMIs semblant difficile, l'obtention du régulateur et de l'observateur doit se faire au préalable, les conditions de stabilité devant être déterminées par la suite.

## 2.2. Étude de la stabilité du modèle complet : Modèle flou - Régulateur flou

La réalisation d'un régulateur flou est basée sur le modèle flou TSK représentant le système non linéaire. À partir du concept PDC (Parallel Distributed Compensation) /Tanaka & Sano 94/, la détermination d'une loi de commande revient à déterminer pour chaque modèle local une matrice de gains, par exemple en utilisant une synthèse quadratique, ou des LMIs. L'idée principale de ce concept étant de calculer une loi de commande linéaire par retour d'état pour chaque sous-modèle du modèle flou, figure 2.1.

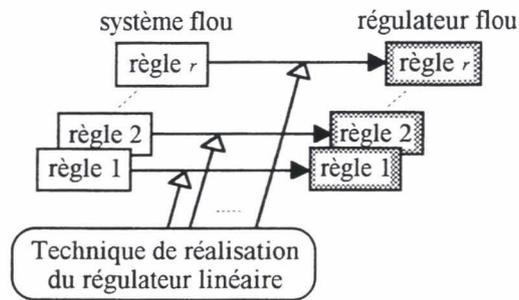


Figure 2.1 : le concept PDC /Wang & al. 96/

Pour la réalisation d'un régulateur basé sur une PDC et/ou d'un observateur, les deux définitions suivantes sont nécessaires /Feng & al. 97/.

**Définition 2.2.1 :** Si les paires  $(A_i, B_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$  sont contrôlables, alors les modèles flous (1.7) et (1.10) sont *localement contrôlables*.

**Définition 2.2.2 :** Si les paires  $(A_i, C_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$  sont observables, alors les modèles flous (1.7) et (1.10) sont *localement observables*.

Dans toute la suite, on suppose que tous les sous-modèles sont contrôlables et observables. La structure des régulateurs flous est donnée dans le paragraphe suivant.

### 2.2.1. Construction du régulateur flou

Chaque règle de commande  $R^i$  est réalisée à partir de celle du modèle flou. La théorie de la commande linéaire peut-être utilisée dans la réalisation de la partie conclusion du régulateur puisque les parties résultantes du modèle flou sont décrites par des équations d'état linéaires.

Ainsi, le régulateur flou réalisé partage les mêmes ensembles flous que le modèle, donc celui-ci garde les mêmes parties prémisses ainsi que les mêmes fonctions d'appartenance.

Pour les modèles flous continus (1.4) et discrets (1.8), la réalisation du régulateur se fait de la façon suivante /Tanaka & Sano 95/ :

Règle  $R^i$  du régulateur :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } u(t) = -F_i x(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.1)$$

Chaque équation de sortie est linéaire. À chaque règle  $R^i$  est attribué le même poids  $w_i(z(t))$  que celui de la règle  $R^i$  du modèle et le même connecteur "et" reliant les prémisses.

La sortie finale du régulateur flou est inférée de la manière suivante :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) \quad (2.2)$$

toujours avec 
$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$$

La réalisation du régulateur flou consiste à déterminer les gains de contre-réaction  $F_i$  dans les parties conclusions. Ce qui permet de trouver de façon simple et naturelle les règles du régulateur flou, et ces différentes matrices de gains  $F_i$ .

Le paragraphe suivant donne la représentation d'état de la boucle de régulation floue comprenant le régulateur flou.

### 2.2.2. Conditions de stabilité

Pour obtenir l'expression de la boucle fermée, il suffit de substituer (2.1) à (1.7) (cas continu) et (2.2) à (1.10) (cas discret). Ainsi les expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{(MFC)} \quad \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left( A_i x(t) - B_i \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) F_j x(t) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - B_i F_j) x(t) \\
 &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x(t)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

avec  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ .

$$\text{(MFD)} \quad x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x(t) \tag{2.4}$$

En appliquant les théorèmes 1.5.1 et 1.5.2 respectivement à (2.3) et (2.4), il est possible de tirer des conditions de stabilité pour les MFC et MFD. La démonstration du théorème 2.2.1 (respectivement 2.2.2) provient directement du théorème 1.5.1 (respectivement 1.5.2).

**Théorème 2.2.1 (MFC) :** L'équilibre d'un modèle flou continu décrit par (2.3) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P > 0$  commune telle que :

$$\begin{aligned}
 G_{ii}^T P + P G_{ii} &< 0, \\
 \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) &< 0, \quad i < j
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

pour tout  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , exceptées les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t)) h_j(z(t)) = 0, \forall t$ .

**Théorème 2.2.2 (MFD) /Tanaka & Sano 94/ :** L'équilibre d'un modèle flou discret décrit par (2.4) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P > 0$  commune telle que :

$$\begin{aligned}
 G_{ii}^T P G_{ii} - P &< 0, \\
 \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P &< 0, \quad i < j
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

pour tout  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , exceptées les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t)) h_j(z(t)) = 0, \forall t$ .

Le fait d'utiliser la condition (2.5) pour les MFC, (2.6) pour les MFD, avec  $i < j$  permet de réduire un peu la conservativité des résultats puisqu'il n'est pas obligatoire d'avoir tous les sous-modèles croisés  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$  stables. Effectivement, si on utilise les conditions (1.11) ou (1.12) cela impose d'avoir tous les sous-modèles croisés stables.

La réalisation d'un régulateur flou consiste donc à déterminer les matrices de gains de retour d'état  $F_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) satisfaisant les conditions du théorème 2.2.1 (cas MFC) ou théorème 2.2.2 (cas MFD) pour une matrice  $P$  commune définie positive.

Pour calculer les matrices de retour d'état, il est possible d'utiliser une synthèse quadratique et vérifier ensuite qu'il existe une matrice  $P > 0$  commune. On verra dans le chapitre 3, que ces deux étapes peuvent être combinées.

Il est également possible d'utiliser un placement de pôles pour assurer que les valeurs propres de  $G_{ii} = A_i - B_i F_i$   $i \in \{1, \dots, r\}$  tombent dans un domaine pré-spécifié. On peut alors raisonnablement penser que si les pôles sont proches pour les modèles bouclés  $G_{ii} = A_i - B_i F_i$ , il y a de fortes chances que les équations (2.5) dans le cas MFC, (2.6) dans le cas MFD, soient également vérifiées. Néanmoins, des exemples où les paires  $(A_i, B_i)$  sont très différentes montrent que ce résultat n'est pas garanti, l'exemple 1 du chapitre 3 illustre ces propos.

Il est également possible d'utiliser les théorèmes de /Tanaka & Sano 94/ donnant des conditions moins conservatives en tenant compte des poids des règles, ces théorèmes étant tirés des théorèmes 2.2.1 et 2.2.2.

Afin d'illustrer cette partie, le paragraphe suivant applique ces théorèmes sur un système non linéaire issu de /Driankov & al. 93/.

### 2.2.3. Exemple

Pour illustrer de façon simple les différentes étapes décrites précédemment, considérons un système non linéaire dont un modèle est donné par /Driankov & al. 93/ :

$$\ddot{y}(t) + a_1(1 - y^2(t))\dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_1 u(t)$$

que l'on peut réécrire sous forme d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_2 x_1(t) - a_1 x_2(t) + a_1 x_1^2(t) x_2(t) + b_1 u(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

avec  $y(t) = x_1(t)$ ,  $b_1 = a_2 = 12,7388$ ,  $a_1 = 2,2165$  et  $|u(t)| \leq 15$ . Pour  $u = 0$  ce modèle en boucle ouverte a un cycle limite instable correspondant à une bifurcation de Hopf, figure 2.2.

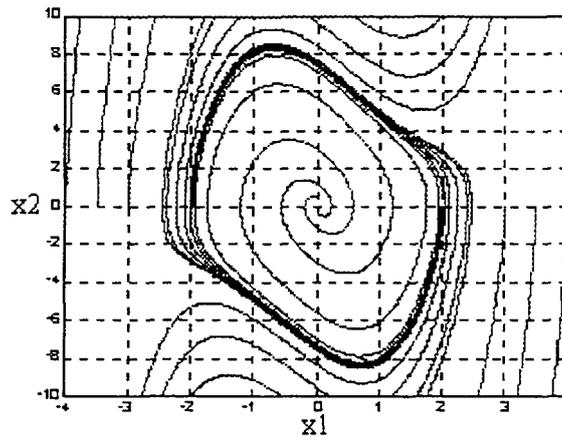


Figure 2.2 : Réponse de la boucle ouverte et présence du cycle limite instable

En utilisant un régulateur flou avec 2 entrées découpées en 5 valeurs linguistiques aboutissant à 25 règles et un découpage de la sortie en 13 valeurs linguistiques, /Driankov & al. 93/ aboutissent à un comportement en boucle fermée représenté figure 2.3. Pour effectuer le calcul des indices présentés dans l'approche qualitative du chapitre 1 /Ollero & al. 95/, ils utilisent une technique d'interpolation permettant d'obtenir une valeur approchée des dérivées partielles de  $\Phi(x)$ . Les résultats étant :  $I_1 = 15,9236$  et  $I_1' = 6,4024$ .

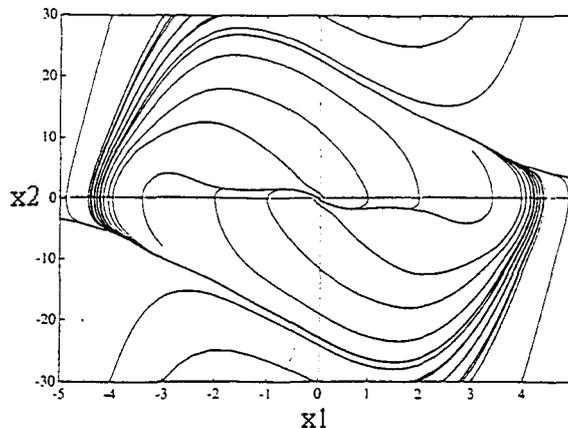


Figure 2.3 : Réponse de la boucle fermée avec régulateur flou /Driankov & al. 93/

Si on s'intéresse à une représentation du système sous la forme TSK, on peut remarquer que la non linéarité est représentée par  $x_1^2(t)$  dans (2.7). Pour obtenir une représentation sous la forme d'un modèle flou MFC de type TSK du modèle (2.7) il est possible d'écrire pour  $x_1(t) \in [-\alpha, \alpha]$  :

$$x_1^2(t) = F_1^1(x_1(t)) \cdot 0 + F_1^2(x_1(t)) \cdot \alpha^2 \quad \text{avec :}$$

$$F_1^1(x_1(t)) = \frac{\alpha^2 - x_1^2(t)}{\alpha^2} \quad \text{et :} \quad F_1^2(x_1(t)) = 1 - F_1^1(x_1(t)) = \frac{x_1^2(t)}{\alpha^2}$$

Notons qu'en général il y a plusieurs possibilités de représenter un système non linéaire par un modèle flou de type TSK. Un modèle flou qui représente de façon exacte (2.7) quand  $x_1(t) \in [-\alpha, \alpha]$  est alors constitué des 2 règles :

$$\begin{aligned} \text{Si } x_1(t) \text{ est } F_1^1 \text{ alors } \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} u(t) \\ \text{Si } x_1(t) \text{ est } F_1^2 \text{ alors } \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1(1 - \alpha^2) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

La première approche possible est l'utilisation d'une loi linéaire :  $u(t) = -F x(t)$ . Pour déterminer le gain de retour d'état, il est possible d'utiliser un placement de pôles. De façon immédiate, avec  $F = [f_1 \quad f_2]$  il vient les polynômes caractéristiques des deux sous-modèles bouclés sont :

$$\begin{aligned} P_{A_1-BF}(s) &= s^2 + (a_1 + b_1 f_2)s + a_2 + b_1 f_1, \text{ et :} \\ P_{A_2-BF}(s) &= s^2 + (\alpha_1(1 - \alpha^2) + b_1 f_2)s + a_2 + b_1 f_1 \end{aligned}$$

On peut donc se rendre compte qu'il est impossible de placer les pôles des deux sous-modèles au même endroit. Soit le but en boucle fermée :  $P_{but}(s) = s^2 + p_1 s + p_2$ , la condition qui assure que les deux sous-modèles sont stables est  $p_1 > \alpha_1 \alpha^2$ . Il reste néanmoins à vérifier qu'il existe une matrice  $P > 0$  commune aux deux modèles.

Une façon plus élégante de résoudre ce problème est d'utiliser le fait que  $B_1 = B_2 = B$ . Effectivement, dans ce cas on peut choisir une loi de commande PDC définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Si } x_1(t) \text{ est } F_1^1 \text{ alors } u(t) &= -F_1 x(t) \\ \text{Si } x_1(t) \text{ est } F_1^2 \text{ alors } u(t) &= -F_2 x(t) \end{aligned}$$

En se fixant le but suivant pour la boucle fermée :  $P_{but}(s) = s^2 + p_1s + p_2$ , et à l'aide des polynômes caractéristiques de  $A_i - BF_i$  ( $i = 1, 2$ ) il vient immédiatement :

$$F_1 = \frac{1}{b_1} [p_2 - a_2 \quad p_1 - a_1] \text{ et } F_2 = \frac{1}{b_1} [p_2 - a_2 \quad p_1 - a_1(1 - \alpha^2)].$$

L'intérêt de placer les pôles au même endroit pour les deux modèles est d'avoir dans ce cas :

$$A_1 - BF_1 = A_2 - BF_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p_2 & -p_1 \end{bmatrix}, \text{ et si on écrit le modèle complet en boucle fermée :}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) A_i x(t) + Bu(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) A_i x(t) - B \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) F_i x(t) \\ &= \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) (A_i - BF_i) x(t) = A_1 - BF_1 = A_2 - BF_2 \end{aligned}$$

Ce qui indique que la boucle fermée est linéaire. Dans ce cas, il est bien sûr évident que la stabilité est toujours garantie, la seule contrainte non prise en compte étant  $|u(t)| \leq 15$ . La figure 2.5 présente le résultat de cette loi PDC dans le cas où :  $P_{but}(s) = s^2 + 120s + 60$  et  $x_1(t) \in [-5, 5]$ . Ce but ayant été choisi pour que les performances, figure 2.4, soient similaires à celles trouvées dans /Driankov & al. 93/. Comme la commande n'est pas saturée dans le cas des conditions initiales,  $x(0) = [-1 \ 0]^T$ , de la figure 2.4,  $y(t) = x_1(t)$  correspond exactement à la réponse du système  $P_{but}(s)$ .

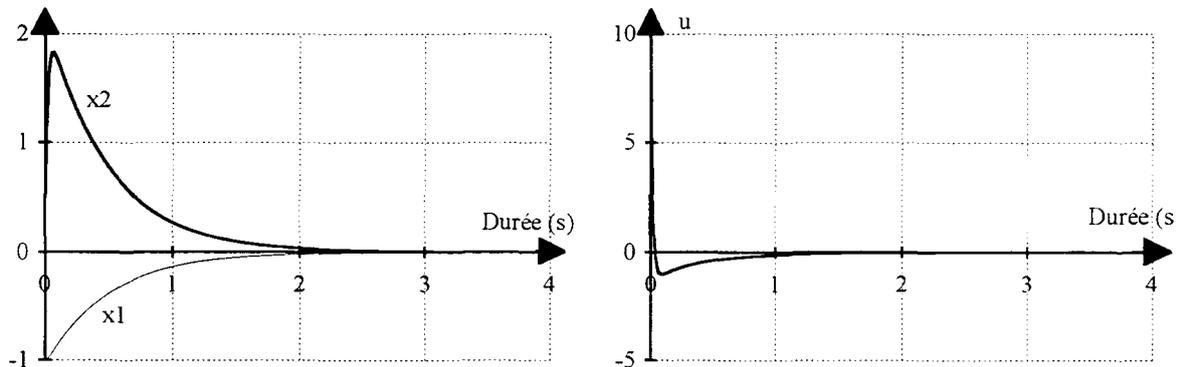


Figure 2.4 : Réponses de la boucle fermée avec C.I. :  $x(0) = [-1 \ 0]^T$

On s'aperçoit qu'en utilisant cette loi, on peut améliorer de façon significative le lieu de stabilité, figure 2.5 et les indices précédents peuvent être choisis de façon quelconque puisque le but peut-être quelconque.

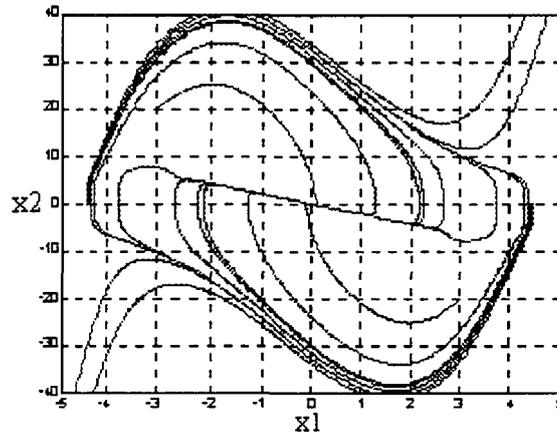


Figure 2.5 : Réponse de la boucle fermée avec une loi PDC

Une autre façon de déterminer la matrice  $P > 0$  et les gains de commande  $F_i$  simultanément est l'utilisation des outils issus de l'optimisation convexe, et plus particulièrement des LMIs (Linear Matrix Inequalities). Le paragraphe suivant rappelle quelques notions concernant ces outils.

#### 2.2.4. Inégalité Matricielle Linéaire (LMI)

Un grand nombre de problèmes concernant les systèmes dynamiques incertains peut se résoudre par l'intermédiaire de problèmes convexes d'un type particulier, les programmes semidéfinis (SDP) /El Ghaoui 97/. Cette approche est connue sous le nom de LMI (Linear Matrix Inequality) /Boyd & al. 94/ et elle a été appliquée avec succès sur un grand nombre de problèmes liés à la robustesse pour des classes de systèmes linéaires ou non linéaires /El Ghaoui & Scorletti 96/.

L'intérêt principal des SDP est la possibilité de calculer en temps polynomial le minimum global, en utilisant par exemple une méthode de points intérieurs /Nesterov & Nemirovsky 94/.

Les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 peuvent être exprimés sous forme de LMIs qui permettent ainsi d'obtenir une recherche de la solution de la matrice  $P$ , au moyen d'algorithmes numériques très efficaces. Certains d'entre eux sont utilisables à l'aide du logiciel MATLAB et de la boîte à outils "LMI Control Toolbox" /Gahinet & al. 95/. Tous

les essais réalisés à l'aide de LMIs, et toutes les simulations présentées dans ce mémoire ont été réalisées à l'aide de cet environnement.

**Définition 2.2.3 :** Une inégalité matricielle linéaire (LMI) est une inégalité matricielle de la forme :  $F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0$ , où  $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_m]$  est la variable et les matrices symétriques  $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$  sont données. La contrainte  $F(x) > 0$  est appelée "contrainte LMI" qui est convexe et  $F$  est symétrique et positive semidéfinie.

Plusieurs LMIs  $F^{(i)} > 0, i = 1, \dots, p$  peuvent s'écrire en une seule, à l'aide d'une matrice bloc-diagonale  $diag[F^{(1)}, \dots, F^{(p)}] > 0$ .

Par exemple, la condition de stabilité du théorème 1.5.2 peut s'écrire sous le problème LMI suivant : soit  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , trouver la matrice  $P > 0$  satisfaisant les LMIs :

$$P > 0, \quad A_i^T P A_i - P < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Pour pouvoir utiliser une formulation LMI certaines propriétés peuvent être utiles.

La première est un changement de variables qui permet de rendre les équations linéaires en de nouvelles variables. Par exemple dans le cas de la synthèse d'une loi de commande de type PDC pour des modèles flous MFC, théorème 2.2.1, si on veut chercher la matrice  $P > 0$  et les gains de commande simultanément, les équations (2.5) sont non linéaires en les variables  $P$  et  $F_i$ . Néanmoins, en opérant le changement de variables :  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i P^{-1}$ , les équations deviennent linéaires en  $X$  et  $M_i$ , et une écriture du problème sous forme LMIs est possible :

$$\text{trouver } X > 0 \text{ et } M_i \text{ tels que : } \forall i \in \{1, \dots, r\} : X A_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0 \quad (2.8)$$

$$\text{puis } P = X^{-1}, F_i = M_i P$$

La deuxième propriété importante est le lemme de Schur qui permet de transformer certaines non linéarités convexes en LMIs :

**Lemme de Schur 2.2.1** /El Ghaoui 97/ : Soient  $Q = Q^T$ ,  $R = R^T$  et  $S$  des matrices de taille appropriée. La condition :

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{est équivalente à :} \quad R \geq 0, \quad Q - S R^+ S^T \geq 0, \quad S(I - R R^+) = 0$$

ou  $R^+$  dénote l'inverse de Moore-Penrose de  $R$ .

Par exemple dans le cas de la synthèse d'une loi de commande de type PDC pour des modèles flous MFD, théorème 2.2.2, la première partie de l'équation (2.6), non linéaire en  $P$  et  $F_i$ , s'écrit après le changement de variables  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i P^{-1}$  :

$-(XA_i^T - M_i^T B_i^T)X^{-1}(A_i X - B_i M_i) + X > 0$ , et en utilisant le lemme de Schur il vient :

$$\text{trouver } X > 0 \text{ et } M_i \text{ tels que : } \forall i \in \{1, \dots, r\} \begin{bmatrix} X & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.9)$$

De même la seconde partie des équations (2.6) peut se réécrire :

trouver  $X > 0$  et  $M_i, M_j$  tels que :  $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, i < j$  :

$$\begin{bmatrix} X & \frac{1}{2}(XA_i^T + XA_j^T - M_j^T B_i^T - M_i^T B_j^T) \\ \frac{1}{2}(A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i) & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.10)$$

puis  $P = X^{-1}$ ,  $F_i = M_i P$ .

Toutes ces formes LMIs appliquées à des modèles flous de type TSK peuvent être trouvées dans /Zhao 95/ /Zhao & al. 96/ /Tanaka & al. 98/. On peut de façon additionnelle rajouter des contraintes du type degré de stabilité prés-spécifié, contraintes de saturation sur la commande, contraintes de saturation sur la sortie /El Ghaoui 97/ /Tanaka & al. 98/.

La troisième propriété permet d'approximer un ensemble de contraintes quadratiques non convexes par une contrainte convexe :

**Lemme 2.2.2 (S-procédure)** /El Ghaoui 97/ : Soient  $F_0, \dots, F_p$  des fonctions quadratiques de la variable  $\zeta \in R^m$  :

$F_i(\zeta) \stackrel{\Delta}{=} \zeta^T T_i \zeta + 2u_i^T \zeta + v_i, i = 0, \dots, p$  avec  $T_i = T_i^T$ . La condition sur  $F_0, \dots, F_p$  :

$F_0(\zeta) \geq 0$  pour tout  $\zeta$  tel que  $F_i(\zeta) \geq 0, i = 1, \dots, p$  est vérifiée si :

il existe  $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$  tels que :  $\begin{bmatrix} T_0 & u_0 \\ u_0^T & v_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^p \tau_i \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i^T & v_i \end{bmatrix} \geq 0$ .

Rappelons que dans la plupart des cas, seules des conditions suffisantes sont obtenues. Dans le cadre des modèles flous de type TSK, les algorithmes utilisés permettent

de déterminer si une matrice  $P > 0$  existe ou n'existe pas. Dans ce dernier cas, cela n'implique évidemment pas que le modèle est instable mais qu'il est impossible de vérifier les LMIs mises en œuvre.

Cependant si le nombre de règle  $r$  est important, il est plus difficile de trouver une matrice  $P > 0$  satisfaisant les conditions du théorème 1.5.1 (ou théorème 1.5.2). Le paragraphe suivant présente des travaux permettant d'améliorer la conservativité des résultats cités précédemment.

### 2.2.5. Conditions de stabilité relâchées

Ce paragraphe présente de nouvelles conditions de stabilité. Ainsi, les théorèmes 2.2.3 et 2.2.4 contiennent ces conditions relâchées, et sont tirés des théorèmes 2.2.1 et 2.2.2.

**Théorème 2.2.3 (MFC)** /Tanaka & al. 98/ : L'équilibre d'un modèle flou continu décrit par (2.1) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P$  commune définie positive et une matrice  $Q$  commune définie semi-positive telles que :

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s-1)Q &< 0, \\ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - Q &< 0, \quad i < j \end{aligned} \quad (2.11)$$

pour tout  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , exceptées les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0, \forall t$  et  $1 < s \leq r$ .

**Théorème 2.2.4 (MFD)** /Tanaka & al. 98/ : L'équilibre d'un modèle flou discret décrit par (2.2) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P$  commune définie positive et une matrice  $Q$  commune définie semi-positive telles que :

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P G_{ii} - P + (s-1)Q &< 0, \\ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P - Q &< 0, \quad i < j \end{aligned} \quad (2.12)$$

pour tout  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , exceptées les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0, \forall t$  et  $1 < s \leq r$ .

Ces nouvelles conditions peuvent également être exprimés sous forme de LMIs.

Les conditions des théorèmes 2.2.3 et 2.2.4 sont réduites respectivement à celles des théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 lorsque  $Q = 0$ .

Enfin, sans entrer dans les détails, /Tanaka & al. 96/ ont également proposé une extension du théorème 2.2.1 à une classe de systèmes non linéaires incertains basés sur une représentation du type TSK continue, toujours avec une loi de commande de type PDC. Dans ce contexte les modèles avec incertitudes sont placés dans la partie conclusion des règles. On retrouve donc  $(A_i + \Delta A_i(z(t)))x(t) + (B_i + \Delta B_i(z(t)))u(t)$  en lieu et place de  $A_i x(t) + B_i u(t)$ .

Etant donné que les approches considérées n'utilisent que les parties conséquences des règles, en ignorant la partie antécédent, i.e. la forme et le support des ensembles flous, il semble illusoire d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité. Effectivement, les résultats obtenus sur un modèle s'appliquent à toute la famille des modèles ayant la même partie conclusion. Pour pallier ce problème, des auteurs ont essayé de prendre en compte également la partie antécédent dans les conditions de stabilité, certains de ces travaux sont repris ci-après.

## 2.2.6. Prise en compte de la partie antécédent des règles

Les travaux présentés concernent le cas discret (DFS), équation 1.10.

### 2.2.6.1. /Kim & al. 95/

L'approche utilisée considère un modèle flou comme un système linéaire avec des incertitudes de modélisation. Toutes les paires  $(A_i, B_i)$  intervenant dans les règles peuvent être réécrites en fonction d'une paire  $(A_0, B_0)$  unique :

$\forall i \in \{1, \dots, r\}, A_i = A_0 + \delta A_i, B_i = B_0 + \delta B_i$  d'où (1.8) peut se réécrire avec  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$  :

$$x(t+1) = \left( A_0 + \sum_{i=1}^r h_i(z) \delta A_i \right) x(t) + \left( B_0 + \sum_{i=1}^r h_i(z) \delta B_i \right) u(t) \quad (2.13)$$

Le modèle  $(A_0, B_0)$  doit être choisi avec attention pour que les normes de  $\delta A_i$  et  $\delta B_i$  soient faibles. On peut envisager par exemple de prendre le modèle obtenu par moyennage des autres modèles.

Le modèle  $(A_0, B_0)$  est supposé stable, il existe donc deux matrices  $P > 0$  et  $Q > 0$  telles que :  $A_0^T P A_0 - P = -Q$ . Définissons les matrices symétriques :

$$D_i = (A_0 + \delta A_i)^T P (A_0 + \delta A_i) - P = \delta A_i^T P \delta A_i + \delta A_i^T P A_0 + A_0^T P \delta A_i - Q$$

De plus, chaque partie antécédent d'une règle  $R^i$  peut s'écrire Si  $x(t)$  est  $F^i$ , où  $F^i$  est considéré comme un ensemble flou multidimensionnel pour la règle, i.e.,  $x(t) \in \text{Supp}(F^i)$  signifie que  $\forall j \in \{1, \dots, n\} x_j(t) \in \text{Supp}(F_j^i)$ .

**Théorème 2.2.5 (MFD) /Kim & al. 95/ :** Le modèle TSK (1.8) autonome ( $u = 0$ ) est stable si pour une matrice  $A_0$  Hurwitz, il existe une matrice  $Q > 0$  telle que, pour toutes les règles  $i$ ,  $x(t)^T D_i x(t) < 0$  pour tout  $x(t) \neq 0$ ,  $x(t) \in \{x(t) / x(t) \in \text{Supp}(F^i)\}$ .

Afin de déterminer une matrice  $Q > 0$  vérifiant les conditions du théorème 2.2.5, les auteurs proposent un algorithme basé sur la descente du gradient. En ce qui concerne la partie commande, les auteurs se sont limités à travailler avec un retour d'état linéaire  $u(t) = -F x(t)$ .

L'intérêt de cette approche est de réduire la conservativité des résultats qui ne sont basés que sur la partie conséquence des règles. Les auteurs donnent un exemple où il est possible de prouver la stabilité d'un modèle flou comprenant deux matrices  $A_i$  non Hurwitz.

Le fait d'utiliser un support sans propriétés particulières ne permet pas une formulation sous forme de LMIs du problème. Il est alors possible de remédier à ce problème en utilisant des propriétés sur ce support.

#### 2.2.6.2. /Marin 95b/

Considérons un modèle flou discret autonome qui admet dans sa partie conclusion des termes constants :

Règle  $R^i$  du modèle :

$$\text{Si } x(t) \text{ est } F^i \text{ alors } x(t+1) = A_i x(t) + b_i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.14)$$

En utilisant la connaissance des supports des fonctions d'appartenance qui peuvent être décrits par des contraintes de type quadratique :

$$x \in \text{Supp}(F^i) \Leftrightarrow F_j^i(x) = x^T T_j^i x + 2x^T u_j^i + v_j^i \leq 0, \quad j = 1, \dots, n_i \quad (2.15)$$

on peut définir la P-Stabilité-Quadratique d'une règle de la façon suivante :

**Définition 2.2.4** /Marin 95b/ : La règle  $R^i$  est P-Quadratiquement-Stable si et seulement si il existe une matrice  $P > 0$ , et un réel  $\varepsilon_i > 0$  tel que :  $\forall x(t) \in \text{Supp}(F^i), x(t) \neq 0$  :

$$\Delta V_i(x(t)) \leq -\varepsilon_i \|x(t)\|^2 \text{ et } \Delta V_i(x(t)) = 0 \text{ si } 0 \in \text{Supp}(F^i)$$

$$\text{avec : } V_i(x) = x^T P x \text{ et } \Delta V_i(x) = x^T (A_i^T P A_i - P)x + 2x^T A_i^T P b_i + b_i^T P b_i.$$

et par l'utilisation de la S-procédure, lemme 2.2.2, le théorème suivant peut-être déduit :

**Théorème 2.2.6** /Marin 95/ : Si  $\exists \tau_j \geq 0, j = 1, \dots, n_i, \varepsilon_i > 0$  et  $P > 0$  tels que :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P A_i - P + \varepsilon_i I & A_i^T P b_i \\ b_i^T P A_i & b_i^T P b_i \end{bmatrix} - \sum_j \tau_j \begin{bmatrix} T_j^i & u_j^i \\ u_j^{i^T} & v_j^i \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.16)$$

alors la règle  $R^i$  est P-Quadratiquement-Stable

et enfin le théorème pour le modèle flou complet :

**Théorème 2.2.7 (MFD)** /Marin 95b/ : Le modèle flou décrit par l'équation (2.14) est quadratiquement stable si et seulement si, il existe une matrice  $P = P^T > 0$  telle que toutes les règles soient P-quadratiquement stables.

Les conditions (2.16) du théorème 2.2.6 sont des LMIs. Si on peut arriver à décrire les supports à l'aide de contraintes quadratiques (2.15) il est alors possible d'utiliser le théorème 2.2.7.

Notons que ces travaux utilisent les modèles flous TSK discrets (MFD) et qu'ils n'ont pas explorés le modèle flou avec un retour d'état flou de la forme PDC. Enfin, d'autres travaux traitant de la stabilité des modèles flous du type TSK existent. Parmi eux on peut citer :

/Thathachar & Viswanath 97/ : leurs travaux utilisent la similitude des modèles flous MFD de type TSK avec les modèles LTV (Linéaires Variant dans le Temps). En termes de stabilité ils ont montré l'équivalence entre les modèles flous de type TSK et une classe particulière des LTV. Une condition suffisante pour la stabilité asymptotique globale basée

sur le système LTV équivalent est donnée. Un cas particulier de cette condition suffisante, basé sur une normalisation simultanée des matrices est également abordé, ainsi qu'une procédure de construction permettant dans certains cas d'obtenir cette normalisation. Il n'y a pas de discussions ayant trait à la commande de ces modèles.

/Kiriakidis & al. 98/ : Ils se placent dans le même type d'approche que /Kim & al. 95/, i.e., le modèle flou MFD est analysé comme un modèle linéaire soumis à une classe de perturbations non linéaires (2.13), les termes constants du type (2.14) sont également pris en compte. Ils obtiennent un test de stabilité sous la forme de LMIs qui réduit la complexité des LMIs du type (2.9). Pour la partie commande, les auteurs se sont limités à travailler avec un retour d'état linéaire  $u(t) = -Fx(t)$ .

/Feng & al. 97/ : Ces travaux concernent la stabilité des modèles flous MFC. Ils utilisent les modèles 1.4 et une commande qui n'utilise que le sous-modèle dominant, i.e. dont la valeur d'appartenance  $h_i(z(t))$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  est la plus élevée. À chaque instant :  $u(t) = -F_k x(t)$  avec  $k = \arg \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \{h_i(z(t))\}$ . Cette commande ne pouvant satisfaire tous les cas, une commande additionnelle est rajoutée qui s'apparente à une commande à grand gain qui utilise une division par  $\left\| \sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x \right\|$ , sans garantir que cette loi est continue quand cette quantité est nulle. Le même type de problème sera discuté chapitre 3.

Après avoir présenté différentes approches permettant d'obtenir un régulateur (flou ou linéaire) par retour d'état, ainsi que les conditions de stabilité associées, la partie suivante traite du modèle complet, comprenant en plus un observateur flou.

### **2.3. Étude de la stabilité du modèle complet : Modèle flou - Régulateur flou - Observateur flou**

Les régulateurs flous pris en compte ici sont du type PDC et ils possèdent donc des lois de retour d'état linéaires locales dans les parties conclusions. Cependant, la plupart du temps, il n'est pas toujours possible d'observer tous les états du système à commander. C'est pourquoi, cette section présente la procédure de construction d'un observateur flou permettant d'estimer les états du modèle flou TSK.

### 2.3.1. Observateur flou

Chaque règle de l'observateur  $R^i$  est construite à partir de celle du modèle flou. La théorie classique concernant l'observation est utilisée dans la réalisation de la partie conclusion de l'observateur puisque les parties résultantes du modèle flou sont décrites par des équations d'état linéaires.

Ainsi, l'observateur flou réalisé partage les mêmes ensembles flous que le modèle ainsi que les mêmes fonctions d'appartenance.

Pour les modèles flous continus (1.4) et discrets (1.8), l'observateur s'écrit de la façon suivante /Tanaka & al. 98/ dans le cas général :

Observateurs flous continus (MFC) :

Règle  $R^i$  de l'observateur :

Si  $\hat{z}_1(t)$  est  $F_1^i$  et ... et  $\hat{z}_p(t)$  est  $F_p^i$

$$\text{alors } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.17)$$

que l'on peut réécrire avec :

$$h_i(\hat{z}(t)) = \frac{w_i(\hat{z}(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\hat{z}(t))} \text{ et bien entendu : } \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) = 1, \text{ pour tout } t.$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) C_i \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Observateurs flous discrets (MFD) :

Règle  $R^i$  de l'observateur :

Si  $\hat{z}_1(t)$  est  $F_1^i$  et ... et  $\hat{z}_p(t)$  est  $F_p^i$

$$\text{alors } \begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.19)$$

ou avec les notations précédentes :

$$\begin{aligned}\hat{x}(t+1) &= \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) C_i \hat{x}(t)\end{aligned}\tag{2.20}$$

Les  $K_i$  représentent les matrices de gains d'observation,  $\hat{x}(t)$  le vecteur d'état reconstruit,  $y(t)$  et  $\hat{y}(t)$  sont respectivement la sortie finale du modèle flou et celle de l'observateur flou.

Néanmoins, dans le cas particulier où toutes les variables des prémisses sont mesurables /Feng & al. 97/ /Ma & al. 98/ /Tanaka & Sano 94/ /Tanaka & al. 98/ il est possible de remplacer  $h_i(\hat{z}(t)) = \frac{w_i(\hat{z}(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\hat{z}(t))}$  par  $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$  dans les équations

(2.18) et (2.20), c'est à dire, et c'est un point important pour la suite, que les poids attribués au modèle et à l'observateur sont identiques, puisqu'ils se basent sur des variables mesurées.

La construction de l'observateur flou se fait donc de façon très naturelle à partir d'un modèle flou. Elle consiste à déterminer les matrices de gains d'observation  $K_i$  dans les parties conclusions. Pour calculer ces matrices de gains, on retrouve les mêmes possibilités que pour la commande : placement de pôles, synthèse quadratique, utilisation de LMIs avec comme inconnues,  $P$  et les  $K_i$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ).

Deux approches sont alors prises en compte pour établir la stabilité du modèle complet. La première se place dans le cas particulier où toutes les variables utilisées dans les prémisses sont supposées mesurables  $z(t)$ , la deuxième concerne le cas général  $\hat{z}(t)$ .

### 2.3.2. Etude du modèle complet dans le cas particulier des variables de prémisses mesurables

Cette partie permet de définir la représentation d'état de la dynamique du modèle complet en boucle fermée.

L'expression de la loi de commande peut s'écrire dans ce cas :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \hat{x}(t) \text{ avec } h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}\tag{2.21}$$

Pour obtenir l'expression de la boucle fermée, il suffit de substituer le régulateur flou (2.21) et l'observateur flou (2.18) à (1.7) (cas continu MFC) et (2.21), (2.20) à (1.10) (cas discret MFD). Ainsi les expressions sont les suivantes en définissant :

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i F_j & B_i F_j \\ 0 & A_i - K_i C_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{MFC} : \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) G_{ij} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) G_{ii} x_a(t) + 2 \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x_a(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \text{MFD} : x_a(t+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) G_{ij} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) G_{ii} x_a(t) + 2 \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x_a(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

En appliquant les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 respectivement à (2.22) et (2.23), il est possible de tirer des conditions de stabilité pour les MFC et MFD. La démonstration du théorème 2.3.1 (respectivement 2.3.2) provient directement du théorème 2.2.1 (respectivement 2.2.2).

**Théorème 2.3.1 (MFC)** /Tanaka & al. 98/ : L'équilibre d'un modèle flou continu décrit par (2.22) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P > 0$  commune telle que :

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P + P G_{ii} &< 0, \\ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) &< 0, \quad i < j \end{aligned} \quad (2.24)$$

pour tout  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , exceptées les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t)) h_j(z(t)) = 0, \forall t$ .

