



**HAL**  
open science

# Courbes rationnelles (BR) à grandes régularités : cas du cercle

Isabelle Cattiaux-Huillard

► **To cite this version:**

Isabelle Cattiaux-Huillard. Courbes rationnelles (BR) à grandes régularités : cas du cercle. Mathématiques [math]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 1997. Français. NNT : 1997VALE0022 . tel-03464312

**HAL Id: tel-03464312**

**<https://uphf.hal.science/tel-03464312v1>**

Submitted on 3 Dec 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

1997 VALE 0022

N° d'ordre : 97-27



# THÈSE

*présentée à*

L'UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES ET DU HAINAUT CAMBRÉSIS

*en vue d'obtenir le titre de*

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ**

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

*par*

**Isabelle CATTIAUX-HUILLARD**

**Courbes Rationnelles (BR) à Grandes Régularités.  
Cas du Cercle.**

*Soutenue le 19 Septembre 1997 devant la Commission d'Examen :*

Président : S. Nicaise, Université de Valenciennes  
Rapporteurs : P.-J. Laurent, Université de Grenoble I  
P. Sablonnière, INSA de Rennes  
Examineurs : J.-C. Fiorot, Université de Valenciennes  
P. Jeannin, Université du Littoral  
A. Le Méhauté, Université de Nantes



N° d'ordre : 97-27



# THÈSE

*présentée à*

L'UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES ET DU HAINAUT CAMBRÉSIS

*en vue d'obtenir le titre de*

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

*par*

**Isabelle CATTIAUX-HUILLARD**

**Courbes Rationnelles (BR) à Grandes Régularités.  
Cas du Cercle.**

*Soutenue le 19 Septembre 1997 devant la Commission d'Examen :*

Président : S. Nicaise, Université de Valenciennes  
Rapporteurs : P.-J. Laurent, Université de Grenoble I  
P. Sablonnière, INSA de Rennes  
Examineurs : J.-C. Fiorot, Université de Valenciennes  
P. Jeannin, Université du Littoral  
A. Le Méhauté, Université de Nantes

## REMERCIEMENTS

Je suis heureuse de pouvoir exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur J.-C Fiorot, directeur de cette thèse, pour le rôle initiateur qu'il a joué dans mes recherches, pour ses conseils et pour son soutien constant tout au long de mon travail.

Je voudrais également exprimer ma vive gratitude envers Messieurs les Professeurs P.-J Laurent et P. Sablonnière qui se sont intéressés à ce travail, y ont apporté leurs remarques fructueuses et ont accepté d'être rapporteurs et membres du jury.

Je souhaiterais aussi adresser mes remerciements sincères à Messieurs les Professeurs P. Jeannin, A. Le Méhauté et S. Nicaise qui ont participé à l'examen et au jury de cette thèse.

Enfin, je tiens à remercier toutes celles et ceux qui m'ont soutenue et ont contribué au bon déroulement de ce travail.

## Résumé

Beaucoup de formes et d'objets en mathématiques de la CAO sont définis à partir du cercle à l'aide de transformations géométriques élémentaires ou de déformations. D'où l'intérêt de proposer une paramétrisation du cercle comme courbe (BR), image de  $[0,1]$ , bien adaptée à la CAO. Dans les Chapitres 2 et 3, nous déterminons plusieurs polygones massiques de contrôle respectivement à 5, 7, 9, 11 vecteurs massiques, permettant d'obtenir la fermeture  $C_k$  ( $k = 1$  à 5) du cercle complet. Dans chaque cas, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour n'obtenir que des vecteurs massiques à masse strictement positive.

Plus important est de fournir une paramétrisation du cercle entier aussi uniforme que possible. Les représentations précédemment citées comportent deux degrés de liberté que nous mettons à profit dans le Chapitre 4 pour obtenir une représentation quasi-uniforme du cercle: les images des valeurs  $i/n$  de  $[0,1]$  sont aussi régulièrement espacées que possible sur le cercle. Nous proposons des solutions à 5 et 7 vecteurs massiques correspondant à un cercle fermé  $C_1$  et  $C_3$ . La qualité de ces représentations, mise en évidence par l'estimation de l'erreur, est confirmée par des figures.

Au Chapitre 5, nous nous sommes intéressés à un autre problème fréquemment abordé en géométrie de la CAO: Pour une courbe rationnelle donnée, peut-on obtenir par élévations successives de la longueur, un polygone de contrôle dont tous les vecteurs massiques sont à masses positives? Pour certains types de polygones massiques nous répondons par quelques conditions nécessaires ou suffisantes, et par une évaluation du nombre d'itérations nécessaires.

**Mots-Clés:** Courbe B-rationnelle, Cercle, Changement de variable, Régularité, Paramétrisation uniforme, Polygone massique, Masse positive, Élévation de longueur.

# Table des matières:

Introduction générale	1
1 Introduction-Notations	3
1.1 Les courbes Bézier-de Casteljau	3
1.2 L'espace des vecteurs massiques	5
1.3 Les courbes rationnelles	6
2 Le cercle comme courbe (BR) fermée $C^k$ , image de $[0,1]$	9
2.1 Introduction: le cercle comme courbe (BR) image de $[0,1]$	9
2.2 Un autre cercle fermé $C^1$ -continûment	11
2.3 Un cercle fermé $C^3$ -continûment	16
2.4 Deux formes du cercle fermé $C^5$ -continûment	17
3 Courbes (BR) et changements de variable, formule générale et applications: différentes formes (BR) du cercle	21
3.1 Introduction	21
3.2 Une relation matricielle	22
3.3 Algorithme de calcul de la matrice $K_F$	25
3.4 Cas particulier: $B(u) = B_1^2(u)$	27
3.5 Forme (BR) des cercles $C^k, k = 1, 3, 5$	33
3.5.1 Forme (BR) du cas quadratique	33
3.5.2 Forme (BR) d'un cercle fermé $C^3$ -continûment	36
3.5.3 Forme (BR) d'un cercle fermé $C^5$ -continûment: cas $\frac{4}{2}$	39
3.5.4 Forme (BR) d'un cercle fermé $C^5$ -continûment: cas $\frac{4}{2}$	43

4	Paramétrisation quasi-uniforme du cercle entier	48
4.1	Introduction	48
4.2	Paramétrisation quasi-uniforme d'un arc de cercle	49
4.3	Un cercle entier: le problème	56
4.4	Solution pour un cercle fermé $C^1$ -continûment	58
4.5	Solution pour un cercle fermé $C^3$ -continûment	65
5	Elévation de la longueur d'un polygone de contrôle et masses positives	72
5.1	Introduction et résultats préliminaires	72
5.2	Résultats généraux	75
5.3	Le cas quadratique: $n = 2$	87
5.4	Le cas cubique: $n = 3$	97
	Références bibliographiques	103
	Lexique	106

# Introduction générale

Fiorot et Jeannin, dans leurs travaux [1, 2, 3], développés dans l'ouvrage [4], ont proposé une structure générale de représentation des courbes rationnelles appelée *courbe B-rationnelle* ou *courbe (BR)*.

Les courbes rationnelles sont formalisées par un polygone massique de contrôle constitué d'un nombre fini de vecteurs massiques (vecteurs purs ou points pondérés). La manipulation de ces courbes par les systèmes logiciels de CAO et de CFAO bénéficie alors de la stabilité optimale de la base de Bernstein démontré par Farouki et Goodman [5] sur laquelle repose cette représentation.

C'est dans ce cadre que se situe le présent travail.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à certains problèmes de régularité concernant le cercle, figure fondamentale de la géométrie de la CAO. Il permet, par des transformations géométriques affines ou projectives (rotations, symétries, projections, ...) ou des déformations, d'obtenir d'autres courbes (coniques) et surfaces (sphères, tores, ...). La paramétrisation rationnelle naturelle du cercle ne décrit qu'une portion de cercle sur l'intervalle d'étude fini de la forme (BR). Dans le but d'obtenir un cercle complet, image d'un intervalle fini (ici  $[0,1]$ ), nous étudions dans le *Chapitre 2* différents changements de variable rationnels de degrés  $\frac{2}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ , et  $\frac{4}{4}$  ou  $\frac{5}{2}$ . Ils permettent d'obtenir un cercle entier fermé respectivement  $C^1$ ,  $C^3$  et  $C^5$ .

Les articles de Fiorot, Jeannin et Taleb [6, 7] étudient des méthodes permettant de déterminer le polygone massique après un changement de paramètre rationnel quadratique ou homographique. Le *Chapitre 3* propose une extension de ces résultats aux changements de paramètre de degré quelconque. Nous les utilisons pour déterminer les polygones de contrôle du cercle à partir des nouvelles paramétrisations étudiées dans le chapitre précédent. Nous énonçons également les conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles on obtient un polygone à masses toutes strictement positives. Cette dernière exigence répond à la demande actuelle des logiciels de CAO et de CFAO utilisant le format IGES qui n'accepte ni les vecteurs purs, ni les points pondérés de masses négatives dans le cadre d'échanges de données.

Farouki et Sakkalis [8] ont prouvé qu'une courbe différente d'une portion de droite, n'admet pas de paramétrage rationnel dont le paramètre soit son abscisse curviligne. La courbe ne peut donc pas être parcourue à vitesse constante. Le *Chapitre 4* met à profit les deux degrés de liberté des représentations du cercle décrites dans le chapitre

précédent pour pallier à cette impossibilité théorique. Nous recherchons une représentation quasi-uniforme du cercle: il s'agit d'obtenir comme images des valeurs  $\frac{i}{n}$ ,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  de l'intervalle de définition  $[0, 1]$ , des points aussi régulièrement espacés que possible sur le cercle. Nous proposons ici des solutions dans le cas d'un cercle complet obtenu après un changement de variable quadratique ou de degré  $\frac{3}{2}$ . Des exemples numériques confirment l'intérêt de ces résultats.

Le dernier point de ce travail concerne la détermination de polygones de contrôle d'une courbe quelconque, à masses toutes strictement positives, par élévations successives de la longueur. La courbe décrite par un tel polygone est inscrite dans l'enveloppe convexe des  $\Pi$ -projections de ses vecteurs massiques. La méthode d'élévation de longueur permet de conserver la paramétrisation de la courbe. Le *Chapitre 5* est consacré à l'étude des conditions que doit remplir un polygone massique initial pour que l'on puisse obtenir par cette méthode un nouveau polygone à masses toutes positives. Rappelons que ces conditions ne sont jamais satisfaites lorsque la courbe présente un point à l'infini pour une valeur de l'intervalle de définition. Dans certain cas, nous remarquons que nous obtenons certes un polygone à masses toutes positives mais que l'enveloppe convexe des  $\Pi$ -projections est trop éloignée de la courbe pour permettre une localisation significative de celle-ci. Nous proposons également, dans certains cas, une évaluation du nombre d'itérations nécessaires.

# Chapitre 1

## Introduction-Notations

Nous rappelons ici quelques définitions et résultats fondamentaux issus de l'ouvrage de Fiorot et Jeannin [4] présentant les courbes B-rationnelles.

### 1.1 Les courbes Bézier-de Casteljau

Introduite par de Casteljau [9, 10] et Bézier [11, 12], cette forme permet de contrôler une courbe polynomiale d'un espace affine  $\mathcal{E}$  à l'aide d'un polygone de points de  $\mathcal{E}$ . Cette structure se fonde sur la base polynomiale de Bernstein.

**Définition:** La famille de polynômes  $\left\{ B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, i \in \{0, \dots, n\} \right\}$  est une base de l'espace  $\mathbb{P}_n$  des polynômes de degré au plus  $n$ , appelée base de Bernstein de degré  $n$ .

Rappelons que Farouki et Goodman [5] ont prouvé que cette base possède une stabilité optimale, dans le sens suivant: Si les coefficients d'un polynôme  $p$  exprimé dans différentes bases sont affectés d'erreurs aléatoires, les perturbations de la valeur  $p(t)$  qui en résultent sont minimales pour la base de Bernstein.

C'est dans cette base que sont définies les courbes Bézier-de Casteljau:

**Définition:** Soit  $P = (P_0, P_1, \dots, P_n)$  un  $(n+1)$ -uplet de points d'un espace affine  $\mathcal{E}$  ( $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$ ). On appelle courbe Bézier polynomiale (BP) sur  $[0, 1]$  la courbe paramétrée

$$BP[P](t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$$

décrite pour  $t \in [0, 1]$ .

- $P$  est le polygone Bézier-de Casteljau ou polygone de contrôle de la courbe.
- $n$  est la longueur de la courbe (elle est supérieure ou égale au degré du polynôme  $BP[P]$ ).

Les courbes Bézier-de Casteljau possèdent nombre de propriétés qui les rendent particulièrement adaptées au traitement des courbes polynomiales en CAO et en CFAO.

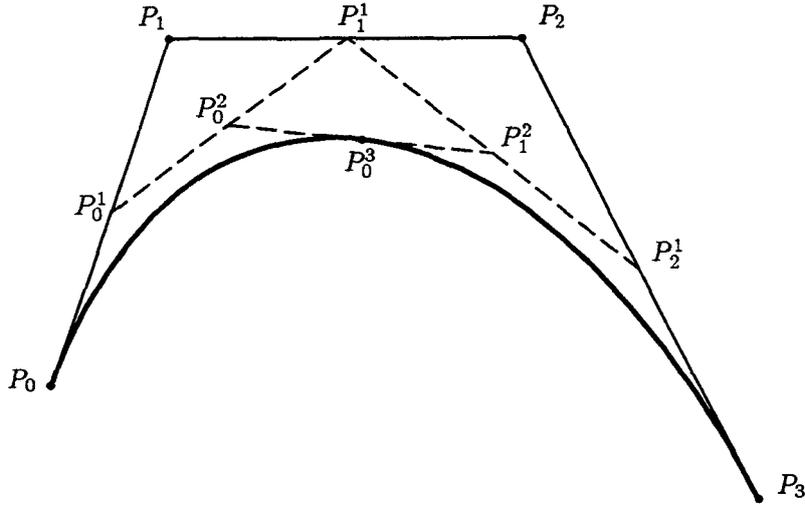


Figure 1.1: Application de l'algorithme de subdivision pour  $t_0 = \frac{1}{2}$ .

Parmi celles-ci nous pouvons noter les suivantes:

- Toute courbe polynomiale peut s'écrire sous forme (BP), et réciproquement.
- La courbe  $BP[P_0, P_1, \dots, P_n](t)$ ,  $t \in [0, 1]$  est inscrite dans l'enveloppe convexe des points  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ .
- Le nombre d'intersections d'un plan quelconque de  $\mathcal{E}$  avec une courbe Bézier est inférieur ou égal au nombre d'intersections de ce plan avec le polygone de contrôle.
- L'algorithme de de Casteljau permet de déterminer le point courant d'une de ces courbes:

**Proposition 1 : Algorithme de de Casteljau**

Soit  $P = (P_0, P_1, \dots, P_n)$  un  $(n + 1)$ -uplet de points. La courbe  $BP[P]$  peut s'écrire

$$j = 0, \dots, n, \quad BP[P] = \sum_{i=0}^{n-j} B_i^{n-j}(t) P_i^j(t)$$

où les points  $P_i^j(t)$  sont déterminés par la procédure  $DECAST(P_0, P_1, \dots, P_n, t)$ :

initialisation:  $P_i^0 = P_i, \quad i \in [0, n]$   
 pour  $j = 1$  à  $n$ , faire  
     pour  $i = 0$  à  $n - j$ , faire  
          $P_i^j(t) = (1 - t)P_i^{j-1}(t) + tP_{i+1}^{j-1}(t)$ .

Le point courant est alors  $BP[P](t) = P_0^n(t)$ .

L'une des applications de ce résultat est l'algorithme de subdivision:

**Proposition 2** Soit  $t_0$  un réel et  $(R_0, \dots, R_n)$  un  $(n + 1)$ -uplet de points de  $\mathcal{E}$ , nous avons pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} BP[R_0, R_1, \dots, R_n](t_0 t) &= BP[R_0^0, R_0^1, \dots, R_0^n](t), \\ BP[R_0, R_1, \dots, R_n](t_0 + (1 - t_0)t) &= BP[R_0^n, R_0^{n-1}, \dots, R_0^0](t), \end{aligned}$$

les  $R_i^j$  étant les points fournis par la procédure DECAST( $R_0, \dots, R_n$ ).

**Corollaire 1** Avec les données de la proposition précédente, le support de la courbe  $BP[R_0, \dots, R_n]$  est la réunion des supports des deux courbes  $BP[R_0^0, R_0^1, \dots, R_0^n]$  et  $BP[R_0^n, R_0^{n-1}, \dots, R_0^0]$ .

## 1.2 L'espace des vecteurs massiques

Considérons deux espaces affines  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  de dimensions respectives  $N$  et  $N + 1$ , tels que  $\mathcal{E}$  soit un hyperplan de  $\mathcal{F}$ , et  $\Omega$  un point de  $\mathcal{F}$  n'appartenant pas à  $\mathcal{E}$ . On note  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{F}}$  les espaces vectoriels associés respectivement à  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ . Enfin,  $\tilde{\mathcal{E}}$  et  $\tilde{\mathcal{F}}$  sont les complétés projectifs de ces espaces affines. Dans ce contexte nous définissons l'espace  $\hat{\mathcal{E}}$  des vecteurs massiques:

**Définition:** L'espace des vecteurs massiques  $\theta$  est l'ensemble  $\hat{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \times \mathbb{R}^*) \cup \tilde{\mathcal{E}}$ .

- Si  $\theta = (m, \lambda) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}^*$ ,  $\theta$  est un point pondéré de masse  $\lambda$ .
- Si  $\theta = \vec{u} \in \tilde{\mathcal{E}}$ ,  $\theta$  est un vecteur pur.

On considère l'application  $\hat{\Omega}$  déterminée par

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}: \hat{\mathcal{E}} &\longrightarrow \vec{\mathcal{F}} \\ (m, \lambda) &\longmapsto \lambda \overrightarrow{\Omega m} \\ \vec{u} &\longmapsto \vec{u} \end{aligned}$$

Cette application bijective nous permet de définir l'addition et la multiplication externe de  $\hat{\mathcal{E}}$ .