**Théorème 2.3.2 (MFD)** /Tanaka & al. 98/ : L'équilibre d'un modèle flou discret décrit par (2.23) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P > 0$  commune telle que :

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P G_{ii} - P &< 0, \\ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P &< 0, \quad i < j \end{aligned} \quad (2.25)$$

pour tout  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , exceptées les paires  $(i, j)$  telles que  $h_i(z(t)) h_j(z(t)) = 0, \forall t$ .

On peut se rendre compte que cette fois-ci la matrice  $P$  est de dimension  $2n \times 2n$ . De plus il devient difficile d'écrire des LMIs permettant de déterminer,  $P > 0$ ,  $F_i$  et  $K_i$  simultanément. Il est alors nécessaire de séparer la procédure en 2. Trouver dans un premier temps les matrices  $F_i$  et  $K_i$  puis vérifier qu'une matrice  $P > 0$  commune existe. Il s'agit alors de procéder par essais successifs /Tanaka & al. 98/.

Pour éviter cette procédure itérative, /Ma & al. 98/ ont proposé un théorème de séparation pour le calcul de la commande, les gains  $F_i$ , et celui de l'observateur, les gains  $K_i$ . On s'intéresse au modèle complet, équation (2.22) :

**Théorème 2.3.3** /Ma & al. 98/ : S'il existe deux fonctions scalaires  $V(x): R^n \rightarrow R$  et  $\tilde{V}(\tilde{x}): R^n \rightarrow R$  et des nombres réels positifs  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ , et  $\tilde{\gamma}_4$  tels que :

$$i) \quad \gamma_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \gamma_2 \|x\|^2, \quad \tilde{\gamma}_1 \|\tilde{x}\|^2 \leq \tilde{V}(\tilde{x}) \leq \tilde{\gamma}_2 \|\tilde{x}\|^2 \text{ avec } \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$ii) \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_i - B_i F_j) x \leq -\gamma_3 \|x\|^2$$

$$\frac{\partial \tilde{V}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_i - K_j C_i) \tilde{x} \leq -\tilde{\gamma}_3 \|\tilde{x}\|^2$$

$$iii) \quad \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \leq \gamma_4 \|x\|, \quad \left\| \frac{\partial \tilde{V}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \right\| \leq \tilde{\gamma}_4 \|\tilde{x}\|$$

alors, le modèle complet (2.22) est globalement uniformément asymptotiquement stable.

La preuve de ce théorème est donnée dans /Ma & al. 98/, elle est basée sur le principe de comparaison vectorielle /Borne & al. 93/.

Dans ce contexte, si on choisit des fonctions scalaires du type :  $V(x) = x^T P_c x$  et  $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P_o \tilde{x}$  avec  $P_c > 0$  satisfaisant les conditions de stabilité pour la loi de commande seule (2.5), théorème 2.2.1, et  $P_o > 0$  satisfaisant les conditions de stabilité pour la partie observateur seule, les conditions du théorème 2.3.3 (i-iii) sont vérifiées.

En résumé dans ce cas particulier où les variables des prémisses sont mesurables, il est possible de déterminer à part la matrice  $P_c > 0$ , et les gains  $F_i$ , et la matrice  $P_o > 0$ , et les gains  $K_i$ .

Le paragraphe suivant décrit le second cas, celui où les variables des prémisses dépendent des variables d'état.

### 2.3.3. Etude du modèle complet dans le cas général

Dans ce cas  $\hat{z}_1(t) \sim \hat{z}_p(t)$  ne sont pas mesurables, la structure du régulateur ainsi que ses prémisses dépendent des variables d'état reconstruites, donc son expression au lieu de (2.21) est la suivante :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) F_i \hat{x}(t) \text{ toujours avec } h_i(\hat{z}(t)) = \frac{w_i(\hat{z}(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\hat{z}(t))} \quad (2.26)$$

Pour obtenir l'expression de la boucle fermée, il suffit de substituer le régulateur flou (2.26) et l'observateur flou (2.18) à (1.7) (cas continu MFC) et (2.26), (2.20) à (1.10) (cas discret MFD). Ainsi les expressions sont les suivantes :

MFC :

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) G_{ijs} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j^2(\hat{z}(t)) G_{ijj} x_a(t) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j<s}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) \frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} x_a(t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

MFD :

$$\begin{aligned} x_a(t+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) G_{ijs} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j^2(\hat{z}(t)) G_{ijj} x_a(t) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j<s}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) \frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} x_a(t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\text{avec, dans (2.27) et (2.28), } x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix}, G_{ijs} = \begin{bmatrix} A_i - B_i F_s & B_i F_s \\ S_{ijs}^1 & S_{ijs}^2 \end{bmatrix},$$

$$S_{ijs}^1 = (A_i - A_j) - (B_i - B_j) F_s + K_j (C_i - C_j) \text{ et}$$

$$S_{ijs}^2 = A_j - K_j C_s + (B_i - B_j) F_s.$$

En appliquant les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 respectivement à (2.27) et (2.28), il est possible de tirer des conditions de stabilité pour les MFC et MFD.

**Théorème 2.3.4 (MFC)** /Tanaka & al. 98/ : L'équilibre d'un modèle flou continu décrit par (2.27) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P > 0$  commune telle que :

$$\begin{aligned} G_{ij}^T P + P G_{ij} &< 0, \\ \left( \frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} \right) &< 0, \quad j < s \end{aligned} \quad (2.29)$$

pour tout  $i, j, s = 1, 2, \dots, r$ , exceptés les triplets  $(i, j, s)$  tels que :  
 $h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))h_s(\hat{z}(t)) = 0, \forall t$ .

**Théorème 2.3.5 (MFD)** /Tanaka & al. 98/ : L'équilibre d'un modèle flou discret décrit par (2.28) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P > 0$  commune telle que :

$$\begin{aligned} G_{ij}^T P G_{ij} - P &< 0, \\ \left( \frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} \right)^T P \left( \frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} \right) - P &< 0, \quad j < s \end{aligned} \quad (2.30)$$

pour tout  $i, j, s = 1, 2, \dots, r$ , exceptés les triplets  $(i, j, s)$  tels que :  
 $h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))h_s(\hat{z}(t)) = 0, \forall t$ .

A nouveau, la matrice  $P$  est de dimension  $2n \times 2n$  et il est alors nécessaire, en dehors de cas très simples, de procéder par essais successifs /Tanaka & al. 98/ pour déterminer les matrices  $P > 0$ ,  $F_i$  et  $K_i$ .

De la même manière que pour la partie commande il est possible d'écrire des conditions relâchées des théorèmes concernant l'observateur.

## 2.4. Conclusion

Ce second chapitre a présenté des travaux ayant trait à la commande des modèles flous de type TSK. Dans un premier temps, les résultats ont concerné la stabilité de ces modèles flous en utilisant une loi de commande de type PDC. La synthèse de ce type de loi de commande pouvant se faire par placement de pôles, synthèse quadratique ou directement par LMIs. Les résultats de stabilité obtenus sont conservatifs puisque l'on ne s'intéresse qu'à la partie des conclusions des règles. Quelques travaux permettant de réduire cette

conservativité en prenant en compte le support des ensembles flous intervenant dans les prémisses ont également été présentés dans le cas discret (MFD).

Comme il n'est pas toujours possible d'observer tous les états du système à commander, la dernière partie du chapitre présente des résultats concernant la stabilité des boucles de régulation floue comprenant un observateur flou. La synthèse de cet observateur flou se fait de façon naturelle en utilisant la représentation du système sous forme d'un modèle flou de type TSK. Il convient de distinguer deux cas. Le premier concerne le cas où les prémisses utilisent des variables mesurables et un principe de séparation est utilisable /Ma & al. 98/. Dans le cas contraire, des conditions suffisantes permettant de garantir la stabilité du modèle complet sont présentées. Dans ce cas, une mise sous forme LMI de ce problème semblant difficile, il convient de procéder par essais successifs, i.e. faire la synthèse de l'observateur et de la commande puis vérifier que les conditions de stabilité sont vérifiées.

Ainsi, l'approche des modèles flous du type TSK semble intéressante et prometteuse. En effet, l'intérêt de ces modèles flous est leur mise sous une forme permettant l'utilisation de la représentation d'état, et donc de tout le potentiel attaché à cette représentation. On notera que la synthèse de la loi de commande fait très souvent appel au concept PDC ou à un retour d'état linéaire, à l'exception de /Feng & al. 97/.

Dans ce contexte, i.e. l'analyse des modèles flous de type TSK, le prochain chapitre a pour objet principal de proposer des lois de commande dans le cas de modèles flous continus (MFC) qui ne sont pas basées directement sur une approche de type PDC.

# Chapitre 3.

## Lois de commande pour modèles flous continus

Dans le chapitre 2 présentant la stabilité des modèles flous de type TSK (Takagi Sugeno Kang), les lois de commande élaborées sont des lois de commande localement linéaires, et la méthode utilisée est basée sur une PDC (Parallel Distributed Compensation). Ce chapitre a pour objet de proposer d'autres lois de commande pour les modèles flous continus de type TSK, comprenant un régulateur flou et/ou un observateur flou.

3.1. Introduction.....	56
3.2. Modèles SIMO.....	57
3.2.1. Approche utilisant la stabilisation simultanée d'une famille de modèles linéaires.....	57
3.2.2. Approche utilisant la division par.....	63
3.2.3. Cas particuliers.....	67
3.2.4. Exemples.....	73
3.2.4.1. Exemple 1.....	73
3.2.4.2. Exemple 2.....	76
3.2.5. Modèle complet.....	79
3.2.5.1. Approche par SSF.....	79
3.2.5.2. Cas particuliers CDF.....	81
3.3. Modèles MIMO.....	82
3.3.1. Loi de commande.....	83
3.3.2. Modèle complet.....	85
3.3.3. Exemple 1.....	87
3.4. Conclusion.....	88

### 3.1. Introduction

Dans la littérature, la plupart des travaux traitant du problème de l'analyse de la stabilité d'une boucle de régulation floue /Wang & al. 96/ /Feng & al. 97/ /Tanaka & al. 98/, utilisent les modèles flous de type TSK /Takagi & Sugeno 85/ /Sugeno & Kang 88/ et élaborent une loi de commande floue basée sur une PDC (Parallel Distributed Compensation) /Tanaka & al. 96/.

Dans ce cas, la partie conclusion de la loi de commande floue est une loi de commande par retour d'état et l'analyse de la stabilité de tels systèmes commandés se fait en utilisant une approche de type Lyapunov /Tanaka & Sano 93/.

Ce chapitre présente de nouvelles lois de commande pour des modèles flous continus. Dans le cas de modèles SIMO (Single Input Multiple Output) le principe utilisé consiste à essayer d'éviter l'utilisation des modèles croisés, i.e., règle  $i$  pour le modèle utilisée avec la règle  $j$  pour la loi de commande. Une première approche est inspirée des travaux sur la stabilisation quadratique simultanée de systèmes linéaires /Petersen 87/. Une deuxième approche est également présentée pour des modèles particuliers SIMO qui permet de réduire la conservativité des conditions de stabilité trouvées dans la littérature.

Dans le cas multivariable (systèmes MIMO) les outils de la commande optimale sont utilisés pour résoudre le problème de la commande et de l'observation, ce qui amène à des inégalités linéaires matricielles basées sur les matrices de pondération au lieu de déterminer des gains de retour d'état directs. Un avantage que l'on peut attendre dans ce cas est de mieux "comprendre" les performances des lois de commande ainsi obtenues, et cette formulation permet dans une certaine mesure d'analyser les résultats obtenus dans le cas SIMO.

Quelques exemples seront proposés permettant de montrer les possibilités des lois de commandes élaborées. Le début du chapitre rappelle la structure d'un modèle flou de type TSK.

On rappelle la forme des modèles flous (TSK) utilisés dans toute la suite du chapitre /Takagi & Sugeno 85/ /Sugeno & Kang 88/. Avec  $r$  le nombre de règles,  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  le vecteur d'état,  $u(t)$  le vecteur des entrées,  $y(t)$  le vecteur

des sorties, et  $F_j^i : (j \in \{1, 2, \dots, p\})$  les sous-ensembles flous, le modèle flou continu (MFC) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z_j(t))$   $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $w_i(z(t)) \geq 0$ , les poids associés à chaque règle,  $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$  et bien entendu :  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ , pour tout  $t$ .

Dans toute la suite on suppose que les modèles flous sont localement commandables ( $\forall i \in \{1, \dots, r\}$  les paires  $(A_i, B_i)$  sont commandables) et localement observables ( $\forall i \in \{1, \dots, r\}$  les paires  $(A_i, C_i)$  sont observables).

## 3.2. Modèles SIMO

Quand une loi de type PDC est utilisée :  $u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t))F_i x(t)$ , le modèle en boucle fermé fait intervenir tous les modèles croisés  $A_i - B_i F_j$  tels que  $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0$ . Les approches proposées sont basées pour la loi de commande sur une division par  $B_i^T P x(t)$  ou par  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t))B_i^T P x(t)$  pour permettre dans une certaine mesure d'éviter les modèles croisés.

### 3.2.1. Approche utilisant la stabilisation simultanée d'une famille de modèles linéaires

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont inspirés des travaux de /Petersen 87/ concernant la stabilisation simultanée d'une famille de modèles linéaires SIMO utilisant une loi de commande par retour d'état non linéaire. Cette approche sera appelée dans la suite SSF (Stabilisation Simultanée pour modèles Flous).

**Théorème 3.2.1** /Guerra & Vermeiren 98c/ : Soit  $(\Sigma)$  un modèle flou décrit en (3.1) de type SIMO. Supposons qu'il existe une matrice  $P > 0$  et un réel  $\alpha > 0$  tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists Q_i > 0, F_i, \quad A_i^T P + P A_i - P B_i F_i - F_i^T B_i^T P + Q_i \leq 0 \quad (3.2)$$

$$\forall j \quad Q_j + P B_j F_j + F_j^T B_j^T P > \alpha I \quad (3.3)$$

alors la loi de commande :  $u(x) = g_1(x) + g_2(x)$  avec :

$$g_1(x) = \min_i \left( 0, \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2}{2 B_i^T P x} - F_i x \right) \quad \text{pour : } i \text{ tel que : } B_i^T P x > 0 \quad (3.4)$$

$$g_2(x) = \max_i \left( 0, \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2}{2 B_i^T P x} - F_i x \right) \quad \text{pour : } i \text{ tel que : } B_i^T P x < 0 \quad (3.5)$$

rend le modèle en boucle fermée globalement asymptotiquement stable.

Pour établir la preuve le lemme suivant est nécessaire :

**Lemme 3.2.1** : Si la condition (3.3) est vérifiée alors :  $\forall x \in R^n, g_1(x) = 0$  ou  $g_2(x) = 0$ .

Preuve :

Raisonnons par l'absurde. Supposons  $\exists x \in R^n$  tel que :  $g_1(x) < 0$  et  $g_2(x) > 0$ . Il

vient :

$$\exists i \in \{1, \dots, r\} \text{ tel que : } B_i^T P x > 0 \text{ et } x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2 - 2x^T P B_i F_i x < 0 ;$$

$$\text{d'où : } \quad 2x^T P B_i F_i x > x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2 \quad (3.6)$$

et

$$\exists j \in \{1, \dots, r\} \text{ tel que : } B_j^T P x < 0 \text{ et } x^T Q_j x - \alpha \|x\|^2 - 2x^T P B_j F_j x < 0 ;$$

$$\text{d'où : } \quad x^T Q_j x < \alpha \|x\|^2 + 2x^T P B_j F_j x \quad (3.7)$$

Montrons dans ce cas qu'il est impossible que la condition (3.3) soit vérifiée pour les couples  $(i, j)$  et  $(j, i)$  simultanément. Supposons que pour le couple  $(i, j)$  (une supposition identique pour le couple  $(j, i)$  aboutit évidemment au même résultat) la condition (3.3) soit vérifiée :

$$x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_j x > \alpha \|x\|^2$$

$$\text{d'où : } \quad 2x^T P B_i F_j x > \alpha \|x\|^2 - x^T Q_i x \quad (3.8)$$

(3.6)+(3.8) donne :  $2x^T PB_i(F_i + F_j)x > 0$  et comme  $B_i^T Px > 0$  il vient  $(F_i + F_j)x > 0$ .

Pour le couple  $(j, i)$ , d'après (3.7) on peut écrire :

$$x^T Q_j x + 2x^T PB_j F_i x < \alpha \|x\|^2 + 2x^T PB_j (F_i + F_j)x$$

or  $B_j^T Px < 0$  et  $(F_i + F_j)x > 0$  donc :  $x^T Q_j x + 2x^T PB_j F_i x < \alpha \|x\|^2$

ce qui contredit la condition (3.3).

□

Preuve du théorème 3.2.1 :

Considérons la fonction candidate de Lyapunov  $V(x) = x^T Px$ , sa dérivée s'écrit :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( x^T (A_i^T P + PA_i)x + 2(B_i^T Px)u \right) \text{ et d'après l'équation (3.2) :}$$

$$\dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r h_i(z) \left\{ -x^T Q_i x + 2x^T PB_i F_i x + 2(B_i^T Px)(g_1(x) + g_2(x)) \right\} = \sum_{i=1}^r h_i(z) \dot{V}_i(x)$$

*cas 1* :  $g_1(x) \neq 0$

D'après le lemme 3.2.1,  $g_2(x) = 0$ , d'où :

$$\dot{V}_i(x) = -x^T Q_i x + 2x^T PB_i F_i x + 2(B_i^T Px)g_1(x), \text{ et comme } g_1(x) \neq 0 :$$

$$\exists j \in \{1, \dots, r\} \text{ tel que } B_j^T Px > 0 \text{ et } g_1(x) = \frac{x^T Q_j x - \alpha \|x\|^2}{2B_j^T Px} - F_j x < 0$$

*cas 1a* :  $i$  est tel que  $B_i^T Px > 0$ , comme  $j$  correspond au minimum de  $g_1(x)$  alors :

$$g_1(x) \leq \frac{x^T Q_j x - \alpha \|x\|^2}{2B_j^T Px} - F_j x, \text{ et immédiatement : } \dot{V}_i(x) \leq -\alpha \|x\|^2.$$

*cas 1b* :  $i$  est tel que  $B_i^T Px = 0$ , et :  $\dot{V}_i(x) = -x^T Q_i x$ .

*cas 1c* :  $i$  est tel que  $B_i^T Px < 0$ , on a alors :

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(x) &= -x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_i x + \frac{B_i^T P x}{B_j^T P x} (x^T Q_j x - \alpha \|x\|^2) - 2x^T P B_i F_j x \\ &= -(x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_j x) + \frac{B_i^T P x}{B_j^T P x} (x^T Q_j x + 2x^T P B_j F_i x - \alpha \|x\|^2)\end{aligned}$$

comme  $\frac{B_i^T P x}{B_j^T P x} < 0$ , et d'après la condition (3.3) pour les couples  $(i, j)$  et  $(j, i)$  :

$$\dot{V}_i(x) \leq -\alpha \|x\|^2.$$

*cas 2* :  $g_2(x) \neq 0$

D'après le lemme 3.2.1,  $g_1(x) = 0$ , d'où :

$$\dot{V}_i(x) = -x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_i x + 2(B_i^T P x)g_2(x), \text{ et comme } g_2(x) \neq 0 :$$

$$\exists j \in \{1, \dots, r\} \text{ tel que } B_j^T P x < 0 \text{ et } g_2(x) = \frac{x^T Q_j x - \alpha \|x\|^2}{2B_j^T P x} - F_j x > 0$$

*cas 2a* :  $i$  est tel que  $B_i^T P x > 0$ , on a alors :

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(x) &= -x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_i x + \frac{B_i^T P x}{B_j^T P x} (x^T Q_j x - \alpha \|x\|^2) - 2x^T P B_i F_j x \\ &= -(x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_j x) + \frac{B_i^T P x}{B_j^T P x} (x^T Q_j x + 2x^T P B_j F_i x - \alpha \|x\|^2)\end{aligned}$$

comme  $\frac{B_i^T P x}{B_j^T P x} < 0$ , et d'après la condition (3.3) pour les couples  $(i, j)$  et  $(j, i)$  :

$$\dot{V}_i(x) \leq -\alpha \|x\|^2.$$

*cas 2b* :  $i$  est tel que  $B_i^T P x = 0$ , et :  $\dot{V}_i(x) = -x^T Q_i x$ .

*cas 2c* :  $i$  est tel que  $B_i^T P x < 0$ , comme  $j$  correspond au maximum de  $g_2(x)$  alors :

$$g_2(x) \geq \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2}{2B_i^T P x} - F_i x, \text{ et immédiatement : } \dot{V}_i(x) \leq -\alpha \|x\|^2.$$

*cas 3* :  $g_1(x) = g_2(x) = 0$

d'où :  $\dot{V}_i(x) = -x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_i x$

cas 3a :  $i$  est tel que  $B_i^T P x > 0$ , comme  $g_1(x) = 0$  :

$$x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2 - 2x^T P B_i F_i x \geq 0, \text{ et } : \dot{V}_i(x) \leq -\alpha \|x\|^2.$$

cas 3b :  $i$  est tel que  $B_i^T P x = 0$ , et :  $\dot{V}_i(x) = -x^T Q_i x$ .

cas 3c :  $i$  est tel que  $B_i^T P x < 0$ , comme  $g_2(x) = 0$  :

$$x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2 - 2x^T P B_i F_i x \geq 0, \text{ et } : \dot{V}_i(x) \leq -\alpha \|x\|^2.$$

Dans les 3 cas, on a donc en définissant :  $I = \{i, B_i^T P x = 0\}$  :

$$\dot{V}(x) \leq -\sum_{i \in I} h_i(z) x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2 \sum_{i \in I} h_i(z) < 0. \quad (3.9)$$

□

Dans ce cas les équations (3.2) et (3.3) peuvent se mettre sous forme de LMIs. Effectivement, après multiplication droite et gauche par  $P^{-1}$ , et en utilisant le changement de variables :  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i P^{-1}$  et  $Y_i = P^{-1} Q_i P^{-1}$ , les conditions sous forme de LMIs suivantes peuvent être obtenues :

trouver  $\alpha > 0$ ,  $X > 0$ ,  $Y_i \geq 0$  et  $M_i$  tels que :

$$X A_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T + Y_i \leq 0 \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} Y_i + B_i M_i + M_i^T B_i^T & X \\ X & \frac{1}{\alpha} I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.11)$$

puis :  $P = X^{-1}$ ,  $F_i = M_i P$  et  $Q_i = P Y_i P$ .

Le complément de Schur a été utilisé pour obtenir la forme LMI (3.11).

Il est également possible d'utiliser directement les outils de la commande optimale en remplaçant les équations (3.2) par des équations de Riccati, cette approche sera dénommée dans la suite QSSF.

**Corollaire 3.2.1 :** Soit  $(\Sigma)$  un modèle flou décrit en (3.1) de type SIMO. Supposons qu'il existe une matrice  $P > 0$  et un réel  $\alpha > 0$  tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists Q_i > 0, r_i > 0, \quad A_i^T P + P A_i - r_i^{-1} P B_i B_i^T P + Q_i = 0 \quad (3.12)$$

$$\forall j \quad Q_i + r_j^{-1} P \frac{B_i B_j^T + B_j B_i^T}{2} P > \alpha I \quad (3.13)$$

alors la loi de commande :  $u(x) = g_1(x) + g_2(x)$  avec :

$$g_1(x) = \min_i \left( 0, \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2 - r_i^{-1} x^T P B_i B_i^T P x}{2 B_i^T P x} \right) \quad \text{pour : } i \text{ tel que : } B_i^T P x > 0$$

$$g_2(x) = \max_i \left( 0, \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2 - r_i^{-1} x^T P B_i B_i^T P x}{2 B_i^T P x} \right) \quad \text{pour : } i \text{ tel que : } B_i^T P x < 0$$

rend le modèle en boucle fermée globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

Elle se déduit du théorème 3.2.1 en écrivant simplement que :  $F_i = \frac{1}{2} r_i^{-1} B_i^T P$ .

□

Chaque équation (3.12) correspond alors à la minimisation d'un critère quadratique du type :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q_i x + r_i u^2) dt$$

La mise sous forme LMIs des conditions du corollaire 3.2.1 se fait d'une manière analogue à celles du théorème 3.2.1. En utilisant le changement de variables :  $X = P^{-1}$ ,  $z_i = r_i^{-1}$ ,  $Y_i = P^{-1} Q_i P^{-1}$ , les conditions sous forme de LMIs suivantes peuvent être obtenues :

trouver  $\alpha > 0$ ,  $X > 0$ ,  $z_i > 0$  et  $Y_i \geq 0$  tels que :

$$X A_i^T + A_i X - z_i B_i B_i^T + Y_i \leq 0 \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} Y_i + z_j \frac{B_i B_j^T + B_j B_i^T}{2} & X \\ X & \frac{1}{\alpha} I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.15)$$

puis :  $P = X^{-1}$ ,  $r_i = z_i^{-1}$ ,  $Q_i = P Y_i P$ .

L'approche utilisée est intéressante dans la mesure où il n'y a aucune restriction sur les modèles SIMO utilisés. Néanmoins, il est possible de noter que la loi utilisée permet de stabiliser de façon simultanée l'ensemble des sous-modèles. Il en résulte très certainement que

les conditions de stabilité obtenues sont plus conservatives que celles rencontrées dans la littérature /Tanaka & al. 98/. Une illustration de ces lois de commande est donnée chapitre 4, sur un pendule inversé.

Néanmoins, l'idée d'utiliser une division par  $B_i^T Px$  dans la loi de commande permet d'envisager d'autres lois de commande qui ne sont plus directement basées sur une PDC, ces cas sont traités dans le prochain paragraphe.

### 3.2.2. Approche utilisant la division par $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T Px$

Cette approche sera dénommée dans la suite par CDF (Compensation et Division pour modèles Flous).

**Théorème 3.2.2** /Guerra & Vermeiren 98a, 98b/ : Soit  $(\Sigma)$  un modèle flou décrit en (3.1). Supposons qu'il existe une matrice  $P > 0$  et des vecteurs  $F_i$ , tels que :  $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ : les équations suivantes soient satisfaites :  $A_i^T P + P A_i - P B_i F_i - F_i^T B_i^T P < 0$ . Supposons que si  $\exists x_0 \neq 0$  tel que  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x_0 = 0$  alors  $\forall i$  tel que  $h_i(z) \neq 0$  :  $x_0^T P B_i F_i x_0 = 0$  (3.16)

alors il existe une loi de commande non linéaire continue qui rend le modèle flou globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

Considérons la fonction de Lyapunov :  $V(x) = x^T P x$ , et la loi de commande :

$$u = - \begin{cases} \frac{x^T P \sum_{i=1}^r h_i(z) B_i F_i x}{\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x} & \text{si } \sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x \neq 0 \\ l(x_0) & \text{si } \sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x_0 = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Remarquons que cette loi est continue et peut être définie en  $x_0$  tel que  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x_0 = 0$  par passage à la limite puisque  $\forall i$   $x^T P B_i F_i x \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow x_0$ . La dérivée de la fonction de Lyapunov s'écrit alors :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) x^T (A_i^T P + P A_i) x + 2 \sum_{i=1}^r h_i(z) (B_i^T P x) u$$

cas 1 :  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x_0 = 0$  et  $x_0 \neq 0$ , or :  $\forall i \ x^T (A_i^T P + P A_i - P B_i F_i - F_i^T B_i^T P) x < 0$  et dans ce cas comme  $\forall i \ x^T P B_i F_i x \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow x_0$  on a :  $x_0^T (A_i^T P + P A_i) x_0 < 0$  donc :  $\dot{V}(x_0) < 0$ .

cas 2 :  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x \neq 0$ , en remplaçant l'expression de la loi de commande :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^r h_i(z) x^T (A_i^T P + P A_i) x - 2 x^T P \sum_{j=1}^r h_j(z) B_j F_j x \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z) x^T (A_i^T P + P A_i - P B_i F_i - F_i^T B_i^T P) x < 0 \end{aligned}$$

□

Les conditions du théorème 3.2.2 peuvent être mises sous forme de LMIs. Effectivement, après multiplication droite et gauche par  $P^{-1}$ , et en utilisant le changement de variables :  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_i X$ , les conditions sous forme de LMIs suivantes sont obtenues :

$$\text{trouver } X > 0 \text{ et } M_i \text{ tels que : } \forall i \in \{1, \dots, r\} : X A_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0 \quad (3.18)$$

puis  $P = X^{-1}$ ,  $F_i = M_i P$

La première remarque importante est que dans le cas où le système peut se mettre sous la forme demandée, le nombre de LMIs utilisées chute de  $\frac{r(r+1)}{2}$  à  $r$ , si  $r$  est le nombre de règles. Cela indique théoriquement que les conditions de stabilité sont moins conservatives.

On peut évidemment déterminer les gains de retour d'état  $F_i$  par placement de pôles plutôt que de les chercher par LMIs. Dans ce contexte, si les paires  $(A_i, B_i)$  sont assez proches et si on arrive à rendre les sous-modèles  $A_i - B_i F_i$  les plus proches possibles (par exemple en fixant les valeurs propres au même endroit) une matrice  $P > 0$  commune à tous ces sous-modèles bouclés aura de grandes probabilités d'exister.

Il est également possible de considérer ce problème en utilisant des outils de la commande optimale, dans ce cas on utilise l'abréviation QCDF.

**Théorème 3.2.3** /Guerra & Vermeiren 98a, 98b/ : Soit  $(\Sigma)$  un modèle flou décrit en (3.1). Supposons qu'il existe  $P > 0$ , telle que :  $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ , les équations de Riccati suivantes soient satisfaites :  $A_i^T P + P A_i - r_i^{-1} P B_i B_i^T P + Q_i = 0$  avec des matrices  $Q_i \geq 0$  et des nombres réels  $r_i > 0$ . Supposons que si :

$$\exists x_0 \text{ tel que } \sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x_0 = 0 \text{ alors } \forall i \text{ tel que } h_i(z) \neq 0 \ B_i^T P x_0 = 0 \quad (3.19)$$

alors, il existe une loi de commande non linéaire continue qui rend le modèle flou globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

Considérons la fonction de Lyapunov :  $V(x) = x^T P x$ , et la loi de commande :

$$u = \begin{cases} - \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z) r_i^{-1} (B_i^T P x)^2}{\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x} & \text{si } \sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.20)$$

Remarquons que dans ce cas, le passage à la limite de la loi de commande pour  $x_0$  tel que  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x_0 = 0$  sous la condition  $\forall i \ B_i^T P x \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow x_0$  donne 0. La dérivée de la fonction de Lyapunov s'écrit alors :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left[ x^T (A_i^T P + P A_i) x + 2 (B_i^T P x) u \right] = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( -x^T Q_i x + r_i^{-1} (B_i^T P x)^2 + 2 (B_i^T P x) u \right).$$

cas 1 :  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x = 0$  et  $x \neq 0$ , comme :  $\forall i \ B_i^T P x \rightarrow 0 : \dot{V}(x) \rightarrow -\sum_{i=1}^r h_i(z) x^T Q_i x \leq 0$ ,

les  $Q_i$  étant définies non négatives,  $\dot{V}(x)$  peut-être nulle, mais ce cas n'arrivant que sur un état  $x \neq 0$  n'est pas problématique, cet état franchi, on repasse au cas 2.

cas 2 :  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x \neq 0$ , en remplaçant l'expression de la loi de commande, la dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( -x^T Q_i x + r_i^{-1} (B_i^T P x)^2 - 2 B_i^T P x \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z) r_i^{-1} (B_i^T P x)^2}{\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x} \right), \text{ et :}$$

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( -x^T Q_i x + r_i^{-1} (B_i^T P x)^2 \right) - 2 \sum_{i=1}^r h_i(z) r_i^{-1} (B_i^T P x)^2, \text{ finalement :}$$

$$\dot{V}(x) = - \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( x^T Q_i x + r_i^{-1} (B_i^T P x)^2 \right), \text{ et comme } r_i > 0, \text{ la fonction de Lyapunov est}$$

toujours strictement décroissante.

□

Dans ce cas les équations de Riccati peuvent se mettre sous forme de LMIs qui cette fois dépendent des matrices  $Q_i$  et des réels  $r_i$ . Effectivement, après multiplication droite et gauche par  $P^{-1}$ , et en utilisant le changement de variables :  $X = P^{-1}$ ,  $Y_i = P^{-1} Q_i P^{-1}$ ,  $z_i = r_i^{-1}$ , nous avons les conditions sous forme de LMIs suivantes :

$$\text{trouver } X > 0, Y_i \geq 0 \text{ et } z_i > 0 \text{ tels que : } \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad X A_i^T + A_i X - z_i B_i B_i^T + Y_i \leq 0 \quad (3.21)$$

puis :  $P = X^{-1}$ ,  $Q_i = P Y_i P$ ,  $r_i = z_i^{-1}$ .

Notons enfin, qu'il est possible d'élaborer d'autres types de lois de commande sur le même principe. Le théorème suivant en donne un exemple, on notera que cette fois-ci il est nécessaire d'avoir des matrices  $Q_i > 0$ .

**Théorème 3.2.4** /Guerra & Vermeiren 98a, 98b/ : Soit  $(\Sigma)$  un modèle flou décrit en (3.1). Supposons qu'il existe  $P > 0$ , telle que :  $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ , les équations de Riccati suivantes soient satisfaites :  $A_i^T P + P A_i - r_i^{-1} P B_i B_i^T P + Q_i = 0$  avec des matrices  $Q_i > 0$  et des nombres réels  $r_i > 0$ . Supposons que la condition (3.19) soit vérifiée, i.e., si :  $\exists x_0$  tel que  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x_0 = 0$  alors  $\forall i$  tel que  $h_i(z) \neq 0$   $B_i^T P x_0 = 0$ , alors, il existe une loi de commande non linéaire continue qui rend le modèle flou globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

Définissons  $\alpha = \min_{i \in \{1, \dots, r\}} (\lambda_{\min}(Q_i)) > 0$  comme étant le minimum de toutes les valeurs propres des matrices  $Q_i$ . Considérons la fonction candidate de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ , et la loi de commande :

$$u = \begin{cases} - \frac{1}{2} \frac{\max_{i \in \{1, \dots, r\}} (r_i^{-1} (B_i^T P x)^2)}{\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x} & \text{si } \sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.22)$$

alors :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left[ x^T (A_i^T P + P A_i) x + 2(B_i^T P x) u \right] = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( -x^T Q_i x + r_i^{-1} (B_i^T P x)^2 + 2(B_i^T P x) u \right).$$

*cas 1* :  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x = 0$ , comme :  $\forall i B_i^T P x \rightarrow 0 : \dot{V}(x) \rightarrow -\sum_{i=1}^r h_i(z) x^T Q_i x \leq -\alpha \|x\|^2$ ,

*cas 2* :  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x \neq 0$ , alors comme  $\sum_{i=1}^r h_i(z) = 1$  :

$$\dot{V}(x) \leq -\sum_{i=1}^r h_i(z) \left( x^T Q_i x - 2(B_i^T P x) u \right) + \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \left( r_i^{-1} (B_i^T P x)^2 \right), \text{ et en remplaçant l'expression de}$$

la loi de commande :

$$\dot{V}(x) \leq -\sum_{i=1}^r h_i(z) x^T Q_i x + \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \left( r_i^{-1} (B_i^T P x)^2 \right) \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x}{\sum_{j=1}^r h_j(z) B_j^T P x} \right) \leq -\alpha \|x\|^2$$

□

Les 3 derniers théorèmes utilisent une condition de passage à zéro de  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x$ .

En exploitant ces conditions, les équations (3.16) et (3.19), des cas particuliers intéressants de modèles flous SIMO peuvent être traités.

### 3.2.3. Cas particuliers

À partir des conditions des théorèmes 3.2.3 et 3.2.4, équation (3.19) :

si  $\exists x_0$  tel que  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x_0 = 0$  alors  $\forall i$  tel que  $h_i(z) \neq 0 B_i^T P x_0 = 0$  ;

il vient,  $\forall i, h_i(z) \neq 0$  le vecteur  $B_i$  est orthogonal au vecteur  $P x_0$ , et donc  $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, h_i(z) \neq 0, h_j(z) \neq 0 B_i, B_j \in$  à l'espace orthogonal engendré par  $P x_0$ . Il est facile de s'apercevoir que les  $z(t)$  dépendant généralement de  $x(t)$ , dans la majorité des cas il existe plusieurs  $x_0$  et souvent une infinité, qui annuleront  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x$ .

Dans ce cadre, une condition permettant de vérifier que  $B_i, B_j \in \mathcal{H}$  à l'espace orthogonal engendré par tous les  $Px_0$  tels que  $\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T Px_0 = 0$ , est de choisir  $B_i, B_j$  linéairement dépendants.

Dans ce cas les lois de commande peuvent être réécrites de la manière suivante. Dans le cadre du théorème 3.2.2, écrivons :  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i \neq 0, B_i = k_i B_1$  alors :

$$u = -\frac{x^T P \sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T F_i x}{\sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x} = -\frac{x^T P B_1 \sum_{i=1}^r h_i(z) k_i F_i x}{\left( \sum_{i=1}^r h_i(z) k_i \right) B_1^T P x} \quad \text{d'où :}$$

$$u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i} x(t) \quad (3.23)$$

Dans le cadre de la commande optimale, théorème 3.2.3 on peut réécrire la

$$\text{commande sous la forme : } u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) r_i^{-1} k_i^2}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i} B_1^T P x(t) \quad (3.24)$$

$$\text{Pour le théorème 3.2.4 la loi devient : } u(t) = -\frac{1}{2} \frac{\max_{i \in \{1, \dots, r\}} (r_i^{-1} k_i^2)}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i} B_1^T P x(t) \quad (3.25)$$

Cette représentation du problème fait apparaître le même dénominateur pour les 3 lois de commande et permet de déterminer immédiatement les conditions pour lesquelles les théorèmes sont utilisables.

**Corollaire 3.2.2** : Soient les modèles flous SIMO de type TSK vérifiant :  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$ , les conditions d'existence d'une loi continue équations (3.16) et (3.19) sont vérifiées.

Preuve évidente puisque dans ce cas avec :  $h_i(z) \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^r h_i(z) = 1$  et les  $k_i$  ont tous le même signe  $\forall t \sum_{j=1}^r h_j(z(t))k_j \neq 0$ .

□

**Corollaire 3.2.3** : Soient les modèles flous SIMO de type TSK vérifiant :  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$ , en utilisant la loi de commande :

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t))k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t))k_i} x(t), \text{ le modèle en boucle fermée s'écrit :}$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i - B_i F_i)x(t)$$

Preuve :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( A_i - B_i \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z)k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z)k_i} \right) x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i x - B_1 \sum_{i=1}^r h_i(z) k_i \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z)k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z)k_i} x$$

et :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i x - \sum_{i=1}^r h_i(z) k_i B_1 F_i x = \sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i - B_i F_i) x$$

□

Dans ce cadre toutes les conditions suffisantes de stabilité obtenues s'expliquent aisément puisque le modèle en boucle fermée ne contient plus de modèles croisés.

Ces différentes remarques permettent de rejoindre en partie les travaux de /Leung & al. 96/. Dans leur cas comme chaque sous-modèle peut-être représenté dans la base commandable, il est clair que  $\forall i \in \{1, \dots, r\} \exists F_i, A_i - B_i F_i = A_{BF}$  et l'existence d'une matrice  $P > 0$  est évidente ainsi que le fait que la boucle fermée du modèle flou complet devient linéaire.

Dans le cas de ces modèles SIMO, il est également possible de simplifier la loi de commande obtenue par l'approche par stabilisation simultanée SSF, théorèmes 3.2.1 et corollaire 3.2.1. Effectivement, la condition (3.13) :  $\forall j Q_i + r_j^{-1} P \frac{B_i B_j^T + B_j B_i^T}{2} P > \alpha I$  est

toujours vérifiée puisque :  $\exists k > 0, B_j = kB_i$ , donc :  $\frac{B_i B_j^T + B_j B_i^T}{2} = kB_i B_i^T \geq 0$  et  $Q_i > 0$ . On peut alors déduire les théorèmes suivants :

**Théorème 3.2.5** /Guerra & Vermeiren 98c/ : Soit  $(\Sigma)$  un modèle flou décrit en (3.1) de type SIMO vérifiant :  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$ . Supposons qu'il existe une matrice  $P > 0$  telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists F_i, \quad A_i^T P + P A_i - P B_i F_i - F_i^T B_i^T P < 0 \quad (3.26)$$

$$\text{alors la loi de commande : } u(x) = \begin{cases} \max_{i \in \{1, \dots, r\}} (F_i x) & \text{quand } B_1^T P x \geq 0 \\ \min_{i \in \{1, \dots, r\}} (F_i x) & \text{quand } B_1^T P x < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

rend le modèle en boucle fermée globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

Considérons la fonction candidate de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ , sa dérivée s'écrit :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( x^T (A_i^T P + P A_i) x + 2 (B_i^T P x) u \right) \text{ et d'après l'équation (3.26) :}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &< \sum_{i=1}^r h_i(z) \left\{ 2 x^T P B_i F_i x + 2 (B_i^T P x) u \right\} = \sum_{i=1}^r h_i(z) 2 (B_i^T P x) (F_i x + u) \\ &= 2 \sum_{i=1}^r h_i(z) k_i (B_1^T P x) (F_i x + u) \end{aligned}$$

$$\text{cas 1 : } B_1^T P x \geq 0 \text{ d'où } \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad u = - \max_{i \in \{1, \dots, r\}} (F_i x) \leq -F_i x \text{ et } F_i x + u \leq 0$$

$$\text{cas 2 : } B_1^T P x < 0 \text{ d'où } \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad u = - \min_{i \in \{1, \dots, r\}} (F_i x) \geq -F_i x \text{ et } F_i x + u \geq 0$$

$$\text{d'où : } \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (B_1^T P x) (F_i x + u) \leq 0 \text{ et : } \dot{V}(x) < 0$$

□

Notons que la loi de commande obtenue n'est pas forcément continue.

**Théorème 3.2.6** /Guerra & Vermeiren 98c/ : Soit  $(\Sigma)$  un modèle flou décrit en (3.1) de type SIMO vérifiant :  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$ . Supposons qu'il existe une matrice  $P > 0$  telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists Q_i > 0, r_i > 0, \quad A_i^T P + P A_i - r_i^{-1} P B_i B_i^T P + Q_i = 0 \quad (3.28)$$

alors le retour d'état linéaire :

$$u(t) = -\alpha B_1^T P x(t) \quad \text{avec : } \alpha = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} (r_i^{-1} k_i) \quad (3.29)$$

rend le modèle en boucle fermée globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

Avec la fonction de Lyapunov :  $V(x) = x^T P x$  :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( x^T (A_i^T P + P A_i) x + 2(B_i^T P x) u \right) \text{ et d'après l'équation (3.28) :}$$

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left\{ -x^T Q_i x + r_i^{-1} (B_i^T P x)^2 + 2(B_i^T P x) u \right\}$$

en reportant l'expression de la loi de commande (3.29) et en utilisant le fait que  $B_i = k_i B_1$  :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left\{ -x^T Q_i x + k_i (r_i^{-1} k_i - 2\alpha) (B_i^T P x)^2 \right\}$$

évidemment :  $\forall i \in \{1, \dots, r\} \quad \alpha = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} (r_i^{-1} k_i) \geq r_i^{-1} k_i$ , d'où :

$$\dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r h_i(z) \left\{ -x^T Q_i x - k_i \alpha (B_i^T P x)^2 \right\} < 0$$

□

Remarque : On peut s'apercevoir que les équations (3.26) et les LMIs (3.21) sont identiques, ce qui indique que pour ces modèles SIMO particuliers, sous réserve que les conditions de stabilité soient vérifiées, plusieurs synthèses d'une loi de commande sont possibles : linéaire, PDC, SSF, CDF, et si on utilise une synthèse quadratique, QSSF et QCDF.

Enfin, il est aussi possible d'utiliser la condition du théorème 3.2.2, équation (3.16) :

$$\exists x_0 \neq 0 \text{ tel que } \sum_{i=1}^r h_i(z) B_i^T P x_0 = 0 \text{ alors } \forall i \text{ tel que } h_i(z) \neq 0 : x_0^T P B_i F_i x_0 = 0$$

A titre d'exemple, il est possible d'imaginer des cas où cette condition est vérifiée sur un sous-espace de l'espace d'état. Dans ce cas, une loi du type (3.23) (3.24) ou (3.25) peut être utilisée sur ce sous-espace et une loi différente en dehors de ce sous-espace. Par exemple, soit le modèle constitué de 3 règles avec la variable  $x_1(t)$  correspondant à la première composante du vecteur d'état  $x(t)$  découpée en 3 valeurs linguistiques, figure 3.1 :

Règle  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$  : Si  $x_1(t)$  est  $F_1^i$  Alors  $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$

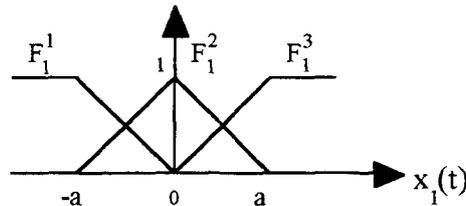


Figure 3.1 : Découpage de la variable  $x_1(t)$

Supposons de plus que :  $\exists k > 0$ ,  $B_2 = kB_1$ . Pour  $i \in I = \{1, 2\}$  il suffit d'utiliser une loi du type :

$$\text{si } x_1(t) \leq 0 \quad u(t) = -\frac{h_1(x_1(t))F_1 + kh_2(x_1(t))F_2}{h_1(x_1(t)) + kh_2(x_1(t))} x(t)$$

et si  $B_3$  est quelconque on peut alors utiliser pour :  $i \in I = \{2, 3\}$  la loi linéaire :

$$\text{si } x_1(t) > 0 \quad u(t) = -F_2 x(t)$$

Dans ce cas, le modèle vérifie la condition (3.16) et il suffit de vérifier les 3 conditions suivantes :

trouver  $P > 0$  et  $F_1$  et  $F_2$  tels que :  $\forall i \in \{1, 2\} : A_i^T P + P A_i - P B_i F_i - F_i^T B_i^T P < 0$

$$i = 3 : A_3^T P + P A_3 - P B_3 F_2 - F_2^T B_3^T P < 0$$

Le contexte strict des théorèmes impose la condition sur  $\sum_{j=1}^r h_j(z)k_j$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $k_i > 0$ , pour permettre à la fonction candidate de Lyapunov d'être toujours décroissante. Néanmoins, avec  $\exists i, k_i < 0$ , on peut supposer que dans le cas où  $\exists z$  tel que  $\sum_{j=1}^r h_j(z)k_j = 0$  sans que le numérateur de la loi de commande utilisée s'annule, le modèle ne fera que franchir cet état. Cette condition devrait donc pouvoir être relâchée en utilisant le fait que dans la pratique le signal de commande est toujours saturé. Evidemment on ne peut

garantir dans ce cas que la fonction de Lyapunov restera toujours décroissante, mais avec une énergie suffisante on peut supposer que l'état soit franchi assez vite pour qu'il n'y ait pas de problème.

En conclusion de cette partie concernant les modèles SIMO, les approches présentées permettent l'utilisation de lois de commande qui ne sont pas directement basées sur une PDC (Parallel Distributed Compensation). Dans le cas général, des lois de commande utilisant d'autres LMIs que celles trouvées dans la littérature pour les modèles croisés ont été mises en évidence. Enfin, dans les cas particuliers de modèles SIMO on a pu mettre en évidence que des lois très simples, jusqu'à l'obtention de lois de retour d'état linéaires, étaient suffisantes. Le paragraphe suivant propose quelques exemples permettant d'illustrer ces différents points.

### 3.2.4. Exemples

La plupart des exemples illustrant la stabilité des modèles flous de type TSK continus (MFC) trouvés dans la littérature sont tels que :  $\forall i \in \{1, \dots, r\} B_i^T = [0, \dots, 0, b_i^k, 0, \dots, 0]$  et  $\forall i \neq j, b_i^k \cdot b_j^k > 0$  /Tanaka & al. 96/ /Feng & al. 97/ /Sio & Lee 98/ /Tanaka & al. 98/. Ils rentrent donc dans le cadre des cas particuliers évoqués plus haut et ils ne sont pas repris ici puisque les conditions des théorèmes 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6 sont moins conservatives ils ne peuvent qu'admettre des solutions.

Deux exemples illustrent les résultats présentés dans le cas particulier :  $\forall i \in \{1, \dots, r\} \exists k_i \neq 0, B_i = k_i B_1$ . Ils ont été construits pour montrer qu'il est possible de trouver une loi de commande stabilisant des modèles là où ni les conditions de /Tanaka & al. 98/ ne donnent de solution, ni celles permettant d'obtenir une loi linéaire. Le premier se place dans le cadre strict des théorèmes obtenus  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, k_i > 0$ . Le second permet de montrer qu'il est possible de trouver des résultats même si  $\exists i k_i < 0$ .

#### 3.2.4.1. Exemple 1

Avec  $x_2(t) \in [-1, 1]$  et  $x_4(t) \in [-1, 1]$ ,  $z(t) = [x_2(t) \ x_4(t)]^T$ , les composantes du vecteur d'état  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ , on définit le modèle flou composé des quatre règles suivantes :

Règle  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$  :

$$\text{Si } x_2(t) \text{ est } F_1^i \text{ et } x_4(t) \text{ est } F_2^i \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, & C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 A_2 &= A_1, & B_2 &= 0,5B_1, & C_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 60 & 67 & 1 & -7 \end{bmatrix}, & B_3 &= 3B_1, & C_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & 17 & 1 \end{bmatrix}, & B_4 &= 2B_1, & C_4 &= C_3
 \end{aligned}$$

et les fonctions d'appartenance des ensembles flous définies par :

$$\begin{aligned}
 F_1^1(x_2(t)) &= \frac{x_2(t)+1}{2}, & F_1^2(x_2(t)) &= 1 - F_1^1(x_2(t)) = \frac{1-x_2(t)}{2} \\
 F_2^1(x_4(t)) &= \frac{x_4(t)+1}{2}, & F_2^2(x_4(t)) &= 1 - F_2^1(x_4(t)) = \frac{1-x_4(t)}{2}
 \end{aligned}$$

Cet exemple a été choisi de manière à ce qu'il soit impossible de déterminer une loi de commande de type PDC, linéaire ou SSF. Les seules conditions permettant d'obtenir une loi de commande sont celles issues des théorèmes 3.2.2, loi CDF, et 3.2.5, loi SSF appliquée au cas particulier. On peut donc proposer comme loi de commande :

$$u_1(t) = - \frac{\sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) k_i F_i}{\sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) k_i} x(t), \quad \text{ou :} \quad u_2(t) = \begin{cases} \max_{i \in \{1, \dots, 4\}} (F_i x(t)) & \text{quand } B_1^T P x(t) \geq 0 \\ \min_{i \in \{1, \dots, 4\}} (F_i x(t)) & \text{quand } B_1^T P x(t) < 0 \end{cases}$$

Les LMIs prisent en compte dans les deux cas sont celles issues de (3.18) :

trouver  $X > 0$  et  $M_i$  tels que :  $\forall i \in \{1, \dots, 4\} : X A_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0$  ;  
 puis  $P = X^{-1}$ ,  $F_i = M_i P$

Un résultat sans utiliser de contraintes supplémentaires est :

$$P = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,1942 & 0,2118 & -0,0035 & -0,0212 \\ 0,2118 & 0,8038 & 0,6237 & 0,0329 \\ -0,0035 & 0,6237 & 0,7922 & 0,0736 \\ -0,0212 & 0,0329 & 0,0736 & 0,0194 \end{bmatrix}$$

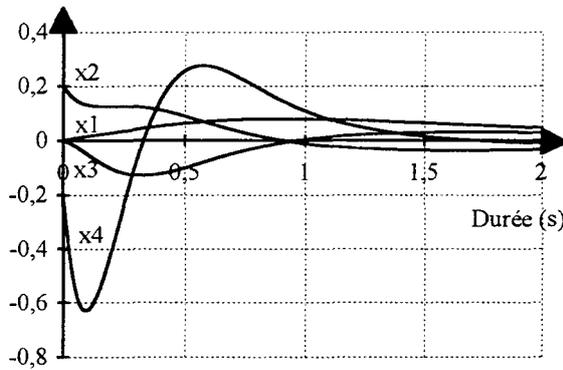
$$F_1 = [0,3428 \quad 13,5933 \quad 16,3612 \quad 1,1235]$$

$$F_2 = [0,6856 \quad 27,1817 \quad 32,7166 \quad 2,2462]$$

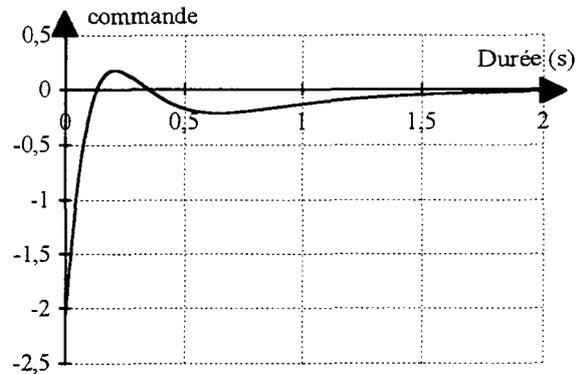
$$F_3 = [3,9072 \quad 8,3260 \quad 5,1023 \quad 0,0201]$$

$$F_4 = [-0,1091 \quad 7,2275 \quad 9,1491 \quad 0,8180]$$

Un exemple avec comme conditions initiales  $x(0) = [0 \quad 0,2 \quad 0 \quad -0,2]^T$  est donné figure 3.2, pour la loi  $u_1(t)$  et figure 3.3, pour la loi  $u_2(t)$ .

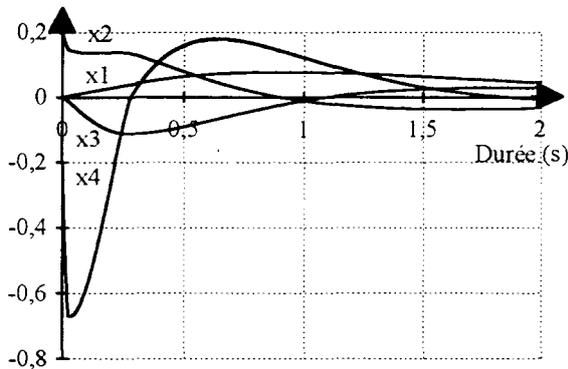


(a) : variables d'état

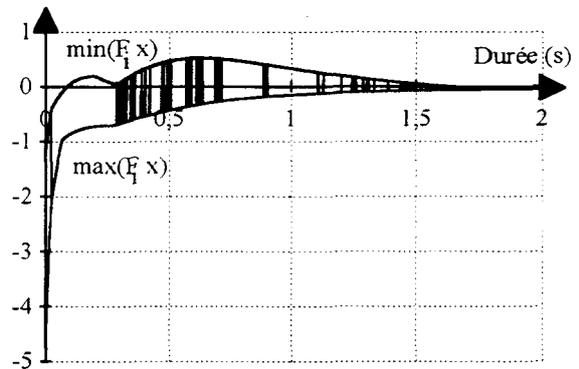


(b) : commande

Figure 3.2 : Résultats de loi commande  $u_1(t)$  (C.I. :  $x(0) = [0 \quad 0,2 \quad 0 \quad -0,2]^T$ )



(a) : variables d'état



(b) : commande

Figure 3.3 : Résultats de loi commande  $u_2(t)$  (C.I. :  $x(0) = [0 \quad 0,2 \quad 0 \quad -0,2]^T$ )

La figure 3.3 (b) montre la discontinuité de la loi  $u_2(t)$ , qui prend ses valeurs sur les deux courbes  $\max_{i \in \{1, \dots, 4\}} (F_i x)$  et  $\min_{i \in \{1, \dots, 4\}} (F_i x)$  en fonction du signe de  $B_1^T P x$ .

### 3.2.4.2. Exemple 2

On considère l'exemple suivant du modèle flou composé de 2 règles avec  $\beta > 0$  :

$$\text{Règle 1 : Si } x_1(t) \text{ est } F_1^1 \text{ Alors } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\text{Règle 2 : Si } x_1(t) \text{ est } F_1^2 \text{ Alors } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\text{Avec } F_1^1(x_1(t)) = \frac{x_1(t)+1}{2} \text{ et } F_1^2(x_1(t)) = 1 - F_1^1(x_1(t)) = \frac{1-x_1(t)}{2} \text{ et bien sur } x_1(t) \in [-1, 1].$$

Le premier modèle a deux pôles stables à -4 et -2, le second a un pôle stable à -4 et un pôle instable à 2. De plus les composantes des  $B_i$  sont de signe opposés. En développant les équations, quand  $x_1(t) \in [-1, 1]$  le modèle flou représente exactement le modèle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1^2(t) - 4x_1(t)x_2(t) - 4x_1(t) - \left( x_1(t) \frac{1+\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2} \right) u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) \end{cases}$$

Remarquons qu'il existe une loi linéaire qui permet de stabiliser ce modèle flou si  $\beta > 1$ . Effectivement, en posant :  $F = [f_1 \quad f_2]$  les polynômes caractéristiques des sous-modèles en boucle fermée  $A_1 - B_1 F$  et de  $A_2 - B_2 F$  s'écrivent :

$$P_{A_1 - B_1 F}(s) = s^2 + s(6 - f_1) + 2(4 - f_2) \text{ et } P_{A_2 - B_2 F}(s) = s^2 + s(2 + \beta f_1) + 2(-4 + \beta f_2)$$

et les conditions de stabilité de ces deux polynômes sont :

$$-\frac{2}{\beta} < f_1 < 6 \text{ et } \frac{4}{\beta} < f_2 < 4 \text{ d'où : } \beta > 1.$$

On se place donc volontairement dans le cas où  $0 < \beta < 1$ . A priori, aucun des résultats précédents n'est applicable. Aucune PDC, SSF et CDF n'est utilisable. En fait

l'exemple a été construit dans ce sens, et les explications aboutissant à ce résultat sont données dans la partie du chapitre concernant les modèles MIMO, lemme 3.3.1.

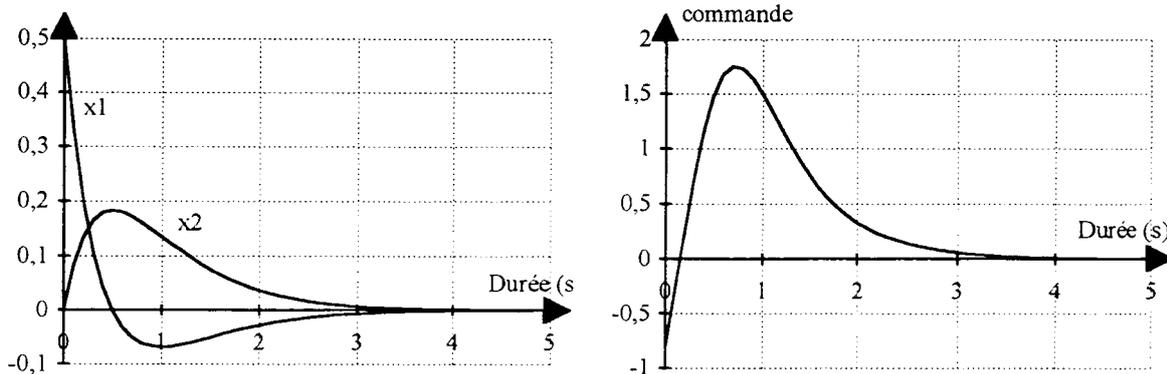
Néanmoins, comme les  $B_i$  n'ont qu'une composante, la condition  $\sum_{j=1}^2 h_j(x_1)k_j = 0$  se résume à chercher si  $\exists x_1$  tel que :  $h_1(x_1) - \beta h_2(x_1) = 0$  ce qui donne de façon immédiate :  $x_1 = \frac{\beta-1}{\beta+1}$ , et le dénominateur de la commande s'annule :  $\forall t, x(t) = \left[ \frac{\beta-1}{\beta+1}, x_2(t) \right]^T$ .

Un simple placement de pôles suffit à vérifier les conditions du théorème 3.2.2. En choisissant de placer les pôles à -2 pour chaque sous-modèle (ce qui paraît raisonnable puisqu'on symétrise le pôle instable) on obtient :  $F_1 = [2 \ 2]$  et  $F_2 = \frac{1}{\beta} [2 \ 6]$  mais surtout des matrices d'état de la boucle fermée identiques :

$A_1 - B_1 F_1 = A_2 - B_2 F_2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ . L'existence d'une matrice  $P > 0$  est donc évidemment garantie, d'où :

si,  $\forall t x_1(t) \in \left] \frac{\beta-1}{\beta+1}, 1 \right]$ , avec  $k = -\beta$ , la loi de commande :

$$u(t) = - \frac{h_1(x_1(t))F_1 + k h_2(x_1(t))F_2}{h_1(x_1(t)) + k h_2(x_1(t))} x(t), \text{ stabilise asymptotiquement le modèle.}$$



(a) : variables d'état

(b) : commande

Figure 3.4 : Loi de commande obtenue par placement de pôles (C.I. :  $x(0) = [0,5 \ 0]^T$ )

Un exemple est présenté pour  $\beta = 0,5$ , et le dénominateur de la commande s'annule :  $\forall t, x(t) = \left[ -\frac{1}{3}, x_2(t) \right]^T$ . Les courbes obtenues en utilisant comme conditions initiales  $x(0) = [0,5 \ 0]^T$  sont données figure 3.4.

Néanmoins il est intéressant de regarder le comportement de la loi de commande en choisissant des conditions initiales qui permettent de franchir la condition de passage à 0 du dénominateur de la loi de commande en ayant le numérateur différent de 0.

Pour ce faire la loi de commande est supposée saturée par :  $u(t) \in [-10, 10]$ . La figure 3.5 présente les résultats pour des conditions initiales  $x(0) = [-1 \ -0,3]^T$ .

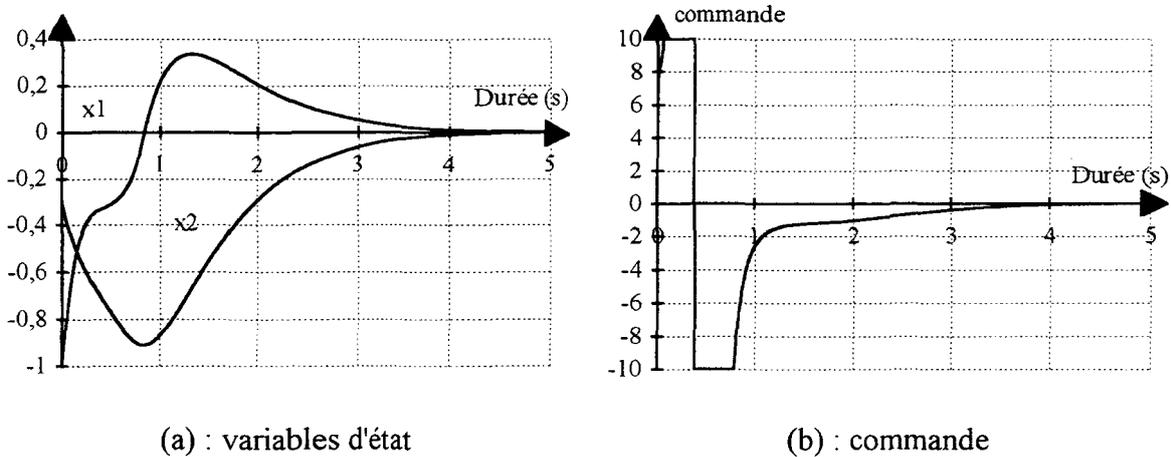


Figure 3.5 : Loi de commande obtenue par placement de pôles (C.I. :  $x(0) = [-1 \ -0,3]^T$ )

En conclusion, pour les modèles SIMO, deux approches ont été proposées. La première (SSF), ne faisant pas de restriction sur les modèles SIMO utilisés, permet d'obtenir une loi ne dépendant plus des poids des règles mais qui utilise des conditions sur les modèles croisés. La seconde approche (CDF) applicable que sur des modèles SIMO particuliers montre qu'il est possible de réduire la conservativité des résultats trouvés dans la littérature.

Néanmoins, l'approche utilisant un retour sur l'état du système, il est important de s'intéresser au modèle complet comprenant un observateur.

### 3.2.5. Modèle complet

Deux cas d'observateurs peuvent être envisagés /Tanaka & al. 98/ (cf chapitre 2, paragraphe 2.3). Dans toute la suite on se place dans le cas où les variables utilisées dans les prémisses sont mesurables.

Plusieurs solutions sont envisageables. En gardant une formulation de type PDC, on peut utiliser un gain unique, des gains issus de /Tanaka & al. 98/ ou d'une formulation de type approche optimale /Guerra & Vermeiren 98b/ (cf théorème 3.3.2). Dans tous les cas il peut s'écrire de la façon suivante :

Règle  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  :

Si  $z_1(t)$  est  $F_i^1$  et ... et  $z_n(t)$  est  $F_i^n$

$$\text{Alors } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}_i(t) = C_i \hat{x}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (3.30)$$

#### 3.2.5.1. Approche par SSF

La loi de commande est donnée dans ce cas, théorème 3.2.1, par  $u(\hat{x}) = g_1(\hat{x}) + g_2(\hat{x})$  avec :

$$g_1(\hat{x}) = \min_i \left( 0, \frac{\hat{x}^T Q_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2}{2B_i^T P \hat{x}} - F_i \hat{x} \right) \quad \text{pour : } i \text{ tel que : } B_i^T P \hat{x} > 0 \quad (3.31)$$

$$g_2(\hat{x}) = \max_i \left( 0, \frac{\hat{x}^T Q_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2}{2B_i^T P \hat{x}} - F_i \hat{x} \right) \quad \text{pour : } i \text{ tel que : } B_i^T P \hat{x} < 0 \quad (3.32)$$

Le modèle complet peut alors s'écrire, à l'aide de (3.1) et (3.30) :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i x + B_i u(\hat{x})) \\ \dot{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) (A_i - K_j C_i) \tilde{x} \end{cases} \quad \text{avec : } \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.33)$$

On s'intéresse à la stabilité de ce modèle complet. Le théorème suivant donne un principe de séparation pour le calcul de l'observateur et de la loi de commande.

**Théorème 3.2.7** /Guerra & Vermeiren 98c/ : Supposons qu'il existe deux matrices  $P_c > 0$  et  $P_o > 0$  vérifiant les propriétés suivantes :

- i)  $\forall x \neq 0, V(x) = x^T P_c x$  est strictement décroissante ;
- ii)  $\forall \tilde{x} \neq 0, \tilde{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P_o \tilde{x}$  est strictement décroissante ;

alors le modèle complet (3.33) utilisant la loi de commande définie par (3.31) et (3.32) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

La démonstration étant fastidieuse /Guerra & al. 98b/, pour ne pas alourdir le chapitre, celle-ci est donnée complètement en annexe, seule la fin est reprise ici.

D'après le lemme 3.2.1, soit  $u(\hat{x}) = g_1(\hat{x})$ , soit  $u(\hat{x}) = g_2(\hat{x})$ , et pour ces deux cas il est possible de distinguer 3 sous-cas :  $B_i^T P x < 0$ ,  $B_i^T P x = 0$  et  $B_i^T P x > 0$ .

Il est possible de montrer, annexe, que quelque soit le cas étudié :

$$\exists \alpha^* > 0, \rho > 0, \dot{V}(x) \leq -\alpha^* \|x\|^2 + \rho \|\tilde{x}\|^2$$

Or, avec  $\underline{\lambda}$  désignant la plus petite valeur propre d'une matrice  $P$  et  $\bar{\lambda}$  la plus grande :

$$\underline{\lambda}_c \|x\|^2 \leq x^T P_c x \leq \bar{\lambda}_c \|x\|^2 \text{ et } \underline{\lambda}_o \|\tilde{x}\|^2 \leq \tilde{x}^T P_o \tilde{x} \leq \bar{\lambda}_o \|\tilde{x}\|^2$$

$$\text{donc : } \dot{V}(x) \leq -\frac{\alpha^*}{\bar{\lambda}_c} V(x) + \frac{\rho}{\underline{\lambda}_o} \tilde{V}(\tilde{x}).$$

D'autre part comme  $\forall \tilde{x} \neq 0, \tilde{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P_o \tilde{x}$  est strictement décroissante :

$$\exists \beta > 0, \dot{\tilde{V}}(\tilde{x}) \leq -\beta \|\tilde{x}\|^2 \text{ d'où : } \dot{\tilde{V}}(\tilde{x}) \leq -\frac{\beta}{\bar{\lambda}_o} \tilde{V}(\tilde{x}).$$

$$\text{Donc : } \begin{bmatrix} \dot{V}(x) \\ \dot{\tilde{V}}(\tilde{x}) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\frac{\alpha^*}{\bar{\lambda}_c} & \frac{\rho}{\underline{\lambda}_o} \\ 0 & -\frac{\beta}{\bar{\lambda}_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(x) \\ \tilde{V}(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

$$\text{En construisant le système de comparaison : } \dot{w} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha^*}{\bar{\lambda}_c} & \frac{\rho}{\underline{\lambda}_o} \\ 0 & -\frac{\beta}{\bar{\lambda}_o} \end{bmatrix} w, \text{ qui est}$$

évidemment globalement asymptotiquement stable, et en utilisant le principe de comparaison

vectorielle /Borne & al. 93/ le modèle complet définit équation (3.33) est globalement asymptotiquement stable.

□

L'application de ce principe de séparation sera utilisée au chapitre IV, sur un pendule inversé.

### 3.2.5.2. Cas particuliers CDF

Dans les cas particuliers du corollaire 3.2.3, i.e., les modèles vérifient la propriété :  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$ , en utilisant la loi de commande :

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i} x(t), \text{ on rappelle que le modèle en boucle fermée s'écrit :}$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i - B_i F_i) x(t), \text{ et on peut alors écrire le modèle complet sous la forme :}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z) [(A_i - B_i F_i) x + B_i F_i \tilde{x}] \\ \dot{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) (A_i - K_j C_i) \tilde{x} \end{cases} \text{ avec : } \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.35)$$

L'écriture de ces modèles complets est donc un cas particulier de l'écriture complète avec une loi de type PDC (cf chapitre 2, équation 2.22). On peut donc écrire le théorème de séparation suivant :

**Theoreme 3.2.8** /Guerra & Vermeiren 98a, 98b/ : Soient les modèles SIMO vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1, \text{ et la loi de commande : } u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i} \hat{x}(t).$$

Supposons qu'il existe deux matrices  $P_c > 0$  et  $P_o > 0$  vérifiant les propriétés suivantes :

- i)  $\forall x \neq 0, V(x) = x^T P_c x$  est strictement décroissante ;
- ii)  $\forall \tilde{x} \neq 0, \tilde{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P_o \tilde{x}$  est strictement décroissante ;

alors le modèle complet (3.35) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

Comme  $\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z) [(A_i - B_i F_i) x + B_i F_i \tilde{x}]$  est un cas particulier de :

$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) [(A_i - B_i F_j) x + B_i F_j \tilde{x}]$  le théorème de /Ma & al. 98/ (théorème 2.3.3)

est vérifié.

□

Pour illustrer ce théorème de séparation, l'exemple 1, partie 3.2.4.1, est repris après la partie MIMO (cf 3.3.3).

Comme dernière remarque, on peut noter que ces cas particuliers ont été placés dans la partie des modèles SIMO parce qu'ils découlent d'une synthèse faite dans ce cas là.

Néanmoins il est bien sur évident que les lois du type  $u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i} \hat{x}(t)$  peuvent

tout à fait s'appliquer au cas des modèles MIMO vérifiant  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$ . Tous les résultats peuvent donc être étendus au cas MIMO, corollaire 3.2.3, et les théorèmes 3.2.6, 3.2.8.

Le corollaire 3.2.1, les théorèmes 3.2.3 et 3.2.6, utilisent les outils de la commande optimale, le paragraphe suivant propose d'utiliser cette approche pour les modèles MIMO, elle est appelée dans la suite QPDC.

### 3.3. Modèles MIMO

Le problème de trouver une loi de commande pour ces modèles va se ramener, comme pour le corollaire 3.2.1 à vérifier des LMIs dont les inconnues sont les matrices de pondération.

C'est évidemment un cas particulier par rapport /Tanaka & al. 98/, dans le sens où ses matrices de retour d'état englobent celles obtenues par synthèse quadratique. Néanmoins, il y a plusieurs intérêts à présenter le problème sous la forme proposée qui seront exposés plus loin.

### 3.3.1. Loi de commande

**Theoreme 3.3.1 :** Soit  $(\Sigma)$  un modèle flou décrit en (3.1). Supposons qu'il existe  $P > 0$ , des matrices  $Q_i \geq 0$  et  $R_i > 0$  telles que les équations suivantes soient satisfaites :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} \quad A_i^T P + P A_i - P B_i R_i^{-1} B_i^T P + Q_i = 0, \quad (3.36)$$

$$\forall i, j \quad i > j \quad Q_i + Q_j + P \left( B_i R_j^{-1} B_i^T + B_j R_i^{-1} B_j^T - (B_i - B_j) (R_i^{-1} + R_j^{-1}) (B_i - B_j)^T \right) P \geq 0 \quad (3.37)$$

alors la loi de commande  $u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t)$  avec  $F_i = R_i^{-1} B_i^T P$  rend le modèle flou globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

Considérons la fonction candidate de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ , alors :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left[ x^T (A_i^T P + P A_i) x + u^T B_i^T P x + x^T P B_i u \right], \text{ en remplaçant :}$$

$$u = -\sum_{j=1}^r h_j(z) R_j^{-1} B_j^T P x \text{ dans l'expression il vient :}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) x^T \left( A_i^T P + P A_i - P (B_j R_j^{-1} B_j^T + B_i R_j^{-1} B_j^T) P \right) x \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z) x^T (A_i^T P + P A_i - 2 P B_i R_i^{-1} B_i^T P) x + \sum_{i>j} h_i(z) h_j(z) x^T \left( A_i^T P + P A_i + A_j^T P + P A_j \right. \\ &\quad \left. - P (B_j R_j^{-1} B_j^T + B_i R_j^{-1} B_j^T + B_i R_i^{-1} B_j^T + B_j R_i^{-1} B_j^T) P \right) x \end{aligned}$$

Comme les équations (3.36) sont vérifiées, la dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -\sum_{i=1}^r h_i^2(z) x^T (Q_i + F_i R_i F_i^T) x \\ &\quad + \sum_{i>j} h_i(z) h_j(z) x^T \left( -Q_i - Q_j + P (B_i R_i^{-1} B_i^T + B_j R_j^{-1} B_j^T - B_j R_i^{-1} B_i^T - B_i R_j^{-1} B_j^T) P \right) x \\ &= -\sum_{i=1}^r h_i^2(z) x^T (Q_i + F_i R_i F_i^T) x - \sum_{i>j} h_i(z) h_j(z) x^T (Q_i + Q_j \\ &\quad + P (B_i R_i^{-1} B_i^T + B_j R_j^{-1} B_j^T - B_j R_i^{-1} B_i^T - B_i R_j^{-1} B_j^T - B_i R_i^{-1} B_j^T - B_j R_i^{-1} B_j^T) P) x \\ &= -\sum_{i=1}^r h_i^2(z) x^T (Q_i + F_i R_i F_i^T) x \\ &\quad - \sum_{i>j} h_i(z) h_j(z) x^T \left( Q_i + Q_j + P (B_i R_j^{-1} B_i^T + B_j R_i^{-1} B_j^T - (B_i - B_j) (R_i^{-1} + R_j^{-1}) (B_i - B_j)^T) P \right) x \end{aligned}$$

$$\text{et comme l'équation (3.37) est vérifiée : } \dot{V}(x) \leq -\sum_{i=1}^r h_i^2(z) x^T (Q_i + F_i R_i F_i^T) x < 0.$$

□

Les équations (3.36) et (3.37) peuvent se mettre sous forme de LMIs qui cette fois dépendent des matrices  $Q_i$  et  $R_i$ . Effectivement, après multiplication droite et gauche par  $P^{-1}$ , et en utilisant le changement de variables :  $X = P^{-1}$ ,  $Y_i = P^{-1}Q_iP^{-1}$ ,  $Z_i = R_i^{-1}$ , les conditions sous forme de LMIs suivantes sont obtenues :

trouver  $X > 0$ ,  $Y_i \geq 0$  et  $Z_i > 0$  tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} : SA_i^T + A_iS - B_iZ_iB_i^T + Y_i \leq 0, \quad (3.38)$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, i > j$$

$$Y_i + Y_j + B_iZ_jB_i^T + B_jZ_iB_j^T - (B_i - B_j)Z_i(B_i - B_j)^T - (B_i - B_j)Z_j(B_i - B_j)^T \geq 0 \quad (3.39)$$

puis :  $P = X^{-1}$ ,  $Q_i = PY_iP$ ,  $R_i = Z_i^{-1}$ .

Le nombre de LMIs utiles dans le cas général est  $\frac{r(r+1)}{2}$ . A partir de l'équation (3.37) on s'aperçoit de façon évidente que si  $\exists i, j, i \neq j, B_i = B_j$  ce nombre décroît.

Remarque 3.3.1 : il est possible de choisir une matrice  $R$  commune ( $\forall i \in \{1, \dots, r\} R_i = R$ ) qui pourra être déterminée par LMIs ou choisie a priori. Dans ce cas, et si de plus le modèle flou MIMO vérifie  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, B_i = B$ , la loi de commande floue obtenue est un simple retour d'état linéaire /Guerra & Vermeiren 98a/ donnée par :  $u(t) = -R^{-1}B^T Px(t)$ .

La présentation du problème utilisant des outils de la commande optimale permet de faire quelques remarques intéressantes. Dans certains cas, on peut par exemple diminuer le nombre de LMIs. Le lemme suivant en donne un exemple.