**Définition:** ([4], Déf. 1.2.1.4)

Nous posons, pour  $\theta$  et  $\theta'$  dans  $\hat{\mathcal{E}}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \theta \oplus \theta' &= \hat{\Omega}^{-1}(\hat{\Omega}(\theta) + \hat{\Omega}(\theta')) \\ \lambda * \theta &= \hat{\Omega}^{-1}(\lambda \cdot \hat{\Omega}(\theta)) \end{aligned}$$

**Proposition 3** ([4], Prop. 1.2.1.5)

$(\hat{\mathcal{E}}, \oplus, *)$  est un espace vectoriel réel.

L'application  $\hat{\Omega}: \hat{\mathcal{E}} \longrightarrow \vec{\mathcal{F}}$  est un isomorphisme linéaire, et  $\dim \hat{\mathcal{E}} = \dim \vec{\mathcal{F}}$ .

Nous complétons cette description par la donnée de quelques applications liant les différents espaces.

La projection canonique de sommet  $\Omega$  de  $\vec{\mathcal{F}} - \{\vec{0}\}$  sur  $\vec{\mathcal{E}}$  est notée  $\Pi\Omega$ . Elle associe à  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}}$  le point  $m$ , intersection de la droite  $\Omega + \vec{v}$  avec  $\vec{\mathcal{E}}$ .

$$\begin{aligned} \Pi\Omega : \vec{\mathcal{F}} - \{\vec{0}\} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{v} &\longmapsto m \text{ tel que } \overrightarrow{\Omega m} \text{ soit colinéaire à } \vec{v} \end{aligned}$$

**Proposition 4** *L'application  $\Pi\Omega$  est une surjection.*

*Si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}} - \{\vec{0}\}$ ,  $\Pi\Omega(\lambda\vec{v}) = \Pi\Omega(\vec{v})$ .*

Soit  $\Pi$  la projection naturelle de  $\hat{\mathcal{E}} - \{\vec{0}\}$  sur  $\vec{\mathcal{E}}$ .

$$\begin{aligned} \Pi : \hat{\mathcal{E}} - \{\vec{0}\} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ \theta &\longmapsto m \text{ si } \theta = (m, \lambda) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}^*, \\ &\quad (\vec{u})_\infty \text{ si } \theta = \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

$(\vec{u})_\infty$  étant le point à l'infini dans la direction de  $\vec{u}$ .

**Proposition 5** ([4], Prop. 1.2.2.3)

$$\Pi = \Pi\Omega \circ \hat{\Omega}.$$

*$\Pi$  est une surjection de  $\hat{\mathcal{E}} - \{\vec{0}\}$  sur  $\vec{\mathcal{E}}$ .*

*Si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et  $\theta \in \hat{\mathcal{E}} - \{\vec{0}\}$ ,  $\Pi(\lambda * \theta) = \Pi(\theta)$ .*

**Proposition 6** ([4], Prop. 1.2.2.8)

*L'application  $\chi : \hat{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que*

$$\begin{aligned} \chi(m, \lambda) &= \lambda && \text{pour } (m, \lambda) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}^* \\ \chi(\vec{u}) &= 0 && \text{pour } \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

*est une forme linéaire. La valeur  $\chi(\theta)$  sera appelée la masse du vecteur massique de  $\theta$ .*

### 1.3 Les courbes rationnelles

Rappelons que toute courbe rationnelle  $R(t)$  de  $\mathcal{E}$  est la  $\Pi\Omega$ -projection d'une courbe polynomiale  $P(t)$  de  $\mathcal{F}$  (Figure 1.2), le choix de  $P(t)$  n'étant pas unique.

**Définition:** ([4], Déf. 2.2.2.1)

*Etant donné un  $(n+1)$ -uplet  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$  de vecteurs massiques de  $\mathcal{E}$  i.e. des vecteurs de  $\hat{\mathcal{E}}$ , nous appelons courbe B-rationnelle, (BR) en abrégé, de polygone massique  $\theta$ , la courbe paramétrée, notée  $BR[\theta]$ , décrite par le point  $BR[\theta](t) = \Pi[BP[\theta](t)]$  pour  $t \in [0, 1]$ . Le nombre  $n$  de vecteurs du polygone  $\theta$  est appelé la longueur de  $BR[\theta]$ .*

*Explicitons.*

*Notons  $I = \{i : \theta_i \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}^*, \theta_i = (P_i, \beta_i)\}$ ,*

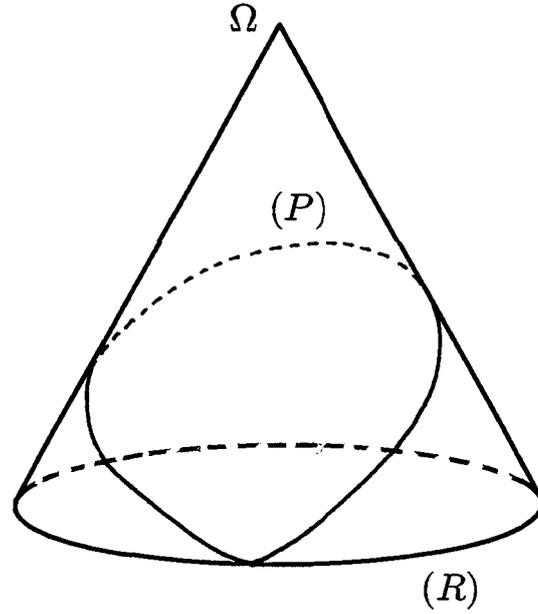


Figure 1.2: Le cercle comme  $\Pi\Omega$ -projection d'une courbe polynomiale de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\bar{I} = \{i : \theta_i \in \vec{\mathcal{E}}, \theta_i = \vec{U}_i\}.$$

$$BR[\theta](t) = \Pi \left( \sum_{i \in I} B_i^n(t) * (P_i, \beta_i) \oplus \sum_{i \in \bar{I}} B_i^n(t) * \vec{U}_i \right).$$

La forme explicite de  $BR[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n](t)$  est:

$$(1) \quad BR[\theta](t) = \frac{1}{\beta(t)} \left( \sum_{i \in I} \beta_i B_i^n(t) P_i + \sum_{i \in \bar{I}} B_i^n(t) \vec{U}_i \right)$$

$$\text{si } \beta(t) \neq 0 \text{ avec } \beta(t) = \sum_{i \in I} \beta_i B_i^n(t),$$

$$(2) \quad BR[\theta](t) = \left( \sum_{i \in I} \beta_i B_i^n(t) P_i + \sum_{i \in \bar{I}} B_i^n(t) \vec{U}_i \right)_{\infty}$$

$$\text{pour } \beta(t) = 0 \text{ et } \vec{V}(t) = \sum_{i \in I} \beta_i B_i^n(t) P_i + \sum_{i \in \bar{I}} B_i^n(t) \vec{U}_i \neq \vec{0},$$

$$(3) \quad BR[\theta](t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} BR[\theta](t)$$

$$\text{pour } \beta(t_0) = 0 \text{ et } \vec{V}(t_0) = \vec{0}.$$

$BR[\theta](t)$  peut être un point à distance finie (*Formule (1)*), un point à l'infini dans la direction de  $\vec{v}$  (point parabolique ou hyperbolique, *Formule (2)*). Le résultat donné par la *Formule (3)* par prolongement par continuité est toujours défini: c'est soit un point à distance finie, soit un point à l'infini.

**Théorème 1** *Toute courbe rationnelle peut s'écrire sous la forme d'une courbe (BR) et réciproquement.*

**Preuve:** Voir le *Théorème 1* de [2] et le Chapitre 2.2 de [4]. □

Rappelons enfin quelques résultats concernant l'élévation de la longueur d'une courbe (BR), c'est-à-dire l'expression d'une courbe de longueur  $n$  dans une base de Bernstein de degré  $n + k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**Proposition 7** ([4], **Prop. 2.6.1**)

*Une courbe (BR) de longueur  $n$ , de polygone massique  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$ , peut également s'écrire comme courbe (BR) de longueur  $n + 1$ , dont le polygone massique est  $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n+1})$ . Il suffit de prendre:*

$$\tau_0 = \theta_0, \quad \tau_{n+1} = \theta_n, \quad \tau_i = \frac{i}{n+1} * \theta_{i-1} \oplus \frac{n+1-i}{n+1} * \theta_i,$$

pour  $i = 1, \dots, n$ , ou tout autre polygone massique proportionnel à  $\tau$ .

Ce résultat peut être généralisé, comme dans le cas d'une courbe polynomiale (Farin [13], p. 119).

**Proposition 8** *Soit  $k$  un entier naturel. Une courbe (BR) de longueur  $n$ , de polygone massique  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$ , peut aussi s'écrire comme courbe (BR) de longueur  $n + k$ , de polygone massique  $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n+k})$ . Il suffit de prendre*

$$\omega_j^{(k)} = \frac{1}{\binom{n+k}{j}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \binom{k}{j-l} * \omega_l, \quad j \in \{0, \dots, k+n\}.$$

avec la convention  $\binom{k}{j} = 0$  si  $j < 0$  ou si  $j > k$ .

# Chapitre 2

## Le cercle comme courbe (BR) fermée $C^k$ , image de $[0,1]$

### 2.1 Introduction: le cercle comme courbe (BR), image de $[0,1]$

Considérons le plan  $\mathcal{E}$ , muni d'un repère cartésien  $(\Omega_1; \vec{i}, \vec{j})$ . Le cercle trigonométrique est une courbe rationnelle dont les coordonnées sont

$$C(t) \begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in \widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \quad (2.1)$$

Il admet donc une forme (BR) dont le polygone de contrôle ne comporte que des points pondérés (pas de vecteurs purs). Elle coïncide avec la forme Bézier rationnelle classique (Piegl [14], Farin [15], Piegl and Tiller [16]):

$$C(t) = BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2](t)$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (A; 1), & \omega_1 &= (B; 1), & \omega_2 &= (C; 2) \\ A &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & C &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

explicitement, nous avons:

$$BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2](t) = \frac{B_0^2(t)A + B_1^2(t)B + 2B_2^2(t)C}{B_0^2(t) + B_1^2(t) + 2B_2^2(t)}. \quad (2.2)$$

Lorsque  $t$  décrit  $[0, 1]$ , nous obtenons un quart de cercle (voir *Figure. 2.1*), un demi-cercle pour  $t \in [0, \infty]$ , et le cercle entier pour  $t \in \widetilde{\mathbb{R}}$ .

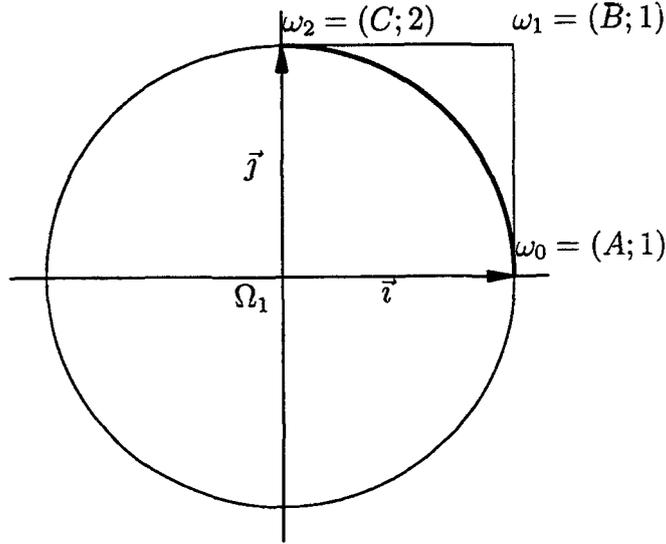


Figure 2.1: Le quart de cercle et son polygone de contrôle.

Pour représenter le cercle entier comme image d'un intervalle fini, par exemple  $[0,1]$ , Fiorot et Jeannin [4] ont proposé un changement de variable quadratique  $t = q_1(u)$  avec:

$$q_1(u) = \frac{\alpha B_0^2(u) + \beta B_1^2(u) + \gamma B_2^2(u)}{B_1^2(u)} \quad (2.3)$$

dans les paramétrisations précédentes (2.1) et (2.2). Les trois constantes réelles arbitraires  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  vérifient  $\alpha\gamma < 0$ , condition nécessaire et suffisante pour que  $q_1$  soit une bijection de  $[0,1]$  dans  $\mathbb{R}$  ( $q_1$  est croissante si  $\alpha < 0$ , et décroissante si  $\alpha > 0$ ).

Le support de  $BR[\omega](q_1(u))$  quand  $u$  décrit  $[0,1]$  est donc identique à celui de  $BR[\omega](t)$  quand  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ . Le nouveau polygone massique  $\theta$  vérifiant  $BR[\theta](u) = BR[\omega](q_1(u))$  est défini par cinq vecteurs massiques qui peuvent être calculés grâce à une relation matricielle proposée par Fiorot, Jeannin et Taleb [6] (on trouvera des exemples détaillés dans les ouvrages cités précédemment et au Chapitre 3).

Définissons  $M(u) = BR[\omega](q_1(u))$ ,  $u \in [0,1]$ , et notons  $D^i M(u)$  la  $i^{\text{ème}}$  dérivée de  $M$  en  $u$ . Nous obtenons:

$$\begin{aligned} M(0) = M(1) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = W \\ DM(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{\alpha} \end{pmatrix} & DM(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{\gamma} \end{pmatrix} \\ D^2 M(0) &= \begin{pmatrix} \frac{16}{\alpha^2} \\ \frac{8}{\alpha^2}(\alpha - 2\beta) \end{pmatrix} & D^2 M(1) &= \begin{pmatrix} \frac{16}{\gamma^2} \\ \frac{8}{\gamma^2}(\gamma - 2\beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La courbe obtenue est donc  $C^\infty$ , sauf en  $W$ , où elle peut n'être que  $C^0$ . Pour qu'elle soit  $C^1$  en  $W$  ( $DM(0) = DM(1)$ ), il faut et il suffit que  $\alpha = -\gamma$ . Toutefois,

$D^2M(0) = D^2M(1)$  est alors impossible (il faudrait que  $\alpha = 0$ ). Cette représentation du cercle ne peut donc pas être  $C^2$  en  $W$ .

Une paramétrisation  $R(u)$  du cercle entier, image de  $[0,1]$ , d'une régularité plus élevée peut s'avérer nécessaire.

Ce cercle sera dit *fermé  $C^k$ -continûment en  $W$*  si la paramétrisation  $R(u)$  vérifie:

$$D^i R(0) = D^i R(1), \text{ pour } i = 0, 1, \dots, k \quad (2.4)$$

Nous allons déterminer  $R$ , définie par  $R(u) = C(\varphi(u))$ , où  $\varphi$  est un changement de paramètre bijectif de  $[0,1]$  dans  $\widetilde{\mathbb{R}}$  aussi simple que possible et vérifiant (2.4).

Nous avons vu précédemment que la fonction quadratique  $\varphi = q_1$  (voir (2.3)) résout le problème pour  $k = 1$ , à la condition  $\alpha = -\gamma$ . Nous étudions en Section 2.2 une forme plus générale de changement de variable quadratique, et nous montrons qu'elle n'apporte pas d'amélioration de continuité par rapport à  $q_1$ . Nous donnons des solutions de degré plus élevé pour les cas  $k = 3$  (resp.  $k = 5$ ) en Section 2.3 (resp. en Section 2.4). Ces résultats ont été présentés dans les communications [17, 18, 19 et 20].

## 2.2 Un autre cercle fermé $C^1$ -continûment

En introduction, nous n'avons envisagé que le cas particulier de changement de variable quadratique  $q_1$  (2.3) qui correspond à un graphe possédant deux asymptotes, en 0 et en 1 (voir *Figures 2.2*). Nous allons maintenant étudier le changement de variable correspondant au deuxième graphe présenté en *Figures 2.2*, ne possédant qu'une asymptote en  $t_0 \in ]0, 1[$ . Cette fonction doit également être une bijection de  $[0,1]$  dans  $\widetilde{\mathbb{R}}$ .

**Proposition 9** Soit  $q_2$  un changement de variable de la forme

$$q_2 = \frac{aB_0^2 + bB_1^2 - aB_2^2}{B_0^2 + eB_1^2 - B_2^2} \quad (2.5)$$

avec  $a, b, e \in \mathbb{R}$ . Le cercle  $M(t) = C(q_2(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , est fermé  $C^1$ -continûment, et la fonction  $q_2$  est une bijection de  $[0,1]$  dans  $\widetilde{\mathbb{R}}$ .

**Preuve:** Soit  $q_2$  la fonction définie par:

$$q_2 = \frac{aB_0^2 + bB_1^2 + cB_2^2}{dB_0^2 + eB_1^2 + fB_2^2}$$

avec  $a, b, c, d, e$  et  $f \in \mathbb{R}$ . Les cas  $(a, d) = (0, 0)$  et  $(c, f) = (0, 0)$  sont exclus car  $q_2$  serait alors homographique. Il faut aussi que  $(d, f) \neq (0, 0)$  (sinon  $q_2 \equiv q_1$ ).

Le cercle  $M(t)$  est fermé  $C^1$ -continûment si et seulement si il vérifie (2.4):

$$M(0) = M(1), \quad (2.6)$$

$$\text{et } DM(0) = DM(1). \quad (2.7)$$

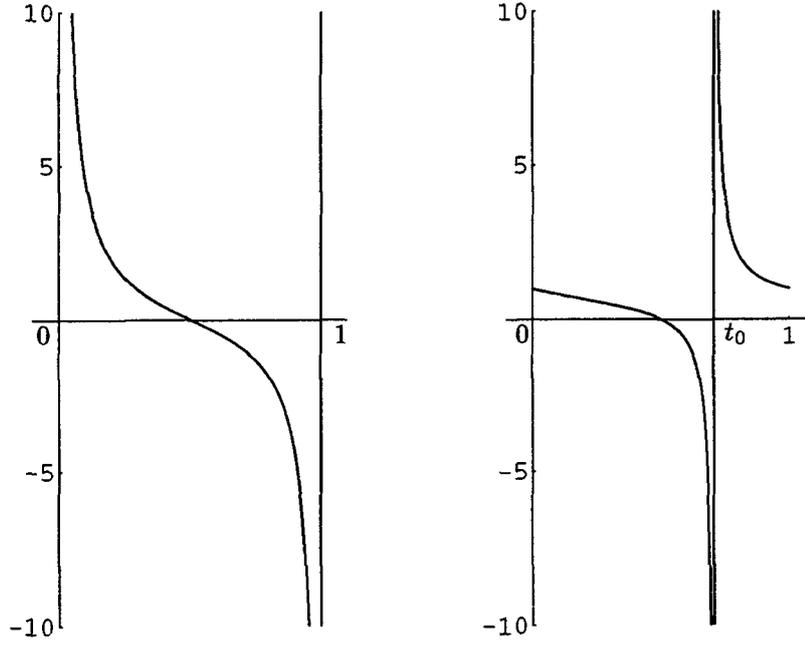


Figure 2.2: Exemples de graphes de fonctions de type  $q_1$  (à gauche) et  $q_2$  (à droite).