**Lemme 3.3.1** : Considérons un modèle flou SIMO de type TSK vérifiant la propriété :  $\exists i, j, i \neq j$  tels que :  $A_i = A_j$ ,  $\exists k > 0$ ,  $B_i = kB_j$ , alors il existe toujours une matrice  $P > 0$  telle que :  $A_i^T P + PA_i - r_i^{-1}PB_iB_i^T P + Q_i = 0$ ,  $A_j^T P + PA_j - r_j^{-1}PB_jB_j^T P + Q_j = 0$ , et  $Q_i + Q_j + P(B_i r_j^{-1} B_i^T + B_j r_i^{-1} B_j^T - (B_i - B_j)(r_i^{-1} + r_j^{-1})(B_i - B_j)^T)P \geq 0$ . (3.40)

Preuve :

On peut réécrire la seconde équation de Riccati de la manière suivante :

$$A_j^T P + PA_j - r_j^{-1}PB_jB_j^T P + Q_j = A_i^T P + PA_i - r_j^{-1}k^2PB_iB_i^T P + Q_j ;$$

et en prenant :  $r_j = k^2 r_i$  et  $Q_i = Q_j$ , les deux équations de Riccati sont identiques.

Pour la dernière équation, notons :

$$\begin{aligned}\alpha &= B_i r_j^{-1} B_i^T + B_j r_i^{-1} B_j^T - (B_i - B_j)(r_i^{-1} + r_j^{-1})(B_i - B_j)^T, \text{ il vient :} \\ \alpha &= r_j^{-1} (B_i B_i^T + k^4 B_i B_i^T - B_i (1-k)(k^2+1)(1-k) B_i^T) \\ &= r_j^{-1} B_i B_i^T (1+k^4 - (1-k)^2 (k^2+1)) = r_j^{-1} B_i B_i^T (2k(k^2+1) - 2k^2)\end{aligned}$$

enfin :  $\alpha = 2kr_j^{-1} B_i B_i^T (k^2 - k + 1) \geq 0$  car  $k > 0$ . L'équation (3.40) correspondant au modèle croisé est donc toujours vérifiée. □

Remarque 3.3.2 : Ce lemme montre donc que pour la classe des modèles flous SIMO de type TSK considérée dans le cas particulier du paragraphe 3.2.2, i.e.,  $\forall i \in \{1, \dots, r\} \exists k_i > 0$ ,  $B_i = k_i B_1$ , le fait de réduire le nombre de LMIs de  $\frac{r(r+1)}{2}$  à  $r$ , aboutit à des conditions moins conservatives en théorie. Néanmoins, les exemples de modèles où les conditions de /Tanaka & al. 98/ ne donnent pas de solutions, alors qu'il existe une loi de type CDF, seront donc des exemples où les  $A_i$  sont très différentes, cas de l'exemple 1 traité auparavant.

En ce qui concerne la construction de l'exemple 2, l'utilisation du lemme apporte une solution intéressante. Effectivement, si on veut avoir une chance que seules les équations de Riccati soient satisfaites (3.36), sans que la croisée le soit (3.40), il faut choisir :  $k < 0$ , ce qui explique pour l'exemple 2 le choix des  $B_i$ .

### 3.3.2. Modèle complet

On rappelle que les variables des prémisses sont supposées mesurables, l'équation de l'observateur est donnée par (3.30). Comme les variables sont mesurables, le même poids peut être utilisé pour l'observateur et pour le modèle, et on peut alors écrire le modèle complet sous la forme (cf chapitre 2, paragraphe 2.3.2) :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) [(A_i - B_i F_j) x + B_i F_j \tilde{x}] \\ \dot{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) (A_i - K_j C_i) \tilde{x} \end{cases} \quad \text{avec : } \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.41)$$

Pour l'observateur on s'intéresse donc à la convergence du modèle défini par l'équation :  $\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z)h_j(z)(A_i - K_j C_j) \hat{x}(t)$ . En considérant alors le problème d'obtention des gains  $K_j$  de l'observateur comme un problème de commande sur le système dual /Rachid & Mehdi 97/, il est possible d'écrire le théorème suivant.

**Theoreme 3.3.2 :** Soit  $(\Sigma)$  un modèle flou décrit en (3.1). Supposons qu'il existe  $P > 0$ , des matrices  $Q_i \geq 0$  et  $R_i > 0$  telles que les équations suivantes soient satisfaites :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} \quad A_i P + P A_i^T - P C_i^T R_i^{-1} C_i P + Q_i = 0, \quad (3.42)$$

$$\forall i, j \quad i > j \quad Q_i + Q_j + P \left( C_i^T R_i^{-1} C_i + C_j^T R_j^{-1} C_j - (C_i - C_j)^T (R_i^{-1} + R_j^{-1}) (C_i - C_j) \right) P \geq 0 \quad (3.43)$$

Alors si  $K_i = P C_i^T R_i^{-1}$ , le modèle défini par  $\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - K_i C_j) \hat{x}(t)$  est globalement asymptotiquement stable.

Preuve évidente, théorème 3.3.1 avec les paires  $(A_i^T, C_i^T)$ .

□

Le nombre de LMIs utiles dans le cas général est  $\frac{r(r+1)}{2}$ . A partir de l'équation (3.43) on s'aperçoit de façon évidente que si  $\exists i, j, i \neq j, C_i = C_j$  ce nombre décroît.

Remarque 3.3.3 : de façon similaire à la remarque 3.3.1, il est possible de choisir une matrice  $R$  commune ( $\forall i \in \{1, \dots, r\} R_i = R$ ) qui pourra être déterminée par LMIs ou choisie a priori. Dans ce cas, et si de plus le modèle flou MIMO vérifie  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, C_i = C$ , tous les gains de l'observateur seront donnés par :  $K_i = K = P C^T R^{-1}$ .

De la même manière que pour le théorème 3.2.8, en supposant qu'il existe une matrice  $P_c > 0$  solution des équations liées au problème de commande, et  $P_o > 0$  la matrice solution des équations liées au problème d'observation, on peut évidemment choisir :  $V(x) = x^T P_c x$  et  $\tilde{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P_o \tilde{x}$ , et les conditions du théorème de séparation sont vérifiées.

En conclusion, l'utilisation des outils de la commande optimale permet d'écrire des LMIs dépendant des matrices de pondération. Elle a également permis d'obtenir des remarques intéressantes concernant les conditions de stabilité liées à la classe des modèles SIMO utilisée au paragraphe 3.2. Concernant ces modèles et pour montrer un modèle complet l'exemple 1 du paragraphe 3.2.4.1 est repris.

### 3.3.3. Exemple 1

La loi de commande est forcément celle issue de CDF, les autres ne donnant pas de solutions. L'observateur peut-être à gain unique, issu d'une PDC utilisant les LMIs de /Tanaka & al. 98/ ou calculé en utilisant les conditions (3.42) et (3.43). C'est ce dernier qui est utilisé ici, les résultats obtenus sans utiliser de contraintes supplémentaires sont :

$$P_o = \begin{bmatrix} 0,2076 & 0,1323 & 0,7584 & 3,7181 \\ 0,1323 & 0,4892 & 1,6313 & 7,6330 \\ 0,7584 & 1,6313 & 8,4832 & 37,2498 \\ 3,7181 & 7,6330 & 37,2498 & 184,6075 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 4,3160 & 2,5061 \\ 9,6870 & 6,1262 \\ 46,7831 & 25,3065 \\ 207,8463 & 115,5369 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 4,4021 & 3,0567 \\ 9,6303 & 6,9303 \\ 47,0973 & 29,4707 \\ 209,0621 & 134,3768 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 5,7401 & 0,1539 \\ 12,3690 & 0,1833 \\ 64,4897 & -0,1817 \\ 283,0047 & 0,3582 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 5,8542 & -0,4351 \\ 12,7092 & -1,3167 \\ 66,9872 & -9,7716 \\ 293,2295 & -39,9287 \end{bmatrix}$$

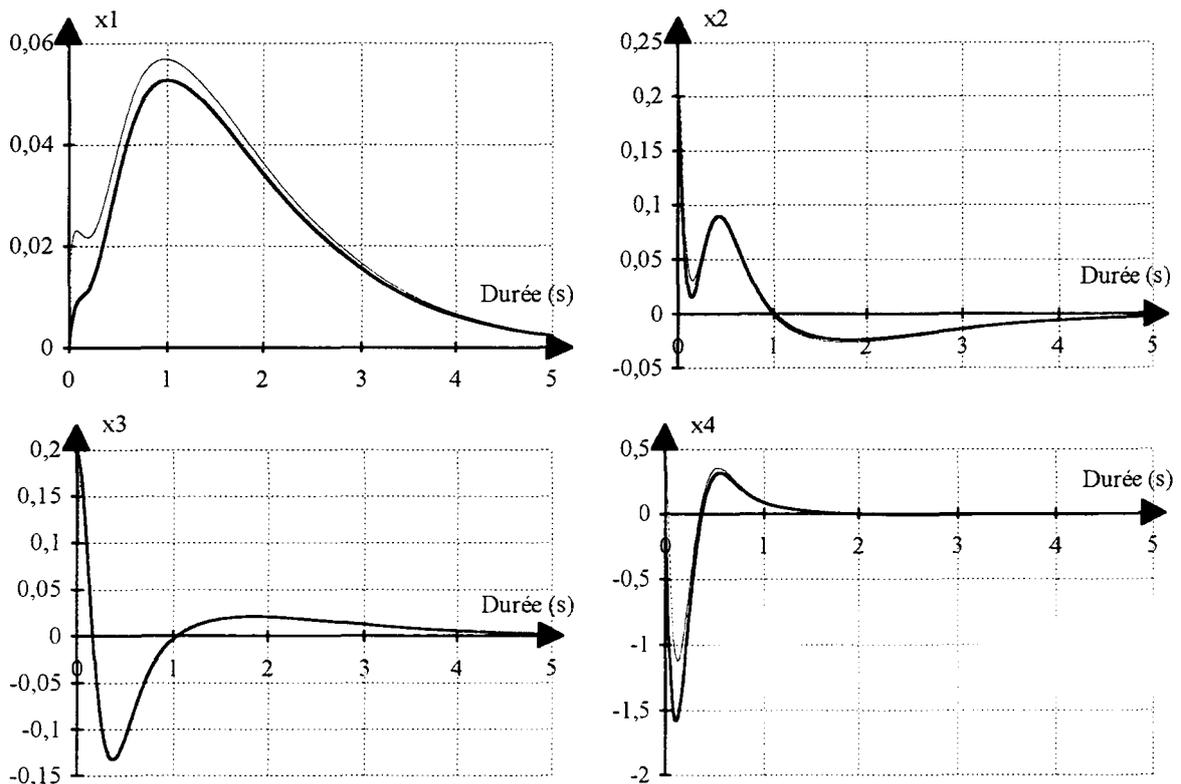


Figure 3.6 : Variables d'état du modèle complet commande+observateur avec :  
 $x(0) = [0 \ 0,2 \ 0,2 \ -0,2]^T$  et  $\hat{x}(0) = [0 \ 0,2 \ 0 \ -0,2]^T$

Afin d'illustrer les résultats, les conditions initiales choisies sont les mêmes que précédemment pour les variables mesurables  $x_2(t)$  et  $x_4(t)$ , seule  $x_3(t)$  est modifiée :

$x(0) = [0 \ 0,2 \ 0,2 \ -0,2]^T$ . Pour l'observateur, on prend :  $\hat{x}(0) = [0 \ 0,2 \ 0 \ -0,2]^T$ , seule  $\hat{x}_3(0)$ , non mesurée, est choisie nulle. Les résultats obtenus sont présentés figures 3.6 et 3.7.

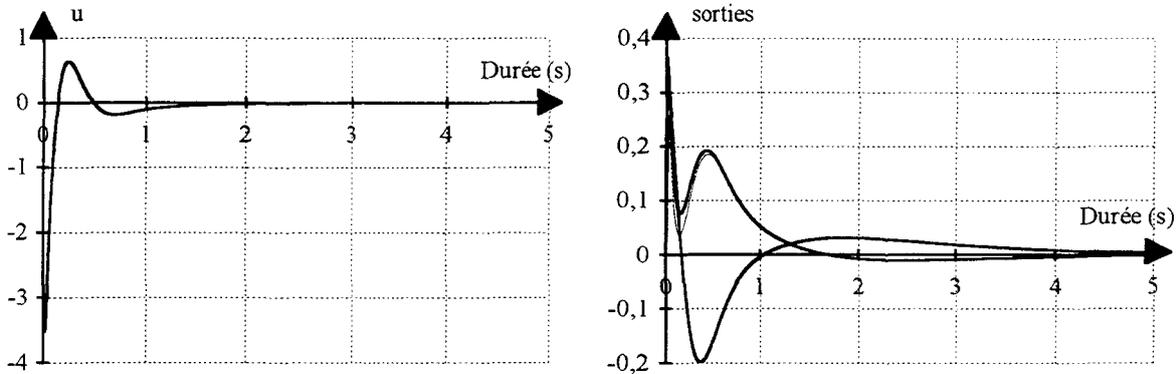


Figure 3.7 : Commande et sorties du modèle complet commande+observateur avec :  
 $x(0) = [0 \ 0,2 \ 0,2 \ -0,2]^T$  et  $\hat{x}(0) = [0 \ 0,2 \ 0 \ -0,2]^T$

Les résultats obtenus montrent que l'observateur reconstruit les variables d'état en 4 s pour  $x_1(t)$ , et en moins de 2 s pour les autres variables d'état.

### 3.4. Conclusion

Le chapitre a permis d'étendre le nombre de possibilités de résoudre un problème de commande pour les modèles flous (3.1).

Dans le cas MIMO, il est possible d'utiliser une synthèse quadratique. Dans le cas SIMO général, des lois basées sur une PDC, ou sur la stabilisation simultanée (SSF ou QSSF). Enfin dans les cas particuliers SIMO, des lois CDF (ou QCDF) peuvent être mises en œuvre.

Les différentes approches sont résumées figure 3.8. Dans l'espace complet des systèmes décrits par un modèle flou SIMO, les domaines des systèmes stabilisables par les différentes approches sont donnés figure 3.8(a). De la même façon, les domaines des systèmes stabilisables SIMO dans les cas particuliers respectant  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i, B_i = k_i B_1$  sont donnés figure 3.8(b). Les deux exemples traités dans ce chapitre ont été placés sur la figure 3.8(b).

Les ensembles concernant les solutions basées sur la commande optimales ne sont pas placés ici, puisqu'elles sont à chaque fois un sous-ensemble des ensembles représentés, par exemple :  $\{(\Sigma) \text{ stabilisables par QPDC}\}$  est inclus dans  $\{(\Sigma) \text{ stabilisables par PDC}\}$ .

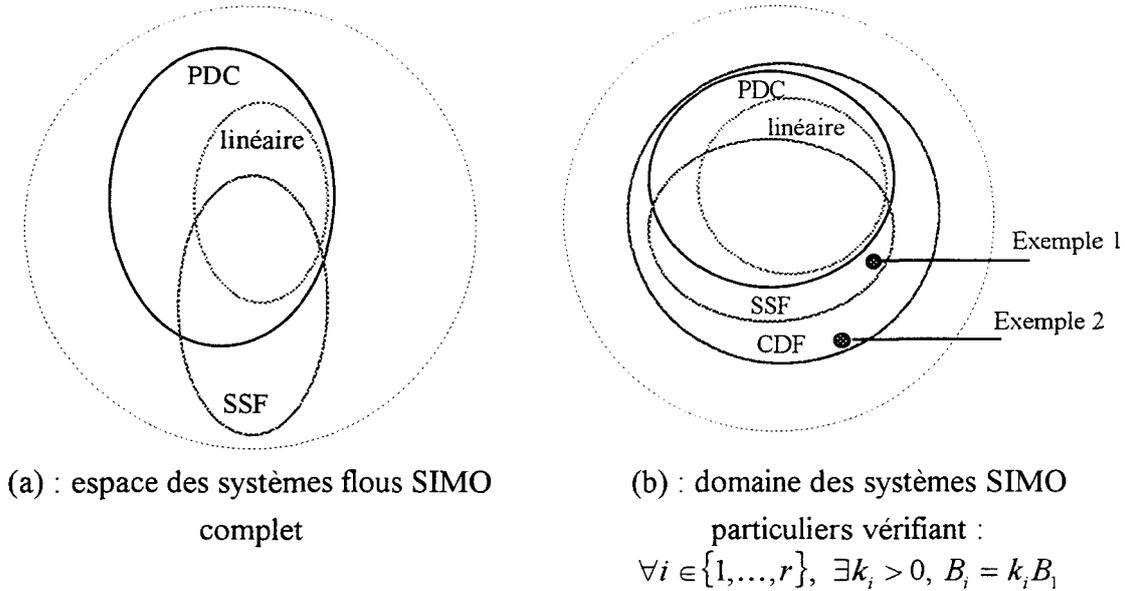


Figure 3.8 : Domaines stabilisables par les différentes méthodes.

En premier lieu, il est bien entendu que les lois linéaires sont un cas particulier des PDC. Une première remarque qui peut être faite concerne le fait que les lois SSF n'englobent pas toutes les lois linéaires, cela est dû aux conditions (3.3) qui peuvent s'avérer plus conservatives, notamment lorsque les différents sous-modèles ont plusieurs pôles instables.

En second lieu rappelons que les lois CDF sur les modèles flous SIMO particuliers englobent toutes les autres méthodes puisque les conditions de stabilité (3.18) ne prennent pas en compte les modèles croisés.

En conclusion, ce chapitre a permis de proposer des lois de commande s'appliquant à des modèles flous. Dans un contexte SIMO général, une loi de commande ne dépendant pas des prémisses a été dégagée ainsi qu'un théorème de séparation entre le calcul de cette loi et d'un observateur flou. Sur des cas particuliers SIMO, des lois de commande permettant d'améliorer la conservativité des résultats de Tanaka & al. 98/ ont été élaborées. Enfin, dans le cas MIMO et dans tous les cas précédents, une version de ces théorèmes utilisant des outils de la commande optimale ont également été proposés.

Afin d'illustrer sur des systèmes réels les possibilités offertes par la commande floue, que ce soit par retour de sortie avec des régulateurs de type RF-PI, ou par retour d'état vus au cours de ce chapitre, deux applications sont proposées dans le chapitre suivant.



# Chapitre 4.

## Application à deux procédés réels

Ce chapitre traite de deux applications développées au sein du LAMIH (Laboratoire d'Automatique et de Mécanique Industrielles et Humaines) concernant la commande d'une voiture électrique et d'un système bien connu : le pendule inversé. La première application se place dans le cadre de l'approche par logique floue synthétisant une loi de commande à partir de l'expertise de l'opérateur humain. La seconde application permet la validation de diverses lois de commande basées sur des modèles classiques, linéaire ou non, ou un modèle flou de type TSK.

4.1. Introduction.....	92
4.2. Commande d'un véhicule électrique.....	92
4.2.1. Le véhicule et la chaîne de traction .....	93
4.2.2. Stratégie de commande adoptée.....	95
4.2.2.1. Domaine de fonctionnement : la tension Induit est inférieure à la	
tension batterie ( $U < U_{batt}$ ).....	96
4.2.2.2. Domaine de fonctionnement : la tension Induit a atteint la tension	
batterie ( $U = U_{batt}$ ).....	96
4.2.2.3. La commande du moteur.....	97
4.2.3. Résultats .....	98
4.3. Application à un pendule inversé.....	100
4.3.1. Description de la plate-forme d'essais.....	100
4.3.2. Modèle de connaissance du système .....	102
4.3.3. Essais en simulation.....	103
4.3.3.1. Obtention d'un modèle flou.....	104
4.3.3.2. Comparaison de différentes lois de commande.....	106
4.3.4. Essais en commande temps réel .....	111
4.3.4.1. Balancement du pendule.....	111
4.3.4.2. Commande Linéaire Quadratique .....	114
4.3.4.3. Régulateur flou de type PDC.....	114
4.3.4.4. Régulateur de type SSF.....	115
4.3.4.5. Régulateur flou à ensemble de règles de cardinalité réduite.....	116
4.3.4.6. Comparaison des différentes commandes .....	118
4.4. Conclusion.....	124

## 4.1. Introduction

Ce chapitre présente deux applications concernant la commande floue. La première concerne la commande d'un véhicule électrique, la seconde la commande d'un pendule inversé.

La première application se place dans un cadre classique des régulateurs flous obtenus à partir d'une expertise. Elle a été appliquée avec succès en temps réel sur un véhicule réalisé à l'Université de Valenciennes qui a remporté des victoires à des rallyes internationaux /Paganelli 94/ /Vermeiren & al. 97a/. Le chapitre présente rapidement les caractéristiques du véhicule et de la chaîne de traction ainsi que le régulateur flou utilisé. Les différents intérêts et la poursuite de cette étude seront également abordés.

La seconde application, le pendule inversé, est un système instable, SIMO (Single Input Multiple Output) et possède des non linéarités non négligeables dues à sa structure dynamique et aux forces de frictions. C'est pourquoi, il est souvent utilisé pour la validation de nouvelles lois de commande et de leurs performances.

Dans ce but, la deuxième partie du chapitre traite de l'étude de diverses lois de commande, dont celles mises en œuvre au chapitre 3 sur ce système. Une première étude est réalisée en simulation et en utilisant des lois continues. Une seconde étude applique différentes lois de commande, linéaire, basée sur le concept PDC (Parallel Distributed Compensation), SSF (Stabilisation Simultanée pour modèles Flous) et floue sur une plate-forme d'essais développée au laboratoire. Cette plate-forme d'essais autorise une rotation du pendule de 360° permettant ainsi, à partir de conditions initiales quelconques, d'atteindre les objectifs de la commande qui sont de réguler l'angle autour de zéro et d'asservir la position du chariot à une consigne désirée.

## 4.2. Commande d'un véhicule électrique

On assiste depuis quelques années à un regain d'intérêt pour les véhicules électriques, que ce soit pour des raisons concernant l'énergie, la pollution, l'environnement ... Dans ce cadre, la mise en œuvre d'un prototype de voiture électrique à partir d'un véhicule de série a été réalisée à l'université de Valenciennes dans le cadre du projet d'un étudiant de l'I.U.P. G.E.I.I. /Paganelli 94/ /Guerra & al. 94/ /Vermeiren & al. 97a/.

Le paragraphe suivant présente rapidement les caractéristiques du véhicule ainsi que la chaîne de traction mise en œuvre.

### 4.2.1. Le véhicule et la chaîne de traction

Le véhicule d'origine est de type Volkswagen Golf Pick-Up, figure 4.1. Le poids total à vide du véhicule est de 1480 kg. L'énergie est fournie par 42 batteries (monobloc 12 V) au plomb pur placées sous la voiture, elles sont dotées d'une capacité énergétique nominale de 13 kWh au total sous une tension de 252 V pour un poids de 420 Kg.

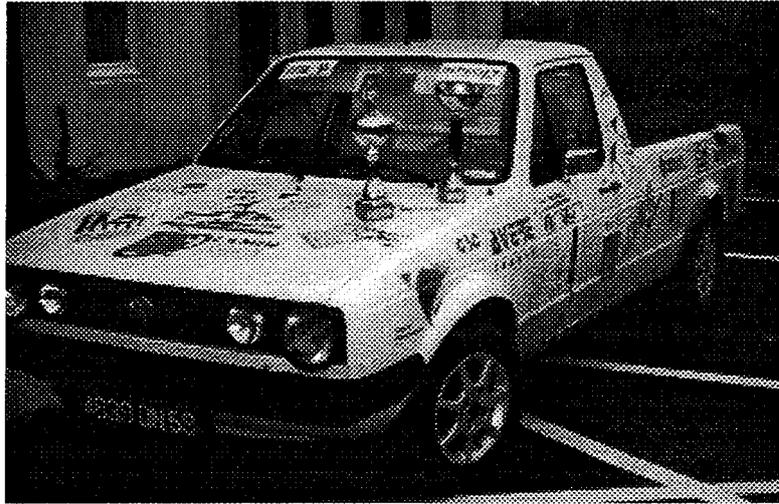


Figure 4.1 : Le véhicule électrique

Le moteur est de type courant continu à excitation séparée d'une puissance nominale de 25 kW (40 kW maximum) et une vitesse de rotation maximale de 5000 tr/mn. Il a été installé à la place du moteur thermique et est accouplé au différentiel d'origine. Il entraîne les roues avant du véhicule avec un rapport de transmission fixe (sans l'usage d'une boîte de vitesses). La vitesse maximale du véhicule est voisine de 140 km/h. Son autonomie est environ de 80 km.

L'ensemble moteur + véhicule a été modélisé par un jeu d'équations différentielles. Les notations suivantes sont adoptées :

$U$	tension d'induit	$u$	tension d'inducteur
$I$	courant d'induit	$i$	courant d'inducteur
$R$	résistance de l'induit	$r$	résistance de l'inducteur
$L$	inductance de l'induit	$l$	inductance de l'inducteur
$J$	moment d'inertie du moteur	$\omega$	vitesse du moteur
$C$	couple moteur	$C_r$	couple résistant à la roue
$CRR_{moy}$	coeff. de roulement des pneus	$C_x$	coeff. de pénétration dans l'air

$v$	vitesse linéaire	$S_f$	surface frontale
$p\%$	pente	$M$	masse du véhicule
$R_r$	rayon de la roue	$m$	rapport de réduction de boîte
$M\gamma$	effort d'accélération	$\rho$	densité de l'air
$K$	constante de flux	$U_{batt}$	tension batteries

Les équations peuvent se retrouver dans /Paganelli & al. 95/.

$$U(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + Ki(t)\omega(t) \quad (4.1)$$

$$u(t) = ri(t) + l \frac{di(t)}{dt} \quad (4.2)$$

$$C(t) = Ki(t)I(t) = \frac{C_r(t)}{m} \quad (4.3)$$

$$C_r(t) = \left[ \frac{1}{2} \rho S_f C_x v(t)^2 + CRR_{moy} Mg + Mg p\% + M\gamma(t) \right] R_r \quad (4.4)$$

Le moteur est commandé au travers d'un hacheur d'induit réversible en bras de pont ou demi-pont et d'un hacheur d'inducteur (excitation). Ces deux hacheurs fonctionnent à fréquence fixe (16 kHz) et durée de conduction variables et utilise des transistors I.G.B.T. (Insulated Gate Bipolar Transistor).

Les boucles de courant permettant respectivement le pilotage du courant d'induit et du courant d'inducteur au moyen de ces hacheurs ont été réalisées à l'aide de deux correcteurs analogiques à action proportionnelle et intégrale (PI). La structure de contrôle obtenue est représentée figure 4.2, D étant le convertisseur.

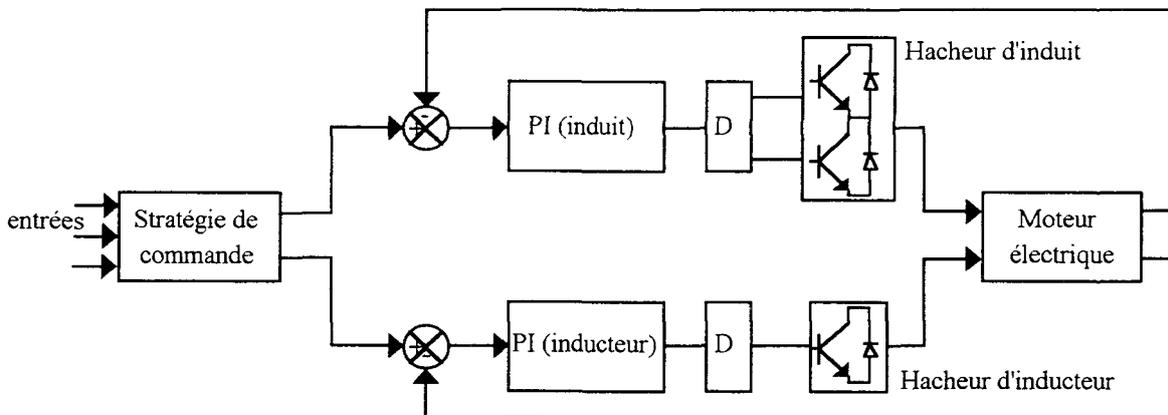


Figure 4.2 : Chaîne de commande du moteur électrique

Après avoir présenté les caractéristiques du véhicule ainsi que la chaîne de traction mise en œuvre, la partie suivante traite de la stratégie de commande permettant d'élaborer les deux consignes de courant.

#### 4.2.2. Stratégie de commande adoptée

En terme de souplesse et de rendement, le moteur choisi présente des caractéristiques bien adaptées à la traction électrique, mais cette souplesse rend sa commande plus complexe et engendre plusieurs stratégies possibles. Deux domaines de fonctionnement bien distincts existent et engendrent deux sous-stratégies décrites plus loin /Barbier & al. 94/ :

Domaine 1 : La tension Induit est inférieure à la tension batterie ( $U < U_{batt}$ ).

Domaine 2 : La tension Induit a atteint la tension batterie ( $U = U_{batt}$ ).

La frontière entre ces deux domaines est donnée figure 4.3. En fonctionnement à couple maximal, la frontière entre ces deux domaines correspond au point de cassure de la courbe de couple au delà duquel la machine fonctionne obligatoirement à flux réduit (défluxage). Le fait que, sur cette courbe, cette transition correspond à la vitesse nominale ( $N_{nominale}$ ) de la machine est un cas particulier qu'il ne faut pas généraliser.

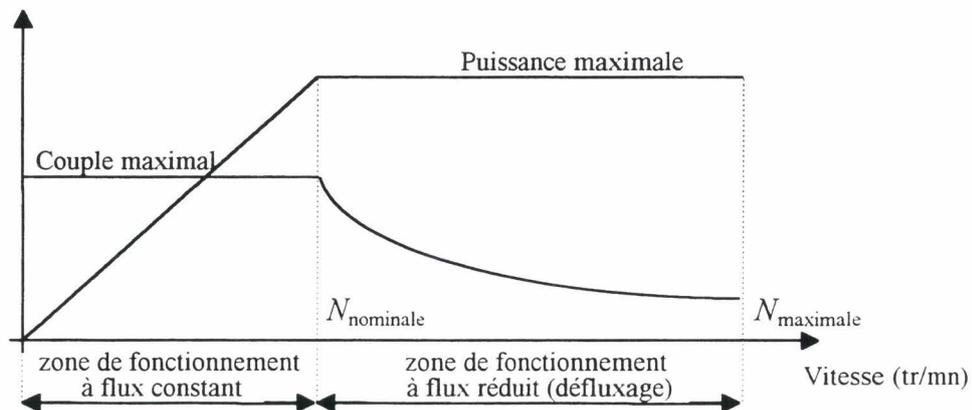


Figure 4.3 : Courbes maximales de couple et de puissance

Les paragraphes suivants présentent la stratégie de commande adoptée, avec dans un premier temps le domaine de fonctionnement : la tension Induit est inférieure à la tension batterie ( $U < U_{batt}$ ).

4.2.2.1. **Domaine de fonctionnement** : la tension Induit est inférieure à la tension batterie ( $U < U_{batt}$ )

Pour différentes combinaisons de courants induit et inducteur produisant le même couple moteur, les pertes par effet joule totales peuvent fortement varier et donc agir différemment sur le rendement du moteur. Pour optimiser ce rendement il s'agit de déterminer la combinaison qui produit le moins de pertes par effet joule. Celle-ci correspond

à choisir :  $i(t) = \left| \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot I(t) \right|$  /Barbier & al. 94/

Pour un couple moteur  $C$  donné et une combinaison courant induit-courant inducteur permettant de minimiser les pertes joules du moteur, si le couple moteur est supérieur au couple résistant imposé par le déplacement du véhicule, alors la vitesse de rotation  $\omega$  atteindra une valeur telle que :

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + Ki(t)\omega(t) = U_{batt} \quad (4.5)$$

Ce cas représente le domaine de fonctionnement : la tension Induit a atteint la tension batterie ( $U = U_{batt}$ ) qui est présenté dans la partie suivante.

4.2.2.2. **Domaine de fonctionnement** : la tension Induit a atteint la tension batterie ( $U = U_{batt}$ )

Parce que la tension induit  $U$  est maintenue à la valeur de la tension batterie, une diminution du courant inducteur s'impose pour maintenir un couple d'accélération suffisant. En étant contraint de diminuer ce courant inducteur  $i$ , fonctionnement dit en "défluxage", les conditions de pertes joules minimales se sont plus vérifiées, ainsi le mode de fonctionnement 1 doit être prioritaire.

D'une autre façon, il s'agit de contrôler la valeur du courant Induit  $I$  au moyen du courant inducteur  $i$ , et cela pour une très large plage de fonctionnement couple-vitesse, en traction comme en freinage. Le comportement du moteur dans ce mode de fonctionnement est particulièrement non linéaire à cause de la caractéristique magnétique et des couplages électromagnétiques /Louis & al. 95/.

La solution adoptée propose de réaliser un asservissement de courant induit en agissant sur le courant inducteur au moyen d'un régulateur basé sur la commande floue. La structure de la boucle de commande dans cette configuration est présentée figure 4.4; il est à

noter que le système est régulé sans utiliser la mesure de vitesse du moteur. La tension d'induit est maintenue ici à la valeur de la tension batterie et le hacheur d'induit se trouve en conduction continue. Dans ce cas, le moteur travaille avec une tension induit égale à la tension batterie considérée comme constante; cette commande réalise un asservissement de puissance ( $P = U \cdot I$ ).

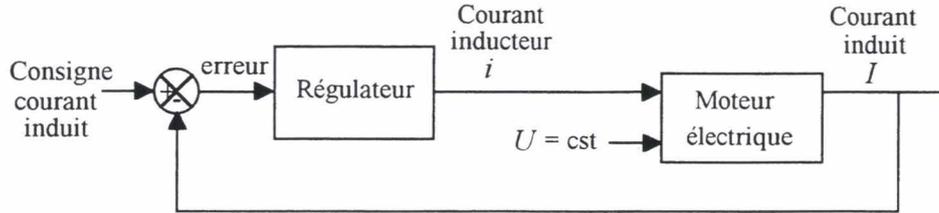


Figure 4.4 : Commande du moteur dans le domaine de fonctionnement défluxé

La commutation entre les deux domaines de fonctionnement doit se faire en souple, les conditions de transition seront donc choisies judicieusement.

La partie suivante traite de la commande du moteur du véhicule électrique.

#### 4.2.2.3. La commande du moteur

Le schéma général de la commande du moteur est résumé figure 4.5. Le bloc de commande comprend deux sorties, les commandes des deux boucles de courant, induit et inducteur. Ces quatre entrées sont la consigne d'induit, la commande d'induit et les courants induit et inducteur.

En fonction de ces quatre informations, le bloc de commande permet de déterminer dans quelle zone de fonctionnement évolue le système et délivre en sortie les valeurs des courants induit et inducteur à appliquer au moteur.

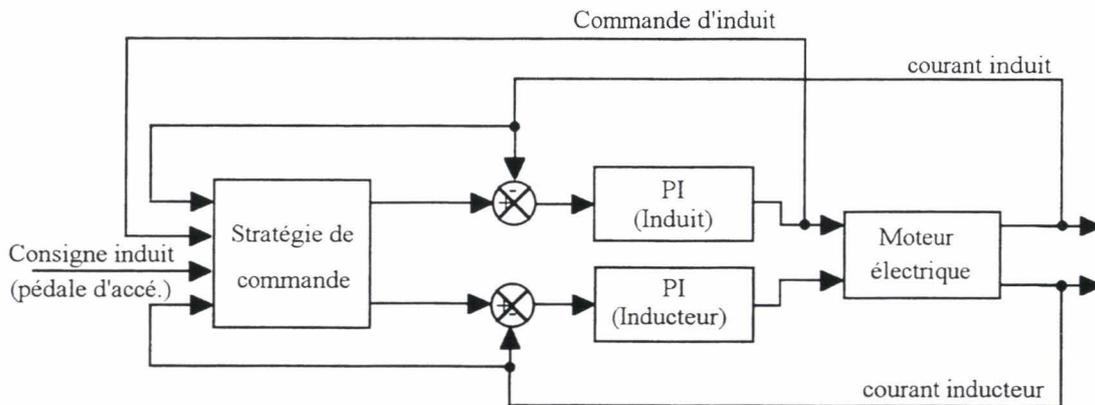


Figure 4.5 : Schéma général de la commande du véhicule

Le régulateur flou intervient dans la chaîne de commande du moteur, comme présenté figure 4.4. Il permet de commander le courant inducteur dans toutes les plages de variation du système. Les entrées sont la consigne de courant d'induit et sa variation, et la sortie commande le courant inducteur. Le régulateur choisi est un régulateur flou à ensemble de règles de cardinalité réduite /Vidolov 93/ à gain de sortie adaptatif. Effectivement, la sensibilité du courant inducteur dépend de la vitesse ou du taux de défluxage, le gain de sortie du régulateur est alors adapté en fonction du taux de défluxage. Il est grand quand le défluxage est petit et petit quand le défluxage est grand.

Des résultats issus de fonctionnements réels sont présentés dans le paragraphe suivant.

### **4.2.3. Résultats**

Des essais ont d'abord été effectués en simulation à l'aide du logiciel Matlab de la société Mathworks et de l'environnement de modélisation Simulink, ils ne sont pas présentés ici, pour les visualiser le lecteur pourra se reporter à /Guerra & al. 95/ /Vermeiren & al. 97a/ /Guerra & al. 97/ /Guerra & al. 98a/.

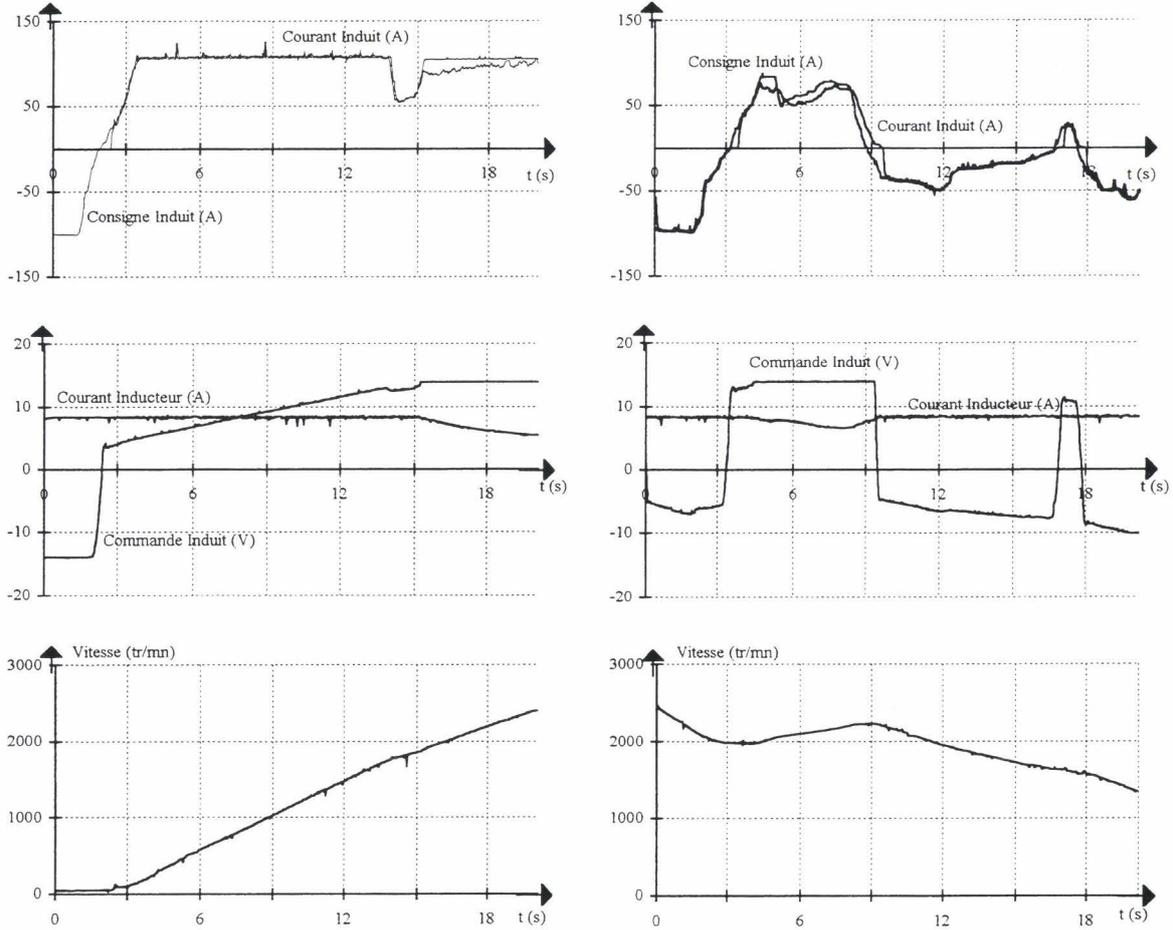
La solution adoptée pour l'implémentation de la stratégie de commande à ce jour est un ordinateur embarqué PC 486/DX2 travaillant à 66 MHz. Le logiciel de commande utilisé a été réalisé sous LabWindows de la société National Instruments. La période d'échantillonnage est de 15 ms.