Après quelques calculs, nous obtenons les expressions de  $M(0)$ ,  $M(1)$ ,  $DM(0)$  et  $DM(1)$ :

$$M(0) = \left( \frac{\frac{d^2 - a^2}{d^2 + a^2}}{\frac{2ad}{d^2 + a^2}} \right) \quad M(1) = \left( \frac{\frac{f^2 - c^2}{f^2 + c^2}}{\frac{2cf}{f^2 + c^2}} \right)$$

$$DM(0) = \left( \frac{\frac{8ad}{(d^2 + a^2)^2} (ae - bd)}{\frac{4(a^2 - d^2)}{(d^2 + a^2)^2} (ae - bd)} \right) \quad DM(1) = \left( \frac{\frac{8cf}{(f^2 + c^2)^2} (bf - ce)}{\frac{4(c^2 - f^2)}{(f^2 + c^2)^2} (bf - ce)} \right)$$

Donc (2.6) est équivalent à

$$\frac{d^2 - a^2}{d^2 + a^2} = \frac{f^2 - c^2}{f^2 + c^2}, \quad (2.8)$$

$$\text{et} \quad \frac{2ad}{d^2 + a^2} = \frac{2cf}{f^2 + c^2}. \quad (2.9)$$

De (2.8), nous déduisons

$$1 - \frac{2a^2}{d^2 + a^2} = 1 - \frac{2c^2}{f^2 + c^2} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2}{d^2 + a^2} = \frac{c^2}{f^2 + c^2} \quad (2.10)$$

Après quelques simplifications, on obtient  $a^2 f^2 = c^2 d^2$ . Or  $af = -cd$  ne vérifie pas (2.6), donc  $af = cd$ .

1)  $a = 0$ :

Selon (2.10), on a donc  $c = 0$ , et (2.6) est vérifiée. (2.7) est alors équivalente à  $\frac{4b}{d} = -\frac{4b}{f}$ , or  $b \neq 0$  (sinon  $q_2 \equiv 0$ ), donc  $f = -d$ , et

$$q_2 = \frac{bB_1^2}{dB_0^2 + eB_1^2 - dB_2^2} \quad (2.11)$$

2)  $a \neq 0$ :

De  $af = cd$  nous déduisons que  $f = \frac{cd}{a}$ . Les égalités (2.8) et (2.9) sont alors vérifiées et (2.7) est équivalente à

$$8ad(a+c)(bd-ae) = 0. \quad (2.12)$$

$$\text{et } 4(a+c)(d^2 - a^2)(ae - bd) = 0. \quad (2.13)$$

Pour satisfaire (2.12), il faut que  $a = 0$ , ou  $d = 0$ , ou  $bd - ae = 0$ , ou  $c = -a$ .  
Mais: •  $a = 0$  est exclu par hypothèse,

•  $d = 0$  implique  $a = 0$  et est exclu également,

• si  $bd - ae = 0$ ,  $q_2$  est une fonction constante, ce que nous ne voulons pas.

La seule solution est donc  $c = -a$ . (2.13) est alors vérifiée et  $q_2$  est de la forme suivante:

$$q_2 = \frac{aB_0^2 + bB_1^2 - aB_2^2}{dB_0^2 + eB_1^2 - dB_2^2} \quad (2.14)$$

Cette dernière expression est suffisante pour décrire les deux cas (2.11) et (2.14). D'autre part, une fraction rationnelle étant définie à un facteur près, on peut fixer  $d = 1$ . On a donc

$$q_2 = \frac{aB_0^2 + bB_1^2 - aB_2^2}{B_0^2 + eB_1^2 - B_2^2}$$

avec  $a, b, e \in \mathbb{R}$ .

Il reste à vérifier que cette fonction est bien une bijection de  $[0,1]$  dans  $\widetilde{\mathbb{R}}$ . La dérivée de  $q_2$  est

$$q_2'(t) = 2(b - ae) \frac{1 - 2t + 2t^2}{(1 - 2t + 2et - 2et^2)^2}$$

Le trinôme  $1 - 2t + 2t^2$  n'ayant pas de racine réelle,  $q_2'(t)$  est de signe constant et  $q_2$  est monotone (croissante si  $b - ae > 0$  et décroissante si  $b - ae < 0$ ).

Vérifions que le dénominateur de  $q_2$  admet exactement une racine dans  $[0,1]$  (c'est une condition nécessaire pour que  $q_2$  soit bijective). Dans le cas  $e = 0$ , le dénominateur

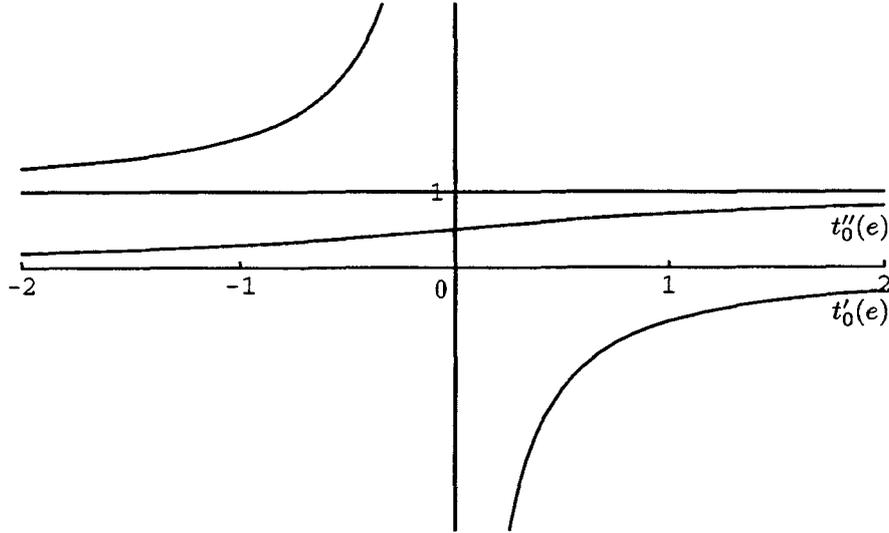


Figure 2.3: Graphe des fonctions  $t'_0(e)$  et  $t''_0(e)$

est  $1 - 2t$  et admet pour unique racine  $\frac{1}{2}$ , ce qui convient. Supposons maintenant  $e \neq 0$ . Le dénominateur est alors de degré 2. Il admet deux racines réelles, qui dépendent du paramètre  $e$ :

$$t'_0(e) = \frac{1 - e - \sqrt{1 + e^2}}{2e}$$

$$t''_0(e) = \frac{1 - e + \sqrt{1 + e^2}}{2e}$$

(La Figure 2.3 présente le graphe de ces fonctions.)

Après quelques calculs algébriques élémentaires, on prouve que

$$\forall e \in \mathbb{R}^*, t'_0(e) \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[ \text{ et } t''_0(e) \in ]0; 1[.$$

Le dénominateur de  $q_2$  admet une racine unique dans  $[0,1]$ , et  $q_2$  est donc bien une bijection de  $[0,1]$  dans  $\widetilde{\mathbb{R}}$   $\square$

**Proposition 10** Soit  $q_2$  un changement de variable défini par (2.5). Il existe un changement de variable quadratique de la forme  $q_1$  (2.3), défini par  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , et une rotation  $r_\theta$  de centre  $\Omega_1$  et d'angle  $\theta$ , tels que le cercle  $M_2(t) = C(q_2(t))$ ,  $t \in [0, 1]$  soit l'image, point par point, du cercle  $M_1(t) = C(q_1(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , par la rotation  $r_\theta$ , c'est à dire:

$$\forall t \in [0, 1], C(q_2(t)) = r_\theta(C(q_1(t))). \quad (2.15)$$

De plus,  $\alpha, \beta$ , et  $\theta$  sont déterminés par les formules suivantes:

$$\alpha = \frac{1 + a^2}{ae - b} \quad (2.16)$$

$$\beta = \frac{e + ab}{ae - b} \quad (2.17)$$

$$\theta = 2 \arctan(a) + \pi \quad (2.18)$$

**Preuve:** Notons par  $(x_1(t), y_1(t))$  et  $(x_2(t), y_2(t))$  les coordonnées respectives de  $M_1(t)$  et  $M_2(t)$ . (2.15) est alors équivalent à

$$\forall t \in [0, 1], \quad x_1(t)\cos(\theta) - y_1(t)\sin(\theta) = x_2(t), \quad (2.19)$$

$$\text{et } x_1(t)\sin(\theta) - y_1(t)\cos(\theta) = y_2(t) \quad (2.20)$$

Etudions (2.19): dans la base canonique  $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ ,  $x_1(t)\cos(\theta) - y_1(t)\sin(\theta)$  et  $x_2(t)$  sont des fractions rationnelles qui peuvent s'écrire respectivement

$$\frac{\sum_{i=0}^4 r_{1,i} \cdot t^i}{\sum_{i=0}^4 s_{1,i} \cdot t^i} \quad \text{et} \quad \frac{\sum_{i=0}^4 r_{2,i} \cdot t^i}{\sum_{i=0}^4 s_{2,i} \cdot t^i}$$

Elles sont égales si et seulement si les 9 équations suivantes sont vérifiées:

$$\forall i \in \{1, \dots, 4\}, \quad \frac{s_{1,i}}{s_{1,0}} = \frac{s_{2,i}}{s_{2,0}} \quad (2.21)$$

$$\forall i \in \{0, \dots, 4\}, \quad \frac{r_{1,i}}{s_{1,0}} = \frac{r_{2,i}}{s_{2,0}} \quad (2.22)$$

Le système (2.21) (les quatre équations obtenues par l'égalité des dénominateurs à un facteur près) ne dépend pas de  $\theta$ . Il admet deux couples  $(\alpha, \beta)$  de solutions:

$$\alpha = \frac{1 + a^2}{ae - b} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{e + ab}{ae - b} \quad (2.23)$$

$$\text{ou } \alpha = -\frac{1 + a^2}{ae - b} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{e + ab}{ae - b} \quad (2.24)$$

Remplaçons  $\alpha$  et  $\beta$  par leurs valeurs (2.23) dans le système (2.22). Il admet alors pour solution:

$$\cos(\theta) = -\frac{1 - a^2}{1 + a^2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = -\frac{2a}{1 + a^2},$$

donc  $\theta = \pi + 2 \arctan(a)$ . Cette solution vérifie également (2.20), et donc (2.15).

Avec la solution (2.24), nous obtenons:

$$\cos(\theta) = -\frac{1 - a^2}{1 + a^2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{2a}{1 + a^2},$$

d'où  $\theta = \pi - 2 \arctan(a)$ . Mais cette solution ne vérifie pas (2.20), et doit donc être écartée.  $\square$

## 2.3 Un cercle fermé $C^3$ -continûment

**Proposition 11** Soit  $t = \varphi(u)$  un changement de variable rationnel bijectif de degré  $\frac{3}{2}$  (le numérateur est de degré 3 et le dénominateur est de degré 2), tel que  $\varphi([0, 1]) = \widetilde{\mathbb{R}}$ , défini par:

$$\varphi(u) = \frac{aB_0^3(u) + bB_1^3(u) + \frac{1}{3}(3b - 4a)B_2^3(u) - aB_3^3(u)}{B_1^2(u)} \quad (2.25)$$

avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

Le cercle  $R(u) = C(\varphi(u))$ ,  $u \in [0, 1]$ , est alors fermé  $C^3$ -continûment en  $W$ .

**Preuve :** Pour obtenir  $\varphi([0, 1]) = \widetilde{\mathbb{R}}$ , nous choisissons

$$\varphi = \frac{aB_0^3 + bB_1^3 + cB_2^3 + dB_3^3}{B_1^2}.$$

Déterminons  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  satisfaisant

$$D^i R(0) = D^i R(1), \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3.$$

Nous avons:

$$\begin{aligned} R(0) = R(1) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = W \\ DR(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{a} \end{pmatrix} & DR(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{d} \end{pmatrix} \\ D^2R(0) &= \begin{pmatrix} \frac{16}{a^2} \\ \frac{8}{a^2}(2a - 3b) \end{pmatrix} & D^2R(1) &= \begin{pmatrix} \frac{16}{d^2} \\ \frac{8}{d^2}(-3c + 2d) \end{pmatrix} \\ D^3R(0) &= \begin{pmatrix} \frac{96}{a^3}(2a - 3b) \\ \frac{24}{a^3}(-4 + 3a^2 - 9ab + 9b^2 - 3ac) \end{pmatrix} \\ D^3R(1) &= \begin{pmatrix} \frac{96}{d^3}(3c - 2d) \\ \frac{24}{d^3}(4 - 9c^2 + 3bd + 9cd - 3d^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A partir des équations  $DR(0) = DR(1)$  et  $D^2R(0) = D^2R(1)$ , nous obtenons les conditions  $(E_1)$ :

$$(E_1) \begin{cases} a + d = 0 \text{ et } a \neq 0 & (i = 1) \\ 4a - 3b + 3c = 0 & (i = 2). \end{cases}$$

Avec  $(E_1)$ , l'équation  $D^3R(0) = D^3R(1)$  est automatiquement vérifiée, et nous obtenons l'expression de  $\varphi$  proposée en (2.25). Il reste à vérifier qu'une telle fonction est bijective. La dérivée de  $\varphi$  est:

$$\varphi'(u) = -\frac{a}{2} \times \frac{1 - 2u + 4u^2 - 4u^3 + 2u^4}{u^2(1 - u)^2}.$$

Avec l'aide de Mathematica, les formules de Cardan nous permettent de vérifier que le polynôme  $1 - 2u + 4u^2 - 4u^3 + 2u^4$  n'a pas de racine réelle et est toujours positif.  $\varphi$  est donc une bijection de  $[0, 1]$  dans  $\widetilde{\mathbb{R}}$ , croissante si  $a < 0$  et décroissante si  $a > 0$ .  $\square$

**Remarque :** Avec cette représentation du cercle, nous avons:

$$D^4 R(0) = \begin{pmatrix} \frac{192}{a^4}(-4 + 18a^2 - 36ab + 27b^2) \\ \frac{96}{a^4}(-24a + 21a^3 + 36b - 54a^2b + 54ab^2 - 27b^3) \end{pmatrix}$$

$$D^4 R(1) = \begin{pmatrix} \frac{192}{a^4}(-4 + 18a^2 - 36ab + 27b^2) \\ \frac{96}{a^4}(-24a + 19a^3 + 36b - 54a^2b + 54ab^2 - 27b^3) \end{pmatrix}$$

Pour obtenir  $D^4 R(0) = D^4 R(1)$ , il faudrait  $a = 0$ , ce qui est exclu.  $R(u)$  n'est donc pas fermé  $C^4$ -continûment en  $W$ .

## 2.4 Deux formes du cercle fermé $C^5$ -continûment

Nous proposons maintenant un cercle  $C^5$  en  $W$  obtenu grâce à un changement de variable rationnel  $\varphi$  de degré  $\frac{4}{3}$ .

**Proposition 12** Soit  $t = \varphi(u)$  un changement de variable rationnel bijectif de degré  $\frac{4}{3}$  tel que  $\varphi([0, 1]) = \widetilde{\mathbb{R}}$ , défini par:

$$\varphi = \frac{aB_0^4 + bB_1^4 + \frac{1}{2}(-af + 2bf - a)B_2^4 + \frac{1}{4}(-3af - 2a + 4b)B_3^4 - aB_4^4}{B_1^4 + fB_2^4 + B_3^4} \quad (2.26)$$

avec  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et  $f = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$ .

Le cercle  $R(u) = C(\varphi(u))$ ,  $u \in [0, 1]$ , est alors fermé  $C^5$ -continûment en  $W$ .

**Preuve :** Considérons la fonction:

$$\varphi = \frac{aB_0^4 + bB_1^4 + cB_2^4 + dB_3^4 + eB_4^4}{B_1^4 + fB_2^4 + gB_3^4}.$$

Une telle fonction  $\varphi$  vérifie  $\varphi([0, 1]) = \widetilde{\mathbb{R}}$  et nous avons:

$$R(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$DR(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{a} \end{pmatrix} \quad DR(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{8g}{e} \end{pmatrix}$$

$$D^2 R(0) = \begin{pmatrix} \frac{64}{a^2}(2a - 8b + 3af) \\ \frac{8}{a^2}(3ef - 8dg + 2eg) \end{pmatrix} \quad D^2 R(1) = \begin{pmatrix} \frac{64g^2}{e^2} \\ \frac{8}{e^2}(3ef - 8dg + 2eg) \end{pmatrix}$$

$$D^3R(0) = \left( \begin{array}{c} \frac{192}{a^3}(2a - 8b + 3af) \\ \frac{48}{a^3}(-16 + a^2 - 8ab + 16b^2 - 6ac + 3a^2f - 6abf + a^2g) \end{array} \right)$$

$$D^3R(1) = \left( \begin{array}{c} \frac{192}{e^3}(-3efg + 8dg^2 - 2eg^2) \\ \frac{48}{e^3}(-e^2 + 6def - 3e^2f - 16d^2g + 6ceg + 8deg - e^2g + 16g^2) \end{array} \right).$$

$D^4R(0), D^4R(1), D^5R(0)$  et  $D^5R(1)$  ont des expressions trop longues pour être explicitées ici.

Les équations  $D^iR(0) = D^iR(1)$   $i = 1, 2, 3$  impliquent, après quelques calculs

$$ag + e = 0 \quad \text{et} \quad ae \neq 0 \quad (i = 1) \quad (2.27)$$

$$8d + 3af + 4ag - 8bg + 3afg = 0 \quad (i = 2, e \text{ est remplacé par } -ag) \quad (2.28)$$

$$-4a - 24c - 12af + 24bf - 9af^2 - 24cg + 24bfg - 9af^2g + 4ag^2 = 0 \quad (2.29)$$

( $i = 3$ ,  $d$  est remplacé par son expression déduite de (2.28) et  $e$  est remplacé par  $-ag$ ).

(2.29) s'écrit aussi

$$24(1 + g)c = -4a - 12af + 24bf - 9af^2 + 24bfg - 9af^2g + 4ag^2. \quad (2.30)$$

Le cas  $g = -1$  est exclu ( $\varphi$  ne serait pas bijective). Nous déduisons donc de (2.30):

$$c = \frac{-4a - 12af + 24bf - 9af^2 + 24bfg - 9af^2g + 4ag^2}{24(1 + g)}.$$

La condition  $D^4R(0) = D^4R(1)$  est alors équivalente à:

$$4 - 9f^2 + 8g + 12fg - 9f^2g + 8g^2 + 4g^3 = 0. \quad (2.31)$$

Pour simplifier l'équation obtenue à partir de la condition  $D^5R(0) = D^5R(1)$ , nous remplaçons  $g^3$  par l'expression tirée de (2.31). Nous obtenons:

$$16 + 12f - 36f^2 - 27f^3 + 84fg + 36f^2g - 27f^3g - 16g^2 - 24fg^2 + 36f^2g^2 = 0. \quad (2.32)$$

Sachant que  $g \neq -1$ , les solutions  $(f, g)$  du système formé des équations (2.31) et (2.32) sont  $\left(\pm\frac{2}{3}, 0\right)$  et  $\left(\frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}, 1\right)$ .

La première solution implique  $e = 0$ , ce qui contredit (2.27).

La seconde,  $g = 1$  et  $f = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$ , convient. De façon à simplifier les différentes expressions, nous remarquons que les valeurs de  $f$  représentent les racines du trinôme  $3f^2 - 2f - 4$ . Nous remplaçons donc  $f^2$  par  $\frac{1}{3}(2f + 4)$ . A partir des équations (2.27), (2.28) et (2.30) nous obtenons l'expression de  $\varphi$  proposée (2.26).

Il reste à étudier la monotonie de  $\varphi$ . Nous distinguons les deux cas suivants:

$$1) f = \frac{1 - \sqrt{13}}{3}$$

$$\varphi'(u) = \frac{a}{8}(5 - \sqrt{13}) \frac{(1 - u + u^2)(\frac{1}{3}(\sqrt{13} - 4) + u - 3u^2 + 4u^3 - 2u^4)}{(1 - u)^2 u^2 (\frac{1}{2}(3 - \sqrt{13}) + u - u^2)^2}.$$

Les polynômes  $1 - u + u^2$  et  $\frac{1}{3}(\sqrt{13} - 4) + u - 3u^2 + 4u^3 - 2u^4$  n'ont pas de racine réelle. Le premier est toujours positif, et le second, toujours négatif.  $\varphi'$  est donc du signe de  $-a$ .

$$2) f = \frac{1 + \sqrt{13}}{3}$$

$$\varphi'(u) = \frac{a}{8}(5 + \sqrt{13}) \frac{(1 - u + u^2)(\frac{1}{3}(-4 - \sqrt{13}) + u - 3u^2 + 4u^3 - 2u^4)}{(1 - u)^2 u^2 (\frac{1}{2}(3 + \sqrt{13}) + u - u^2)^2}.$$

Le polynôme  $-\frac{1}{3}(\sqrt{13} + 4) + u - 3u^2 + 4u^3 - 2u^4$  n'a pas de racine réelle et est négatif. Donc  $\varphi'$  est encore du signe de  $-a$ .

Dans les deux cas  $\varphi$  est bijective (croissante si  $a < 0$  et décroissante si  $a > 0$ ).  $\square$

**Remarque :** Avec la paramétrisation  $R$  proposée en *Proposition 12*, nous obtenons, après quelques calculs:

$$D^6 R(0) - D^6 R(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{11520(4 \pm \sqrt{13})}{a} \end{pmatrix}$$

Le cercle  $R(u)$  ne peut donc pas être fermé  $C^6$ -continûment en  $W$ .

On peut également obtenir un cercle fermé  $C^5$ -continûment avec un changement de variable de degré  $\frac{5}{2}$ .

**Proposition 13** Soit  $\varphi$  un changement de variable rationnel de degré  $\frac{5}{2}$ , bijectif de  $[0, 1]$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , défini par :

$$\varphi = \frac{aB_0^5 + bB_1^5 + \frac{1}{30}(-28a + 45b)B_2^5 + \frac{1}{30}(-44a + 45b)B_3^5 + \frac{1}{5}(-8a + 5b)B_4^5 - aB_5^5}{B_1^2} \quad (2.33)$$

avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

Alors le cercle  $R(u) = C(\varphi(u))$ ,  $u \in [0, 1]$  est fermé  $C^5$ -continûment en  $W$ .

**Preuve :** Considérons la fonction

$$\varphi = \frac{aB_0^5 + bB_1^5 + cB_2^5 + dB_3^5 + eB_4^5 + fB_5^5}{B_1^2}.$$

Nous avons:

$$\begin{aligned}
R(0) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & R(1) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
DR(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{a} \end{pmatrix} & DR(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{f} \end{pmatrix} \\
D^2R(0) &= \begin{pmatrix} \frac{16}{a^2} \\ \frac{8}{a^2}(4a - 5b) \end{pmatrix} & D^2R(1) &= \begin{pmatrix} \frac{16}{f^2} \\ \frac{8}{f^2}(-5e + 4f) \end{pmatrix} \\
D^3R(0) &= \begin{pmatrix} \frac{96}{a^3}(4a - 5b) \\ \frac{24}{a^3}(-4 + 10a^2 - 25ab + 25b^2 - 10ac) \end{pmatrix} \\
D^3R(1) &= \begin{pmatrix} \frac{96}{f^3}(5e - 4f) \\ \frac{24}{f^3}(4 - 25e^2 + 10df + 25ef - 10f^2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$D^4R(0), D^4R(1), D^5R(0)$  et  $D^5R(1)$  ont des expressions trop complexes pour être exprimées ici. Les équations  $D^iR(0) = D^iR(1)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  sont équivalentes à:

$$\begin{aligned}
a + f &= 0 \text{ et } a \neq 0 \text{ (} i = 1 \text{)} \\
8a - 5b + 5e &= 0 \text{ (} i = 2, f \text{ est remplacé par } -a \text{)} \\
3b - 2c - 2d + 3e &= 0 \text{ (} i = 3, a \text{ est remplacé par } \frac{1}{8}(5b - 5e) \text{)} \\
-6b + 11c - 7d &= 0 \text{ (} i = 4, e \text{ est remplacé par } \frac{1}{3}(-3b + 2c + 2d) \text{)}.
\end{aligned}$$

Ces conditions impliquent également que  $D^5R(0) = D^5R(1)$ . Elles nous permettent d'écrire  $c, d, e$  et  $f$  en fonction de  $a$  et  $b$ . Nous obtenons ainsi l'expression de  $\varphi$  proposée (2.33).

Il reste à vérifier que  $\varphi$  est bien une bijection.

$$\varphi'(u) = -\frac{a}{6} \cdot \frac{3 - 6u + 13u^2 - 20u^3 + 25u^4 - 18u^5 + 6u^6}{(1 - u)^2 u^2}.$$

Le polynôme  $3 - 6u + 13u^2 - 20u^3 + 25u^4 - 18u^5 + 6u^6$  n'a pas de racine réelle et est toujours positif.  $\varphi$  est donc bijective (croissante si  $a < 0$  et décroissante si  $a > 0$ ).  $\square$

**Remarques :** • Avec cette représentation du cercle, quelques calculs nous permettent de remarquer que:

$$D^6R(0) - D^6R(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5760}{a} \end{pmatrix}$$

et donc que  $R$  ne peut pas être fermé  $C^6$ -continûment en  $W$ .

• Pour obtenir un cercle fermé  $C^1$ -continûment (resp.  $C^3$ -continûment) en  $W$ , nous avons utilisé un changement de paramètre de degré  $\frac{2}{2}$  (resp.  $\frac{3}{2}$ ). Une paramétrisation fermée  $C^5$ -continûment est obtenue avec un changement de variable de degré  $\frac{4}{4}$  ou  $\frac{5}{2}$ . En étudiant les changements de variable de degré intermédiaire,  $\frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}$  respectivement, nous retrouvons les expressions des cas  $\frac{3}{2}$  ou  $\frac{2}{2}$ . Ils ne permettent pas d'obtenir une meilleur régularité que le  $C^3$ . Nous ne détaillerons donc pas cette étude.

# Chapitre 3

## Courbes (BR) et changements de variable, formule générale et applications: différentes formes (BR) du cercle

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons utilisé des changements de variables rationnels de degré  $\frac{2}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$  et  $\frac{4}{4}$  ou  $\frac{5}{2}$  pour obtenir une paramétrisation du cercle fermée respectivement  $C^1$ ,  $C^3$  et  $C^5$ . Nous avons donc été amenés à déterminer les polygones massiques de ces nouvelles représentations. Fiorot, Jeannin et Taleb [6, 7] donnent des formules matricielles permettant d'obtenir le nouveau polygone de contrôle d'une courbe rationnelle dans le cas d'un changement de variable homographique ou quadratique. Nous proposons ici une extension de ces résultats, où cette fois le changement de variable rationnel est de degré quelconque. Nous obtenons ainsi une représentation matricielle permettant de déterminer le polygone de contrôle de la nouvelle paramétrisation, en fonction de celui de la représentation initiale. Puis nous donnons deux algorithmes correspondant, l'un, au cas général, l'autre, à un changement de variable ayant pour dénominateur  $B_1^2(u)$ .

Grâce aux résultats du chapitre précédent, nous explicitons les différents polygones massiques de contrôle des cercles fermés  $C^1$ ,  $C^3$  ou  $C^5$ , ainsi que les matrices qui permettent de les déterminer. Ces polygones comportent respectivement cinq vecteurs massiques pour le cercle  $C^1$ , sept pour le cercle  $C^3$  et neuf ou onze (suivant le changement de paramètre utilisé) dans le cas d'un cercle fermé  $C^5$ . Des conditions nécessaires et suffisantes permettant d'obtenir dans chaque cas un polygone constitué uniquement de points pondérés de masse positive complètent cette étude. Elles répondent, comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, à une exigence de certains logiciels.

## 3.2 Une relation matricielle

Considérons un changement de variable rationnel  $F$ , défini sur  $[0,1]$  (bijectif de  $[0,1]$  dans  $F([0,1])$ ), s'écrivant:

$$F(u) = \frac{A(u)}{B(u)}, \quad u \in [0,1], \quad (3.1)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux polynômes premiers entre eux. Notons  $m$  le plus grand des degrés respectifs de  $A$  et  $B$  ( $m = \sup\{ \deg(A), \deg(B) \}$ ).  $A$  et  $B$  s'expriment dans la base de Bernstein de degré  $m$ :

$$A(u) = \sum_{i=0}^m a_i B_i^m(u) \quad \text{et} \quad B(u) = \sum_{i=0}^m b_i B_i^m(u), \quad u \in [0,1], \quad (3.2)$$

où  $a_i$  et  $b_i$ ,  $i \in \{0, \dots, m\}$  sont des réels.

**Lemme 1** Soit  $P(T_1, T_2)$  un polynôme homogène de degré  $n$  de variable  $T_1$  et  $T_2$ , et soit  $\mathcal{A}(U_1, U_2)$  et  $\mathcal{B}(U_1, U_2)$ , deux polynômes homogènes de degré  $m$  en  $U_1$  et  $U_2$ .

Alors  $Q(U_1, U_2) = P(\mathcal{A}(U_1, U_2), \mathcal{B}(U_1, U_2))$  est un polynôme homogène de degré  $n.m$ . Il s'écrit

$$Q(U_1, U_2) = \sum_{j=0}^{nm} \delta_j U_1^{nm-j} U_2^j$$

**Proposition 14** Soit  $BR[\omega](t)$  une courbe ( $BR$ ) de longueur  $n$ , et soit  $F$  un changement de variable défini précédemment (3.1). Nous avons

$$BR[\omega](F(u)) = BR[\theta](u),$$

où  $\theta$  est un polygone massique de longueur  $nm$ .

**Preuve:** De la même façon que pour démontrer la Proposition 2 de l'article [6], on considère  $(T_1, T_2)$  les coordonnées homogènes cartésiennes de  $t \in \widetilde{\mathbb{R}}$  relativement au repère cartésien projectif  $(\infty, 0, 1)$ .

On a alors  $t = \frac{T_1}{T_2}$  si  $T_2 \neq 0$  et  $t = \infty$  si  $T_2 = 0$ .

Soient  $(U_1, U_2)$  les coordonnées homogènes barycentriques de  $u$  relativement au repère barycentrique projectif  $(0, \frac{1}{2}, 1)$  de  $\widetilde{\mathbb{R}}$

On a alors  $U_1 = \lambda(1-u)$  et  $U_2 = \lambda u$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , si  $u \in \mathbb{R}$ ,  
 $U_1 = \lambda$  et  $U_2 = -\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si  $u = \infty$ .

Dans ces repères,  $t = F(u)$  peut se réécrire:

$$T_1 = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a_i U_1^{m-i} U_2^i \quad \text{et} \quad T_2 = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} b_i U_1^{m-i} U_2^i$$

Notons respectivement  $\mathcal{A}(U_1, U_2)$  et  $\mathcal{B}(U_1, U_2)$  ces deux polynômes. On a

$$\begin{aligned} BR[\omega](t) &= \Pi \left( \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i \right) \\ &= \Pi \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i \Delta^i \omega_0 \right) \\ &= \Pi \left( \frac{1}{T_2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} T_1^i T_2^{n-i} \Delta^i \omega_0 \right) \end{aligned}$$

Or,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $\forall \vec{V} \in \hat{\mathcal{E}}$ ,  $\pi(\lambda \vec{V}) = \pi(\vec{V})$ , donc

$$BR[\omega](t) = \Pi \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} T_1^i T_2^{n-i} \Delta^i \omega_0 \right) \quad (3.3)$$

Notons  $P(T_1, T_2) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} T_1^i T_2^{n-i} \Delta^i \omega_0$

Alors, selon le *Lemme 1*, le polynôme  $Q(U_1, U_2) = P(\mathcal{A}(U_1, U_2), \mathcal{B}(U_1, U_2))$  s'écrit

$$Q(U_1, U_2) = \sum_{i=0}^{nm} \delta_i U_1^{nm-i} U_2^i$$

Donc

$$BR[\omega](t) = \Pi \left( \sum_{i=0}^{nm} \delta_i U_1^{nm-i} U_2^i \right)$$

Posons  $\theta_i = \frac{1}{\binom{nm}{i}} \delta_i$ ,  $i \in \{0, \dots, nm\}$ .

On a alors:

$$\begin{aligned} BR[\omega](t) &= \Pi \left( \sum_{i=0}^{nm} \binom{nm}{i} U_1^{nm-i} U_2^i \theta_i \right) \\ &= \Pi \left( \sum_{i=0}^{nm} \binom{nm}{i} \lambda^{nm-i} (1-u)^{nm-i} \lambda^i u^i \theta_i \right) \\ &= \Pi \left( \lambda^{nm} \sum_{i=0}^{nm} \binom{nm}{i} (1-u)^{nm-i} u^i \theta_i \right) \\ &= \Pi \left( \sum_{i=0}^{nm} B_i^{nm}(u) \theta_i \right) \\ &= BR[\theta](u) \end{aligned} \quad (3.4)$$

□

**Proposition 15** Avec les notations précédentes, pour chaque  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $c_{ij}$ ,  $j \in \{0, \dots, nm\}$ , les coefficients du développement suivant

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i} = \sum_{j=0}^{nm} c_{ij} U_1^{nm-j} U_2^j.$$

Le polygone massique  $\theta$  se déduit du polygone  $\omega$  par la relation matricielle:

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{nm} \end{pmatrix} = D_1^{-1} K_F D_2 \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \Delta \omega_0 \\ \vdots \\ \Delta^n \omega_0 \end{pmatrix}$$

où  $K_F$  est la matrice  $(nm+1) \times (n+1)$  dont le coefficient à la ligne  $i$  et colonne  $j$  est  $c_{ij}$ , et où les matrices  $D_1$  et  $D_2$  sont les suivantes:

$$D_1 = \text{diag} \left( \binom{nm}{0}, \binom{nm}{1}, \dots, \binom{nm}{nm} \right)$$

et

$$D_2 = \text{diag} \left( \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n} \right)$$

**Preuve :** On a vu lors de la démonstration précédente ((3.3) et (3.4)) que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{nm} \binom{nm}{j} U_1^{nm-j} U_2^j \theta_j &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} T_1^i T_2^{n-i} \Delta^i \omega_0 \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i} \Delta^i \omega_0 \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left( \sum_{j=0}^{nm} c_{ij} U_1^{nm-j} U_2^j \right) \Delta^i \omega_0 \\ &= \sum_{j=0}^{nm} \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} c_{ij} \Delta^i \omega_0 \right) U_1^{nm-j} U_2^j \end{aligned}$$

Donc, par identification  $\binom{nm}{j} \theta_j = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} c_{ij} \Delta^i \omega_0 \quad \forall j \in \{0, \dots, nm\}$ ,

$$\text{et } \theta_j = \frac{1}{\binom{nm}{j}} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} c_{ij} \Delta^i \omega_0 \quad \forall j \in \{0, \dots, nm\},$$

d'où la relation matricielle proposée. □

### 3.3 Algorithme de calcul de la matrice $K_F$

**Lemme 2** Avec les notations précédentes et pour  $i \in \{0, \dots, n\}$   $(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i$  et  $(\mathcal{B}(U_1, U_2))^i$  s'écrivent respectivement:

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i = \sum_{j=0}^{mi} \alpha_{ij} U_1^{mi-j} U_2^j \quad (3.5)$$

$$(\mathcal{B}(U_1, U_2))^i = \sum_{j=0}^{mi} \beta_{ij} U_1^{mi-j} U_2^j \quad (3.6)$$

où les coefficients  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$  sont déterminés en fonction des coefficients  $a_k$  et  $b_k$ ,  $k \in \{0, \dots, m\}$  définis en (3.2), grâce à l'algorithme suivant:

$$\begin{aligned} & \alpha_{00} = 1 \\ & \beta_{00} = 1 \\ & \text{pour } j = 0, \dots, m \\ & \quad \alpha_{1j} = \binom{m}{j} a_j \\ & \quad \beta_{1j} = \binom{m}{j} b_j \\ & \text{pour } i = 2, \dots, n \\ & \quad \text{pour } j = 0, \dots, n.m \\ & \quad \quad k = 0 \\ & \quad \quad \alpha_{ij} = 0 \\ & \quad \quad \beta_{ij} = 0 \\ & \quad \quad \text{tant que } (k \leq m \text{ et } k \leq j) \\ & \quad \quad \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ij} + \binom{m}{k} a_k \alpha_{i-1, j-k} \\ & \quad \quad \quad \beta_{ij} = \beta_{ij} + \binom{m}{k} b_k \beta_{i-1, j-k} \\ & \quad \quad \quad k = k + 1 \end{aligned}$$

**Preuve:** Montrons que les coefficients  $\alpha_{ij}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $j \in \{0, \dots, mi\}$ , calculés par cet algorithme vérifient bien l'égalité (3.5). Pour cela, raisonnons par récurrence:

Initialement, pour  $i = 0$ , la vérification est immédiate. Pour  $i = 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{mi} \alpha_{ij} U_1^{mi-j} U_2^j &= \sum_{j=0}^m \alpha_{1j} U_1^{m-j} U_2^j \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a_j U_1^{m-j} U_2^j \\ &= \mathcal{A}(U_1, U_2) \end{aligned}$$

Supposons que (3.5) soit vérifiée pour  $i - 1 \in \{0, \dots, n - 1\}$ , et montrons qu'elle l'est alors également pour  $i$ . Nous avons:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(U_1, U_2))^i &= (\mathcal{A}(U_1, U_2))^{i-1} \mathcal{A}(U_1, U_2) \\ &= \left( \sum_{j=0}^{m(i-1)} \alpha_{i-1,j} U_1^{m(i-1)-j} U_2^j \right) \left( \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a_j U_1^{m-j} U_2^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^{mi} \left( \sum_{l+k=j} \alpha_{i-1,l} \binom{m}{k} a_k \right) U_1^{mi-j} U_2^j \end{aligned}$$

Or  $\alpha_{i-1,l}$  n'existe que si  $l \geq 0$  i.e.  $k \leq j$ , de même  $a_k$  n'existe que si  $k \leq m$ , donc

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i = \sum_{j=0}^{mi} \left( \sum_{k=0}^{\inf\{m,j\}} \binom{m}{k} a_k \alpha_{i-1,j-k} \right) U_1^{mi-j} U_2^j$$

or l'expression de  $\alpha_{ij}$  donnée dans l'algorithme est bien

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=0}^{\inf\{m,j\}} \binom{m}{k} a_k \alpha_{i-1,j-k} \quad (3.7)$$

L'égalité (3.5) est donc vérifiée.

La démonstration est identique pour les coefficients  $\beta_{ij}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $j \in \{0, \dots, mi\}$  et l'égalité (3.6). □

**Proposition 16** *Les coefficients  $c_{ij}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $j \in \{0, \dots, mn\}$  définissant la matrice  $K_F$  sont calculés en fonction des coefficients  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $j \in \{0, \dots, mi\}$  grâce à l'expression:*

$$c_{ij} = \sum_{k=k_0}^{k_1} \alpha_{ik} \beta_{n-i,j-k},$$

avec  $k_0 = \sup\{0, j - m(n - i)\}$  et  $k_1 = \inf\{mi, j\}$ .

**Preuve:** Rappelons que les coefficients  $c_{ij}$  sont définis par le développement

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i} = \sum_{j=0}^{nm} c_{ij} U_1^{nm-j} U_2^j. \quad (3.8)$$

Or, selon le Lemme 2

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i} = \left( \sum_{j=0}^{mi} \alpha_{ij} U_1^{mi-j} U_2^j \right) \left( \sum_{j=0}^{m(n-i)} \beta_{n-i,j} U_1^{m(n-i)-j} U_2^j \right).$$

donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i} &= \sum_{k=0}^{mi} \left( \sum_{l=0}^{m(n-i)} \alpha_{ik} \beta_{n-i,l} U_1^{mn-l-k} U_2^{k+l} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{mn} \left( \sum_{l+k=j} \alpha_{ik} \beta_{n-i,l} \right) U_1^{mn-j} U_2^j. \end{aligned}$$

Or  $\alpha_{ik}$  n'existe que si  $0 \leq k \leq mi$ . De même,  $\beta_{n-i,l}$  n'existe que si et seulement  $0 \leq l \leq m(n-i)$ , c'est-à-dire  $0 \leq j-k \leq m(n-i)$ , ou encore  $k \leq j$  et  $k \geq j - m(n-i)$ . En notant  $k_0 = \sup\{0, j - m(n-i)\}$  et  $k_1 = \inf\{mi, j\}$ , on a

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i} = \sum_{j=0}^{mn} \left( \sum_{k=k_0}^{k_1} \alpha_{ik} \beta_{n-i,j-k} \right) U_1^{nm-j} U_2^j.$$

En identifiant cette expression avec (3.8), nous obtenons

$$c_{ij} = \sum_{k=k_0}^{k_1} \alpha_{ik} \beta_{n-i,j-k}.$$

□

### 3.4 Cas particulier: $B(u) = B_1^2(u)$

La plupart des changements de variable que nous avons proposés au chapitre précédent sont de la forme  $F(u) = \frac{A(u)}{B_1^2(u)}$ ,  $u \in [0, 1]$ , où  $A(u)$  est un polynôme de degré  $m = 2, 3$  ou  $5$ , et  $B_1^2(u) = 2u(1-u)$  est le deuxième polynôme de la base de Bernstein de degré 2. Dans ce cas, certains coefficients de la matrice  $K_F$  sont nuls. Nous proposons donc ici un algorithme différent de celui développé par le *Lemme 2* et la *Proposition 16* et utilisant les propriétés propres à ce cas particulier.

Dans la suite, nous appellerons *polynôme homogène associé* à un polynôme  $P$  de degré au plus  $m$ ,  $P(u) = \sum_{i=0}^m p_i B_i^m(u)$ , le polynôme  $\mathcal{P}(U_1, U_2) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} p_i U_1^{m-i} U_2^i$ . Nous remarquons que  $\mathcal{P}$  n'est pas unique, mais dépend du degré de la base de Bernstein dans laquelle est exprimé  $P$ .

Nous définissons donc la relation  $\#$  entre deux polynômes homogènes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  par:  $\mathcal{P} \# \mathcal{P}'$  si et seulement si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont associés à un même polynôme  $P$ .

**Lemme 3** *La relation  $\#$  vérifie quelques propriétés élémentaires:*

- (i)  $\#$  est une relation d'équivalence.
- (ii) Si  $\mathcal{P} \# \mathcal{P}'$  et si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont de même degré, alors  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ .
- (iii) Si  $\mathcal{P} \# \mathcal{P}'$  et  $\mathcal{Q} \# \mathcal{Q}'$ , alors  $(\mathcal{P} \times \mathcal{Q}) \# (\mathcal{P}' \times \mathcal{Q}')$ .

**Preuve :**

(i) Cette propriété est évidente.

(ii) Supposons que  $\mathcal{P} \# \mathcal{P}'$  et  $\text{degré}(\mathcal{P}) = \text{degré}(\mathcal{P}') = m$ . Notons respectivement  $\{\lambda_0, \dots, \lambda_m\}$  et  $\{\mu_0, \dots, \mu_m\}$  les coefficients de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ . Il existe un polynôme  $P$  auquel  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont associés. On a donc  $P = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}^{-1} \lambda_i B_i^m$  et  $P = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}^{-1} \mu_i B_i^m$ . Or l'expression de  $P$  dans la base de Bernstein de degré  $m$  est unique donc, pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$ ,  $\binom{m}{i}^{-1} \lambda_i = \binom{m}{i}^{-1} \mu_i$  et  $\lambda_i = \mu_i$ , d'où  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ .

(iii) Supposons que  $\mathcal{P} \# \mathcal{P}'$  et  $\mathcal{Q} \# \mathcal{Q}'$ . Il existe donc deux polynômes  $P$  et  $Q$  auxquels sont associés respectivement  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ , et  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}'$ .

Montrons que  $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$  est associé à  $P \times Q$ . Notons

$$P(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) \quad \text{et} \quad Q(u) = \sum_{i=0}^m q_i B_i^m(u).$$

Nous avons donc:

$$\begin{aligned} P(u) \times Q(u) &= \left( \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) \right) \times \left( \sum_{i=0}^m q_i B_i^m(u) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m+n} \left( \sum_{j+k=i} p_j q_k B_j^n(u) B_k^m(u) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m+n} \left( \sum_{j+k=i} p_j q_k \binom{n}{j} \binom{m}{k} \right) \binom{n+m}{i}^{-1} B_i^{n+m}(u) \end{aligned} \quad (3.9)$$

D'autre part, on a

$$\mathcal{P}(U_1, U_2) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p_i U_1^{n-i} U_2^i \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}(U_1, U_2) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} q_i U_1^{m-i} U_2^i.$$

Donc:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(U_1, U_2) \times \mathcal{Q}(U_1, U_2) &= \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p_i U_1^{n-i} U_2^i \right) \times \left( \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} q_i U_1^{m-i} U_2^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m+n} \left( \sum_{j+k=i} \binom{n}{j} \binom{m}{k} p_j q_k \right) U_1^{n+m-i} U_2^i \\ &= \sum_{i=0}^{m+n} \binom{n+m}{i} \left( \sum_{j+k=i} p_j q_k \binom{n}{j} \binom{m}{k} \right) \binom{n+m}{i}^{-1} U_1^{n+m-i} U_2^i \end{aligned}$$

En comparant cette dernière expression à celle obtenue en (3.9) pour  $P(u) \times Q(u)$ , on constate que  $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$  est associé à  $P \times Q$ . On montre de la même façon que  $\mathcal{P}' \times \mathcal{Q}'$  est également associé à  $P \times Q$  (éventuellement dans des bases de Bernstein de degrés autres que  $n$  et  $m$ ). On obtient ainsi (iii). □

**Lemme 4** Soit  $P$  un polynôme de degré au plus  $p$ . Soient  $\mathcal{P}$  (resp.  $\mathcal{P}'$ ) le polynôme homogène associé à  $P$  lorsqu'il est exprimé dans la base de Bernstein de degré  $p$  (resp.  $p+r$ ,  $r \in \mathbb{N}^*$ ). Ces polynômes s'écrivent donc:

$$\mathcal{P}(U_1, U_2) = \sum_{i=0}^p \mu_{i,p} U_1^{p-i} U_2^i \quad \text{et} \quad \mathcal{P}'(U_1, U_2) = \sum_{i=0}^{p+r} \mu_{i,p+r} U_1^{p+r-i} U_2^i.$$

Les coefficients  $\mu_{i,p+r}$  se déduisent alors des coefficients  $\mu_{i,p}$  par la relation de récurrence:

$$\begin{aligned} \text{Pour } j \in \{1, \dots, r\} \quad & \mu_{0,p+j} = \mu_{0,p+j-1} = \mu_{0,p}, \\ & \mu_{p+j,p+j} = \mu_{p+j-1,p+j-1} = \mu_{p,p}, \\ & \text{pour } i \in \{1, \dots, p+j-1\} \quad \mu_{i,p+j} = \mu_{i-1,p+j-1} + \mu_{i,p+j-1} \end{aligned}$$

**Preuve:** Notons  $(p_{i,n})_{i \in \{0, \dots, n\}}$  les coordonnées de  $P$  dans la base de Bernstein de degré  $n$  ( $n \geq p$ ). Soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ , les formules d'élévation de longueur (*Chapitre 1, Proposition 7*) nous permettent d'exprimer les coefficients  $p_{i,p+j}$  en fonction des  $p_{i,p+j-1}$ :

$$\begin{aligned} p_{0,p+j} &= p_{0,p+j-1}, \\ p_{p+j,p+j} &= p_{p+j-1,p+j-1}, \\ \text{pour } i \in \{1, \dots, p+j-1\} \\ p_{i,p+j} &= \frac{i}{p+j} p_{i-1,p+j-1} + \frac{p+j-i}{p+j} p_{i,p+j-1} \end{aligned}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} \mu_{0,p+j} &= p_{0,p+j} = p_{0,p+j-1} = \mu_{0,p+j-1}, \\ \mu_{p+j,p+j} &= p_{p+j,p+j} = p_{p+j-1,p+j-1} = \mu_{p+j-1,p+j-1}, \\ \text{pour } i \in \{1, \dots, p+j-1\} \\ \mu_{i,p+j} &= \binom{p+j}{i} p_{i,p+j} \\ &= \binom{p+j}{i} \frac{i}{p+j} p_{i-1,p+j-1} + \binom{p+j}{i} \frac{p+j-i}{p+j} p_{i,p+j-1} \\ &= \binom{p+j-1}{i-1} p_{i-1,p+j-1} + \binom{p+j-1}{i} p_{i,p+j-1} \\ &= \mu_{i-1,p+j-1} + \mu_{i,p+j-1} \end{aligned}$$

□

**Proposition 17** Soit  $F$  une fraction rationnelle définie pour  $u \in [0, 1]$  par (3.1) avec  $B(u) = 2u(u-1)$ . Les coefficients  $c_{ij}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $j \in \{0, \dots, mn\}$  de la matrice  $K_F$  associée (Proposition 15) sont déterminés par l'algorithme ci-dessous. Comme cette matrice n'est pas pleine (les coefficients  $c_{ij}$  de  $K_F$  tels que  $j < n-i$  ou  $j > mn-n+i$

sont nuls), nous ne calculons que les coefficients non nuls: pour chaque  $i \in \{0, \dots, n\}$ , nous déterminons d'abord les coefficients  $\gamma_{0k}^i$ , en  $(C_1)$ . Puis nous en déduisons les autres  $\gamma_{jk}^i$  par itérations successives en  $(C_2)$ . Enfin, nous obtenons les coefficients  $c_{ij}$  à partir des  $\gamma_{ij}^k$ , en  $(C_3)$ .

pour  $i = 0, \dots, n$

$(C_1)$  pour  $j = 0, \dots, mn$

si  $j < n - i$  ou  $j > n - i + mi$  alors  $\gamma_{0,j}^i = 0$   
sinon si  $i = 0$   $\gamma_{0,j}^i = 2^n$

si  $i = 1$   $\gamma_{0,j}^i = 2^{n-1} \binom{m}{j-n+1} a_{j-n+1}$

si  $i \geq 2$   $\gamma_{0,j}^i = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\text{Inf}\{m, j-n+i\}} \binom{m}{k} \cdot a_k \cdot \gamma_{0, j-k+1}^{i-1}$

$(C_2)$  pour  $k = 1, \dots, mn - 2(n - i) - mi$

$\gamma_{k, n-i}^i = \gamma_{k-1, n-i}^i$

$\gamma_{k, n-i+mi+k}^i = \gamma_{k-1, n-i+mi+k-1}^i$

pour  $j = n - i + 1, \dots, n - i + mi + k - 1$

$\gamma_{k,j}^i = \gamma_{k-1, j-1}^i + \gamma_{k-1, j}^i$

$(C_3)$  pour  $k = 0, \dots, mn$

si  $k < n - i$  or  $k > mn - n + i$   $c_{ik} = 0$

sinon  $c_{ik} = \gamma_{(m-2)(n-i), k}^i$

**Preuve:** Montrons que les coefficients  $c_{ik}$ , obtenus grâce à cet algorithme, vérifient bien:

$$\sum_{k=0}^{nm} c_{ik} U_1^{nm-k} U_2^k = (\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i},$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont les polynômes homogènes de degré  $m$ , associés respectivement à  $A$  et à  $B = B_1^2$ . Nous détaillons la preuve en quatre étapes.

(a) Dans ce cas particulier, nous avons, avec les notations introduites précédemment,  $\mathcal{B}(U_1, U_2) \# (2U_1U_2)$ , car ils sont associés au polynôme  $B_1^2$ .

Donc, selon le *Lemme 3 (iii)*, nous avons

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i} \# (\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (2U_1U_2)^{n-i}$$

Or, selon la relation (3.5), *Lemme 2*, nous avons:

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i = \sum_{j=0}^{mi} \alpha_{ij} U_1^{mi-j} U_2^j,$$

donc

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (2U_1U_2)^{n-i} = \left( \sum_{j=0}^{mi} \alpha_{ij} U_1^{mi-j} U_2^j \right) (2U_1U_2)^{n-i}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (2U_1U_2)^{n-i} &= \sum_{j=0}^{mi} 2^{n-i} \alpha_{ij} U_1^{mi+n-i-j} U_2^{n-i+j} \\
&= \sum_{j=n-i}^{mi+n-i} 2^{n-i} \alpha_{i,j-n+i} U_1^{mi+2(n-i)-j} U_2^j
\end{aligned}$$

d'où la relation

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i} \# \sum_{j=n-i}^{mi+n-i} 2^{n-i} \alpha_{i,j-n+i} U_1^{mi+2(n-i)-j} U_2^j \quad (3.10)$$

(b) Montrons que,  $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \forall j \in \{n-i, \dots, n-i+mi\}, \gamma_{0,j}^i = 2^{n-i} \alpha_{i,j-n+i}$ .  
Pour cela, raisonnons par récurrence:

Pour  $i = 0$ ,  $\gamma_{0,j}^0 = 2^n = 2^n \alpha_{00}$  (car selon le *Lemme 2*,  $\alpha_{00} = 1$ ).

Pour  $i = 1$ , on a, pour  $j \in \{n-1, \dots, m+n-1\}$ ,

$$\gamma_{0,j}^1 = 2^{n-1} \binom{m}{j-n+1} a_{j-n+1}.$$

Or selon le *Lemme 2*,  $\alpha_{1,j-n+1} = \binom{m}{j-n+1} a_{j-n+1}$ , donc  $\gamma_{0,j}^1 = 2^{n-1} \alpha_{1,j-n+1}$ .