En situation réelle, les figures 4.6(a) et 4.6(b) montrent une phase d'accélération et une phase de freinage. Ces deux figures montrent que le courant d'induit suit presque parfaitement la consigne imposée par la pédale (consigne d'induit).

La commande d'induit, représentation de la tension appliquée au moteur évolue lorsque le courant inducteur est fixe. Inversement le courant inducteur ne travaille que lorsque le moteur est alimenté sous tension maximale.

Le véhicule a participé à deux éditions du rallye international de véhicule électriques de La Rochelle, course patronnée par la FIA (Fédération Internationale de l'Automobile) et la FFSA (Fédération Française des Sports Automobile). En 94, où il a remporté la victoire en consommation d'énergie dans la catégorie prototypes, en 97 où il a remporté le rallye dans la

catégorie Véhicules de série (1<sup>er</sup> sur 34) et a terminé à la deuxième place pour la consommation d'énergie.



(a) : phase d'accélération

(b) : phase de freinage

Figure 4.6 : Résultats réels

Cette approche basée sur l'expérience a permis de résoudre ce problème de commande, d'une façon très rapide (moins de une semaine pour toute la partie commande analogique et numérique, programmation comprise) et très satisfaisante en termes de robustesse. Néanmoins, d'autres approches sont possibles. Par exemple, à partir de (4.5) et de l'équation mécanique on peut obtenir les équations non-linéaires suivantes :

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{R}{L}I(t) - \frac{K}{L}i(t)\omega(t) + \frac{1}{L}U_{batt} \quad (4.6)$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{f}{J}\omega^2(t) + \frac{K}{J}i(t)I(t) \quad (4.7)$$

Il semble donc tout à fait envisageable d'utiliser une approche de type PDC ou SSF ce qui permettrait d'obtenir des lois de commande stabilisantes et de prouver la stabilité dans toute la zone du défluxage. Un essai avec plusieurs points de fonctionnement est donné par /Toscano & al. 97/. Cette approche est en cours d'élaboration.

Après avoir présenté la commande d'un véhicule électrique, le paragraphe suivant traite de l'étude de diverses lois de commande effectuées sur une plate-forme d'essais, de pendule inversé, développée au sein du LAMIH.

### **4.3. Application à un pendule inversé**

De nombreuses méthodes ont été testées sur ce type de plate-forme. Parmi elles, on peut citer l'application de réseaux neuronaux /Anderson 89/, la commande floue /Yamakawa 89/ /Kandel & al. 93/ /Bastian 95/ /Vermeiren & al. 95/ /Lacrose & al. 96/ /Lo & Kuo 98/, la commande adaptative floue /Wang 96/ /Ordóñez & al. 97/, la commande  $H^\infty$  /Van der Linden & Lambrechts 93/, la commande linéaire /Lin & al. 96/, la méthode des moments pour le calcul des PID /Jacob 95/ la commande non linéaire /Chung & Hauser 95/ /Wei & al. 95/...

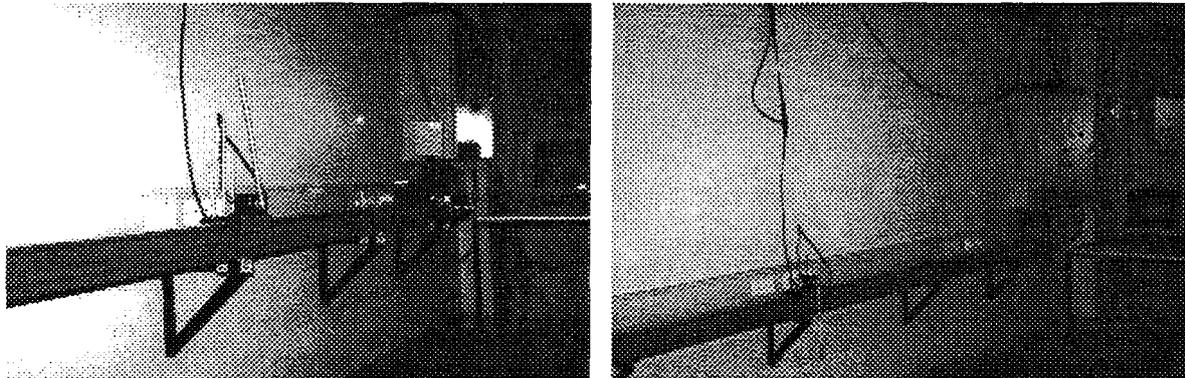
Cependant, des quelques publications et livres, peu abordent le problème en utilisant des conditions initiales quelconques, i.e. par exemple en travaillant à partir de la position d'équilibre stable. En simulation on trouve quelques travaux /Vidolov 93/ /Bradshaw & Shao 96/, mais le nombre des travaux diminue encore pour la commande temps réel /Yamakawa 89/ /Wei & al. 95/ /Ordóñez & al. 97/.

La plate-forme a été réalisée dans le cadre d'un mémoire d'ingénieur du CNAM /Lebrun 97/, les différents éléments qui la composent sont décrits ci-après.

#### **4.3.1. Description de la plate-forme d'essais**

La plate-forme, figure 4.7, est constituée d'un rail de guidage linéaire de 4 mètres proposé par la société INA pouvant supporter des vitesses supérieures à 5 m/s. La motorisation est assurée par un moteur couple à aimants permanents de marque PARVEX fourni par le département GE2i (Génie Électrique et Informatique Industrielle) de l'IUT de Valenciennes. Un servoamplificateur de marque PARVEX permet de piloter ce moteur, puisque celui-ci est surdimensionné pour l'application. Ce servoamplificateur peut s'assimiler

à un régulateur de type Proportionnel Intégral, fournit un courant impulsif de 40 ampères et autorise une tension d'entrée de +/- 10 volts.



(a) : position instable

(b) : position stable

Figure 4.7 : La plate-forme d'essais : le pendule inversé

La mesure de l'angle du pendule inversé est réalisée par un codeur absolu de la société IVO Industries permettant de transmettre un mot de 13 bits en liaison parallèle, ce qui fait une erreur sur l'angle de 0,04 degrés. Ce codeur se situe dans l'axe du pendule et est fixé sur le chariot mobile du rail de guidage.

La mesure de la position du chariot s'effectue par l'intermédiaire d'un codeur incrémental fixé sur l'axe d'entraînement du rail de guidage. Ce codeur délivre 500 impulsions par tour, possède deux voies décalées d'un quart de période permettant de donner le sens de déplacement du chariot. La saisie de la valeur de la position se fait par un comptage/décomptage des impulsions. La précision de la mesure de la position est de 0,54 millimètres.

Le calculateur utilisé est un PC 486. Son horloge fonctionne à 66 MHz. Le système est organisé autour de ce PC. L'implantation des algorithmes de commande du système s'effectue par l'intermédiaire d'une carte d'acquisition entrées-sorties AT-MIO-16-DE-10 de la société National Instruments.

Les sécurités mises en place sont de type matérielle et logicielle. Ces sécurités permettent de contrôler le déplacement du chariot.

Pour avoir plus de détails concernant le choix de ces matériels, le lecteur pourra se reporter à /Lebrun 97/. Après avoir décrit brièvement le matériel constituant la plate-forme d'essais, la partie suivante donne le modèle de connaissance correspondant.

### 4.3.2. Modèle de connaissance du système

Le pendule inversé est composé d'un chariot mobile pouvant se déplacer le long d'un rail. Le pendule, tout en étant fixé sur le chariot, est libre en rotation, figure 4.8.

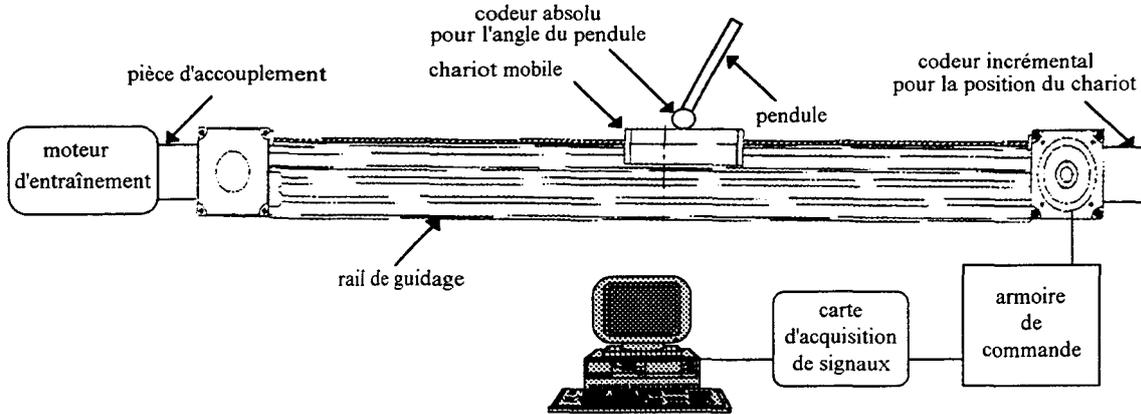


Figure 4.8 : Schéma de principe de la plate-forme d'essais

La commande de ce système doit réaliser, la régulation sur l'angle  $\theta$ , en partant d'une condition initiale  $\theta_0$  comprise dans l'intervalle  $[-\pi \text{ rad}, +\pi \text{ rad}]$  ainsi que la régulation et la poursuite sur la position  $X$ , en partant d'une condition initiale  $X_0$  comprise dans l'intervalle  $[-1 \text{ m}, +1 \text{ m}]$ , figure 4.9.

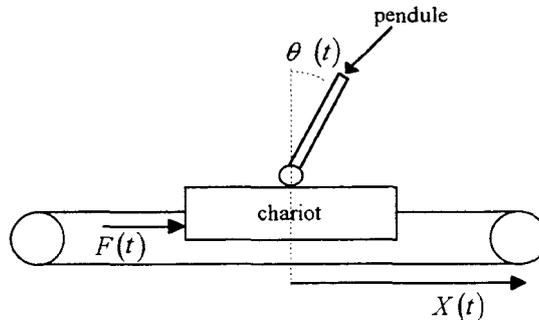


Figure 4.9 : Schéma du système mécanique "chariot-pendule"

Les équations électriques et mécaniques de la plate-forme d'essais nous fournissent un modèle de connaissance du système. La méthode utilisée pour déterminer ce modèle est celle des équations du mouvement données par les équations d'Euler-Lagrange /Kandel & al. 92/ /El Assoudi & Hammouri 93/. Ces équations sont les suivantes :

$$\ddot{X}(t) = \frac{F(t) - f \dot{X}(t) + m \left( \frac{g}{2} \sin(2\theta(t)) - L \dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t)) \right)}{M + m \sin^2(\theta(t))} \quad \text{pour la position} \quad (4.8)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{g(M+m)\sin(\theta(t)) + F(t)\cos(\theta(t)) - f\dot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) - mL\dot{\theta}^2(t)\sin(\theta(t))\cos(\theta(t))}{L(M+m\sin^2(\theta(t)))}$$

pour l'angle (4.9)

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L_i\dot{i}(t) + K_i\Omega(t) \\ C(t) = J_m\dot{\Omega}(t) + f_m\Omega(t) \end{cases}$$

pour le moteur (4.10)

$$F(t) = \frac{2}{D}C(t)$$

pour le rail de guidage (4.11)

avec :

$C(t)$	couple ( $N.m$ )	$\Omega(t)$	vitesse ( $rad/s$ )
$i(t)$	intensité ( $A$ )	$D$	diamètre des poulies ( $0,086 m$ )
$u(t)$	tension ( $V$ )	$M$	masse totale du chariot ( $20 kg$ )
$K_i$	constante de flux ( $0,725 V / rad / s$ )	$m$	masse du pendule ( $0,025 kg$ )
$R$	résistance d'induit ( $0,23 \Omega$ )	$L$	1/2 longueur du pendule ( $0,1 m$ )
$L_i$	inductance d'induit ( $0,015 H$ )	$g$	pesanteur ( $9,81 m.s^{-2}$ )
$J_m$	inertie arbre moteur ( $0,018 Kg.m^2$ )	$f$	frottements ( $150 N.m/rad$ )
$f_m$	couple de frottement ( $0,27 N.m$ )	$F(t)$	force à appliquer au chariot ( $N$ )

Les valeurs numériques des paramètres physiques correspondent aux grandeurs mesurées sur le système réel.

Le servoamplificateur pilotant le moteur peut s'assimiler à un régulateur de type Proportionnel Intégral.

### 4.3.3. Essais en simulation

A partir des équations (4.8) et (4.9) plusieurs modélisations sont envisageables. /Ma & al. 98/ proposent par exemple un modèle flou à deux règles basé sur des fonctions d'appartenance du type exponentiel valable pour  $\theta(t) \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ . Il est possible de travailler directement sur les équations (4.8) et (4.9) pour éviter de passer par une étape d'optimisation par exemple.

#### 4.3.3.1. Obtention d'un modèle flou

Pour éviter d'obtenir un nombre de règles trop important, quelques simplifications ont été réalisées qui aboutissent à un modèle flou composé de 4 règles. En fait, un modèle flou peut être obtenu représentant exactement les équations (4.8) et (4.9), mais il faut utiliser alors 16 règles. L'étude est centrée sur la régulation du pendule inversé pour des angles proches de 0, et les simplifications admises sont :

-  $\dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t))$  est négligeable, remarquons que si on veut utiliser des règles prenant en compte  $\dot{\theta}(t)$  alors les variables des prémisses de l'observateur ne seront plus mesurables, les théorèmes de séparation ne seront donc plus utilisables ;

-  $m \sin^2(\theta(t))$  est négligeable devant  $M$ .

D'où, à partir des équations (4.8) et (4.9) :

$$\ddot{X}(t) = \frac{-f \dot{X}(t) + mg \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) + Gu(t)}{M} \quad (4.12)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{LM} (g(M+m) \sin(\theta(t)) - f \dot{X}(t) \cos(\theta(t)) + Gu(t) \cos(\theta(t))) \quad (4.13)$$

Dans les équations (4.12) et (4.13), il reste deux non linéarités :  $\cos(\theta(t))$  et  $\sin(\theta(t))$ . Sachant que  $\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$ , les termes non linéaires peuvent être réécrits :

$$\sin(\theta(t)) = F_1^1(\theta(t)) \cdot \theta(t) + F_1^2(\theta(t)) \cdot \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} \theta(t)$$

$$\text{avec : } F_1^1(\theta(t)) = \frac{\theta_0 \cdot \sin(\theta(t)) - \theta(t) \cdot \sin(\theta_0)}{\theta(t) \cdot (\theta_0 - \sin(\theta_0))} \in [0, 1]$$

$$F_1^2(\theta(t)) = 1 - F_1^1(\theta(t)) = \frac{\theta_0 \cdot \theta(t) - \theta_0 \cdot \sin(\theta(t))}{\theta(t) \cdot (\theta_0 - \sin(\theta_0))} \in [0, 1]$$

$$\text{et : } \cos(\theta(t)) = F_2^1(\theta(t)) \cdot 1 + F_2^2(\theta(t)) \cdot \cos(\theta_0)$$

$$\text{avec : } F_2^1(\theta(t)) = \frac{\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)}{1 - \cos(\theta_0)} \in [0, 1]$$

$$F_2^2(\theta(t)) = 1 - F_2^1(\theta(t)) = \frac{1 - \cos(\theta(t))}{1 - \cos(\theta_0)} \in [0, 1]$$

L'allure des fonctions d'appartenance est présentée figure 4.10. Le modèle flou est composé de quatre règles utilisant les fonctions d'appartenance précédemment calculées. Elles sont de la forme :

Règle  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$  :

$$\text{Si } \theta(t) \text{ est } F_1^i \text{ et } \theta(t) \text{ est } F_2^i \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases}$$

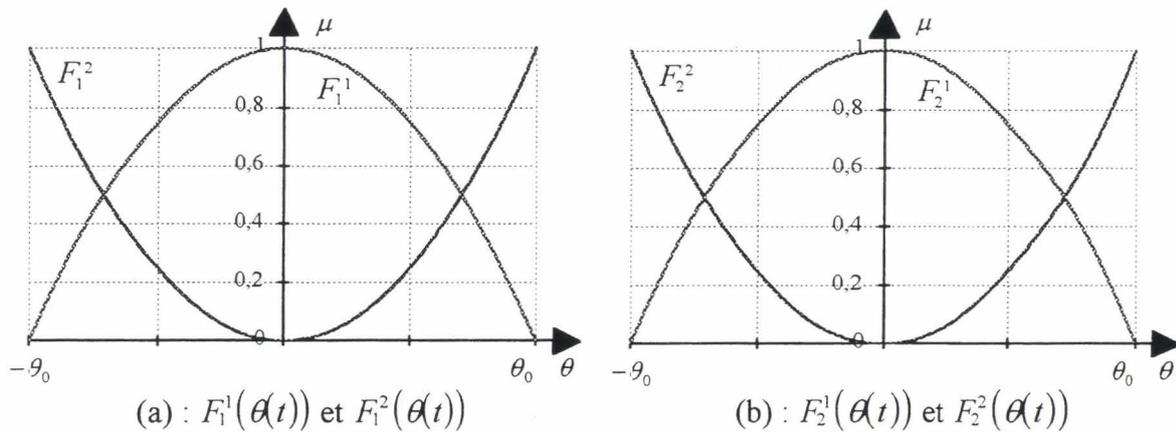


Figure 4.10 : Fonctions d'appartenance des ensembles flous

Le modèle flou à 4 règles représente exactement le modèle décrit équations (4.12) et (4.13) quand  $\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$ . Néanmoins, il est encore possible de simplifier ce modèle flou en remarquant que  $F_1^1(\theta(t))$  est très proche de  $F_2^1(\theta(t))$ . Effectivement l'erreur maximum entre ces deux valeurs d'appartenance est  $\forall \theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$  et  $\theta_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , inférieure à 2,4%. Compte tenu de cette remarque un modèle flou à deux règles peut être proposé :

$$\text{Règle } i, i \in \{1, 2\} : \text{ Si } \theta(t) \text{ est } F_1^i \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (4.14)$$

avec le vecteur d'état :  $x(t) = [\theta(t) \quad X(t) \quad \dot{X}(t) \quad \ddot{\theta}(t)]^T$  et :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{mg}{M} & 0 & \frac{-f}{M} & 0 \\ \frac{g}{L} \left(1 + \frac{m}{M}\right) & 0 & \frac{-f}{ML} & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{M} \\ \frac{G}{ML} \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{mg \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)}{M\theta_0} & 0 & \frac{-f}{M} & 0 \\ \frac{g}{L} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 & \frac{-f \cos(\theta_0)}{ML} & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{M} \\ \frac{G \cos(\theta_0)}{ML} \end{bmatrix} \quad C_2 = C_1$$

Notons que ce modèle flou n'est plus localement commandable si  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  ou  $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ .

Il est possible d'utiliser le même style d'approche pour obtenir une modélisation qui tienne compte du point d'équilibre stable  $\theta = \pi$  rad. Des essais ont été effectués dans ce sens, le problème est que le modèle obtenu comporte des matrices d'entrées  $B_i$  qui ont des coefficients de signes opposés, et il n'est alors pas possible de trouver une matrice  $P > 0$  commune à tous les sous-modèles  $A_i - B_i F_i$ , quel que soit la méthode utilisée. Cela rejoint la remarque faite lemme 3.3.1.

Notons, dans ce sens, que les auteurs qui ont utilisé des modèles flous de ce type pour le pendule inversé ont, soit travaillé dans le cas SIMO avec  $\theta(t) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  /Ma & al. 98/ /Lo & Kuo 98/, soit avec  $\theta(t) \in [-\pi, \pi]$  mais dans le cas SISO (sans utiliser la position du chariot) /Wang & al. 96/ /Leung & al. 97/ ce qui permet de restreindre les contraintes et dans ce cas d'obtenir une matrice  $P > 0$ .

Dans toute la suite, le modèle flou, équation (4.14), est utilisé pour la synthèse des lois de commande et le modèle complet pour les simulations, équations (4.8) et (4.9).

#### 4.3.3.2. Comparaison de différentes lois de commande

Comme dans ce cas, on ne rentre pas dans le cas particulier  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$ , les seules lois qui peuvent être testées sont, une loi linéaire, une loi de type SSF (ou QSSF), théorème 3.2.1, et une loi de type PDC (ou QPDC). Le modèle flou utilise dans ses prémisses la variable  $\theta(t)$  qui est mesurable, on rentre donc dans le cas où un théorème de séparation est disponible pour chacune des commandes envisagées. Pour se placer dans des conditions permettant de comparer les différentes lois de commande, le même

observateur flou est utilisé dans tous les cas, ce dernier est obtenu en utilisant une synthèse quadratique /Guerra & al. 98b/ (cf théorème 3.3.2).

Pour commencer, et montrer l'intérêt de l'observateur flou, le premier essai consiste à comparer une loi linéaire associée à un observateur linéaire avec la même loi linéaire associée à un observateur flou.

Une approche par placement de pôles est choisie pour la loi de commande. La matrice  $A_1$  correspond en fait à la linéarisation du pendule autour de  $\theta(t) \approx 0$  avec les simplifications usuelles. Elle admet comme pôles :  $-9,9 \quad -7,5 \quad 0 \quad 9,9$ , en symétrisant le pôle instable on choisit comme pôles de la boucle fermée  $A_1 - B_1 F$  :  $-10 \quad -10 \quad -7,5 \quad -2$ . Il vient :  $F = [12,4929 \quad -4,5643 \quad -6,0424 \quad 1,2610]$ .

Pour l'observateur linéaire, une approche basée sur la commande optimale a été choisie. Après essais erreurs, permettant d'ajuster notamment la vitesse de convergence de l'erreur d'observation d'état sur les vitesses (variables non mesurées), les résultats obtenus sont :

$$\text{avec : } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } R = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix} : K = \begin{bmatrix} -9,9475 & 49,7292 \\ 15,1310 & -9,9475 \\ 113,9497 & 157,5444 \\ -487,6541 & 1235,976 \end{bmatrix}$$

On se place dans le cas où la condition initiale sur l'angle est identique pour le modèle et l'observateur, les autres étant nulles :  $x(0) = \hat{x}(0) = [\theta(0) \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ . On constate que le système reste stable si  $\theta(0) \leq 0,98 \text{ rad}$ . Les résultats correspondant à cette valeur limite sont présentés figure 4.11.

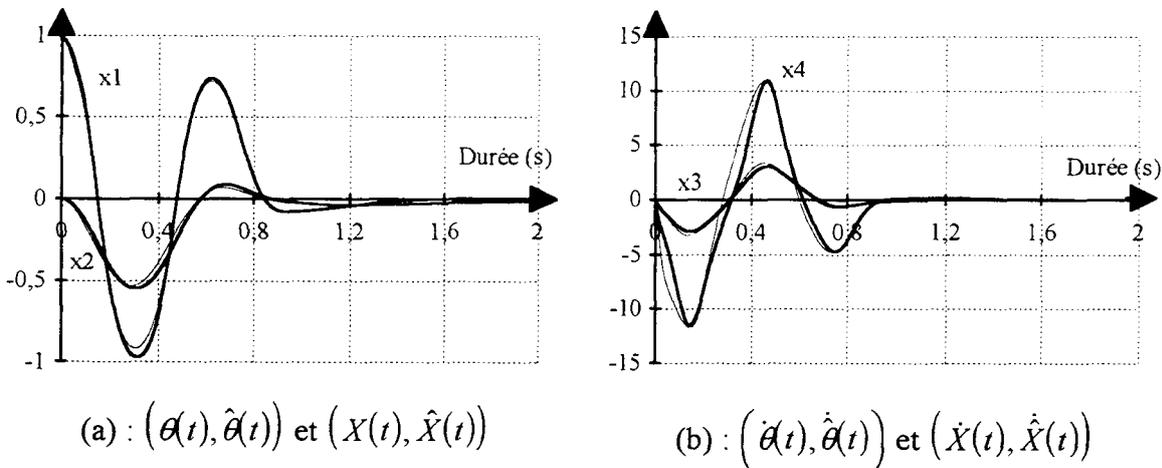


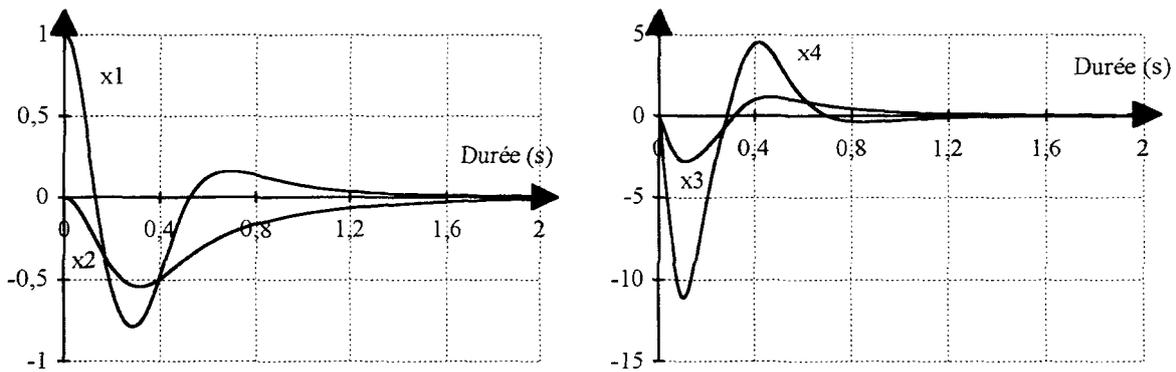
Figure 4.11 : Loi linéaire avec observateur linéaire (CI :  $x(0) = \hat{x}(0) = [0,98 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ )

Dans toute la suite de ce paragraphe, la loi de commande ainsi que l'observateur flou sont construits avec  $\theta_0 = 1 \text{ rad}$ .

Afin d'effectuer une comparaison avec un observateur flou, les mêmes matrices de pondération sont utilisées dans l'approche floue. On garde donc  $Q$  et  $R$  pour les deux sous-modèles, et on vérifie qu'il existe une matrice  $P > 0$  qui vérifie les conditions de stabilité. Les

résultats donnent, évidemment  $K_1 = K$  et :  $K_2 = \begin{bmatrix} -9,0670 & 38,2757 \\ 17,0550 & -9,0670 \\ 136,5423 & -120,9060 \\ -380,7782 & 723,6224 \end{bmatrix}$ .

La figure 4.12 présente les résultats pour  $\theta(0) = 1 \text{ rad}$ . On s'aperçoit, outre le fait que l'on étend le domaine de stabilité du modèle complet avec la même loi linéaire, que les décrochements apparaissant notamment sur les vitesses, figure 4.11 (b), sont fortement réduits lorsque l'on utilise l'observateur flou, figure 4.12.



(a) :  $(\theta(t), \hat{\theta}(t))$  et  $(X(t), \hat{X}(t))$

(b) :  $(\dot{\theta}(t), \hat{\dot{\theta}}(t))$  et  $(\dot{X}(t), \hat{\dot{X}}(t))$

Figure 4.12 : Loi linéaire avec observateur flou (CI :  $x(0) = \hat{x}(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ )

Comme il est très difficile d'effectuer des comparaisons, le nombre de paramètres à régler pour chaque méthode étant important, l'approche suivante est retenue.

Une approche par placement de pôles pour le calcul des gains de commande. Dans ce cas pour les deux sous-modèles  $A_i - B_i F_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  les pôles en boucle fermée sont choisis au même endroit que pour la commande linéaire à savoir :  $-10 \ -10 \ -7,5 \ -2$ . Le résultat obtenu est :  $F_1 = F$  et :  $F_2 = [22,4201 \ -5,4194 \ -6,7550 \ 2,4657]$ . De façon immédiate, on montre que les conditions de stabilité du théorème 3.2.1 pour la loi SSF, et celles de Tanaka & al. 98/ pour la loi PDC sont vérifiées si  $\theta_0 = 1 \text{ rad}$ .

En gardant le même observateur flou défini précédemment, on applique donc les lois de commande suivantes :  $u_{PDC}(t) = -\sum_{i=1}^2 h_i(x(t))F_i x(t)$  ;

et :  $u_{SSF}(x) = g_1(x) + g_2(x)$  avec :

$$g_1(x) = \min_{i \in \{1,2\}} \left( 0, \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2}{2B_i^T P x} - F_i x \right) \quad \text{pour : } i \text{ tel que : } B_i^T P x > 0$$

$$g_2(x) = \max_{i \in \{1,2\}} \left( 0, \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2}{2B_i^T P x} - F_i x \right) \quad \text{pour : } i \text{ tel que : } B_i^T P x < 0$$

En se plaçant pour tous les essais dans le cas  $x(0) = \hat{x}(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , la robustesse des lois de commande est testée en faisant varier un des paramètres du modèle et en laissant les autres aux valeurs nominales.

A titre d'illustration pour la loi de commande  $u_{SSF}$ , les figures 4.13 et 4.14 présentent la réponse aux conditions de la loi SSF avec comme conditions initiales  $x(0) = \hat{x}(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  et pour un gain  $G = 80$ .

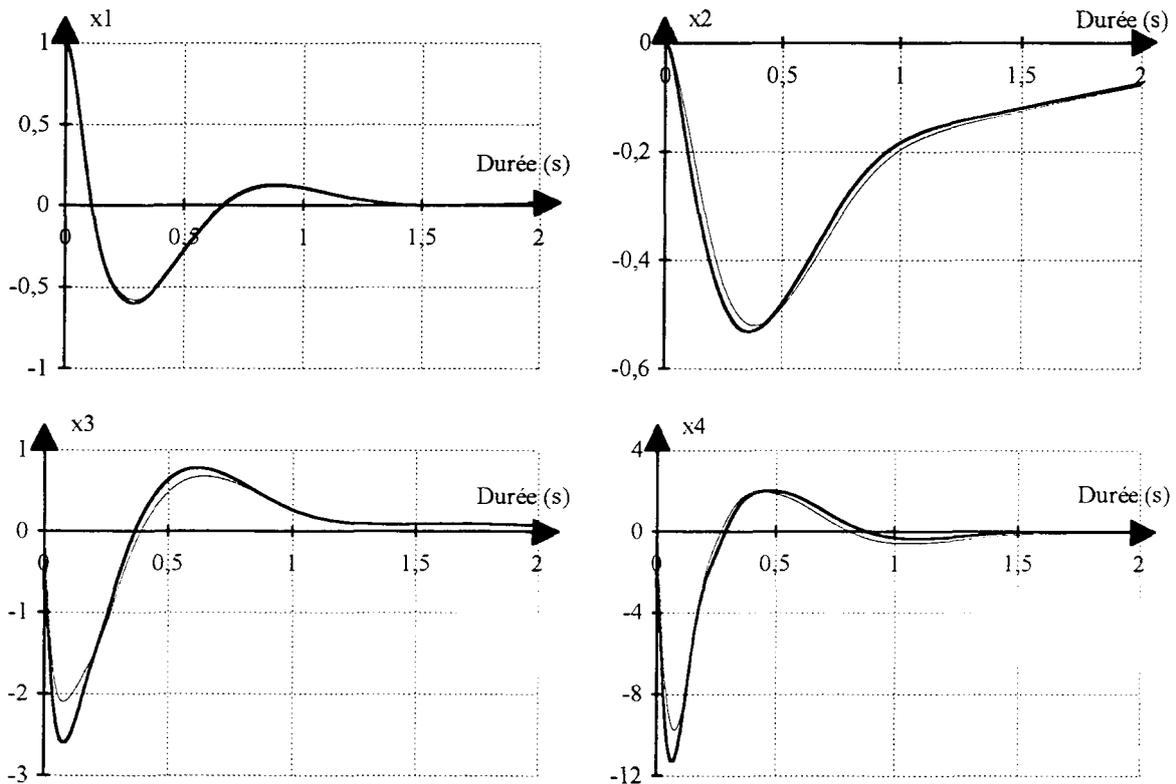


Figure 4.13 : Variables d'état du modèle complet commande+observateur avec un gain  $G = 80$  et des C.I. :  $x(0) = \hat{x}(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

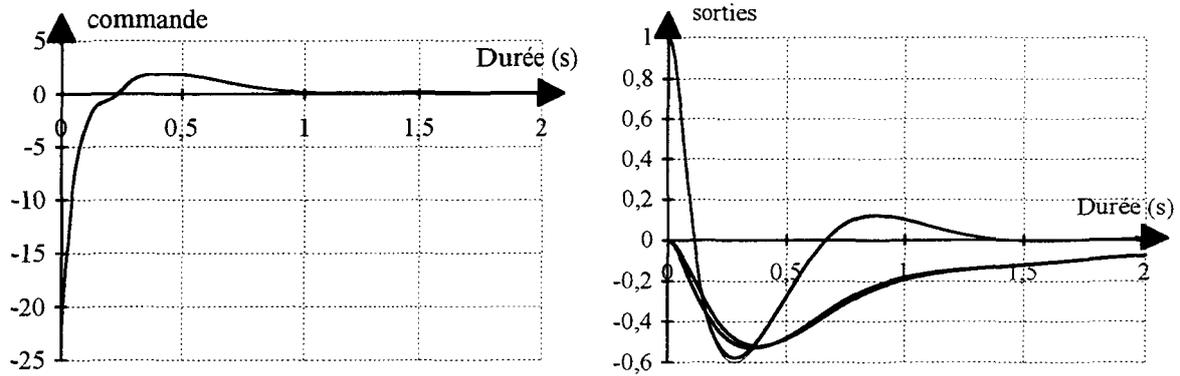


Figure 4.14 : Commande et sorties du modèle complet commande+observateur avec un gain  $G = 80$  et des C.I. :  $x(0) = \hat{x}(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

Les résultats sont regroupés tableau 4.1, chaque case représente le domaine de stabilité du modèle bouclé avec l'observateur flou.

Commande	$ \theta(0)  <$	$G \in$	$M \in$	$F \in$	$L \in$	$m \in$
linéaire	1,1	[57;161]	]0; 24]	[2; 250]	[0,04; 0,12]	]0; 7]
$u_{PDC}$	1,29	[42;163]	]0; 30]	[0; 450]	[0,04; 0,16]	]0; 18]
$u_{SSF}$	1,24	[38;186]	]0; 35]	[0; 450]	[0,03; 0,17]	]0; 22]

Tableau 4.1 : Domaines de stabilité des paramètres en fonction des différentes lois de commande utilisées

La première remarque concerne la loi linéaire qui s'avère dans tous les cas moins robuste, néanmoins, cela ne veut pas dire qu'une loi linéaire ne peut pas avoir les mêmes performances, notamment si on place les pôles des deux modèles  $A_i - B_i F_i, i \in \{1, 2\}$  plutôt que de conserver la loi linéaire issue du modèle  $A_1 - B_1 F_1$  seul. En ce qui concerne les deux autres lois de commande, elles semblent globalement équivalentes, même si en termes de robustesse vis-à-vis de la variation des paramètres du modèle la loi  $u_{SSF}$  semble plus performante.

Si on reprend la présentation utilisée dans la conclusion du chapitre 3, le pendule peut être placé dans l'espace des systèmes décrits par un modèle flou SIMO comme indiqué figure 4.15.

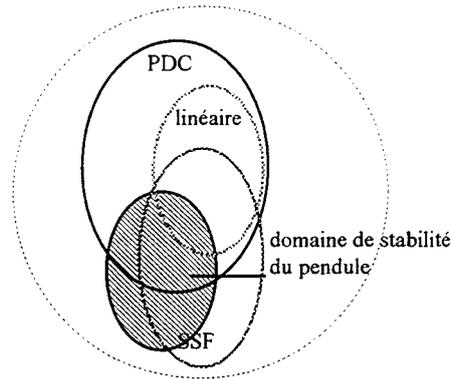


Figure 4.15 : Domaine de stabilité du pendule inversé par rapport aux différentes lois utilisées

Le domaine associé au pendule correspond à la robustesse des lois de commande vis-à-vis d'une variation des paramètres du pendule. Il y a des cas où une loi SSF est plus robuste qu'une loi basée sur une PDC. L'inverse est également vrai au regard des conditions initiales. Par contre une loi linéaire, même couplée avec un observateur floue, se révèle dans tous les cas moins performante.

À présent, le paragraphe suivant présente quelques résultats d'essais en commande temps réel effectués sur le système réel.

#### 4.3.4. Essais en commande temps réel

Pour permettre la prise en compte de toutes les conditions initiales sur l'angle, une séquence de balancement du bras a été mise en œuvre [Wei & al. 95]. Les différentes lois qui sont proposées utilisent toutes ce même balancement et ne sont utilisées que dans une plage acceptable de l'angle.

##### 4.3.4.1. Balancement du pendule

Ce balancement est réalisé à partir de la commande non linéaire suivante. Par exemple, à partir d'une condition initiale  $\theta_0 = -\pi$  rad, les séquences de balancement permettent de "redresser" le pendule jusqu'à une valeur suffisamment faible de l'angle, pour être pris en charge par une loi de commande élaborée autour de la position d'équilibre instable.