Soit  $i \in \{2, \dots, n\}$ , supposons l'assertion vraie pour  $i-1$ , et montrons qu'elle l'est alors pour  $i$ .

L'algorithme nous donne une expression récursive des  $\gamma_{0,j}^i$ ,  $n-i < j < n-i+mi$ :

$$\begin{aligned}
\gamma_{0,j}^i &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\inf\{m, j-n+i\}} \binom{m}{k} a_k \gamma_{0,j-k+1}^{i-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\inf\{m, j-n+i\}} \frac{1}{2} \binom{m}{k} a_k 2^{n-i+1} \alpha_{i-1, j-n+i-k} \\
&= 2^{n-i} \sum_{k=0}^{\inf\{m, j-n+i\}} \binom{m}{k} a_k \alpha_{i-1, j-n+i-k}.
\end{aligned}$$

En remplaçant  $j$  par  $j-n+i$  dans (3.7) (démonstration du *Lemme 2*), nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{\inf\{m, j-n+i\}} \binom{m}{k} a_k \alpha_{i-1, j-n+i-k} = \alpha_{i, j-n+i},$$

donc  $\gamma_{0,j}^i = 2^{n-i} \alpha_{i, j-n+i}$ .

Pour alléger les notations, nous noterons dans la suite  $\lambda = mi + 2(n-i)$ .

(c) Montrons que

$$\left( \sum_{j=n-i}^{mn-n+i} \gamma_{mn-\lambda,j}^i U_1^{mn-j} U_2^j \right) \# \left( \sum_{j=n-i}^{mi+n-i} \gamma_{0,j}^i U_1^{\lambda-j} U_2^j \right).$$

On a

$$\sum_{j=n-i}^{mi+n-i} \gamma_{0,j}^i U_1^{mn-\lambda-j} U_2^j = \sum_{j=0}^{mi} \gamma_{0,j}^i U_1^{\lambda-j} U_2^j$$

avec  $\gamma_{0,j}^i = 0$  si  $j < n - i$  ou  $j > mi - n + i$ .

Or la relation de récurrence ( $C_2$ ) de l'algorithme permettant de déterminer les coefficients  $\gamma_{mn-\lambda,j}^i$  en fonction des coefficients  $\gamma_{0,j}^i$  est identique à celle du *Lemme 4*. Les polynômes homogènes respectivement associés à ces deux suites de coefficients sont donc associés, à une élévation de longueur près, à un même polynôme, donc

$$\left( \sum_{j=0}^{mn} \gamma_{mn-\lambda,j}^i U_1^{mn-j} U_2^j \right) \# \left( \sum_{j=0}^{mi} \gamma_{0,j}^i U_1^{\lambda-j} U_2^j \right).$$

Par récurrence sur  $k$ , on montre aisément que, pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$

$\forall k \in \{1, \dots, mn - \lambda\}$ , si  $j < n - i$  ou  $j > mi + n - i + k$ , alors  $\gamma_{k,j}^i = 0$ ,

donc pour  $k = mn - \lambda$

$$\sum_{j=0}^{mn} \gamma_{mn-\lambda,j}^i U_1^{mn-j} U_2^j = \sum_{j=n-i}^{mn-n+i} \gamma_{mn-\lambda,j}^i U_1^{mn-j} U_2^j,$$

donc

$$\left( \sum_{j=n-i}^{mn-n+i} \gamma_{mn-\lambda,j}^i U_1^{mn-j} U_2^j \right) \# \left( \sum_{j=n-i}^{mi+n-i} \gamma_{0,j}^i U_1^{\lambda-j} U_2^j \right).$$

(d) Conclusion:

De (b) et de (3.10), nous déduisons que

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i} \# \left( \sum_{j=n-i}^{mi-n+i} \gamma_{0,j}^i U_1^{\lambda-j} U_2^j \right).$$

Donc, selon (c),  $\#$  étant une relation d'équivalence, on a par transitivité

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i} \# \left( \sum_{j=n-i}^{mn-n+i} \gamma_{mn-\lambda,j}^i U_1^{mn-j} U_2^j \right).$$

Ces deux polynômes sont de même degré  $mn$ , donc, selon le *Lemme 3 (ii)*

$$(\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i} = \left( \sum_{j=n-i}^{mn-n+i} \gamma_{mn-\lambda,j}^i U_1^{mn-j} U_2^j \right).$$

Or, selon  $(C_3)$ ,  $c_{ij} = 0$  si  $j < n - i$  ou  $j > mn - n + i$ ,  $c_{ij} = \gamma_{mn-\lambda, j}^i$  sinon. Donc

$$\sum_{j=0}^{mn} c_{ij}^i U_1^{mn-j} U_2^j = \sum_{j=n-i}^{mn-n+i} \gamma_{mn-\lambda, j}^i U_1^{mn-j} U_2^j = (\mathcal{A}(U_1, U_2))^i (\mathcal{B}(U_1, U_2))^{n-i}.$$

□

### 3.5 Forme (BR) des cercles $C^k$ , $k = 1, 3, 5$

#### 3.5.1 Forme (BR) du cas quadratique

Nous avons vu précédemment *Chapitre 2* (2.3) que le changement de variable quadratique suivant donne une représentation du cercle  $M(u) = C(q_1(u))$  fermée  $C^1$ -continûment en  $W = (-1, 0)$ .

$$q_1(u) = \frac{\alpha B_0^2(u) + \beta B_1^2(u) - \alpha B_2^2(u)}{B_1^2(u)}$$

Nous utilisons soit les résultats de Fiorot, Jeannin et Taleb [6], soit les résultats précédents: la *Proposition 17* nous fournit les coefficients  $c_{ij}$  de la matrice  $K_F$  de la *Proposition 15*. Nous avons

$$K_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 2\alpha & 4\alpha\beta \\ 4 & 4\beta & 4\beta^2 - 2\alpha^2 \\ 0 & -2\alpha & -4\alpha\beta \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_1^{-1} K_F D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha & \alpha\beta \\ \frac{2}{3} & \frac{4\beta}{3} & \frac{1}{3}(2\beta^2 - \alpha^2) \\ 0 & -\alpha & -\alpha\beta \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons alors  $M(u) = BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4](u)$  avec

$$\theta_0 = ((-1, 0); \alpha^2)$$

$$\theta_1 = \begin{cases} ((-1, \frac{1}{\beta}); \alpha\beta) & \text{si } \beta \neq 0 \\ ((0, \alpha); 0) & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} ((\frac{2-2\beta^2+\alpha^2}{2+2\beta^2-\alpha^2}, \frac{4\beta}{2+2\beta^2-\alpha^2}); \frac{1}{3}(2+2\beta^2-\alpha^2)) & \text{si } 2+2\beta^2-\alpha^2 \neq 0 \\ ((\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\beta); 0) & \text{si } 2+2\beta^2-\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

$$\theta_3 = \begin{cases} ((-1, \frac{1}{\beta}); -\alpha\beta) & \text{si } \beta \neq 0 \\ ((0, -\alpha); 0) & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$$

$$\theta_4 = ((-1, 0); \alpha^2).$$

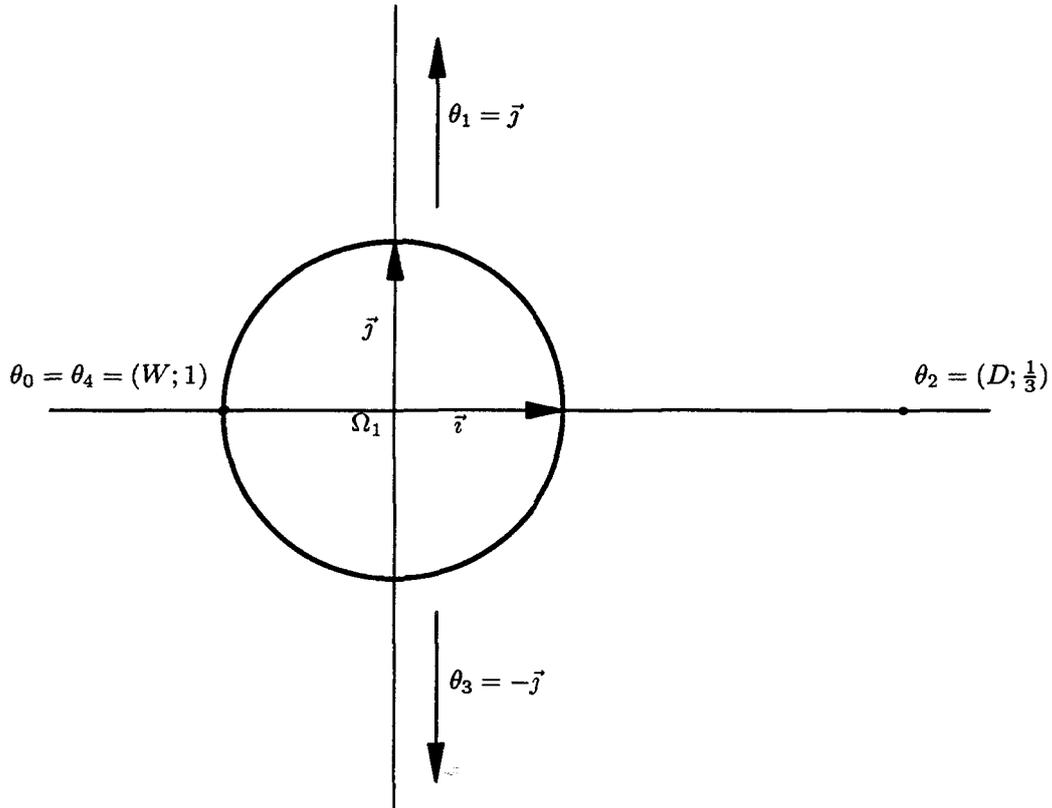


Figure 3.1: Le polygone de contrôle d'un cercle  $C^1$  en  $W$ .

**Exemple :** Avec  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ , la courbe rationnelle ( $M$ ) a pour vecteurs massiques

$$\begin{aligned}
 \theta_0 &= (W; 1) \\
 \theta_1 &= \vec{j} \\
 \theta_2 &= (D; \frac{1}{3}) \text{ avec } D = (3, 0) \\
 \theta_3 &= -\vec{j} \\
 \theta_4 &= (W; 1)
 \end{aligned}$$

La *Figure 3.1* montre une représentation de ce polygone.

**Remarque :** Dans ce cas, nous ne pouvons pas obtenir uniquement des poids strictement positifs, car  $\theta_3 = -\theta_1$  quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$ . Il est cependant possible d'obtenir exclusivement des masses positives en élevant une fois la longueur de ce polygone. Récemment, Chou [21] a proposé une telle représentation du cercle entier via une voie algébrique.

Après l'élevation de longueur, nous obtenons les vecteurs massiques suivants:

$$\theta'_0 = ((-1, 0); \alpha^2)$$

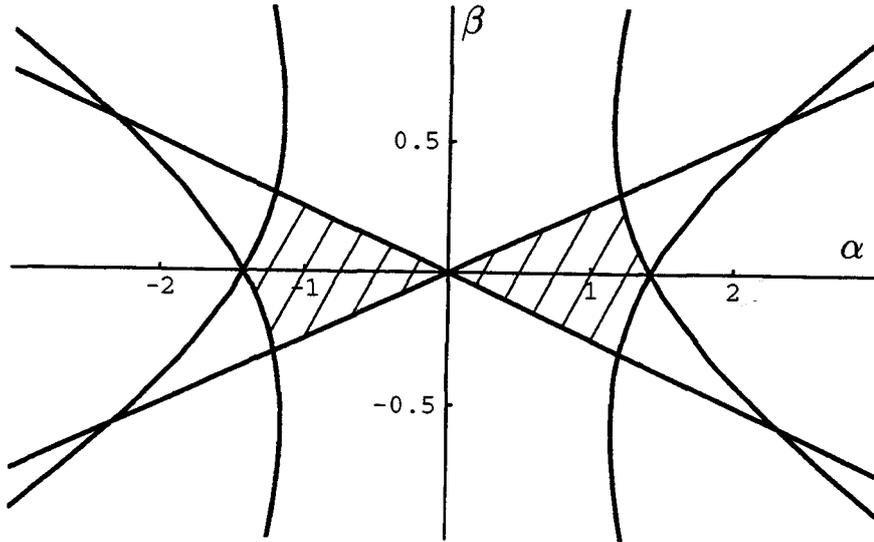


Figure 3.2: La région hachurée représente le domaine défini par  $(S_1)$ .

$$\theta'_1 = \begin{cases} ((-1, \frac{4}{\alpha+4\beta}); \frac{\alpha}{5}(\alpha+4\beta)) & \text{si } \alpha+4\beta \neq 0 \\ ((0, \frac{4}{5}\alpha); 0) & \text{si } \alpha+4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\theta'_2 = \begin{cases} ((\frac{2-2\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2}{2+2\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2}, \frac{2(\alpha+2\beta)}{2+2\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2}); \frac{1}{5}(2+2\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2)) & \text{si } 2+2\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2 \neq 0 \\ ((\frac{4}{5}, \frac{2}{5}(\alpha+2\beta)); 0) & \text{si } 2+2\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

$$\theta'_3 = \begin{cases} ((\frac{2+\alpha^2+2\alpha\beta-2\beta^2}{2-\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2}, \frac{2(-\alpha+2\beta)}{2-\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2}); \frac{1}{5}(2-\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2)) & \text{si } 2-\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2 \neq 0 \\ ((\frac{4}{5}, \frac{2}{5}(-\alpha+2\beta)); 0) & \text{si } 2-\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2 = 0 \end{cases}$$

$$\theta'_4 = \begin{cases} ((-1, -\frac{4}{\alpha-4\beta}); \frac{1}{5}\alpha(\alpha-4\beta)) & \text{si } \alpha-4\beta \neq 0 \\ ((0, -\frac{4}{5}\alpha); 0) & \text{si } \alpha-4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\theta'_5 = ((-1, 0); \alpha^2).$$

Les conditions pour n'obtenir que des points pondérés de masses strictement positives (pas de vecteur pur) sont donc

$$(S_1) \begin{cases} \alpha(\alpha+4\beta) > 0 \\ \alpha(\alpha-4\beta) > 0 \\ 2-\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2 > 0 \\ 2-\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2 > 0. \end{cases}$$

Le domaine déterminé par  $(S_1)$  est représenté en *Figure 3.2*.

### 3.5.2 Forme (BR) d'un cercle fermé $C^3$ -continûment

Le changement de variable donné au *Chapitre 2, Section 3* (2.25), qui vérifie les conditions de régularité  $C^3$  en  $W$  est

$$\varphi(u) = \frac{aB_0^3(u) + bB_1^3(u) + \frac{1}{3}(3b - 4a)B_2^3(u) - aB_3^3(u)}{B_1^2(u)}$$

avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

Grâce aux *Propositions 15 et 17*, nous obtenons les matrices  $K_F$  et  $D_1^{-1}K_FD_2$

$$K_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 2a & 6ab \\ 4 & 2a + 6b & -2a^2 + 6ab + 9b^2 \\ 8 & -2a + 12b & -2a^2 - 6ab + 18b^2 \\ 4 & -4a + 6b & a^2 - 12ab + 9b^2 \\ 0 & -2a & 2a(a - 3b) \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$D_1^{-1}K_FD_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & \frac{2a}{3} & ab \\ \frac{4}{15} & \frac{4}{15}(a + 3b) & \frac{1}{15}(-2a^2 + 6ab + 9b^2) \\ \frac{8}{15} & \frac{1}{5}(-a + 6b) & \frac{1}{10}(-a^2 - 3ab + 9b^2) \\ \frac{4}{15} & \frac{4}{15}(-2a + 3b) & \frac{1}{15}(a^2 - 12ab + 9b^2) \\ 0 & -\frac{2a}{3} & \frac{a}{3}(a - 3b) \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons l'expression du polygone de  $R(u) = C(\varphi(u))$ :

$$\theta_0 = ((-1, 0); a^2)$$

$$\theta_1 = \begin{cases} ((-1, \frac{2}{3b}); ab) & \text{si } b \neq 0 \\ ((0, \frac{2}{3}a); 0) & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} ((\frac{4+(2a-3b)(4a+3b)}{4-(2a-3b)(4a+3b)}, \frac{4(a+3b)}{4-(2a-3b)(4a+3b)}); \frac{1}{15}(4-(2a-3b)(4a+3b))) & \text{si } \chi(\theta_2) \neq 0 \\ ((\frac{8}{15}, \frac{4}{15}(a+3b)); 0) & \text{si } \chi(\theta_2) = 0 \end{cases}$$

$$\theta_3 = \begin{cases} ((\frac{4+a^2+12a-9b^2}{4-(a^2+12ab-9b^2)}, \frac{4(-2a+3b)}{4-(a^2+12ab-9b^2)}); \frac{1}{10}(4-(a^2+12ab-9b^2))) & \text{si } \chi(\theta_3) \neq 0 \\ ((\frac{4}{5}, \frac{2}{5}(-2a+3b)); 0) & \text{si } \chi(\theta_3) = 0 \end{cases}$$

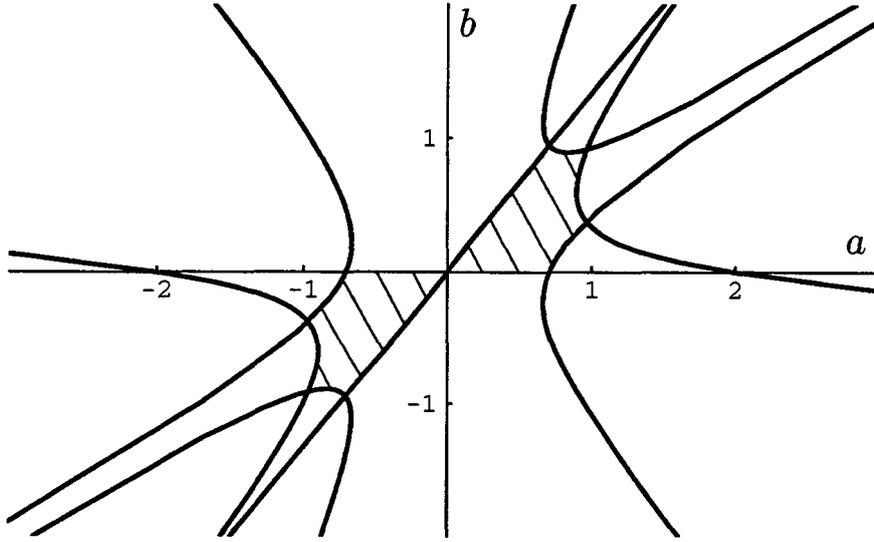


Figure 3.3: Le domaine défini par  $(S_2)$  est la zone hachurée.

$$\theta_4 = \begin{cases} \left( \left( \frac{4-(8a-3b)(2a-3b)}{4+(8a-3b)(2a-3b)}, \frac{4(-5a+3b)}{4+(8a-3b)(2a-3b)} \right); \frac{1}{15}(4 + (8a-3b)(2a-3b)) \right) & \text{si } \chi(\theta_4) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{8}{15}, \frac{4}{15}(-5a+3b) \right); 0 \right) & \text{si } \chi(\theta_4) = 0 \end{cases}$$

$$\theta_5 = \begin{cases} \left( \left( -1, \frac{-2}{4a-3b} \right), \frac{a}{3}(4a-3b) \right) & \text{si } 4a-3b \neq 0 \\ \left( \left( 0, -\frac{2}{3}a \right); 0 \right) & \text{si } 4a-3b = 0 \end{cases}$$

$$\theta_6 = \left( (-1, 0); a^2 \right).$$

Rappelons que  $\chi(\theta)$  est la masse de  $\theta$  (*Chapitre 1, Proposition 6*).