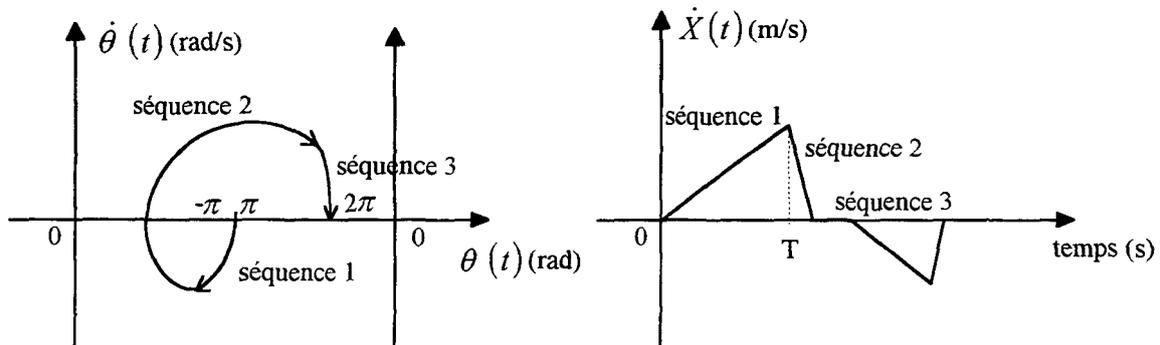
De plus, cette commande permet de prendre en compte la course maximale admissible du chariot. Son principe est basé sur une séquence de commande permettant à chaque cycle

l'augmentation de l'énergie potentielle du système par balancement du pendule /Wei & al. 95/. Pour réaliser ce balancement, trois séquences sont nécessaires, figure 4.15.

Si le pendule est supposé au repos (dans sa position d'équilibre stable  $\theta_0 = \pm\pi$  rad avec une vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}_0 = 0$  rad/s), la première séquence correspond à une accélération  $\ddot{X}(t)$  constante du chariot-pendule durant un temps T. La distance parcourue étant :  $d = \ddot{X}(t)T^2$ , i.e.  $\sqrt{\frac{d}{\ddot{X}(t)}}$  fournit la durée maximale pendant laquelle l'accélération  $\ddot{X}(t)$  constante doit être fournie au chariot-pendule sans dépasser la distance maximale fixée.

La seconde séquence de commande est une accélération opposée,  $-\alpha \ddot{X}(t)$  constante (avec  $\alpha > 1$ ) jusqu'à l'arrêt momentané du chariot-pendule. Ainsi, l'état du système est le chariot arrêté et le pendule en mouvement, son énergie potentielle s'est donc élevée, la position du pendule n'est plus de  $\pm\pi$  rad et sa vitesse angulaire est  $\dot{\theta}(t)$ .

La troisième séquence correspond à une commande nulle jusqu'à l'arrêt du bras. L'état du système est donc le chariot arrêté, vitesse angulaire nulle et angle différent de  $\pm\pi$  rad.



(a) : séquences de balancement du pendule (b) : séquences d'accélération du chariot

Figure 4.15 : Commande non linéaire permettant le balancement du bras

Si durant cette dernière séquence de commande l'angle du pendule ne rentre jamais dans l'intervalle  $[-0,5 \text{ rad}, +0,5 \text{ rad}]$ , la séquence est répétée en inversant les consignes d'accélération.

Cette répétition des séquences augmentant à chaque étape l'énergie du système, permet de ramener l'angle du pendule dans l'intervalle  $[-0,5 \text{ rad}, +0,5 \text{ rad}]$ .

Lorsque cette condition est vérifiée, une loi permettant de stabiliser le pendule autour de sa position instable est alors utilisée. Différentes approches sont proposées :

- commande linéaire par retour d'état et observateur linéaire calculés à l'aide d'une synthèse quadratique ;
- commande floue par retour d'état de type PDC et observateur flou associé ;
- commande par retour d'état de type SSF et approximation au premier ordre des vitesses du chariot et du bras ;
- commande floue par retour de sortie basée sur un régulateur flou utilisant un ensemble de règles à cardinalité réduite /Vidolov 93/.

Pour étudier ces lois de commande, il est nécessaire de travailler sur un modèle discrétisé du pendule. Avec une période d'échantillonnage de 3 ms et pour  $\theta_0 = 1,2 \text{ rad}$ , ce modèle flou est donné par :

$$\text{Règle } i, i \in \{1, 2\} : \text{ Si } \theta(t) \text{ est } F_i^i \quad \text{Alors } \begin{cases} x(t+1) = A_{di}x(t) + B_{di}u(t) \\ y(t) = C_{di}x(t) \end{cases} \quad (7)$$

avec le vecteur d'état :  $x(t) = [\theta(t) \quad X(t) \quad \Delta X(t) \quad \Delta \theta(t)]^T$  et :

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,003 \\ 0 & 1 & 0,003 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9778 & 0 \\ 0,2947 & 0 & -0,2225 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{d1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0099 \\ 0,0994 \end{bmatrix} \quad C_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{d2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,003 \\ 0 & 1 & 0,003 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9778 & 0 \\ 0,2643 & 0 & -0,1550 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{d2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,099 \\ 0,0692 \end{bmatrix} \quad C_{d2} = C_{d1}$$

Ce système mécanique comporte en plus une non linéarité du type bande morte due aux frottements secs n'a pas été prise en compte dans le modèle du pendule. Cette bande morte explique les phénomènes d'oscillations autour du point d'équilibre  $\theta_0 = 0 \text{ rad}$  que l'on retrouve sur la plupart des figures en temps réel.

Le paragraphe suivant présente la première approche utilisée basée sur une synthèse quadratique.

#### 4.3.4.2. Commande Linéaire Quadratique

Les matrices de pondération ont été choisies après quelques essais en simulation pour assurer une bonne convergence de l'erreur de prédiction du vecteur d'état, notamment sur les vitesses. Effectivement, lors du passage de la loi correspondant au balancement, une approximation des vitesses au premier ordre est utilisée pour ne pas commencer avec des conditions initiales sur les vitesses de l'observateur nulles. Pour ne pas perturber la loi de commande, il est alors nécessaire que la reconstruction des vitesses se fasse le mieux possible.

En minimisant le critère  $J = \sum_t (x(t)^T Q_o x(t) + u^T(t) R_o u(t))$ , le résultat obtenu sur le modèle linéarisé autour de 0, i.e. matrices  $(A_{d1}, B_{d1}, C_{d1})$ , avec les matrices de pondération :

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \text{ et } R_o = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 0,001 \end{bmatrix} \text{ est : } K_d = \begin{bmatrix} -0,0196 & 1,0930 \\ 1,0088 & -0,0169 \\ 3,2322 & -5,5763 \\ -6,8834 & 32,0953 \end{bmatrix}.$$

Pour le calcul de la loi de commande, les matrices de pondération  $Q_c$  et  $R_c$  sont choisies de manière à assurer un compromis entre les qualités de la régulation et les sollicitations sur la commande. Les matrices obtenues sont les suivantes en minimisant le critère  $J = \sum_t (y(t)^T Q_d y(t) + r_d u(t)^2)$  :

$$Q_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}, \quad r_d = 0,001 \text{ et } F = [198,8803 \quad -26,5146 \quad -34,8360 \quad 6,6977]$$

Le paragraphe suivant présente l'approche utilisant le concept PDC /Tanaka & Sano 94/ pour la détermination d'une loi de commande (cf. chapitre 2, paragraphe 2.2).

#### 4.3.4.3. Régulateur flou de type PDC

L'observateur utilisé est calculé par synthèse quadratique, la matrice  $P_o > 0$  est déterminée a posteriori. Les matrices de pondération obéissent à la même remarque faite sur le calcul de l'observateur de la commande linéaire quadratique. Le résultat est :

$$\text{avec : } Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \text{ et } R_o = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 \\ 0 & 0,001 \end{bmatrix} :$$

Règle  $i$ ,  $i \in \{1,2\}$  : Si  $\mathcal{A}(t)$  est  $F_1^i$  Alors  $\hat{x}(t+1) = (A_{di} - K_{di}C_{di})\hat{x}(t) + B_{di}u(t) + K_{di}y(t)$

$$\text{et : } K_{d1} = \begin{bmatrix} -0,0196 & 1,0930 \\ 1,0088 & -0,0169 \\ 3,2322 & -5,5763 \\ -6,8834 & 32,0953 \end{bmatrix} \text{ et } K_{d2} = \begin{bmatrix} -0,0172 & 1,0749 \\ 1,0099 & -0,0152 \\ 3,5801 & -4,9947 \\ -6,0272 & 25,8077 \end{bmatrix} .$$

Le régulateur flou est calculé à partir des LMIs issues du théorème 2.2.2 équations (2.9) et (2.10). Un résultat sans contrainte supplémentaire est :

$$F_1 = [198,8803 \quad -26,5146 \quad -34,8360 \quad 6,6977], F_2 = [208,9475 \quad -27,3146 \quad -32,0839 \quad 8,4961].$$

Notons que pour introduire une notion de robustesse, on peut décider d'adjoindre des LMIs supplémentaires qui correspondent à un modèle avec d'autres paramètres (par exemple en modifiant la masse du chariot et/ou la longueur du bras).

Le paragraphe suivant présente l'approche utilisant la stabilisation simultanée pour modèles flous (SSF, cf. chapitre 3, paragraphe 3.2.1).

#### 4.3.4.4. Régulateur de type SSF

La synthèse de la loi a été réalisée en continu. Il s'agit alors de l'adapter au calcul temps réel. Si, a priori cela ne pose pas de problème pour la loi de commande elle-même, il n'en va pas de même si on utilise un observateur flou. Pour éviter de devoir discrétiser un observateur non-linéaire continu, les vitesses du chariot et du bras ont été approximées au premier ordre. De plus, pour éviter une commande trop hachée, un filtre moyenneur est placé sur la sortie de commande.

À partir des LMIs (3.10) et (3.11) issues du théorème 3.2.1, un résultat sans contrainte supplémentaire est donné par :

$$F_1 = [96,1466 \quad -6,9250 \quad -23,7508 \quad 12,2392], F_2 = [89,0633 \quad -6,4152 \quad -21,4771 \quad 11,3100],$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 30280 & -2274 & -7192 & 3553 \\ -2274 & 173 & 541 & -267 \\ -7192 & 541 & 1712 & 844 \\ 3553 & -267 & 844 & 417 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 13413 & -1051 & -3463 & 1579 \\ -1051 & 84 & 273 & 124 \\ -3463 & 273 & 903 & 408 \\ 1579 & 124 & 408 & 186 \end{bmatrix}$$

$$\text{et : } P_c = \begin{bmatrix} 517,07 & -39,94 & -125,96 & 60,795 \\ -39,94 & 7,715 & 11,07 & -4,725 \\ -125,96 & 11,07 & 33,569 & -14,96 \\ 60,795 & -4,725 & -14,96 & 7,677 \end{bmatrix}$$

Enfin, pour proposer également une approche par retour de sortie la synthèse d'un régulateur flou à ensemble de règles de cardinalité réduite /Vidolov 93/ est proposé.

#### 4.3.4.5. Régulateur flou à ensemble de règles de cardinalité réduite

Des études /Vidolov 93/ /Melin & Vidolov 96/ ont permis de montrer que ces régulateurs étaient aussi robustes que les régulateurs classiques pour les mêmes classes de systèmes continus.

En appliquant le régulateur flou monovariante à base de deux règles au problème du pendule inversé, la base de règles devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1: \text{Si } \left[ \begin{array}{l} \{ \theta(t) \text{ est Positif et } \Delta\theta(t) \text{ est Positif} \\ \text{OU } \{ X(t) \text{ est Positif et } X\Delta(t) \text{ est Positif} \} \end{array} \right] \text{ alors la commande est Positive} \\ R_2: \text{Si } \left[ \begin{array}{l} \{ \theta(t) \text{ est Négatif et } \Delta\theta(t) \text{ est Négatif} \\ \text{OU } \{ X(t) \text{ est Négatif et } \Delta X(t) \text{ est Négatif} \} \end{array} \right] \text{ alors la commande est Négative} \end{array} \right.$$

Pour les variables d'état  $\theta(t)$ ,  $\Delta\theta(t)$ ,  $X(t)$  et  $\Delta X(t)$ , les fonctions d'appartenance (cf. figure 4.17) respectives vérifient les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\theta P}(\theta(t)) + f_{\theta N}(\theta(t)) = 1 \quad \forall \theta(t) \in E\theta \\ f_{\theta P}(\theta(t)) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \tan\left(\frac{\theta(t)}{a}\right) \right] \quad a > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{XP}(X(t)) + f_{XN}(X(t)) = 1 \quad \forall X(t) \in EX \\ f_{XP}(X(t)) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \tan\left(\frac{X(t)}{c}\right) \right] \quad c > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\Delta\theta P}(\Delta\theta(t)) + f_{\Delta\theta N}(\Delta\theta(t)) = 1 \quad \forall \Delta\theta(t) \in E\Delta\theta \\ f_{\Delta\theta P}(\Delta\theta(t)) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \tan\left(\frac{\Delta\theta(t)}{b}\right) \right] \quad b > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{\Delta X P}(\Delta X(t)) + f_{\Delta X N}(\Delta X(t)) = 1 \quad \forall \Delta X(t) \in E\Delta X \\ f_{\Delta X P}(\Delta X(t)) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \tan\left(\frac{\Delta X(t)}{d}\right) \right] \quad d > 0 \end{array} \right.$$

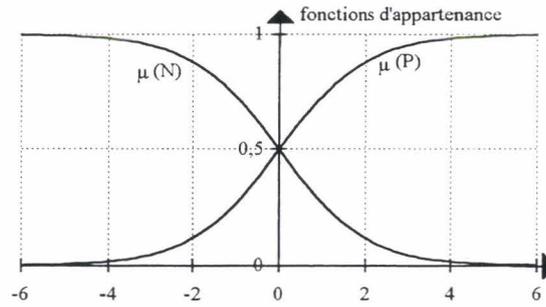


Figure 4.17 : Fonctions d'appartenance des variables d'état

Pour la commande (figure 4.18), les fonctions d'appartenance sont définies sur l'intervalle  $[-1, +1]$  et doivent vérifier :

$$\begin{cases} f_{VP}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq v \leq 0 \\ f(v) & \text{si } 0 \leq v \leq 1 \end{cases} \\ f_{VN}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq v \leq 1 \\ f(|v|) & \text{si } -1 \leq v \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{avec } f: \forall x \in [0, 1], f(x) = x^q, q \in [0, 1].$$

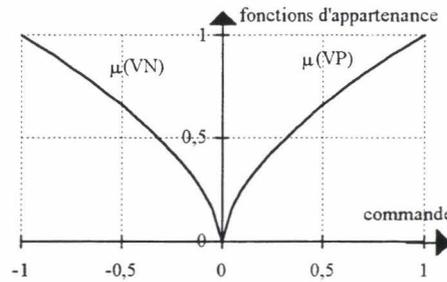


Figure 4.18 : Fonctions d'appartenance de la commande

La méthode de raisonnement utilise la norme triangulaire produit pour l'opérateur  $ET$  et une co-norme triangulaire pour l'opérateur  $OU$ . En définissant :

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= f_{\theta P}(\theta(t)) \cdot f_{\Delta \theta P}(\Delta \theta(t)) ; \alpha_2(t) = f_{\theta V}(\theta(t)) \cdot f_{\Delta \theta V}(\Delta \theta(t)) \\ \beta_1(t) &= f_{X P}(X(t)) \cdot f_{\Delta X P}(\Delta X(t)) ; \beta_2(t) = f_{X V}(X(t)) \cdot f_{\Delta X V}(\Delta X(t)) \end{aligned}$$

La valeur numérique de la sortie est définie par :

$$u(t) = G \left\{ \left[ \min(1, \alpha_1(t) + \lambda \beta_1(t)) \right]^{q-1} - \left[ \min(1, \alpha_2(t) + \lambda \beta_2(t)) \right]^{q-1} \right\} \quad \text{avec } G : \text{ gain de normalisation et } \lambda \text{ un paramètre de couplage.}$$

L'obtention du paramètre de couplage  $\lambda$ , du paramètre  $q$  et des 5 facteurs d'échelle,  $\alpha, b, c, d$  et  $G$  revient à un problème d'optimisation dans  $R^7$ . Pour éviter le réglage de ces paramètres par essais-erreurs, une technique d'optimisation basée sur le recuit simulé est utilisée. Parmi les différentes techniques stochastiques, le recuit simulé amélioré avec cycle de réchauffement /Bonnemoy & Hamma 91/ est l'une de celles qui permettent de traiter des problème d'optimisation comportant un très grand nombre d'optimum locaux /Siarry 95/ et l'algorithme est relativement simple à mettre en œuvre /Ouattara & al. 95/. L'objectif de cette méthode appliquée au cas du pendule est de minimiser l'erreur de l'angle et de la position en essayant de tenir compte également de l'énergie sur la commande. Pour éviter une technique multicritère, un critère de performance global est choisi qui permet en plus de prendre en compte plusieurs conditions initiales. On définit le critère  $J$  à minimiser par :

$$i \in \{1, \dots, 3\}, J = \max(J_i(\theta_i)) \text{ et } \theta_i = \frac{\pi}{8} \cdot i \text{ avec :}$$

$$J_i(\theta_i) = \sum_t \left( t \left[ \alpha \theta^2(t) + \beta (X_c - X(t))^2 \right] + \delta (u(t) - u(t-1))^2 \right)$$

Ce qui correspond, pour chaque sous-critère, au critère ITSE avec une pondération supplémentaire sur la commande. Avec :  $\alpha = 0,7$ ,  $\beta = 0,25$ ,  $\delta = 0,05$ , ce qui indique clairement que c'est l'erreur sur l'angle du bras qui est privilégiée, les résultats obtenus sont :

$$\alpha = 0,2568, b = 4,0176, c = 0,1523, d = 0,2250, q = 0,8847, \lambda = 0,5393 \text{ et } G = 12,2610.$$

Après avoir présenté brièvement les différents régulateurs utilisés, la partie suivante présente quelques résultats permettant de tester leur robustesse vis-à-vis des conditions initiales et des variations de paramètre du modèle.

#### 4.3.4.6. Comparaison des différentes commandes

Il est toujours extrêmement délicat de faire une comparaison sur des lois de commande qui soit objective. Effectivement, les lois utilisées proviennent d'horizons différents, elles ne peuvent être synthétisées de la même manière. De plus, il faudrait, pour être tout à fait honnête, considérer le temps de développement de ces différentes lois. En plus, des contraintes de robustesse peuvent être rajoutées aisément à l'aide de LMIs dans le cadre des lois par retour d'état, mais on peut également les prendre en compte à l'aide de l'optimisation du régulateur flou par retour de sortie, ...

Néanmoins, en partant du même modèle optimisé du pendule, le temps de développement de chaque loi présentée est globalement similaire (de l'ordre d'une journée, si

on enlève d'inévitables tâtonnements), abstraction faite de la programmation des algorithmes de synthèse proprement dite (LMIs, recuit simulé,...). Dans ce contexte, on peut utiliser un certain nombre de critères pour effectuer une comparaison quantitative. Pour des critères de performance on peut choisir parmi les classiques ISE, ITSE, IAE,... Notons toutefois qu'il s'agira, bande morte oblige, de savoir quand arrêter le calcul de ces critères.

Pour donner une base de comparaison visuelle au lecteur, la figure 4.19 donne un résultat dans le cas nominal pour la loi linéaire  $u_{lin}$  avec comme conditions initiales  $x(0) = [0,4 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Toutes les courbes seront présentées sur une durée de 9s. On peut noter sur les courbes les effets de la bande morte résultant en de faibles oscillations du bras et du chariot autour de 0.

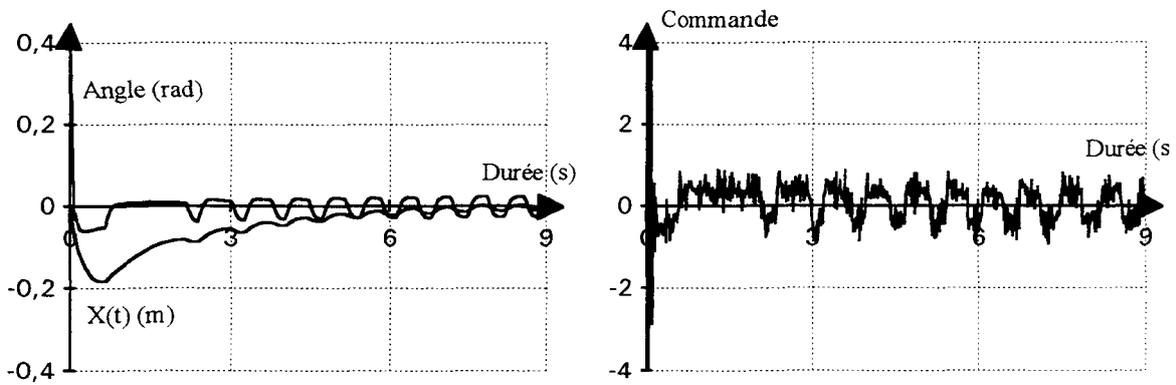


Figure 4.19 : Loi  $u_{lin}$  avec  $x(0) = [0,4 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

Pour illustrer la séquence de balancement permettant de ramener le pendule de sa position d'équilibre stable, un résultat avec la loi  $u_{PDC}$  avec comme conditions initiales  $x(0) = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$  est présenté figure 4.20.

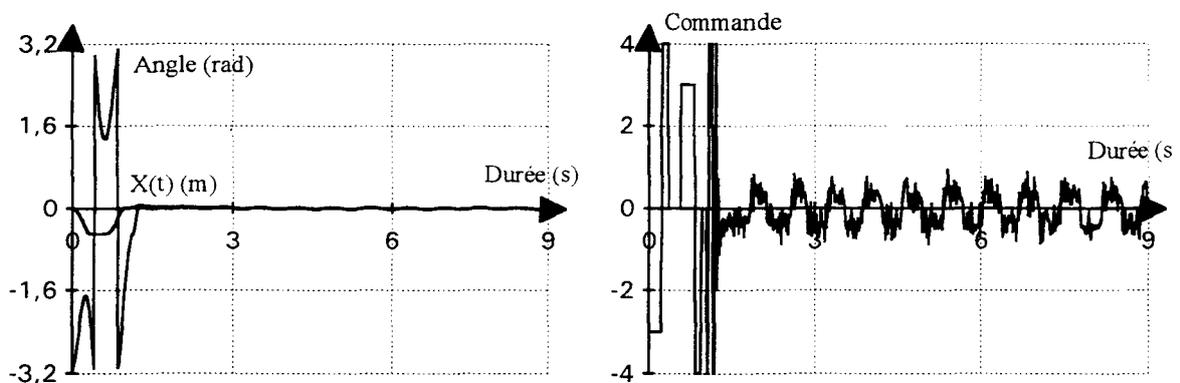


Figure 4.20 : Loi  $u_{PDC}$  avec  $x(0) = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$

Les discontinuités apparaissant dans la courbe de l'angle, figure 4.20 sont dues au passage par  $\theta(t) = \pi \text{ rad}$ .

En termes de robustesse, trois bras de masse et de longueur différentes sont à notre disposition. Les essais effectués à l'aide de ces trois bras sont résumés tableaux 4.2 et 4.3. Dans le premier cas, tableau 4.2, on ne s'intéresse qu'à la robustesse en fonction des conditions initiales autour de  $0 \text{ rad}$ , il n'y a pas de séquence de balancement.

	$u_{in}$	$u_{PDC}$	$u_{SSF}$	$u_{RF}$
$\begin{cases} m = 0,025 \text{ kg} \\ L = 0,1 \text{ m} \end{cases}$	$[-0,8; 0,8]$	$[-0,8; 0,85]$	$[-0,8; 0,85]$	$[-0,8; 0,85]$
$\begin{cases} m = 0,5 \text{ kg} \\ L = 0,1 \text{ m} \end{cases}$	$[-0,75; 0,8]$	$[-0,75; 0,8]$	$[-0,8; 0,8]$	$[-0,8; 0,85]$
$\begin{cases} m = 0,2 \text{ kg} \\ L = 0,2 \text{ m} \end{cases}$	$[-0,65; 0,7]$	$[-0,7; 0,75]$	$[-0,7; 0,75]$	$[-0,7; 0,7]$

Tableau 4.2 : Domaines de stabilité en fonction des conditions initiales autour de  $0 \text{ rad}$

La dissymétrie des intervalles s'explique par la courroie entraînant le chariot qui n'a pas une longueur égale suivant que l'on tire d'un côté ou de l'autre. On peut s'apercevoir, en termes de conditions initiales qu'il y a peu de différence entre les 3 lois de commande floues, seule  $u_{in}$  semble moins performante.

On ne retrouve pas les mêmes performances qu'en simulation, tableau 4.1, et cela s'explique évidemment par les non linéarités présentes : saturation sur la commande et bande morte. Pour illustrer les différents comportements de ces lois, les trois critères suivants ont été calculés pour une condition initiale de  $0,7 \text{ rad}$  qui est admissible pour les trois bras et les quatre lois de commande :

$$\text{ISE} : J_{ISE}(\theta(t)) = \sum_t \theta^2(t), \quad J_{ISE}(X(t)) = \sum_t (X(t) - X_c)^2$$

$$\text{ITAE} : J_{ITAE}(\theta(t)) = \sum_t t |\theta(t)|, \quad J_{ITAE}(X(t)) = \sum_t t |X(t) - X_c|$$

Temps de stabilisation :  $t_{stab}, \forall t > t_{stab} \quad |u(t)|, |\theta(t)|, |X(t) - X_c|$  centrés sur 0 et bornés. Ce temps correspond au temps à partir duquel la commande reste centrée autour de la bande morte.

Les résultats sont résumés tableau 4.3.

	$u_{lin}$	$u_{PDC}$	$u_{SSF}$	$u_{RF}$
$\left\{ \begin{array}{l} m = 0,025 \text{ kg} \\ L = 0,1 \text{ m} \end{array} \right.$	$J_{ISE}(\theta(t)) = 3,4$ $J_{ISE}(X(t)) = 34$ $J_{ITAE}(\theta(t)) = 11$ $J_{ITAE}(X(t)) = 29$ $t_{stab} = 7,5s$	$J_{ISE}(\theta(t)) = 3,8$ $J_{ISE}(X(t)) = 42$ $J_{ITAE}(\theta(t)) = 11,5$ $J_{ITAE}(X(t)) = 32$ $t_{stab} = 8s$	$J_{ISE}(\theta(t)) = 3,2$ $J_{ISE}(X(t)) = 35$ $J_{ITAE}(\theta(t)) = 3,9$ $J_{ITAE}(X(t)) = 62$ $t_{stab} = 9s$	$J_{ISE}(\theta(t)) = 8,6$ $J_{ISE}(X(t)) = 6$ $J_{ITAE}(\theta(t)) = 26$ $J_{ITAE}(X(t)) = 26$ $t_{stab} = 4,5s$
$\left\{ \begin{array}{l} m = 0,5 \text{ kg} \\ L = 0,1 \text{ m} \end{array} \right.$	$J_{ISE}(\theta(t)) = 3$ $J_{ISE}(X(t)) = 26$ $J_{ITAE}(\theta(t)) = 10$ $J_{ITAE}(X(t)) = 31$ $t_{stab} = 8s$	$J_{ISE}(\theta(t)) = 2,9$ $J_{ISE}(X(t)) = 26$ $J_{ITAE}(\theta(t)) = 10$ $J_{ITAE}(X(t)) = 29$ $t_{stab} = 8s$	$J_{ISE}(\theta(t)) = 3,9$ $J_{ISE}(X(t)) = 38$ $J_{ITAE}(\theta(t)) = 4$ $J_{ITAE}(X(t)) = 64$ $t_{stab} = 9s$	$J_{ISE}(\theta(t)) = 7,5$ $J_{ISE}(X(t)) = 4,1$ $J_{ITAE}(\theta(t)) = 13$ $J_{ITAE}(X(t)) = 13$ $t_{stab} = 7,5s$
$\left\{ \begin{array}{l} m = 0,2 \text{ kg} \\ L = 0,2 \text{ m} \end{array} \right.$	$J_{ISE}(\theta(t)) = 8$ $J_{ISE}(X(t)) = 47$ $J_{ITAE}(\theta(t)) = 16$ $J_{ITAE}(X(t)) = 36$ $t_{stab} = 8s$	$J_{ISE}(\theta(t)) = 5$ $J_{ISE}(X(t)) = 54$ $J_{ITAE}(\theta(t)) = 11$ $J_{ITAE}(X(t)) = 27$ $t_{stab} = 5s$	$J_{ISE}(\theta(t)) = 4,8$ $J_{ISE}(X(t)) = 80$ $J_{ITAE}(\theta(t)) = 2$ $J_{ITAE}(X(t)) = 84$ $t_{stab} = 9s$	$J_{ISE}(\theta(t)) = 27$ $J_{ISE}(X(t)) = 30$ $J_{ITAE}(\theta(t)) = 61$ $J_{ITAE}(X(t)) = 34$ $t_{stab} = ?$

Tableau 4.3 : Calcul de 3 critères pour une condition initiale sur l'angle de  $0,7 \text{ rad}$

Les résultats sont relativement disparates, ce qui montre que si les commandes ont des performances en robustesse par rapport aux conditions initiales similaires, tableau 4.2, le comportement n'est pas le même.

Au regard des résultats, on s'aperçoit, comme pour la simulation, que la robustesse des lois par rapport à la masse du bras est très bonne. Pour la longueur du bras il n'en va pas de même (4ème ligne du tableau 4.3). Pour illustrer cette remarque les courbes correspondant à ce cas sont présentées figures 4.21 à 4.24 pour une condition initiale de l'angle de  $0,7 \text{ rad}$ . On peut s'apercevoir que la stratégie des différentes lois n'est foncièrement pas la même. Visiblement, les lois  $u_{PDC}$  et  $u_{SSF}$  calculées privilégient fortement l'angle par rapport à la position, figure 4.22 et 4.23, cela n'est pas le cas de la loi  $u_{RF}$ , figure 4.24. Pour cette dernière ce compromis entre position et angle amène à des réponses peu admissibles quand les paramètres du bras sont modifiées.

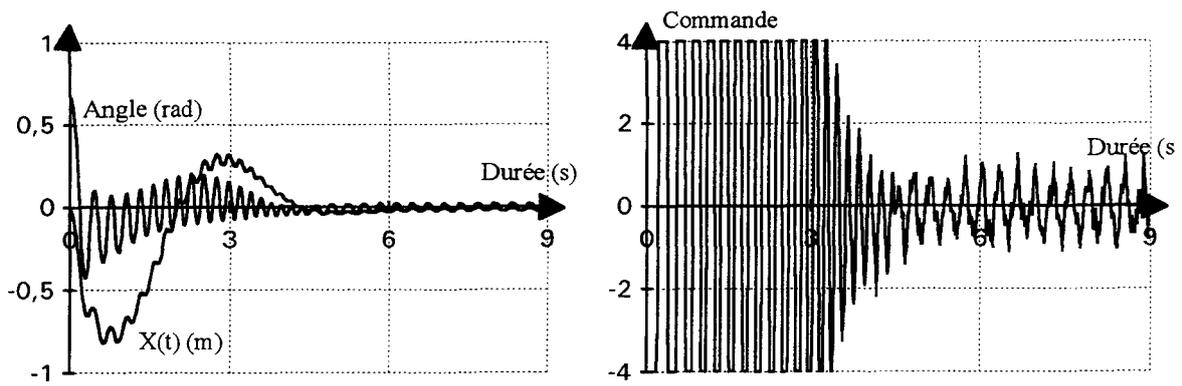


Figure 4.21 : Loi  $u_{in}$  avec  $\begin{cases} m = 0,2 \text{ kg} \\ L = 0,2 \text{ m} \end{cases}$  et  $x(0) = [0,7 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

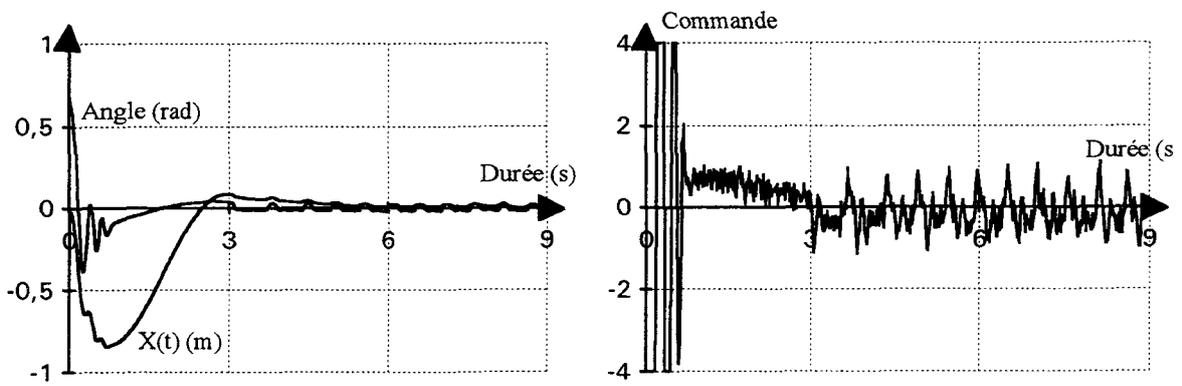


Figure 4.22 : Loi  $u_{PDC}$  avec  $\begin{cases} m = 0,2 \text{ kg} \\ L = 0,2 \text{ m} \end{cases}$  et  $x(0) = [0,7 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

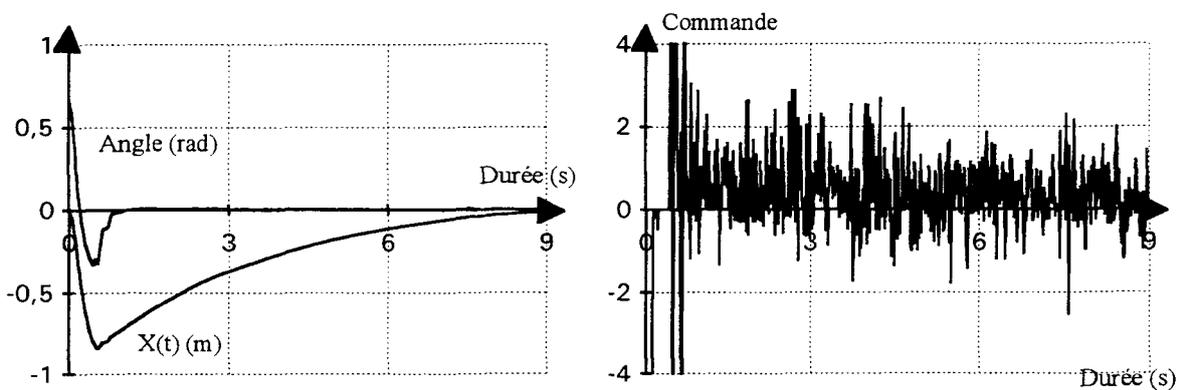


Figure 4.23 : Loi  $u_{SSF}$  avec  $\begin{cases} m = 0,2 \text{ kg} \\ L = 0,2 \text{ m} \end{cases}$  et  $x(0) = [0,7 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

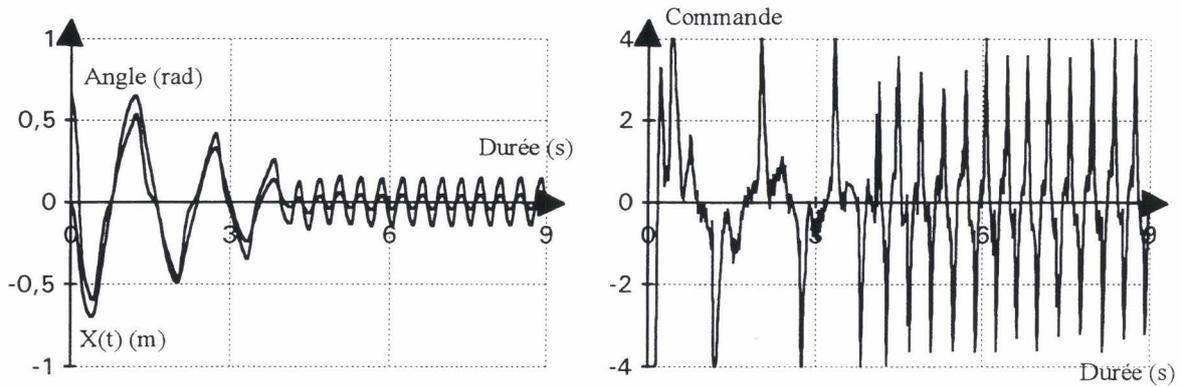


Figure 4.24 : Loi  $u_{RF}$  avec  $\begin{cases} m = 0,2 \text{ kg} \\ L = 0,2 \text{ m} \end{cases}$  et  $x(0) = [0,7 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

Dans un deuxième temps, on s'intéresse à la robustesse avec des conditions initiales quelconques sur les trois différents bras, tableau 4.4. Pour ces essais, on dispose donc de la séquence de balancement.

	$u_{lin}$	$u_{PDC}$	$u_{SSF}$	$u_{RF}$
$\begin{cases} m = 0,025 \text{ kg} \\ L = 0,1 \text{ m} \end{cases}$	$[-\pi; -2,9]$ $[2,9; \pi]$	Tout	Tout	Tout
$\begin{cases} m = 0,5 \text{ kg} \\ L = 0,1 \text{ m} \end{cases}$	$[-\pi; -2,9]$ $[2,9; \pi]$	Tout	Tout	Tout
$\begin{cases} m = 0,2 \text{ kg} \\ L = 0,2 \text{ m} \end{cases}$	Impossible	$[-\pi; -2,95]$ $[3,1; \pi]$	$[-\pi; -2,8]$ $[2,9; \pi]$	$[-\pi; -2,9]$ $[2,9; \pi]$

Tableau 4.4 : Domaines de stabilité en fonction des conditions initiales autour de  $\pi \text{ rad}$

Pour la variation de masse, les résultats rejoignent ceux obtenus en simulation qui indiquaient la robustesse des lois  $u_{PDC}$  et  $u_{SSF}$  vis à vis de ce paramètre. Notons de suite, que la loi linéaire  $u_{lin}$  présente dans tous les cas des performances nettement plus faibles. En ce qui concerne la longueur, on s'aperçoit, comme en simulation, que les domaines de stabilité se réduisent fortement, une préférence pouvant être donnée à la loi  $u_{SSF}$ . Encore une fois, cette présentation des résultats ne permet pas d'appréhender les différences de comportement des différentes lois.

Il faut noter l'excellent comportement de la loi  $u_{RF}$  qui se situe au même niveau que les deux lois par retour d'état flou. Néanmoins, ces deux dernières lois présentent l'avantage d'avoir une synthèse systématique à partir d'un modèle flou du procédé.

Enfin pour montrer la robustesse vis-à-vis de perturbations externes, du type coup porté sur le bras, un résultat avec la loi  $u_{SSF}$  est présenté figure 4.25.



Figure 4.25 : Loi  $u_{SSF}$  avec perturbations externes

La condition initiale correspond à  $x(0) = \left[ \frac{\pi}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$ , le bras est frappé légèrement vers  $2s$ , il est ensuite poussé de façon continue durant  $1s$ , ce qui explique l'allure "plate" de la réponse de l'angle entre  $4s$  et  $5s$ . Ensuite des coups plus violents sont portés ( $5,5s$ ,  $7s$  et  $11s$ ) amenant le bras à effectuer une rotation complète avant de se stabiliser à nouveau.

## 4.4. Conclusion

La première application concernant la commande floue d'une voiture électrique a permis de mettre en évidence un avantage incontestable, celui du faible temps de développement : la réalisation a été menée en six mois incluant un mois pour le développement d'un modèle et une semaine pour les algorithmes de commande.