Le système  $(S_2)$  ci-dessous regroupe les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir un polygone à masses strictement positives.

$$(S_2) \begin{cases} ab > 0 \\ 4 - (2a-3b)(4a+3b) > 0 \\ 4 - (a^2 + 12ab - 9b^2) > 0 \\ 4 + (8a-3b)(2a-3b) > 0 \\ a(4a-3b) > 0. \end{cases}$$

Le domaine déterminé par ces inéquations est présenté *Figure 3.3*.

**Exemple :** Avec  $a = \frac{1}{2}$  et  $b = \frac{3}{10}$  qui vérifient les conditions de  $(S_2)$ , le cercle a pour polygone massique (voir *Figure 3.4*):

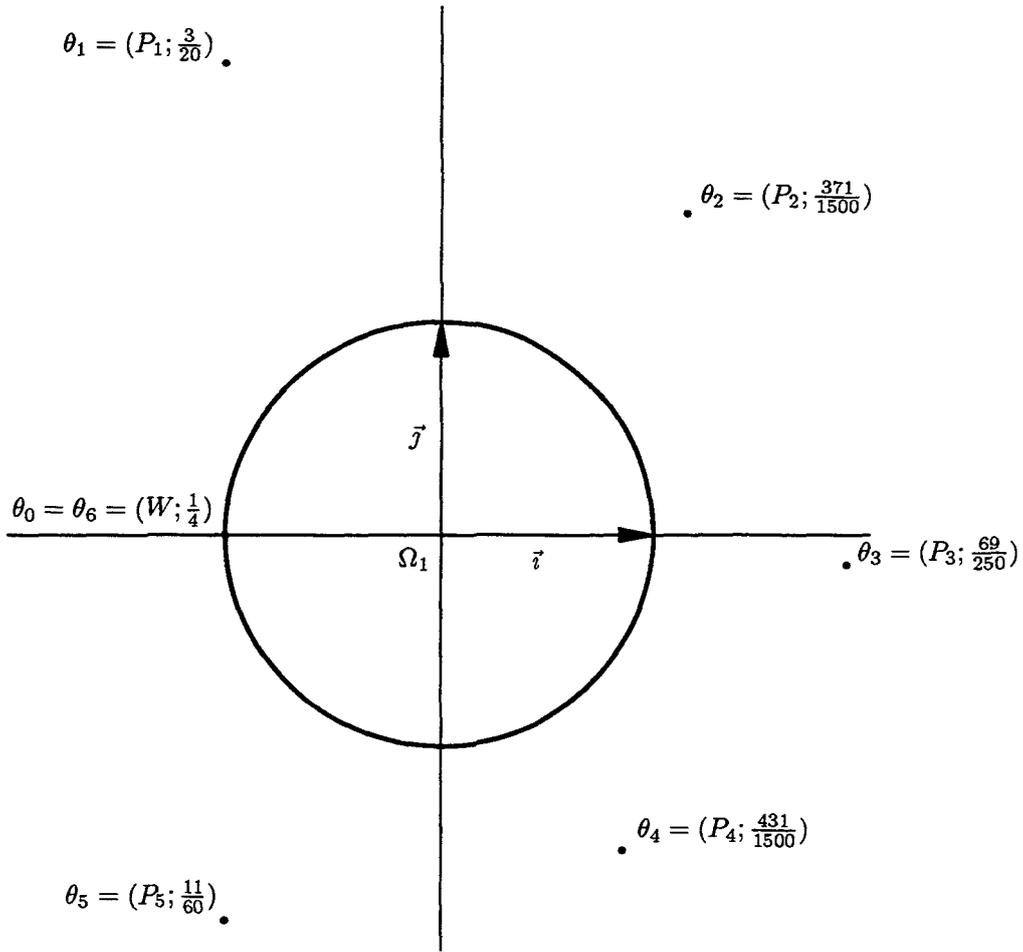


Figure 3.4: Les sept vecteurs massiques d'un cercle  $C^3$  en  $W$ .

$$\theta_0 = (W; \frac{1}{4})$$

$$\theta_1 = (P_1; \frac{3}{20}) \quad \text{avec } P_1 = (-1, \frac{20}{9})$$

$$\theta_2 = (P_2; \frac{371}{1500}) \quad \text{avec } P_2 = (\frac{429}{371}, \frac{80}{53})$$

$$\theta_3 = (P_3; \frac{69}{250}) \quad \text{avec } P_3 = (\frac{131}{69}, -\frac{10}{69})$$

$$\theta_4 = (P_4; \frac{431}{1500}) \quad \text{avec } P_4 = (\frac{369}{431}, -\frac{640}{431})$$

$$\theta_5 = (P_5; \frac{11}{60}) \quad \text{avec } P_5 = (-1, -\frac{20}{11})$$

$$\theta_6 = \theta_0.$$

### 3.5.3 Forme (BR) d'un cercle fermé $C^5$ -continûment: cas $\frac{4}{4}$

Le changement de variable de degré  $\frac{4}{4}$  donné au *Chapitre 2* (2.26) est

$$\varphi = \frac{aB_0^4 + bB_1^4 + \frac{1}{2}(-af + 2bf - a)B_2^4 + \frac{1}{4}(-3af - 2a + 4b)B_3^4 - aB_4^4}{B_1^4 + fB_2^4 + B_3^4}$$

avec  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $f = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$ . Nous obtenons, après simplification les matrices  $K_F$  et  $D_1^{-1}K_FD_2$

$$K_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 4a & 8ab \\ 16 & 16b + 6af & -6a^2 + 16b^2 - 6a^2f + 12abf \\ 48f & -8a - 12af + 48bf & -4a^2 - 16ab - 6a^2f - \\ & & 24abf + 48b^2f \\ 80 + 24f & -32a + 80b - 42af + 24bf & 19a^2 - 64ab + 80b^2 + 24a^2f - \\ & & 84abf + 24b^2f \\ 48f & -40a - 36af + 48bf & 36a^2 - 80ab + 42a^2f - \\ & & 72abf + 48b^2f \\ 16 & -8a + 16b - 18af & 22a^2 - 16ab + 16b^2 + \\ & & 24a^2f - 36abf \\ 0 & -4a & 2a(2a - 4b + 3af) \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$D_1^{-1}K_FD_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & a & ab \\ \frac{4}{7} & \frac{8b+3af}{7} & \frac{-3a^2+8b^2-3a^2f+6abf}{14} \\ \frac{6f}{7} & \frac{-2a-3af+12bf}{7} & \frac{-4a^2-16ab-6a^2f-24abf+48b^2f}{56} \\ \frac{4(10+3f)}{35} & \frac{-32a+80b-42af+24bf}{35} & \frac{19a^2-64ab+80b^2+24a^2f-84abf+24b^2f}{70} \\ \frac{6f}{7} & \frac{-10a-9af+12bf}{7} & \frac{18a^2-40ab+21a^2f-36abf+24b^2f}{28} \\ \frac{4}{7} & \frac{-4a+8b-9af}{7} & \frac{22a^2-16ab+16b^2+24a^2f-36abf}{28} \\ 0 & -a & \frac{a(2a-4b+3af)}{4} \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons le polygone massique:

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= ((-1, 0); a^2) \\
\theta_1 &= \begin{cases} ((-1, \frac{1}{b}); ab) & \text{si } b \neq 0 \\ ((0, a); 0) & \text{si } b = 0 \end{cases} \\
\theta_2 &= \begin{cases} \left( \left( \frac{8+a^2(3+3f)-6abf-8b^2}{8-a^2(3+3f)+6abf+8b^2}, \frac{6af+16b}{8-a^2(3+3f)+6abf+8b^2} \right); \frac{8-a^2(3+3f)+6abf+8b^2}{14} \right) & \text{si } \chi(\theta_2) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{8}{7}, \frac{3af+8b}{7} \right); 0 \right) & \text{si } \chi(\theta_2) = 0 \end{cases} \\
\theta_3 &= \begin{cases} \left( \left( \frac{24f+a^2(2+3f)+4ab(2+3f)-24b^2f}{24f-a^2(2+3f)-4ab(2+3f)+24b^2f}, \frac{-a(8+12f)+48bf}{24f-a^2(2+3f)-4ab(2+3f)+24b^2f} \right); \right. \\ \left. \frac{24f-a^2(2+3f)-4ab(2+3f)+24b^2f}{28} \right) & \text{si } \chi(\theta_3) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{12f}{7}, \frac{-a(2+3f)+12bf}{7} \right); 0 \right) & \text{si } \chi(\theta_3) = 0 \end{cases} \\
\theta_4 &= \begin{cases} \left( \left( \frac{80+24f-a^2(19+24f)+ab(64+84f)-b^2(80+24f)}{80+24f+a^2(19+24f)-ab(64+84f)+b^2(80+24f)}, \frac{-a(64+84f)+b(160+48f)}{80+24f+a^2(19+24f)-ab(64+84f)+b^2(80+24f)} \right); \right. \\ \left. \frac{80+24f+a^2(19+24f)-ab(64+84f)+b^2(80+24f)}{70} \right) & \text{si } \chi(\theta_4) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{80+24f}{35}, \frac{-a(32+42f)+b(80+24f)}{35} \right); 0 \right) & \text{si } \chi(\theta_4) = 0 \end{cases} \\
\theta_5 &= \begin{cases} \left( \left( \frac{24f-a^2(18+21f)+ab(40+36f)-24b^2f}{24f+a^2(18+21f)-ab(40+36f)+24b^2f}, \frac{-a(40+36f)+48bf}{24f+a^2(18+21f)-ab(40+36f)+24b^2f} \right); \right. \\ \left. \frac{24f+a^2(18+21f)-ab(40+36f)+24b^2f}{28} \right) & \text{si } \chi(\theta_5) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{12f}{7}, \frac{-a(10+9f)+12bf}{7} \right); 0 \right) & \text{si } \chi(\theta_5) = 0 \end{cases} \\
\theta_6 &= \begin{cases} \left( \left( \frac{8-a^2(11+12f)+ab(8+18f)-8b^2}{8+a^2(11+12f)-ab(8+18f)+8b^2}, \frac{-a(8+18f)+16b}{8+a^2(11+12f)-ab(8+18f)+8b^2} \right); \frac{8+a^2(11+12f)-ab(8+18f)+8b^2}{14} \right) & \text{si } \chi(\theta_6) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{8}{7}, \frac{-a(4+9f)+8b}{7} \right); 0 \right) & \text{si } \chi(\theta_6) = 0 \end{cases} \\
\theta_7 &= \begin{cases} \left( \left( -1, \frac{-4}{a(2+3f)-4b} \right); \frac{a(a(2+3f)-4b)}{4} \right) & \text{si } a(2+3f)-4b \neq 0 \\ ((0, -a); 0) & \text{si } a(2+3f)-4b = 0 \end{cases} \\
\theta_8 &= ((-1, 0); a^2).
\end{aligned}$$

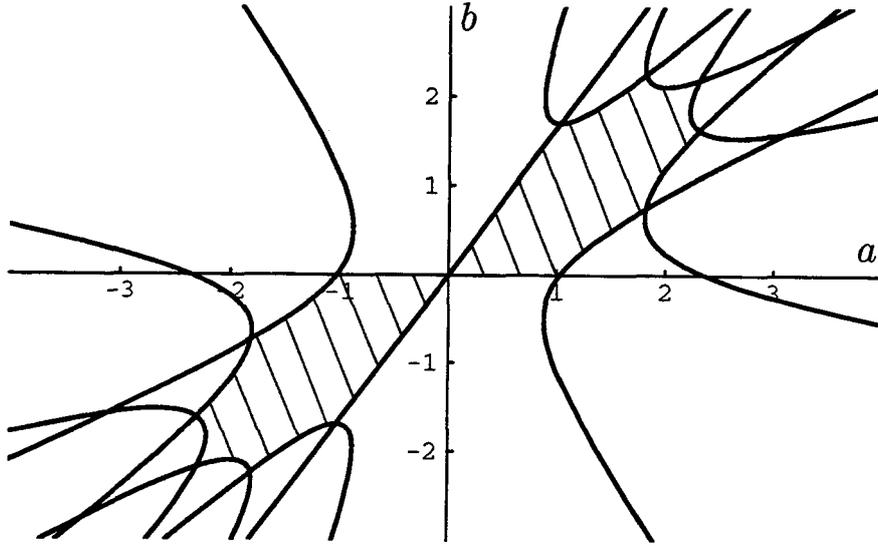


Figure 3.5: Le domaine défini par  $(S_3)$  est la zone hachurée.

Si  $f = \frac{1 - \sqrt{13}}{3}$ , il est impossible d'obtenir un cercle n'ayant que des points pondérés de masses positives, car les conditions  $\chi(\theta_1) > 0$  et  $\chi(\theta_7) > 0$  sont contradictoires. Dans le cas  $f = \frac{1 + \sqrt{13}}{3}$ , les conditions permettant d'avoir exclusivement des poids positifs sont les suivantes

$$(S_3) \begin{cases} ab > 0 \\ 8 - (4 + \sqrt{13})a^2 + 2(1 + \sqrt{13})ab + 8b^2 > 0 \\ 8(1 + \sqrt{13}) - (3 + \sqrt{13})a^2 - 4(3 + \sqrt{13})ab + 8(1 + \sqrt{13})b^2 > 0 \\ 8(11 + \sqrt{13}) + (27 + 8\sqrt{13})a^2 - 4(23 + 7\sqrt{13})ab + 8(11 + \sqrt{13})b^2 > 0 \\ 8(1 + \sqrt{13}) + (25 + 7\sqrt{13})a^2 - 4(13 + 3\sqrt{13})ab + 8(1 + \sqrt{13})b^2 > 0 \\ 8 + (15 + 4\sqrt{13})a^2 - 2(7 + 3\sqrt{13})ab + 8b^2 > 0 \\ a((3 + \sqrt{13})a - 4b) > 0. \end{cases}$$

Le domaine défini par ces conditions est illustré par la *Figure 3.5*.