La deuxième application a permis de valider diverses lois de commande, dont celles mises en œuvre au chapitre 3, sur une plate-forme d'essais développée au laboratoire.

L'analyse réalisée sur le pendule inversé met en évidence l'efficacité de l'approche SSF, dans le sens où celle-ci permet de réguler l'angle et la position quels que soient les conditions initiales comprises respectivement dans un intervalle  $[-\pi \text{ rad}, +\pi \text{ rad}]$  et

$[-1 \text{ m}, +1 \text{ m}]$  sur le système avec des paramètres nominaux. Néanmoins les régulateur flous de type PDC et à base de règles de cardinalité réduite donnent également de très bons résultats vis-à-vis des variations des conditions initiales. Enfin, pour une variation des paramètres du pendule, en simulation ou sur le système réel, et également en présence de perturbations provoquées sur le bras le meilleur comportement obtenu est celui de loi SSF.

La synthèse sous forme de LMI des deuxième et troisième approches, permet de dégager la loi de commande et de donner des conditions suffisantes de stabilité du modèle bouclé. Il reste néanmoins à résoudre dans le cas du pendule le problème des conditions initiales supérieures à  $\frac{\pi}{2}$  sur l'angle sans avoir recours à une séquence de balancement. En fait, ce problème est plus général, les LMIs utilisées, basées sur les différents théorèmes présentés dans ce mémoire sont incapables de fournir des solutions, les conditions de stabilité étant trop conservatives.

Enfin, le dernier chapitre présente quelques extensions immédiates des lois de commande proposées au cas discret.



# Chapitre 5. Extensions et perspectives

*"Pour le savant, croire la science achevée est toujours une illusion aussi complète que le serait pour l'historien de croire l'histoire terminée."*

Louis de BROGLIE  
*Sur les sentiers de la science*  
1960 France.

## 5.1. Introduction

Ce dernier chapitre présente en premier lieu quelques extensions immédiates au cas discret des lois proposées. Tout d'abord, il est possible de montrer, toujours dans le cas particulier  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$ , qu'il est possible d'obtenir des résultats moins conservatifs que ceux trouvés dans la littérature /Tanaka & al. 98/.

Ensuite, il est possible d'envisager l'application de la loi de type compensation et division pour les modèles flous (CDF) sans être dans le cas particulier des modèles évoqués plus haut. Dans ce cas, l'écart entre les  $B_i$  pourrait être traité comme une incertitude variant dans le temps pour le modèle en boucle fermée. Cela pourrait permettre l'utilisation de nouveaux résultats sur ce type de modèles flous contenant des incertitudes, i.e. :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i + \Delta A_i(t))x(t), \text{ par exemple /Tanaka \& al. 96/ /Joh \& al. 98/}$$

## 5.2. Extension au cas discret

Une des possibilités d'extension concerne bien sûr le cas discret. Quelques résultats peuvent être obtenus concernant les lois de commande CDF sur les cas particuliers discutés au chapitre 3, paragraphe 3.2.3.

### 5.2.1. Cas particulier

Si on utilise à nouveau la condition concernant ces modèles, i.e.  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$  de nouvelles conditions peuvent être obtenues sur les modèles flous discrets (MFD) définis par (cf chapitre 1, équations (1.8) et (1.10)) :

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

avec  $h_i(z(t)) \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ , pour tout t.

**Théorème 5.2.1** : Soient les modèles flous discrets de type TSK vérifiant :  
 $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1$ , en utilisant la loi de commande :

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i} x(t), \text{ s'il existe une matrice } P > 0 \text{ et des gains } F_i \text{ tels que :}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists F_i, (A_i^T - F_i^T B_i^T) P (A_i - B_i F_i) - P < 0 \quad (5.2)$$

alors le modèle en boucle fermée qui s'écrit :  $x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i - B_i F_i) x(t)$  est globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

Il suffit de montrer que le modèle en boucle fermée s'écrit :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i - B_i F_i) x(t) \text{ et d'appliquer le résultat de stabilité de /Tanaka \& Sano$$

94/ sur la boucle fermée.

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( A_i - B_i \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z) k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z) k_i} \right) x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i x(t) - B_1 \sum_{i=1}^r h_i(z) k_i \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z) k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z) k_i} x(t)$$

et :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r h_i(z) k_i B_1 F_i x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i - B_i F_i) x(t)$$

□

Les mêmes remarques que dans le cas continu peuvent être faites concernant les travaux de /Leung & al. 96/, i.e. le cas où  $\forall i \in \{1, \dots, r\} \exists F_i, A_i - B_i F_i = A_{BF}$ , la boucle fermée du modèle flou complet devient linéaire.

Les conditions (5.2) peuvent évidemment se mettre sous forme de LMIS en utilisant le lemme de Schur avec  $X = P^{-1}, M_i = F_i P^{-1}$  (cf chapitre 2, page 35) :

$$\text{trouver } X > 0 \text{ et } M_i \text{ tels que : } \forall i \in \{1, \dots, r\} \begin{bmatrix} X & X A_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.3)$$

puis  $P = X^{-1}$  et  $F_i = M_i P$ .

Notons, encore une fois que le modèle en boucle fermée ne faisant plus intervenir les modèles croisés, ces conditions sont évidemment moins conservatives.

Pour le modèle complet comprenant un observateur discret (MFD) (cf chapitre 2, équations (2.19) et (2.20)) avec les variables des prémisses supposées mesurables défini par :

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

l'écriture devient :

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z) [(A_i - B_i F_i) x(t) + B_i F_i \tilde{x}(t)] \\ \tilde{x}(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) (A_i - K_j C_j) \tilde{x}(t) \end{cases} \quad \text{avec : } \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (5.5)$$

Le résultat suivant est également direct.

**Théorème 5.2.2** : Soient les modèles SIMO vérifiant la propriété :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_1, \text{ et la loi de commande : } u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i} \hat{x}(t).$$

Supposons qu'il existe deux matrices  $P_c > 0$  et  $P_o > 0$  vérifiant les propriétés suivantes :

- i)  $\forall x \neq 0, V(x) = x^T P_c x$  est strictement décroissante ;
- ii)  $\forall \tilde{x} \neq 0, \tilde{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P_o \tilde{x}$  est strictement décroissante ;

alors le modèle complet (5.5) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

Comme  $x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z) [(A_i - B_i F_i) x(t) + B_i F_i \tilde{x}(t)]$  est un cas particulier de :

$x(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) [(A_i - B_i F_j) x(t) + B_i F_j \tilde{x}(t)]$ , le théorème de /Ma & al. 98/ est

vérifié.

□

### 5.2.2. Exemple

Dans le cas des modèles continus, en suivant la remarque du lemme 3.3.1, il est apparu que les modèles permettant d'être stabilisés par une loi de type CDF et non stabilisables par une PDC étaient relativement difficiles à obtenir. Comparativement, dans le cas discret il est beaucoup plus simple de trouver ce type de modèle. Le domaine des modèles SDF stabilisables est donc nettement accru. Cette remarque est confirmée par le fait que, contrairement au cas continu, il est possible de trouver des exemples où les  $B_i$  n'ont qu'une seule composante.

Effectivement, considérons par exemple le système non linéaire dont un modèle est donné par :

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) - x_1(t)x_2(t) + (5 + x_1(t))u(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + 0,5x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (5.6)$$

La non linéarité présente est  $x_1(t)$  que l'on peut écrire de la manière suivante avec  $\beta > 0$  :

quand  $x_1(t) \in [-\beta, \beta]$  :  $x_1(t) = \beta F_1^1(x_1(t)) - \beta F_1^2(x_1(t))$  avec :

$$F_1^1(x_1(t)) = \frac{x_1(t) + \beta}{2\beta} \text{ et } F_1^2(x_1(t)) = 1 - F_1^1(x_1(t)) = \frac{\beta - x_1(t)}{2\beta} \quad (5.7)$$

Le modèle non linéaire peut donc être exactement représenté par le modèle flou à deux règles :

$$\begin{aligned} \text{Règle 1 : Si } x_1(t) \text{ est } F_1^1 \text{ Alors } & \begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 5+\beta \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0]x(t) \end{cases} \\ \text{Règle 2 : Si } x_1(t) \text{ est } F_1^2 \text{ Alors } & \begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 5-\beta \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0]x(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Il y a bien entendu perte de commandabilité si  $\beta = 5$ . Pour conserver des  $B_i$  de même signe et donc rester dans le cadre strict des cas particuliers ( $k_2 > 0$ ) on considère dans la suite que  $\beta < 5$ .

En premier lieu, on peut s'intéresser à trouver les conditions de stabilité du modèle bouclé avec une loi linéaire. Avec  $F = [f_1 \ f_2]$  on obtient les polynômes caractéristiques en boucle fermée suivants :

$$P_{A_1-B_1F}(z) = z^2 + ((5+\beta)f_1 - 1,5)z + 0,5 + \beta + (5+\beta)(f_2 - 0,5f_1)$$

$$P_{A_2-B_2F}(z) = z^2 + ((5-\beta)f_1 - 1,5)z + 0,5 - \beta + (5-\beta)(f_2 - 0,5f_1)$$

En utilisant le critère de Jury à l'ordre 2, on montre aisément que les conditions suffisantes de stabilité se réduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{-1,5 - 5(f_2 - 0,5f_1)}{1 + f_2 - 0,5f_1} < \beta < \frac{0,5 - 5(f_2 - 0,5f_1)}{1 + f_2 - 0,5f_1} \\ \text{et} \\ \frac{-0,5 + 5(f_2 - 0,5f_1)}{1 + f_2 - 0,5f_1} < \beta < \frac{1,5 + 5(f_2 - 0,5f_1)}{1 + f_2 - 0,5f_1} \end{aligned} \quad (5.9)$$

et on en déduit que :  $\beta < \frac{10}{9}$ .

En utilisant une synthèse de type PDC, il faut vérifier les trois conditions LMIs suivantes /Tanaka & al. 98/ :

$$\text{trouver } X > 0, Y \geq 0 \text{ et } M_i \text{ tels que : } \forall i \in \{1, 2\} \begin{bmatrix} X - Y & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} X + Y & \frac{1}{2}(XA_1^T + XA_2^T - M_2^T B_1^T - M_1^T B_2^T) \\ \frac{1}{2}(A_1 X + A_2 X - B_1 M_2 - B_2 M_1) & X \end{bmatrix} \geq 0$$

puis  $P = X^{-1}$ ,  $F_i = M_i P$ ,  $Q = PYP$ .

En utilisant ces LMIs il existe une loi de type PDC qui stabilise le modèle pour  $\beta < 2,36$ .

Si on utilise maintenant une synthèse CDF, théorème 5.2.1, sans avoir recours à des LMIs on peut se rendre compte de façon évidente qu'un simple placement de pôles suffit dans tous les cas où  $\beta < 5$ .

Effectivement; les polynômes caractéristiques pour chaque sous-modèle en boucle fermée s'écrivent :

$$P_{A_1-B_1F_1}(z) = z^2 + ((5+\beta)f_{11} - 1,5)z + 0,5 + \beta + (5+\beta)(f_{21} - 0,5f_{11}), \text{ avec : } F_1 = [f_{11} \ f_{21}]$$

$$P_{A_2-B_2F_2}(z) = z^2 + ((5-\beta)f_{12} - 1,5)z + 0,5 - \beta + (5-\beta)(f_{22} - 0,5f_{12}), \text{ avec : } F_2 = [f_{12} \ f_{22}]$$

Avec un but :  $P_{butBF}(z) = z^2 + a_1z + a_2$  il vient immédiatement :

$$F_1 = \frac{1}{5+\beta} [a_1 + 1,5 \quad a_2 + 0,5a_1 + 0,25 - \beta] \text{ et } F_2 = \frac{1}{5-\beta} [a_1 + 1,5 \quad a_2 + 0,5a_1 + 0,25 + \beta]$$

$$\text{et de plus : } A_1 - B_1F_1 = A_2 - B_2F_2 = \begin{bmatrix} -0,5 - a_1 & -a_2 - 0,5a_1 - 0,25 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix}, \text{ donc le modèle en}$$

boucle fermée est linéaire. Il existe donc une loi de type CDF qui stabilise le modèle pour tout  $\beta < 5$ .

Un exemple de résultat avec  $\beta = 4$  où seule une loi CDF est utilisable est présenté figure 5.1. On choisit  $P_{butBF}(z) = (z - 0,6)^2$  et les gains obtenus sont :  $F_1 = \frac{1}{9} [0,3 \quad -3,99]$  et  $F_2 = [0,3 \quad 4,01]$ , et la loi de commande :

$$u(t) = - \frac{9h_1(x_1(t))F_1 + h_2(x_1(t))F_2}{9h_1(x_1(t)) + h_2(x_1(t))} x(t)$$

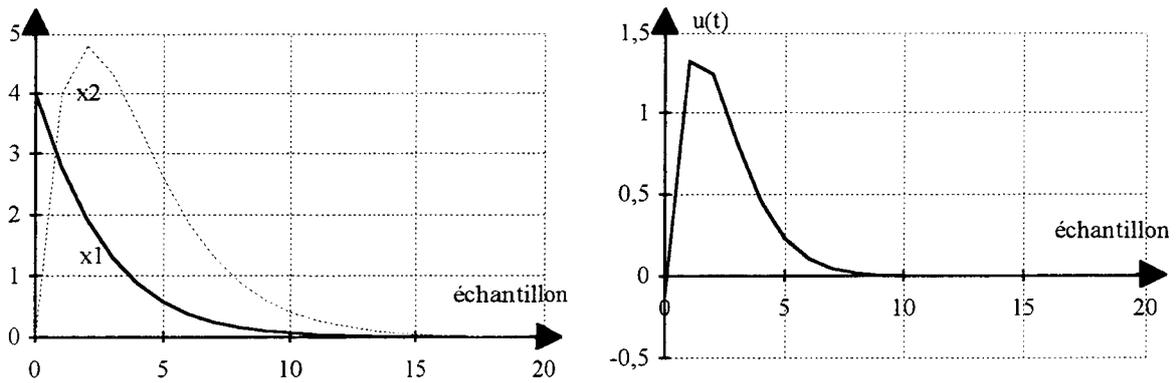


Figure 5.1 : Loi CDF avec CI :  $x(0) = [4 \ 0]^T$

Enfin on peut adjoindre au modèle un observateur puisque la variable  $x_1(t)$  est mesurable.

Ce dernier est calculé par placement de pôles avec :  $P_{\text{butobservateur}}(z) = (z - 0,5)^2$  et le calcul donne un observateur à gain unique :  $K_1 = K_2 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Un résultat avec comme conditions initiales  $x(0) = [4 \ 1]^T$  et  $\hat{x}(0) = [4 \ 0]^T$  est présenté figure 5.2 pour les variables d'état, figure 5.3 pour la commande.

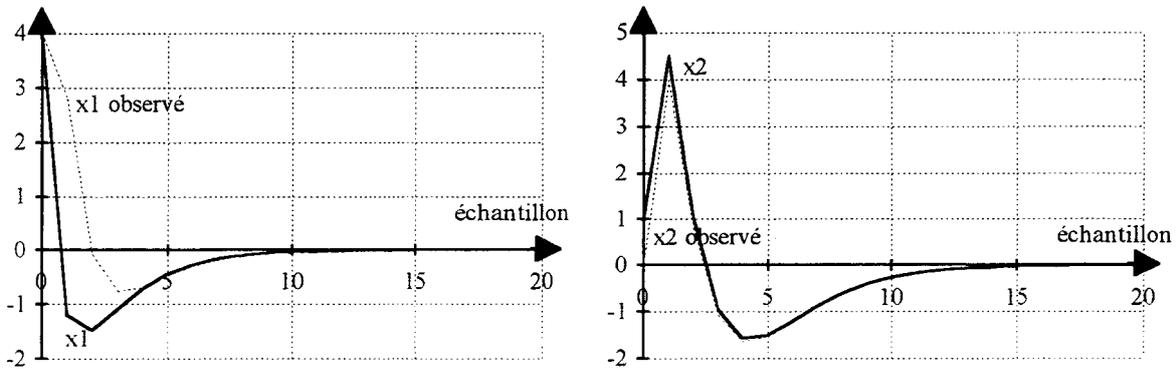


Figure 5.2 : Loi CDF et observateur flou avec CI :  $x(0) = [4 \ 1]^T$  et  $\hat{x}(0) = [4 \ 0]^T$

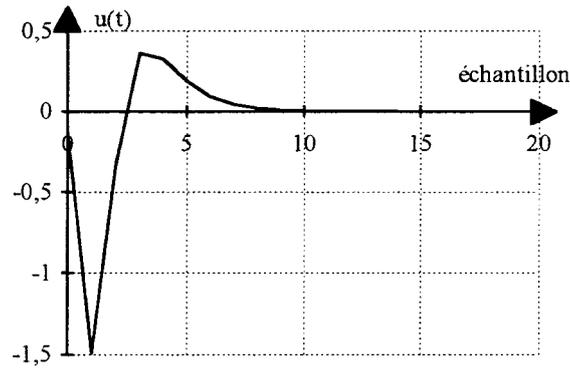


Figure 5.3 : Loi CDF et observateur flou avec CI :  $x(0) = [4 \ 1]^T$  et  $\hat{x}(0) = [4 \ 0]^T$

On peut remarquer qu'il faut 5 échantillons pour que l'observation soit correcte.

Ces extensions au cas discret ayant été aisées à obtenir, il est peut-être intéressant de voir si une loi de type CDF appliquée sur des modèles quelconques (ne vérifiant pas le cas particulier des systèmes MIMO) présente des conditions de stabilité moins restrictives que celles obtenues par une loi de type PDC. Plusieurs approches sont envisageables, une est présentée rapidement ci-après.

### 5.3. Perspectives

On peut très bien envisager d'utiliser des lois de type CDF sur des systèmes MIMO quelconques ayant un modèle de type TSK, en utilisant :

$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0, B_i = k_i B_0 + \Delta B_i$ , avec  $B_0$  choisi par exemple comme la moyenne des  $B_i$ , la loi de commande s'écrivant toujours :

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i F_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i} x(t), \text{ en réécrivant le modèle :}$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + k_i B_0 u(t)) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \Delta B_i u(t) \quad (5.10)$$

il résulte alors en boucle fermée, aussi bien dans le cas continu que dans le cas discret (dans ce dernier cas remplacer  $\dot{x}(t)$  par  $x(t+1)$ ) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i - k_i B_0 F_i)x(t) - \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\Delta B_i \frac{\sum_{j=1}^r h_j(z(t))k_j F_j}{\sum_{j=1}^r h_j(z(t))k_j} x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i - B_i F_i)x(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\Delta B_i F_i x(t) - \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\Delta B_i \frac{\sum_{j=1}^r h_j(z(t))k_j F_j}{\sum_{j=1}^r h_j(z(t))k_j} x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i - B_i F_i)x(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\Delta B_i \left( F_i - \frac{\sum_{j=1}^r h_j(z(t))k_j F_j}{\sum_{j=1}^r h_j(z(t))k_j} \right) x(t) \end{aligned}$$

d'où :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i - B_i F_i)x(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\Delta B_i \frac{\sum_{j=1}^r h_j(z(t))k_j (F_i - F_j)}{\sum_{j=1}^r h_j(z(t))k_j} x(t) \quad (5.11)$$

et on peut donc écrire  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_{i_{BF}} + \Delta A_{i_{BF}})x(t)$  avec :

$$A_{i_{BF}} = A_i - B_i F_i \text{ et } : \Delta A_{i_{BF}} = \Delta B_i \frac{\sum_{j=1}^r h_j(z(t))k_j (F_i - F_j)}{\sum_{j=1}^r h_j(z(t))k_j}.$$

La partie  $\Delta A_{i_{BF}}$  peut alors représenter des incertitudes correspondant à des perturbations variant dans le temps. On peut alors envisager d'utiliser des outils spécifiques à ces types de modèles, par exemple présentés dans /Joh & al. 98/.

Par exemple, dans le cas discret, si  $\Delta A_{i_{BF}} \in \Omega_i$ ,  $\Omega_i$  étant un ensemble compact, le modèle est quadratiquement stable s'il existe une matrice commune  $P > 0$  telle que :

$$i \in \{1, \dots, n\}, \forall E_i \in \Omega_i, (A_{i_{BF}} + E_i)^T P (A_{i_{BF}} + E_i) - P + \lambda I \leq 0$$

Si l'utilisation de tels outils peut être intéressante, il reste à montrer qu'elle peut permettre d'obtenir des résultats moins conservatifs que ceux trouvés dans la littérature. Cette voie est en cours d'élaboration.

## 5.4. Conclusion

Une extension de certaines lois de commande présentées dans le cas continu au chapitre 3, a été proposée dans le cas discret. Elle a permis de montrer que l'ensemble des modèles flous MIMO stabilisables pouvait être étendu dans le cas particulier où  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists k_i > 0 B_i = k_i B_1$ , et qu'un principe de séparation pour le calcul de l'observateur dans ce cas était disponible.

Enfin des perspectives concernant une loi de type CDF appliquée à des modèles flous contenant des incertitudes ont été présentées.



## Conclusion générale

Le premier chapitre a permis de rappeler les bases de la commande floue. Au travers de quelques méthodes développées dans la littérature, l'approche de la stabilité de boucles de régulation comprenant un régulateur flou a également été abordée. Pour les régulateurs flous basés sur un retour de sortie, on retrouve bien sûr la plupart des outils utilisés dans la stabilité des systèmes non linéaires, critère du cercle, critère de Popov modifié, utilisation du problème de L'ure... Pour les régulateurs flous utilisant un retour d'état, une représentation très féconde pour les systèmes non linéaires est la mise sous la forme d'un modèle flou de type Tagagi Sugeno Kang (TSK). La principale approche pour l'étude de la stabilité est alors la méthode de Lyapunov, et les différentes conditions de stabilité obtenues sont rappelées.

Néanmoins, pour l'étude de la stabilité de ces modèles flous de type TSK, plusieurs approches sont envisageables en dehors de la méthode de Lyapunov. Certaines de ces approches, telles que l'analogie avec des systèmes linéaires variant dans le temps ou la mise sous la forme d'un modèle linéaire avec des incertitudes de modélisation, ont été présentées dans le chapitre 2. Notons que les conditions obtenues ne peuvent être que suffisantes, seule la partie conclusion des règles étant prise en compte pour déterminer la stabilité, sans tenir compte de la partie antécédent. Plusieurs approches possibles de stabilisation de ces modèles sont abordées. Des travaux proposent des lois linéaires, mais en général ce sont des lois de commande basées sur le concept PDC (Parallel Distributed Compensation) qui sont utilisées. Le problème de la recherche de gains de commande d'une loi basée sur une PDC peut se mettre sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs), ces outils sont rapidement présentés donnant alors un potentiel très intéressant pour déterminer des conditions suffisantes de stabilisation d'un modèle flou de type TSK. Enfin, le deuxième chapitre a également donné les résultats concernant la mise en œuvre d'un observateur flou. Dans le cas où les variables des prémisses sont mesurables, un théorème de séparation est disponible rendant la recherche des lois de commande par retour d'état (PDC + observateur) très

attractives. Dans le cas où les variables des prémisses font appel des variables reconstruites, le problème devient autrement plus délicat.

Le problème des lois de commande de type PDC est d'introduire pour la boucle fermée complète des modèles croisés : chaque règle du régulateur PDC intervenant dans chaque sous-modèle du modèle flou. Dans une certaine mesure le principe de base des résultats présentés dans le chapitre 3 est d'essayer de limiter l'influence de ces modèles croisés. Dans un premier temps, une proposition de loi pour des modèles flous SIMO (Single Input Multiple Output) continus de type TSK basée sur la stabilisation simultanée d'une famille de modèles SIMO linéaires a été faite. Elle aboutit à des conditions suffisantes de stabilité et comme dans le cas d'une PDC, les prémisses ne sont pas prises en compte et un théorème de séparation dans le cas de l'utilisation d'un observateur flou n'utilisant que des variables de prémisses mesurables est donné.

La deuxième approche proposée permet de donner des conditions générales permettant d'éviter les modèles croisés. Ces conditions devant assurer la continuité des lois de commande proposées, elles ne sont pas applicables directement à l'ensemble des modèles SIMO de type TSK. Néanmoins, en exploitant ces conditions, des cas particuliers intéressants peuvent être obtenus qui s'étendent au cas MIMO et permettent, en éliminant les modèles croisés, de réduire la conservativité des résultats obtenus avec une loi de type PDC. Deux exemples illustrent ces propos. Enfin, dans le cas MIMO (Multiple Input Multiple Output) l'utilisation des outils issus d'une synthèse de type quadratique a permis d'écrire des LMIs dépendant des matrices de pondération.

Deux applications réelles ont alors été traitées dans le chapitre 4. La première concerne une régulation floue de type classique RF-PI permettant de commander le défluxage d'un moteur électrique. Le faible temps de développement de cette application a été un des atouts majeurs pour cette loi de commande.

La seconde application concerne le système bien connu du pendule inversé. L'étude a été menée en premier lieu en simulation. Un modèle flou de type TSK à deux règles a pu être extrait, et trois types de lois ont été étudiées : linéaire, PDC et SSF (Stabilisation Simultanée pour modèles Flous). La plus robuste vis-à-vis des variations paramétriques semblant être la loi de type SSF. En second lieu, sur le système réel ces trois lois ont également été testées en y rajoutant une loi de commande basée sur un retour de sortie et utilisant une base de règles à cardinalité réduite. Les résultats ont confirmé ceux de la partie simulation, et ont permis d'observer que la loi de type retour de sortie avait également un très bon comportement.

Les extensions des lois de commande de type CDF (Compensation et Division pour modèles Flous) à des cas particuliers de modèles discrets MIMO sont abordés dans le dernier chapitre. On montre que les conditions de stabilité obtenues sur ces modèles sont moins conservatives que celles obtenues pour la synthèse d'une loi de type PDC. Enfin, des perspectives intéressantes sont envisageables si on considère les lois de type CDF appliquées sans restriction sur les systèmes MIMO et en faisant appel à des modèles flous contenant des incertitudes.

Il semble que la voie ouverte par ces types de modèles est très prometteuse, surtout à la lumière de tous les travaux issus dans ce domaine durant ces dernières années.



# Bibliographie

**/Anderson 89/**

C.W. ANDERSON

*Learning to control an inverted pendulum using neural networks*

IEEE Control Systems Magazine, vol 9, pp 31-37, 1989

**/Aracil & al. 91/**

J. ARACIL, A. GARCIA-CEREZO, A. BARREIRO, A. OLLERO

*Fuzzy control of dynamical systems. Stability analysis based on the conicity criterion.*

Proceedings of IFSA'91, Brussels, pp 5-8, 1991

**/Barbier & al. 94/**

C.E. BARBIER, B. NOGAREDE, H.L. MEYER

*Conception et contrôle d'une chaîne de traction optimisée pour véhicule électrique*

Actes SIA EA, Toulouse, 1994

**/Bastian 95/**

A. BASTIAN

*Handling the nonlinearity of a fuzzy logic controller at the transition between rules*

Fuzzy Sets and Systems, vol 71, pp 369-387, 1995

**/Bellon & al. 89/**

C. BELLON, P. BOSC, H. PRADE

*Le "boum" du flou au Japon*

Rapport de mission, 1989

**/Bonnemoy & Hamma 91/**

C. BONNEMOY, S.B. HAMMA

*La méthode du recuit simulé : Optimisation globale dans  $R^n$*

APII, vol 25, pp 477-496, 1991

**/Borne 93/**

P. BORNE

*La commande robuste*

Actes 1<sup>er</sup> Congrès AFCET, Versailles, pp 33-45, 1993

**/Borne & al. 93/**

P. BORNE, J.P. RICHARD, N.E. RADHY

*Stabilité, stabilisation, régulation : approche par les normes vectorielles*

Dans Systèmes non linéaires, 2 : Stabilité - stabilisation, Masson Ed. 1993

**/Borne & al. 98/**

P. BORNE, J.-Y. DIEULOT, L. DUBOIS, J. ROZINOER

*Introduction à la commande floue*

Editions Technip, Paris, 1998

**/Boverie & al. 91/**

S. BOVERIE, B. DEMAYA, A. TITLI

*Fuzzy logic control compared with over automatic control approaches*

C.N.R.S., Rapport du G.R. Automatique 91-2 - Projet CS&N, 1991

**/Boverie & al. 92/**

S. BOVERIE, B. DEMAYA, A. TITLI

*Démarche pour la conception d'un contrôleur flou*

C.N.R.S., Rapport du G.R. Automatique 92-2 - Projet CS&N, 1992

**/Boyd & al. 94/**

S. BOYD, L. EL GHAOUI, E. FERON, V. BALAKRISHNAN

*Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*

volume 15 of Studies in Appl. Math. SIAM, Philadelphia, 1994

**/Braae & Rutherford 79/**

M. BRAAE, D.A. RUTHERFORD

*Selection of parameters for a fuzzy logic controller*

Fuzzy Sets and Systems, vol 2, pp 185-199, 1979

**/Bradshaw & Shao 96/**

A. BRADSHAW, J. SHAO

*Swing-up control of inverted pendulum systems*

Robotica, vol 14, pp 397-405, 1996

**/Bülher 94/**

H. BÜLHER

*Réglage par logique floue*

Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1994

**/Cao & al. 90/**

Z. CAO, A. KANDEL, L. LI

*A new model of fuzzy reasoning*

Fuzzy Sets and Systems, vol 36, pp 311-325, 1990

**/Chung & Hauser 95/**

C.C. CHUNG, J. HAUSER  
*Nonlinear Control of a Swinging Pendulum*  
Automatica, vol 31, n°6, pp 851-862, 1995

**/De Larminat 93/**

P. DE LARMINAT  
Automatique : *Commande des systèmes linéaires*  
Traité des nouvelles Technologies, série Automatique, Hermès, Paris, 1993

**/Driankov & al. 93/**

D. DRIANKOV, H. HELLENDORRN, M. REINFRANCK  
*An introduction to fuzzy control*  
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993

**/Dubois & Prade 84/**

D. DUBOIS, H. PRADE  
*Fuzzy logics and the generalized modus ponens revisited*  
Cybernetics and Systems, vol 15, pp 293-331, 1984

**/Dubois & Prade 91/**

D. DUBOIS, H. PRADE  
*Les logiques du flou et du très possible*  
La recherche, n°237, vol 22, pp 1308-1315, 1991

**/El Assoudi & Hammouri 93/**

A. EL ASSOUDI, H. HAMMOURI  
*Commande d'un système mécanique "chariot-pendule"*  
APII, vol 27, n°5, pp 515-539, 1993

**/El Ghaoui & Scorletti 96/**

L. EL GHAOUI, G. SCORLETTI  
*Control of rational systems using linear-fractional representations and linear matrix inequalities*  
Automatica, volume 32, n°9, pp 1273-1284, 1996

**/El Ghaoui 97/**

L. EL GHAOUI  
*Approche LMI pour la commande : une introduction*  
Ecole d'été d'Automatique de Grenoble, identification et commande robustes :  
approche LMI, Septembre 1997

**/Feng & al. 97/**

G. FENG, S.G. CAO, N.W. REES, C.K. CHAK  
*Design of fuzzy control systems with guaranteed stability*  
Fuzzy Sets and Systems, pp 1-10, 1997

**/Foulloy & Galichet 96/**

L. FOULLOY, S. GALICHET

*Évaluation des performances des contrôleurs flous à partir d'un benchmark*

RAIRO-APII-JESA, vol 30, n°5, pp 585-605, 1996

**/Fuh & Tung 97/**

C.-C. FUH, P.-C. TUNG

*Robust stability analysis of fuzzy control systems*

Fuzzy Sets and Systems, pp 289-298, 1997

**/Gahinet & al. 95/**

P. GAHINET, A. NEMIROVSKI, A. LAUB, M. CHILALI

*LMI Control Toolbox*

The MathWorks Inc., Natick, MA, 1995

**/Galichet & Foulloy 95/**

S. GALICHET, L. FOULLOY

*Fuzzy controllers : synthesis and equivalences*

IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol 3, pp 140-148, 1995

**/Glower & Munighan 97/**

J.S. GLOWER, J. MUNIGHAN

*Designing fuzzy controllers from a variable structures standpoint*

IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol 5, n°1, pp 138-144, 1997

**/Guerra 91/**

T.M. GUERRA

*Analyse de données objectifivo-subjectives : approche par la théorie des sous-ensembles flous*

Thèse de Doctorat, L.A.I.H., Université de Valenciennes, 1991

**/Guerra & al. 92/**

T.M. GUERRA, P. LOSLEVER, C. GOMES

*Contrôle flou : méthodes et éléments de réglage*

C.N.R.S., Rapport du G.R. Automatique 92-1 - Projet CS&N, 1992

**/Guerra & Ouattara 93/**

T.M. GUERRA, S. OUATTARA

*Panorama des concepts et évolution des applications de la commande floue*

Actes 1<sup>er</sup> Congrès AFCET, pp 1-10, 1993

**/Guerra & al. 94/**

T.M. GUERRA, G. PAGANELLI, L. VERMEIREN

*Application de la régulation floue à la commande d'un véhicule électrique*

Actes 1<sup>er</sup> symposium sur les perspectives et les applications de la logique floue en Europe, Lille, 1994

**/Guerra & al. 95/**

T.M. GUERRA, L. VERMEIREN, G. PAGANELLI

*Commande floue d'une voiture électrique*

Actes APPLICA'95, Lille, Transports, Développement du véhicule électrique, 1995

**/Guerra & al. 96/**

T.M. GUERRA, L. VERMEIREN, G. PAGANELLI

*Application de la régulation floue pour la commande de l'excitation variable d'un moteur électrique*

Enveloppe Soleau n°27962, Institut National de la Propriété Industrielle, 1996

**/Guerra & al. 97/**

T.M. GUERRA, G. PAGANELLI, L. VERMEIREN, P. PACAUX, O. PETIT, J.P. FOURCROY, T. DESTOOP

*Deux applications industrielles en logique floue*

Actes Journée logique floue et réseaux neuronaux, Toulon, 17 janvier 1997

**/Guerra & al. 98a/**

T.M. GUERRA, O. PETIT, G. PAGANELLI, L. VERMEIREN

*Introduction à la commande floue et exemples d'applications*

Actes Séminaire "Développements récents en modélisation et commande des processus industriels" du Groupe Commande Robuste du GRAISyHM, Lille, 19 mars 1998

**/Guerra & al. 98b/**

T.M. GUERRA, L. VERMEIREN, F. DELMOTTE, P. BORNE

*Lois de commande pour systèmes flous continus*

RAIRO-APII-JESA (soumis)

**/Guerra & Vermeiren 98a/**

T.M. GUERRA, L. VERMEIREN

*Lois de commande pour systèmes flous continus*

Actes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications LFA'98, Rennes, pp 11-18, Cépaduès-Editions, 1998

**/Guerra & Vermeiren 98b/**

T.M. GUERRA, L. VERMEIREN

*Control laws for continuous fuzzy systems*

Proceedings of 5<sup>th</sup> International Conference on Advanced Computer Systems ACS'98, Szczecin, Poland, pp 368-375, 1998

**/Guerra & Vermeiren 98c/**

T.M. GUERRA, L. VERMEIREN

*Control laws for Continuous Fuzzy Systems*

Fuzzy Sets and Systems (acceptée)

**/Jacob 95/**

D. JACOB

*Calcul des correcteurs PID par la méthode des moments pour les systèmes instables en boucle ouverte : application au contrôle d'un pendule inversé*

Revue d'automatique et de productique appliquées, vol 8, n°4, pp 585-608, 1995

**/Jianqin & Laijiu 93/**

C. JIANQIN, C. LAIJU

*Study on stability of fuzzy closed-loop control systems*

Fuzzy Sets and Systems, vol 57, pp 159-168, 1993

**/Joh & al. 98/**

J. JOH, Y.H. CHEN, R. LANGARI

*On the stability issues of linear Takagi-Sugeno fuzzy models*

IEEE transactions on Fuzzy Systems, vol 6, n°3, pp 402-410, 1998

**/Kandel & al. 93/**

A. KANDEL, L. LI, Z. CAO

*Fuzzy inference and its applicability to control systems*

Fuzzy Sets and Systems, vol 48, pp 99-111, 1993

**/Kaufmann 73/**

A. KAUFMANN

*Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*

*TOME 1 : Éléments théoriques de base*

Masson et Cie, Paris, 1973

**/Kickert & Mamdani 78/**

W.J.M. KICKERT, E.H. MAMDANI

*Analysis of a fuzzy logic controller*

Fuzzy Sets and Systems, vol 1, pp 29-44, 1978

**/Kim & al. 95/**

W.C. KIM, S.C. AHN, W.H. KWON

*Stability analysis and stabilization of fuzzy state space models*

Fuzzy Sets and Systems, vol 71, pp 131-142, 1995

**/Kiriakidis & al. 98/**

K. KIRIAKIDIS, A. GRIVAS, A. TZES

*Quadratic stability analysis of the Takagi-Sugeno fuzzy model*

Fuzzy Sets and Systems, vol 98, pp 1-14, 1998

**/Lacrose & al. 96/**

V. LACROSE, J. BRUINZEEL, A. TITLI

*A preliminary study of some rule-base reduction methods*

Proceedings of EUFIT'96, Aachen, pp 1046-1050, 1996

**/Larsen 80/**

P.M. LARSEN

*Industrial Applications of Fuzzy Logic Control*

International Journal of Man-Machine Studies, vol 12, n°1, pp 3-10, 1980

**/Lebrun 97/**

P. LEBRUN

*Réalisation et commande d'un pendule inversé*

Mémoire diplôme d'ingénieur CNAM., Université de Valenciennes, 1997

**/Lee 90/**

C.C. LEE

*Fuzzy logic in control systems : fuzzy logic controller - part I and part II*

IEEE Transactions on systems Man and Cybernetics, vol 20, pp 404-418  
and pp 419-435, 1985

**/Leung & al. 96/**

F.H.F. LEUNG, L.K. WONG, P.K.S. TAM

*Fuzzy model based controller for an inverted pendulum*

Electronics Letters, vol 32, n°18, pp 1683-1685, 1996

**/Lin & al. 96/**

Z. LIN, A. SABERI, M. GUTMANN, Y.A. SHAMASH

*Linear Controller for an Inverted Pendulum Having Restricted Travel : A High-and-Low Gain Approach*

Automatica, vol 32, n°6, pp 933-937, 1996

**/Lo & Kuo 98/**

J.C. LO, Y.H. KUO

*Decoupled fuzzy sliding-mode control*

IEEE transactions on Fuzzy Systems, vol 6, n°3, pp 426-435, 1998

**/Loria & Ortega 96/**

A. LORIA, R. ORTEGA

*Introduction à l'analyse des systèmes par l'approche entrée-sortie*

Dans Systèmes de régulation, Masson Editeur, 1996

**/Louis & al. 95/**

J.P. LOUIS, B. MULTON, M. LAVABRE

*Commande des machines à courant continu à vitesse variable*

Techniques de l'ingénieur, D3610(1)-D3610(14), 1995

**/Ma & al. 98/**

X.J. MA, Z.Q. SUN, Y.Y. HE

*Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer,*

IEEE transactions on Fuzzy Systems, vol 6, n°1, pp 41-50, 1998

**/Mamdani 74/**

E.H. MAMDANI

*Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant*

Proceedings of IEEE, vol 121, n°12, pp 1585-1588, 1974

**/Mamdani & Assilian 75/**

E.H. MAMDANI, S. ASSILIAN

*An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller*

International Journal of Man-Machine Studies, vol 7, n°1, pp 1-13, 1975

**/Marin 95a/**

J.P. MARIN

*Outils pour l'analyse de la stabilité des systèmes bouclés par contrôleur flou*

C.N.R.S., Rapport du G.R. Automatique 95-1 - Projet CS&N, 1995

**/Marin 95b/**

J.P. MARIN

*Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité quadratique d'une classe de systèmes flous*

Actes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, LFA'95, Paris, pp 240-247, Cépaduès-Editions, 1995

**/Masten & Cohen 90/**

M.K. MASTEN, H.E. COHEN

*An advanced showcase of adaptive controller designs*

International Journal of adaptive control and signal processing, vol 4, pp 89-98, 1990

**/Melin & Vidolov 96/**

C. MELIN, B. VIDOLOV

*Stabilisation de systèmes linéaires par des contrôleurs flous (Partie I)*

RAIRO-APII-JESA., volume 30, n°5, pp 679-705, 1996

**/Miyamoto & al. 87/**

S. MIYAMOTO, S. YASUNOBU, H. IHARA

*Predictive fuzzy control and its application to automatic train operation systems*  
in "Analysis of fuzzy information", CRC Press, New York, 1987

**/Mizumoto & Zimmermann 82/**

M. MIZUMOTO, H.J. ZIMMERMANN

*Comparison of fuzzy reasoning methods*

Fuzzy Sets and Systems, vol 8, n°3, pp 253-283, 1982

**/Mizumoto 88/**

M. MIZUMOTO

*Fuzzy controls under various fuzzy reasoning methods*  
Information Sciences, vol 45, pp 129-151, 1988

**/Nesterov & Nemirovsky 94/**

H. NESTEROV, A. NEMIROVSKY

*Interior-point polynomial methods in convex programming*  
SIAM, Philadelphia, PA, 1994

**/Ollero & al. 95/**

A. OLLERO, J. ARACIL, A. GARCIA-CEREZO

*Robust design of rule-based fuzzy controllers*  
Fuzzy Sets and Systems, vol 70, pp 249-273, 1995

**/Ordóñez & al. 97/**

R. ORDÓÑEZ, J. ZUMBERGE, J.T. SPOONER, K.M. PASSINO

*Adaptive fuzzy control : experiments and comparative analyses*  
IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol 5, n°2, pp 167-188, 1997

**/Ouattara & al. 95/**

S. OUATTARA, C. GOMES, T.M. GUERRA

*Obtention de gains robustes pour un régulateur flou par optimisation non linéaire*  
Actes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications,  
pp 234-239 , Paris, 1995

**/Ouattara 96/**

S. OUATTARA

*Mise en œuvre d'une loi de commande adaptative floue indirecte*  
Thèse de Doctorat, LAMIH, Université de Valenciennes, 1996

**/Ouattara & al. 96/**

S. OUATTARA, P. LOSLEVER, T.M. GUERRA

*Towards a methodology for selecting good scaling factors for a fuzzy controller*  
Fuzzy Sets and Systems 83, pp 27-42, 1996

**/Paganelli 94/**

G. PAGANELLI

*Conception et commande d'un véhicule électrique*  
Mémoire diplôme d'ingénieur-maître IUP GEII, Université de Valenciennes, 1994

**/Paganelli & al. 95/**

G. PAGANELLI, T.M. GUERRA, L. VERMEIREN

*Électrification d'un véhicule de série : des composants à la commande floue*  
Actes Colloque Actionneurs et Véhicules Electriques, Amiens, 1995

**/Petersen 87/**

I.R. PETERSEN

*A procedure for simultaneously stabilizing a collection of single input linear systems using non-linear state feedback control*

Automatica, vol 23, n°1, pp 33-40, 1987

**/Rachid & Mehdi 97/**

A. RACHID, D. MEHDI

*Réalisation Réduction et Commande des Systèmes Linéaires*

Editions Technip, Paris, 1997

**/Rambault 93/**

L. RAMBAULT

*Conception d'une commande floue pour une boucle de régulation*

Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 1993

**/Ray & Majumder 84/**

K.S. RAY, D.D. MAJUMDER

*Application of circle criteria for stability analysis of linear SISO and MIMO systems associated with fuzzy logic controllers*

IEEE Transactions on systems Man and Cybernetics, vol 14, N°2, pp 345-349, 1984

**/Siarry 95/**

P. SIARRY

*La méthode du recuit simulé : théorie et applications*

APII, vol 29, n°4-5, pp 535-561, 1995

**/Siler & Ying 89/**

W. SILER, H. YING

*Fuzzy control theory : the linear case*

Fuzzy Sets and Systems, vol 33, pp 275-290, 1989

**/Sio & Lee 98/**

K.C. SIO, C.K. LEE

*Stability of fuzzy PID controllers*

IEEE Trans. SMC, vol 28, n°4, pp 490-495, 1998

**/Sugeno 85/**

M. SUGENO

*An introductory survey of fuzzy control*

Information Sciences, vol 36, pp 59-83, 1985

**/Sugeno & Kang 88/**

M. SUGENO, G.T. KANG

*Structure identification of fuzzy model*

Fuzzy Sets and Systems, vol 28, pp 15-33, 1988

**/Sugeno & al. 91/**

M. SUGENO, T. MUROHUSHI, J. NISHINO, H. MIWA

*Helicopter flight control based on fuzzy logic*

Proceedings of IEEE fuzzy engineering towards human friendly systems, 1991

**/Sujiyama 88/**

K. SUJIYAMA

*Rule based self organizing controller*

Fuzzy Comp., Eds. Gupta & Yamakawa, Elsevier North Holland, Amsterdam 1988

**/Takagi & Sugeno 85/**

T. TAKAGI, M. SUGENO

*Fuzzy identification of systems and Its applications to modeling and control*

IEEE Transactions on systems Man and Cybernetics, vol 15, n°1, pp 116-132, 1985

**/Tanaka & Sugeno 92/**

K. TANAKA, M. SUGENO

*Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems*

Fuzzy Sets and Systems, vol 45, n°2, pp 135-156, 1992

**/Tanaka & Sano 93/**

K. TANAKA, M. SANO

*Fuzzy Criterion of a Class of Nonlinear Systems*

Information Sciences, vol 71, pp 3-26, 1993

**/Tanaka & Sano 94/**

K. TANAKA, M. SANO

*A Robust Stabilization Problem of Fuzzy Control Systems ans Its Application to Backing up Control of a Truck-Trailer*

IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol 2, n°2, pp 119-134, 1994

**/Tanaka & Sano 95/**

K. TANAKA, M. SANO

*Trajectory stabilization of a model car via fuzzy control*

Fuzzy Sets and Systems, vol 70, pp 155-170, 1995

**/Tanaka & al. 96/**

K. TANAKA, T. IKEDA, H.O. WANG

*Robust stabilization of a class of uncertain non linear system via fuzzy control :*

*Quadratic Stabilization,  $H^\infty$  Control Theory, and Linear Matrix Inequalities*

IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol 4, n°1, pp 1-13, 1996

**/Tanaka & al. 98/**

K. TANAKA, T. IKEDA, H.O. WANG

*Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers : Relaxed Stability Conditions and LMI-based Designs*

IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol 6, n°2, pp 1-16, 1998

**/Terano & al. 88/**

T. TERANO, S. MASUI, K. TANAKA, Y. MURAYAMA

*Manual control of an intrinsically unstable system and its modelling by fuzzy logic*  
Information Sciences, vol 45, pp 249-273, 1988

**/Thathachar & Viswanath 97/**

M.A.L. THATHACHAR, P. VISWANATH

*On the Stability of Fuzzy Systems*

IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol 5, N°1, pp 145-151, 1997

**/Toscano & al. 97/**

R. TOSCANO, D. MARTIN-CALLE, P. PASSERIEU

*Adaptation paramétrique floue d'une commande au premier ordre en fonction du point d'équilibre courant*

Actes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, LFA'97, Lyon, pp 3-10, Cépaduès-Editions, 1997

**/Van Der Linden & Lambrechts 93/**

G.W. VAN DER LINDEN, P.F. LAMBRECHTS

*H<sup>∞</sup> control of an experimental inverted pendulum with dry friction*

IEEE Control Systems Magazine, vol 13, pp 44-50, 1993

**/Vermeiren 94/**

L. VERMEIREN

*Mise en œuvre de régulateurs flous pour systèmes multivariables*

Rapport de D.E.A., Université de Valenciennes, 1994

**/Vermeiren & al. 95/**

L. VERMEIREN, T.M. GUERRA, S. OUATTARA

*An example of multivariable system regulated by fuzzy control*

Proceedings of EUFIT'95, Aachen, vol 2, pp 1129-1133, 1995

**/Vermeiren & al. 97a/**

L. VERMEIREN, T.M. GUERRA, G. PAGANELLI

*Application of fuzzy set theory to electric car control*

Cybernetics and Systems, vol 28, n°8, pp 675-693, 1997

**/Vermeiren & al. 97b/**

L. VERMEIREN, P. LEBRUN, T.M. GUERRA, N. DUHEM

*Comparaison de différentes commandes en temps réel d'un pendule inversé*

Actes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, LFA'97, Lyon, pp 17-24, Cépaduès-Editions, 1997

**/Vidolov 93/**

B. VIDOLOV

*Ensemble de règles floues de cardinalité réduite pour la synthèse de lois de commande*

Thèse de Doctorat, UTC, Compiègne, 1993

**/Wang 94/**

L.-X. WANG

*Adaptive fuzzy systems and control : design and stability analysis*

Prentice Hall, New Jersey, 1994

**/Wang 96/**

L.-X. WANG

*Stable Adaptive Fuzzy Controllers with Application to Inverted Pendulum Tracking*

IEEE Transactions on systems Man and Cybernetics, vol 26, n°5, pp 677-691, 1996

**/Wang & al. 96/**

H.O. WANG, K. TANAKA, M. GRIFFIN

*An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems : Stability and Design Issues*

IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol 4, N°1, pp 14-23, 1996

**/Wei & al. 95/**

Q.F. WEI, W.P. DAYAWANSA, W.S. LEVINE

*Nonlinear Controller for an Inverted Pendulum Having Restricted Travel*

Automatica, vol 31, n°6, pp 841-850, 1995

**/Willaeys & Malvache 78/**

D. WILLAEYS, N. MALVACHE

*Use of fuzzy models for process control*

Proceedings of IEEE conference on cybernetics and society, Tokyo, 1978

**/Yamakawa 89/**

T. YAMAKAWA

*Stabilization of an inverted pendulum by a high-speed fuzzy logic controller hardware system*

Fuzzy Sets and Systems, vol 32, pp 161-180, 1989

**/Ying & al. 90/**

H. YING, W. SILER, J.J. BUCKLEY

*Fuzzy control theory : a nonlinear case*

Automatica, vol 26, n°3, pp 513-520, 1990

**/Yu & al. 90/**

C. YU, Z. CAO, A. KANDEL

*Application of fuzzy reasoning to the control of an activated sludge plant*

Fuzzy Sets and Systems, vol 38, pp 1-14, 1990

**/Zadeh 65/**

L.A. ZADEH

*Information and Control*

Fuzzy Sets, vol 8, pp 338-353, 1965

**/Zadeh 75/**

L.A. ZADEH

*Calculus of fuzzy restrictions*

Fuzzy sets and their applications to Cognitive and Decision Processes, pp 1-40,  
Zadeh, Fu, Tanaka, Shimura editors, 1975

**/Zadeh 77/**

L.A. ZADEH

*A theory of approximate reasoning*

Memorandum UCB/ERL - M77/58, 1977

**/Zhao 95/**

J. ZHAO

*System modeling, identification and control using fuzzy logic*

Ph. D. thesis, Université Catholique de Louvain, Belgique, 1995

**/Zhao & al. 96/**

J. ZHAO, R. GOREZ, V. WERTZ

*Fuzzy Controllers with Guaranteed Robustness and Performance*

Proceedings of EUFIT'96, Aachen, pp 1886-1890, 1996

# ANNEXE

## Principe de séparation dans le cas de l'approche utilisant la stabilisation simultanée d'une famille de modèles linéaires (SSF)

Cette annexe présente la démonstration complète du théorème 3.2.8. On rappelle que la loi de commande est donnée dans ce cas, théorème 3.2.1, par  $u(\hat{x}) = g_1(\hat{x}) + g_2(\hat{x})$  avec :

$$g_1(\hat{x}) = \min_i \left( 0, \frac{\hat{x}^T Q_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2}{2B_i^T P \hat{x}} - F_i \hat{x} \right) \quad \text{pour : } i \text{ tel que : } B_i^T P \hat{x} > 0 \quad (\text{A.1})$$

$$g_2(\hat{x}) = \max_i \left( 0, \frac{\hat{x}^T Q_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2}{2B_i^T P \hat{x}} - F_i \hat{x} \right) \quad \text{pour : } i \text{ tel que : } B_i^T P \hat{x} < 0 \quad (\text{A.2})$$

Le modèle complet peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(\hat{x}(t))) \\ \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - K_j C_i) \hat{x}(t) \end{cases} \quad \text{avec : } \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (\text{A.3})$$

*Theoreme 3.2.8 /Guerra & Vermeiren 98c/ :* Supposons qu'il existe deux matrices  $P_c > 0$  et  $P_o > 0$  vérifiant les propriétés suivantes :

- i)  $\forall x \neq 0, V(x) = x^T P_c x$  est strictement décroissante ;
- ii)  $\forall \tilde{x} \neq 0, \tilde{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P_o \tilde{x}$  est strictement décroissante ;

alors le modèle complet (A.3) utilisant la loi de commande définie par (A.1) et (A.2) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

D'après le lemme 3.2.1, chapitre 3, soit  $u(\hat{x}) = g_1(\hat{x})$ , soit  $u(\hat{x}) = g_2(\hat{x})$ .

I - Si  $u(\hat{x}) = g_1(\hat{x}) : \exists j \in \{1, \dots, r\} : B_j^T P \hat{x} > 0$  et  $g_1(\hat{x}) = \frac{\hat{x}^T Q_j \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2}{2B_j^T P \hat{x}} - F_j \hat{x}$

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( -x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_i x + \frac{B_i^T P x}{B_j^T P \hat{x}} (\hat{x}^T Q_j \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2) - 2x^T P B_i F_j \hat{x} \right)$$

et en posant :  $\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \dot{V}_i(x)$ , 3 cas sont distingués :

cas I.1 :  $B_i^T P x < 0$  alors en écrivant :

$x^T P B_i F_i x = x^T P B_i F_i \tilde{x} + x^T P B_i F_i \hat{x}$ , et  $x^T P B_i F_j \hat{x} = x^T P B_i F_j x - x^T P B_i F_j \tilde{x}$ , il vient :

$$\dot{V}_i(x) = -x^T Q_i x - 2x^T P B_i F_j x + 2x^T P B_i (F_i + F_j) \tilde{x} + \frac{B_i^T P x}{B_i^T P \hat{x}} (\hat{x}^T Q_j \hat{x} + 2\hat{x}^T P B_j F_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2) \quad (\text{A.4})$$

D'après la condition (A.3) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) &\leq -\alpha \|x\|^2 + 2x^T P B_i (F_i + F_j) \tilde{x} \leq -\alpha \|x\|^2 + 2\|B_i^T P\| \|F_i + F_j\| \|x\| \|\tilde{x}\| \\ &\leq -\frac{\alpha}{2} \|x\|^2 + \frac{4}{\alpha^2} \|B_i^T P\|^2 \|F_i + F_j\|^2 \|\tilde{x}\|^2 = -\frac{\alpha}{2} \|x\|^2 + a_1 \|\tilde{x}\|^2 \end{aligned}$$

cas I.2 :  $B_i^T P x = 0$  alors :  $\dot{V}_i(x) = -x^T Q_i x$ .

cas I.3 :  $B_i^T P x > 0$ , deux sous-cas sont à envisager :

cas I.3a :  $B_i^T P \hat{x} > 0$ , comme  $j$  correspond au minimum de  $g_1(\hat{x})$  alors :

$$g_1(\hat{x}) \leq \frac{\hat{x}^T Q_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2}{2B_i^T P \hat{x}} - F_i \hat{x} \text{ et on peut écrire :}$$

$$\dot{V}_i(x) \leq -x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_i x + \frac{B_i^T P x}{B_i^T P \hat{x}} (\hat{x}^T Q_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2) - 2x^T P B_i F_i \hat{x}$$

avec :  $x = \hat{x} + \tilde{x}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) &\leq -x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_i \tilde{x} + \left(1 + \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_i^T P \hat{x}}\right) (\hat{x}^T Q_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2) \\ &= -\alpha \|x\|^2 + 2\alpha x^T \tilde{x} - \alpha \|\tilde{x}\|^2 + 2x^T P B_i F_i \tilde{x} - 2x^T Q_i \tilde{x} + \tilde{x}^T Q_i \tilde{x} + \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_i^T P \hat{x}} (\hat{x}^T Q_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2) \\ &= -\alpha \|x\|^2 + 2\alpha x^T \tilde{x} - \alpha \|\tilde{x}\|^2 + 2x^T P B_i F_i \tilde{x} - 2x^T Q_i \tilde{x} + \tilde{x}^T Q_i \tilde{x} \\ &\quad + \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_i^T P \hat{x}} (\hat{x}^T Q_i x - \hat{x}^T Q_i \tilde{x} - \alpha \hat{x}^T x + \alpha \hat{x}^T \tilde{x}) \end{aligned}$$

comme  $B_i^T P \hat{x} > 0$ ,  $\exists \gamma_i > 0$   $\left| \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_i^T P \hat{x}} \right| \leq \gamma_i \frac{\|\tilde{x}\|}{\|\hat{x}\|}$ , de plus, avec  $\bar{\lambda}_i$  la plus grande valeur propre de  $Q_i$  :  $\hat{x}^T Q_i x \leq \bar{\lambda}_i \|\hat{x}\| \|x\|$ , d'où :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) &\leq -\alpha \|x\|^2 + 2\alpha x^T \tilde{x} - \alpha \|\tilde{x}\|^2 + 2x^T P B_i F_i \tilde{x} - 2x^T Q_i \tilde{x} + \tilde{x}^T Q_i \tilde{x} \\ &\quad + \gamma_i \frac{\|\tilde{x}\|}{\|\hat{x}\|} (\bar{\lambda}_i + \alpha) (\|x\| + \|\tilde{x}\|) \|\hat{x}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq -\alpha\|x\|^2 + (\bar{\lambda}_i - \alpha + \gamma_i(\bar{\lambda}_i + \alpha))\|\tilde{x}\|^2 + (2\|B_i^T P\|\|F_i\| + (\gamma_i + 2)(\bar{\lambda}_i + \alpha))\|x\|\|\tilde{x}\| \\ &\leq -\frac{\alpha}{2}\|x\|^2 + \left[ \frac{1}{2\alpha} (2\|B_i^T P\|\|F_i\| + (\gamma_i + 2)(\bar{\lambda}_i + \alpha))^2 + \bar{\lambda}_i - \alpha + \gamma_i(\bar{\lambda}_i + \alpha) \right] \|\tilde{x}\|^2 \end{aligned}$$

et enfin :  $\dot{V}_i(x) \leq -\frac{\alpha}{2}\|x\|^2 + a_{31}\|\tilde{x}\|^2$

cas I.3b :  $B_i^T P\hat{x} < 0$ , à l'aide de (A.4) et en utilisant le fait que :

$$B_i^T P\tilde{x} = B_i^T Px - B_i^T P\hat{x} > 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) &= -x^T Q_i x - 2x^T P B_i F_j x + 2x^T P B_i (F_i + F_j) \tilde{x} \\ &\quad + \left( \frac{B_i^T P\hat{x}}{B_j^T P\hat{x}} + \frac{B_i^T P\tilde{x}}{B_j^T P\hat{x}} \right) (\hat{x}^T Q_j \hat{x} + 2\hat{x}^T P B_j F_i \hat{x} - \alpha\|\hat{x}\|^2) \end{aligned}$$

or d'après la condition (A.3) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) &\leq -\alpha\|x\|^2 + 2x^T P B_i (F_i + F_j) \tilde{x} + \frac{B_i^T P\tilde{x}}{B_j^T P\hat{x}} (\hat{x}^T Q_j \hat{x} + 2\hat{x}^T P B_j F_i \hat{x} - \alpha\|\hat{x}\|^2) \\ &= -\alpha\|x\|^2 + 2x^T P B_i (F_i + F_j) \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P B_i F_i x - 2\tilde{x}^T P B_i F_i \tilde{x} + \frac{B_i^T P\tilde{x}}{B_j^T P\hat{x}} (\hat{x}^T Q_j \hat{x} - \alpha\|\hat{x}\|^2) \\ &= -\alpha\|x\|^2 + 2x^T P B_i (F_i + F_j) \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P B_i F_i x - 2\tilde{x}^T P B_i F_i \tilde{x} \\ &\quad + \frac{B_i^T P\tilde{x}}{B_j^T P\hat{x}} (\hat{x}^T Q_j x - \hat{x}^T Q_j \tilde{x} - \alpha\hat{x}^T \tilde{x} + \alpha\hat{x}^T \hat{x}) \end{aligned}$$

comme  $B_j^T P\hat{x} > 0$ ,  $\exists \delta_{ij} > 0$   $\left| \frac{B_i^T P\tilde{x}}{B_j^T P\hat{x}} \right| \leq \delta_{ij} \frac{\|\tilde{x}\|}{\|\hat{x}\|}$ , de plus, avec  $\bar{\lambda}_j$  la plus grande valeur propre de  $Q_j$  :  $\hat{x}^T Q_j x \leq \bar{\lambda}_j \|\hat{x}\| \|x\|$ , d'où :

$$\begin{aligned} \frac{B_i^T P\tilde{x}}{B_j^T P\hat{x}} (\hat{x}^T Q_j x - \hat{x}^T Q_j \tilde{x} - \alpha\hat{x}^T x + \alpha\hat{x}^T \tilde{x}) &\leq \delta_{ij} \frac{\|\tilde{x}\|}{\|\hat{x}\|} (\bar{\lambda}_j + \alpha) (\|x\| + \|\tilde{x}\|) \|\hat{x}\| \\ &= \delta_{ij} (\bar{\lambda}_j + \alpha) (\|x\| + \|\tilde{x}\|) \|\tilde{x}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) &\leq -\alpha\|x\|^2 + (2\|B_i^T P\|(\|F_i + F_j\| + \|F_i\|) + \delta_{ij}(\bar{\lambda}_j + \alpha))\|x\|\|\tilde{x}\| \\ &\quad + (2\|B_i^T P\|\|F_i\| + \delta_{ij}(\bar{\lambda}_j + \alpha))\|\tilde{x}\|^2 \\ &\leq -\frac{\alpha}{2}\|x\|^2 + \left[ \frac{1}{2\alpha} (2\|B_i^T P\|(\|F_i + F_j\| + \|F_i\|) + \delta_{ij}(\bar{\lambda}_j + \alpha))^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\|B_i^T P\|\|F_i\| + \delta_{ij}(\bar{\lambda}_j + \alpha) \right] \|\tilde{x}\|^2 \end{aligned}$$

et enfin :  $\dot{V}_i(x) \leq -\frac{\alpha}{2}\|x\|^2 + a_{32}\|\tilde{x}\|^2$

$\Pi$  - Si  $u(\hat{x}) = g_2(\hat{x}) : \exists j \in \{1, \dots, r\} : B_j^T P \hat{x} < 0$  et  $g_2(\hat{x}) = \frac{\hat{x}^T Q_j \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2}{2 B_j^T P \hat{x}} - F_j \hat{x} > 0$

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( -x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_i x + \frac{B_i^T P x}{B_i^T P \hat{x}} \left( \hat{x}^T Q_j \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2 \right) - 2x^T P B_i F_j \hat{x} \right)$$

et en posant :  $\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \dot{V}_i(x)$ , 3 cas sont distingués :

*cas II.1* :  $B_i^T P x < 0$ , deux sous-cas sont à envisager :

*cas II.1a* :  $B_i^T P \hat{x} < 0$ , comme  $j$  correspond au maximum de  $g_2(\hat{x})$  alors :

$$g_2(\hat{x}) \geq \frac{\hat{x}^T Q_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2}{2 B_i^T P \hat{x}} - F_i \hat{x} \text{ et on peut écrire :}$$

$$\dot{V}_i(x) \leq -x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_i x + \frac{B_i^T P x}{B_i^T P \hat{x}} \left( \hat{x}^T Q_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2 \right) - 2x^T P B_i F_i \hat{x}$$

avec :  $x = \hat{x} + \tilde{x}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) &\leq -x^T Q_i x + 2x^T P B_i F_i \tilde{x} + \left( 1 + \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_i^T P \hat{x}} \right) \left( \hat{x}^T Q_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2 \right) \\ &= -\alpha \|x\|^2 + 2\alpha x^T \tilde{x} - \alpha \|\tilde{x}\|^2 + 2x^T P B_i F_i \tilde{x} - 2x^T Q_i \tilde{x} + \tilde{x}^T Q_i \tilde{x} + \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_i^T P \hat{x}} \left( \hat{x}^T Q_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2 \right) \\ &= -\alpha \|x\|^2 + 2\alpha x^T \tilde{x} - \alpha \|\tilde{x}\|^2 + 2x^T P B_i F_i \tilde{x} - 2x^T Q_i \tilde{x} + \tilde{x}^T Q_i \tilde{x} \\ &\quad + \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_i^T P \hat{x}} \left( \hat{x}^T Q_i x - \hat{x}^T Q_i \tilde{x} - \alpha \hat{x}^T x + \alpha \hat{x}^T \tilde{x} \right) \end{aligned}$$

comme  $B_i^T P \hat{x} < 0$ ,  $\exists \gamma_i > 0$   $\left| \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_i^T P \hat{x}} \right| \leq \gamma_i \frac{\|\tilde{x}\|}{\|\hat{x}\|}$ , de plus, avec  $\bar{\lambda}_i$  la plus grande valeur propre de

$Q_i$  :  $\hat{x}^T Q_i x \leq \bar{\lambda}_i \|\hat{x}\| \|x\|$ , d'où :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) &\leq -\alpha \|x\|^2 + 2\alpha x^T \tilde{x} - \alpha \|\tilde{x}\|^2 + 2x^T P B_i F_i \tilde{x} - 2x^T Q_i \tilde{x} + \tilde{x}^T Q_i \tilde{x} \\ &\quad + \gamma_i \frac{\|\tilde{x}\|}{\|\hat{x}\|} (\bar{\lambda}_i + \alpha) (\|x\| + \|\tilde{x}\|) \|\hat{x}\| \end{aligned}$$

$$\leq -\alpha \|x\|^2 + (\bar{\lambda}_i - \alpha + \gamma_i (\bar{\lambda}_i + \alpha)) \|\tilde{x}\|^2 + (2 \|B_i^T P\| \|F_i\| + (\gamma_i + 2) (\bar{\lambda}_i + \alpha)) \|x\| \|\tilde{x}\|$$

$$\leq -\frac{\alpha}{2} \|x\|^2 + \left[ \frac{1}{2\alpha} (2 \|B_i^T P\| \|F_i\| + (\gamma_i + 2) (\bar{\lambda}_i + \alpha))^2 + \bar{\lambda}_i - \alpha + \gamma_i (\bar{\lambda}_i + \alpha) \right] \|\tilde{x}\|^2$$

$$\text{et enfin : } \dot{V}_i(x) \leq -\frac{\alpha}{2} \|x\|^2 + a_{i1} \|\tilde{x}\|^2$$

cas II.1b :  $B_i^T P \hat{x} > 0$ , à l'aide de (A.4) et en utilisant le fait que :

$$B_i^T P \tilde{x} = B_i^T P x - B_i^T P \hat{x} < 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) = & -x^T Q_i x - 2x^T P B_i F_j x + 2x^T P B_i (F_i + F_j) \tilde{x} \\ & + \left( \frac{B_i^T P \hat{x}}{B_j^T P \hat{x}} + \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_j^T P \tilde{x}} \right) \left( \hat{x}^T Q_j \hat{x} + 2\hat{x}^T P B_j F_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2 \right) \end{aligned}$$

or d'après la condition (A.3) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) \leq & -\alpha \|x\|^2 + 2x^T P B_i (F_i + F_j) \tilde{x} + \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_j^T P \tilde{x}} \left( \hat{x}^T Q_j \hat{x} + 2\hat{x}^T P B_j F_i \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2 \right) \\ = & -\alpha \|x\|^2 + 2x^T P B_i (F_i + F_j) \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P B_i F_i x - 2\tilde{x}^T P B_i F_i \tilde{x} + \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_j^T P \tilde{x}} \left( \hat{x}^T Q_j \hat{x} - \alpha \|\hat{x}\|^2 \right) \\ = & -\alpha \|x\|^2 + 2x^T P B_i (F_i + F_j) \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P B_i F_i x - 2\tilde{x}^T P B_i F_i \tilde{x} \\ & + \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_j^T P \tilde{x}} \left( \hat{x}^T Q_j x - \hat{x}^T Q_j \tilde{x} - \alpha \hat{x}^T \tilde{x} + \alpha \hat{x}^T \tilde{x} \right) \end{aligned}$$

comme  $B_j^T P \hat{x} < 0$ ,  $\exists \delta_{ij} > 0$   $\left| \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_j^T P \tilde{x}} \right| \leq \delta_{ij} \frac{\|\tilde{x}\|}{\|\hat{x}\|}$ , de plus, avec  $\bar{\lambda}_j$  la plus grande valeur propre de  $Q_j$  :  $\hat{x}^T Q_j x \leq \bar{\lambda}_j \|\hat{x}\| \|x\|$ , d'où :

$$\begin{aligned} \frac{B_i^T P \tilde{x}}{B_j^T P \tilde{x}} \left( \hat{x}^T Q_j x - \hat{x}^T Q_j \tilde{x} - \alpha \hat{x}^T x + \alpha \hat{x}^T \tilde{x} \right) & \leq \delta_{ij} \frac{\|\tilde{x}\|}{\|\hat{x}\|} (\bar{\lambda}_j + \alpha) (\|x\| + \|\tilde{x}\|) \|\hat{x}\| \\ & = \delta_{ij} (\bar{\lambda}_j + \alpha) (\|x\| + \|\tilde{x}\|) \|\tilde{x}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) \leq & -\alpha \|x\|^2 + \left( 2 \|B_i^T P\| (\|F_i + F_j\| + \|F_i\|) + \delta_{ij} (\bar{\lambda}_j + \alpha) \right) \|x\| \|\tilde{x}\| \\ & + \left( 2 \|B_i^T P\| \|F_i\| + \delta_{ij} (\bar{\lambda}_j + \alpha) \right) \|\tilde{x}\|^2 \\ \leq & -\frac{\alpha}{2} \|x\|^2 + \left[ \frac{1}{2\alpha} \left( 2 \|B_i^T P\| (\|F_i + F_j\| + \|F_i\|) + \delta_{ij} (\bar{\lambda}_j + \alpha) \right)^2 \right. \\ & \left. + 2 \|B_i^T P\| \|F_i\| + \delta_{ij} (\bar{\lambda}_j + \alpha) \right] \|\tilde{x}\|^2 \end{aligned}$$

et enfin :  $\dot{V}_i(x) \leq -\frac{\alpha}{2} \|x\|^2 + \alpha_{12} \|\tilde{x}\|^2$

cas II.2 :  $B_i^T P x = 0$  alors :  $\dot{V}_i(x) = -x^T Q_i x$ .

cas II.3 :  $B_i^T P x > 0$  en utilisant l'équation (A.4) et d'après la condition (A.3) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) &\leq -\alpha \|x\|^2 + 2x^T P B_i (F_i + F_j) \tilde{x} \leq -\alpha \|x\|^2 + 2 \|B_i^T P\| \|F_i + F_j\| \|x\| \|\tilde{x}\| \\ &\leq -\frac{\alpha}{2} \|x\|^2 + \frac{4}{\alpha^2} \|B_i^T P\|^2 \|F_i + F_j\|^2 \|\tilde{x}\|^2 = -\frac{\alpha}{2} \|x\|^2 + \alpha_3 \|\tilde{x}\|^2 \end{aligned}$$

Dans tous les différents cas on a donc avec  $\underline{\lambda}_i$  désignant la plus petite valeur propre de  $Q_i$  :  $x^T Q_i x \geq \underline{\lambda}_i \|x\|^2$ ,  $\alpha^* = \min\left(\frac{\alpha}{2}, \underline{\lambda}_i\right)$  :  $\dot{V}_i(x) \leq -\alpha^* \|x\|^2 + \rho_i \|\tilde{x}\|^2$  et en posant :  $\rho = \sum_{i=1}^r h_i(x) \rho_i$  il vient :  $\dot{V}(x) \leq -\alpha^* \|x\|^2 + \rho \|\tilde{x}\|^2$ .

Or, avec  $\underline{\lambda}$  désignant la plus petite valeur propre d'une matrice  $P$  et  $\bar{\lambda}$  la plus grande :

$$\underline{\lambda}_c \|x\|^2 \leq x^T P_c x \leq \bar{\lambda}_c \|x\|^2 \text{ et } \underline{\lambda}_o \|\tilde{x}\|^2 \leq \tilde{x}^T P_o \tilde{x} \leq \bar{\lambda}_o \|\tilde{x}\|^2$$

$$\text{donc : } \dot{V}(x) \leq -\frac{\alpha^*}{\underline{\lambda}_c} V(x) + \frac{\rho}{\underline{\lambda}_o} \tilde{V}(\tilde{x}).$$

D'autre part comme  $\forall \tilde{x} \neq 0, \tilde{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P_o \tilde{x}$  est strictement décroissante :

$$\exists \beta > 0, \dot{\tilde{V}}(\tilde{x}) \leq -\beta \|\tilde{x}\|^2 \text{ d'où : } \dot{\tilde{V}}(\tilde{x}) \leq -\frac{\beta}{\underline{\lambda}_o} \tilde{V}(\tilde{x}).$$

$$\text{Donc : } \begin{bmatrix} \dot{V}(x) \\ \dot{\tilde{V}}(\tilde{x}) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\frac{\alpha^*}{\underline{\lambda}_c} & \frac{\rho}{\underline{\lambda}_o} \\ 0 & -\frac{\beta}{\underline{\lambda}_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(x) \\ \tilde{V}(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

En construisant le système de comparaison :  $\dot{w} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha^*}{\underline{\lambda}_c} & \frac{\rho}{\underline{\lambda}_o} \\ 0 & -\frac{\beta}{\underline{\lambda}_o} \end{bmatrix} w$ , qui est évidemment

globalement asymptotiquement stable, et en utilisant le principe de comparaison vectorielle /Borne & al. 93/ le modèle complet défini équation (A.3) est globalement asymptotiquement stable.

□



# Proposition de lois de commande pour la stabilisation de modèles flous

## RÉSUMÉ :

Depuis plusieurs années, des travaux traitant du problème de l'analyse de la stabilité d'une boucle de régulation floue comprenant un modèle flou de type Takagi Sugeno Kang (TSK) ont vu le jour.

La stabilité de ces modèles a été étudiée à partir de plusieurs points de vue (approche par Lyapunov, analogie avec des modèles linéaires variant dans le temps, mise sous la forme d'un modèle linéaire avec des incertitudes de modélisation...). Ainsi, le problème est de pouvoir déterminer une loi de commande stabilisante, qui très souvent est basée sur une synthèse classique rencontrée dans la littérature et baptisée PDC (Parallel Distributed Compensation). Dans ce cas, la partie conclusion de la loi de commande floue est une loi de commande par retour d'état et l'analyse de la stabilité de tels systèmes commandés se fait en utilisant une approche de type Lyapunov.

Le travail présenté dans ce mémoire propose un certain nombre de lois de commande pour les modèles flous de la forme TSK qui ne sont pas directement basées sur le concept PDC.

Dans un premier temps, est proposée, une première approche inspirée de la stabilisation simultanée d'une famille de modèles linéaires SIMO. Des conditions suffisantes d'existence d'une loi de commande pour des modèles flous continus SIMO de type TSK sont données ainsi qu'un principe de séparation permettant l'utilisation d'un observateur flou. Ensuite, une seconde approche propose sur une famille de modèles particuliers, qui s'étendent au cas multivariable, des conditions qui permettent de réduire la conservativité de certains résultats trouvés dans la littérature. Un principe de séparation est également donné pour ces modèles particuliers permettant le calcul d'un observateur. Dans le cas MIMO, les outils de la commande optimale sont utilisés pour résoudre le problème de la commande et de l'observation.

Pour ces approches les propriétés de stabilité peuvent être déduites efficacement en résolvant numériquement un ensemble d'inégalités linéaires matricielles (LMIs) au moyen d'outils informatiques et mathématiques issus de l'optimisation convexe.

Enfin deux applications réelles ont été traitées. La première concerne une régulation floue de type classique permettant de commander le défluxage d'un moteur électrique. La seconde application concerne le système bien connu du pendule inversé qui a permis de valider ces différentes approches.

**Mots-clés :** Commande floue, Modèle flou, Stabilité par Lyapunov, Stabilisation quadratique, Observateur flou, Inégalité Linéaire Matricielle, voiture électrique, pendule inversé.

## Proposition of control laws for fuzzy models stabilization

### ABSTRACT :

For several years, the stability analysis of a closed loop including a fuzzy controller has been studied. Especially with the state space approach, the stability analysis is concerned with a Takagi-Sugeno-Kang fuzzy models.

This analysis can be done using several methods, for example, Lyapunov approach, equivalence with switching systems, taking into account a fuzzy model as a linear one with uncertainties...

A classical way to find a fuzzy control law is the use of a Parallel Distributed Compensation (PDC). This one remains in local state feedback laws for each rule of the controller and the stability analysis is done with a Lyapunov approach.

This work presents control laws, mainly, for continuous fuzzy models of Takagi-Sugeno-Kang which are not directly put in a PDC form.

A first approach is related to the work on simultaneous quadratic stabilization of a family of linear SIMO systems. Sufficient conditions to derive a stabilizing control law for TSK SIMO continuous fuzzy systems are given and a separation principle is also provided with a fuzzy observer.

A second approach based on a particular family of MIMO TSK fuzzy models allows to reduce the conservatism of results found in the literature and a separation principle is also given in these cases.

For MIMO TSK fuzzy models we also give sufficient conditions of stabilization using optimal control tools.

All stability approaches studied can be converted into convex optimization problems over Linear Matrix Inequalities (LMIs) constraints. These optimization problems can be solved with efficient algorithms.

At last, two real-time applications are treated. The first one is concerned with electrical vehicle control, and the second is the well-known inverted pendulum system.

**Keywords :** Fuzzy control, Linear Matrix Inequality, Electric car, Inverted pendulum

server, Linear Matrix

Bibliothèque Universitaire de Valenciennes



00905142