**Exemple:** Nous pouvons choisir  $a = 1$  et  $b = 1$  qui vérifient les conditions  $(S_3)$ . Le polygone du cercle est alors

$$\theta_0 = (W; 1)$$

$$\theta_1 = (Q_1; 1) \quad \text{avec } Q_1 = (-1, 1)$$

$$\theta_2 = \left(Q_2; 1 + \frac{\sqrt{13}}{14}\right) \quad \text{avec } Q_2 = \left(\frac{2 - \sqrt{13}}{14 + \sqrt{13}}, \frac{18 + 2\sqrt{13}}{14 + \sqrt{13}}\right)$$

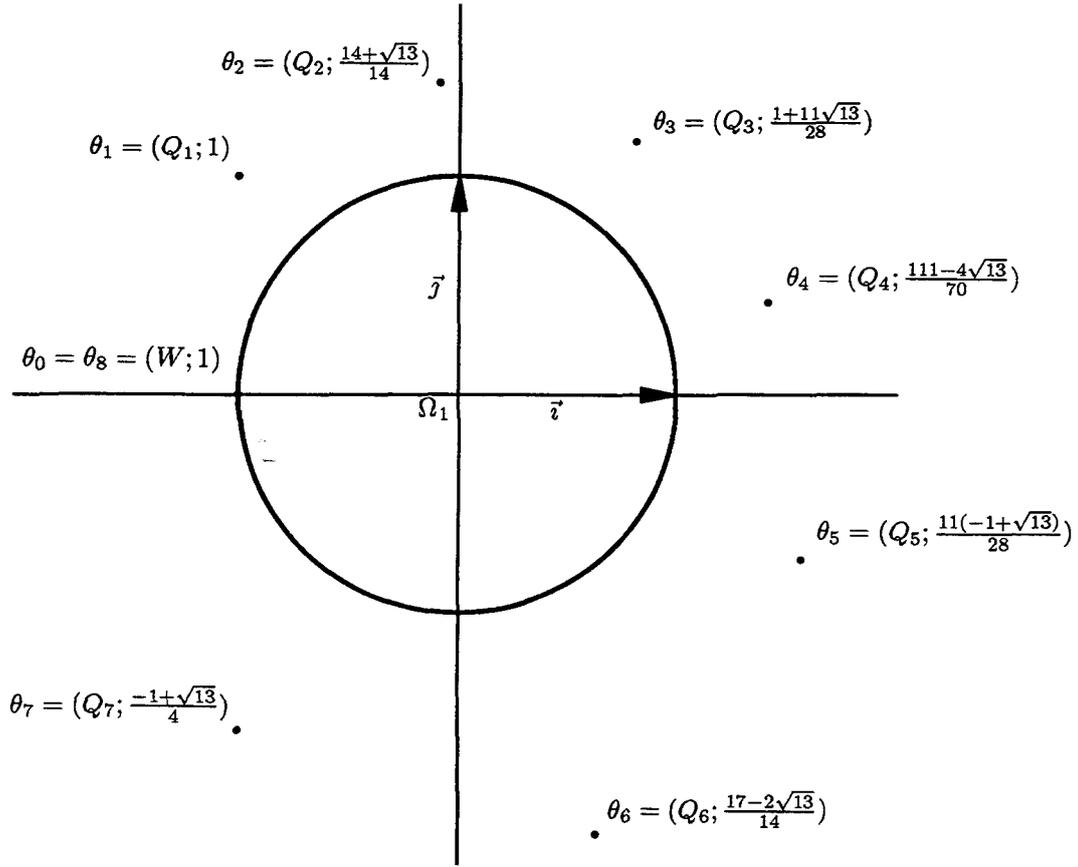


Figure 3.6: Les neuf points pondérés d'un cercle  $C^5$  en  $W$ .

$$\theta_3 = \left( Q_3; \frac{1+11\sqrt{13}}{28} \right) \quad \text{avec } Q_3 = \left( \frac{5(3+\sqrt{13})}{1+11\sqrt{13}}, \frac{4(1+3\sqrt{13})}{1+11\sqrt{13}} \right)$$

$$\theta_4 = \left( Q_4; \frac{111-4\sqrt{13}}{70} \right) \quad \text{avec } Q_4 = \left( \frac{5(13+4\sqrt{13})}{111-4\sqrt{13}}, \frac{12(7-\sqrt{13})}{111-4\sqrt{13}} \right)$$

$$\theta_5 = \left( Q_5; \frac{11(-1+\sqrt{13})}{28} \right) \quad \text{avec } Q_5 = \left( \frac{27+5\sqrt{13}}{11(-1+\sqrt{13})}, \frac{4(-9+\sqrt{13})}{11(-1+\sqrt{13})} \right)$$

$$\theta_6 = \left( Q_6; \frac{17-2\sqrt{13}}{14} \right) \quad \text{avec } Q_6 = \left( \frac{-1+2\sqrt{13}}{17-2\sqrt{13}}, \frac{2-6\sqrt{13}}{17-2\sqrt{13}} \right)$$

$$\theta_7 = \left( Q_7; \frac{-1+\sqrt{13}}{4} \right) \quad \text{avec } Q_7 = \left( -1, \frac{4}{1-\sqrt{13}} \right)$$

$$\theta_8 = \theta_0.$$

La Figure 3.6 illustre cet exemple.

### 3.5.4 Forme (BR) d'un cercle fermé $C^5$ -continûment: cas $\frac{5}{2}$

Au *Chapitre 2* (2.33), nous avons montré que les conditions de continuité  $C^5$  en  $W$  peuvent être également obtenues avec un changement de variable défini par:

$$\varphi = \frac{aB_0^5 + bB_1^5 + \frac{1}{30}(-28a + 45b)B_2^5 + \frac{1}{30}(-44a + 45b)B_3^5 + \frac{1}{5}(-8a + 5b)B_4^5 - aB_5^5}{B_1^2}$$

avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

Par le processus décrit précédemment, nous obtenons les matrices  $K_F$  et  $D_1^{-1}K_FD_2$

$$K_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 2a & 10ab \\ 4 & 2(3a+5b) & \frac{-56a^2+90ab+75b^2}{3} \\ 24 & \frac{2(-19a+90b)}{3} & \frac{2(-44a^2-95ab+225b^2)}{3} \\ 60 & \frac{50(-5a+9b)}{3} & \frac{5(128a^2-750ab+675b^2)}{9} \\ 80 & 40(-4a+5b) & \frac{2(1223a^2-3600ab+2250b^2)}{9} \\ 60 & \frac{10(-47a+45b)}{3} & \frac{5(656a^2-1410ab+675b^2)}{9} \\ 24 & \frac{10(-25a+18b)}{3} & \frac{10(76a^2-125ab+45b^2)}{3} \\ 4 & 2(-11a+5b) & \frac{5(56a^2-66ab+15b^2)}{3} \\ 0 & -2a & 2a(8a-5b) \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$D_1^{-1}K_FD_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & \frac{2a}{5} & ab \\ \frac{4}{45} & \frac{4(3a+5b)}{45} & \frac{-56a^2+90ab+75b^2}{135} \\ \frac{1}{5} & -\frac{19}{90}a + b & \frac{-44a^2-95ab+225b^2}{180} \\ \frac{2}{7} & \frac{10(-5a+9b)}{63} & \frac{128a^2-750ab+675b^2}{378} \\ \frac{20}{63} & \frac{20(-4a+5b)}{63} & \frac{1223a^2-3600ab+2250b^2}{1134} \\ \frac{2}{7} & \frac{2(-47a+45b)}{63} & \frac{656a^2-1410ab+675b^2}{378} \\ \frac{1}{5} & \frac{-25a}{63} + b & \frac{76a^2-125ab+45b^2}{36} \\ \frac{4}{45} & \frac{4(-11a+5b)}{45} & \frac{56a^2-66ab+15b^2}{27} \\ 0 & -\frac{2a}{5} & \frac{a(8a-5b)}{5} \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Le polygone de contrôle de  $R(u) = C(\varphi(u))$  est donc

$$\theta_0 = ((-1, 0); a^2)$$

$$\theta_1 = \begin{cases} ((-1, \frac{2}{5b}); ab) & \text{si } b \neq 0 \\ ((0, \frac{2}{5}a); 0) & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \left( \left( \frac{12+56a^2-90ab-75b^2}{12-56a^2+90ab+75b^2}, \frac{12(3a+5b)}{12-56a^2+90ab+75b^2} \right); \frac{1}{135}(12-56a^2+90ab+75b^2) \right) & \text{si } \chi(\theta_2) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{8}{45}, \frac{4(3a+5b)}{45} \right); 0 \right) & \text{si } \chi(\theta_2) = 0 \end{cases}$$

$$\theta_3 = \begin{cases} \left( \left( \frac{36+44a^2+95ab-225b^2}{36-44a^2-95ab+225b^2}, \frac{2(-19a+90b)}{36-44a^2-95ab+225b^2} \right); \frac{1}{180}(36-44a^2-95ab+225b^2) \right) & \text{si } \chi(\theta_3) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{2}{5}, \frac{-19a+90b}{90} \right); 0 \right) & \text{si } \chi(\theta_3) = 0 \end{cases}$$

$$\theta_4 = \begin{cases} \left( \left( \frac{108-128a^2+750ab-675b^2}{108+128a^2-750ab+675b^2}, \frac{60(-5a+9b)}{108+128a^2-750ab+675b^2} \right); \frac{1}{378}(108+128a^2-750ab+675b^2) \right) & \text{si } \chi(\theta_4) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{4}{7}, \frac{10(-5a+9b)}{63} \right); 0 \right) & \text{si } \chi(\theta_4) = 0 \end{cases}$$

$$\theta_5 = \begin{cases} \left( \left( \frac{360-1223a^2+3600ab-2250b^2}{360+1223a^2-3600ab+2250b^2}, \frac{360(-4a+5b)}{360+1223a^2-3600ab+2250b^2} \right); \frac{1}{1134}(360+1223a^2-3600ab+2250b^2) \right) & \text{si } \chi(\theta_5) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{40}{63}, \frac{20(-4a+5b)}{63} \right); 0 \right) & \text{si } \chi(\theta_5) = 0 \end{cases}$$

$$\theta_6 = \begin{cases} \left( \left( \frac{108-656a^2+1410ab-675b^2}{108+656a^2-1410ab+675b^2}, \frac{12(-47a+45b)}{108+656a^2-1410ab+675b^2} \right); \frac{1}{378}(108+656a^2-1410ab+675b^2) \right) & \text{si } \chi(\theta_6) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{4}{7}, \frac{2(-47a+45b)}{63} \right); 0 \right) & \text{si } \chi(\theta_6) = 0 \end{cases}$$

$$\theta_7 = \begin{cases} \left( \left( \frac{36-380a^2+625ab-225b^2}{36+380a^2-625ab+225b^2}, \frac{10(-25a+18b)}{36+380a^2-625ab+225b^2} \right); \frac{1}{180}(36+380a^2-625ab+225b^2) \right) & \text{si } \chi(\theta_7) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{2}{5}, \frac{-25a+18b}{18} \right); 0 \right) & \text{si } \chi(\theta_7) = 0 \end{cases}$$

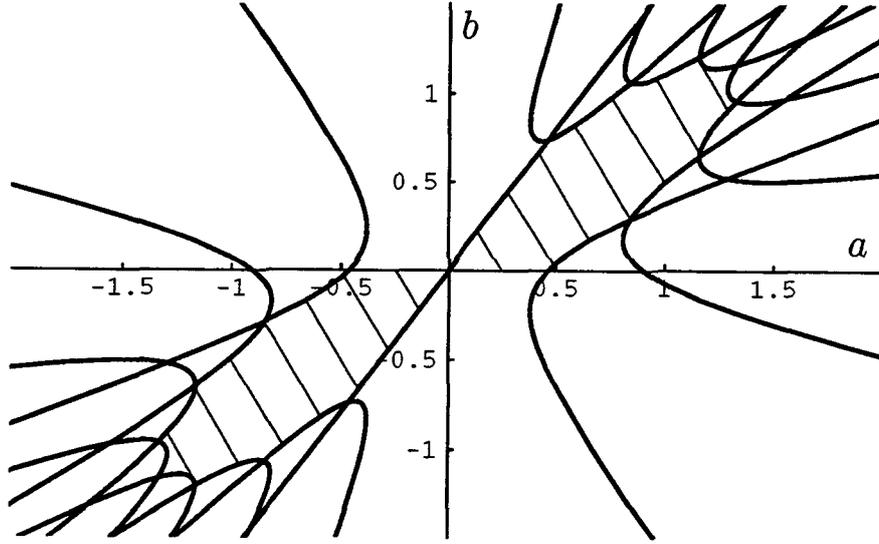


Figure 3.7: La zone hachurée désigne le domaine défini par  $(S_4)$ .

$$\theta_8 = \begin{cases} \left( \left( \frac{12-280a^2+330ab-75b^2}{12+280a^2-330ab+75b^2}, \frac{12(-11a+5b)}{12+280a^2-330ab+75b^2} \right); \frac{1}{135}(12+280a^2-330ab+75b^2) \right) \\ \text{si } \chi(\theta_8) \neq 0 \\ \left( \left( \frac{8}{45}, \frac{4(-11a+5b)}{45} \right); 0 \right) \text{ si } \chi(\theta_8) = 0 \end{cases}$$

$$\theta_9 = \begin{cases} \left( \left( -1, \frac{-2}{8a-5b} \right); \frac{a}{5}(8a-5b) \right) \text{ si } 8a-5b \neq 0 \\ \left( \left( 0, -\frac{2}{5}a \right); 0 \right) \text{ si } 8a-5b = 0 \end{cases}$$

$$\theta_{10} = \left( (-1, 0); a^2 \right).$$

Les conditions pour que toutes les masses de ce polygone soient positives, illustrées par la *Figure 3.7*, sont

$$(S_4) \begin{cases} ab > 0 \\ 12 - 56a^2 + 90ab + 75b^2 > 0 \\ 36 - 44a^2 - 95ab + 225b^2 > 0 \\ 108 + 128a^2 - 750ab + 675b^2 > 0 \\ 360 + 1223a^2 - 3600ab + 2250b^2 > 0 \\ 108 + 656a^2 - 1410ab + 675b^2 > 0 \\ 36 + 380a^2 - 625ab + 225b^2 > 0 \\ 12 + 280a^2 - 330ab + 75b^2 > 0 \\ a(8a - 5b) > 0 \end{cases}$$

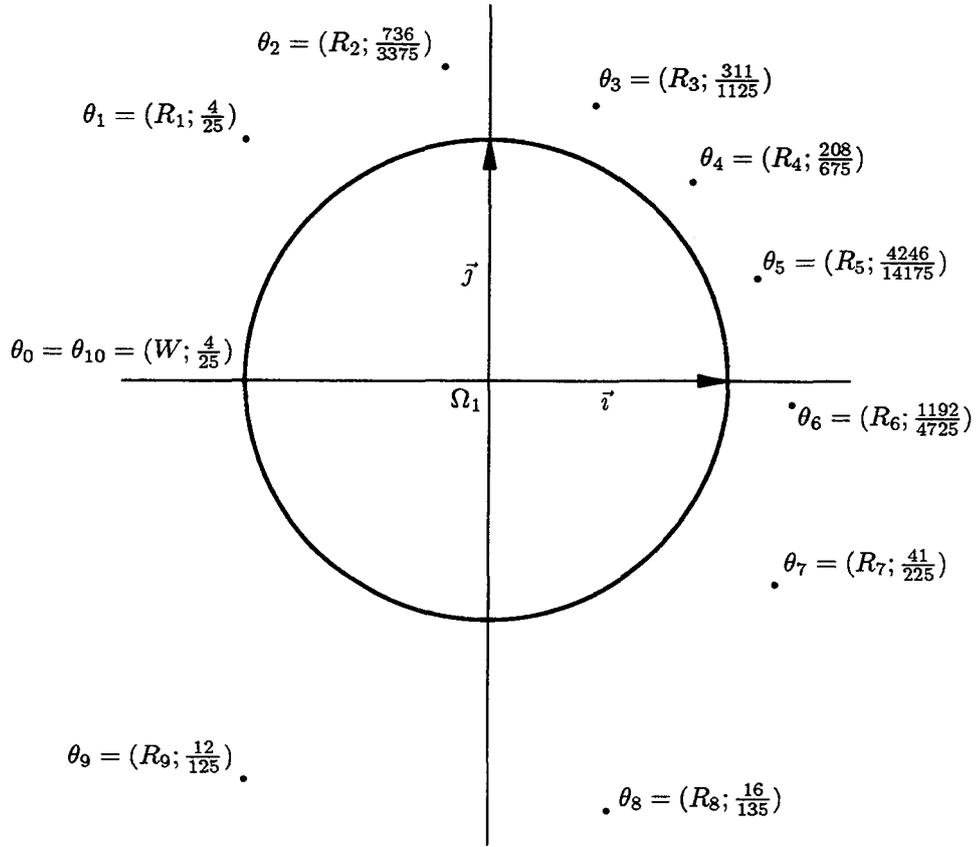


Figure 3.8: Les onze points de contrôle d'un cercle  $C^5$ .

**Exemple :** Pour  $a = b = \frac{2}{5}$  nous obtenons le polygone suivant (Figure 3.8):

$$\theta_0 = (W; \frac{4}{25})$$

$$\theta_1 = (R_1; \frac{4}{25}) \quad \text{avec } R_1 = (-1, 1)$$

$$\theta_2 = (R_2; \frac{736}{3375}) \quad \text{avec } R_2 = (-\frac{17}{92}, \frac{30}{23})$$

$$\theta_3 = (R_3; \frac{311}{1125}) \quad \text{avec } R_3 = (\frac{139}{311}, \frac{355}{311})$$

$$\theta_4 = (R_4; \frac{208}{675}) \quad \text{avec } R_4 = (\frac{311}{364}, \frac{75}{91})$$

$$\theta_5 = (R_5; \frac{4246}{14175}) \quad \text{avec } R_5 = (\frac{2377}{2123}, \frac{920}{2123})$$

$$\theta_6 = (R_6; \frac{1192}{4725}) \quad \text{avec } R_6 = (\frac{377}{298}, -\frac{15}{149})$$

$$\theta_7 = (R_7; \frac{41}{225}) \quad \text{avec } R_7 = (\frac{49}{41}, -\frac{35}{41})$$

$$\theta_8 = \left(R_8; \frac{16}{135}\right) \text{ avec } R_8 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{5}\right)$$

$$\theta_9 = \left(R_9; \frac{12}{125}\right) \text{ avec } R_9 = \left(-1, -\frac{5}{3}\right)$$

$$\theta_{10} = \theta_0.$$

Les valeurs  $a = b = \frac{2}{5}$  vérifient les inéquations du système  $(S_4)$ . Les masses du polygone sont donc toutes positives.

# Chapitre 4

## Paramétrisation quasi-uniforme du cercle entier

### 4.1 Introduction

Une courbe n'admet pas de paramétrage rationnel  $BR[\theta](t)$ ,  $t \in [0, 1]$  dont le paramètre  $t$  soit son abscisse curviligne (Farouki et Sakkalis [8]). Ceci implique que la vitesse de parcours de cette courbe  $\left\| \frac{dBR[\theta](t)}{dt} \right\|$  n'est jamais une fonction constante.

Toutefois, une représentation à "vitesse quasi-constante" d'une courbe rationnelle peut se révéler très utile, voire indispensable, pour les représentations graphiques informatiques (CAO, images de synthèse...) et les applications en robotique, par exemple pour minimiser le nombre de points nécessaires au tracé d'une courbe, ou pour définir la trajectoire d'un outil. Nous traitons ici le cas du cercle *entier*. Récemment, le problème a été abordé par Blanc et Schlick [22] dans le cas d'arcs de cercle, à l'aide de changements de paramètre quadratiques. Le cercle entier est ensuite obtenu en joignant des arcs avec la régularité  $C^1$ . Farouki [23] a donné une méthode permettant de traiter les courbes Bézier à l'aide de changements homographiques laissant invariant l'intervalle de définition.

Nous proposons ici des paramétrisations rationnelles  $BR[\theta]$  du cercle complet permettant d'obtenir, pour des valeurs  $t_i = \frac{i}{n}$  pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ , régulièrement espacées sur l'intervalle  $[0, 1]$ , des images  $BR[\theta](t_i)$  aussi régulièrement espacées que possible. Nous disons alors que la paramétrisation  $BR[\theta]$ , ou la distribution des points  $BR[\theta](t_i)$ , est quasi-uniforme. Cette étude a fait l'objet de quelques communications [17, 19, 24 et 25].

Nous étudions d'abord (*Section 4.2*), une paramétrisation de degré 2/2 d'un arc de longueur  $2\theta$  du cercle trigonométrique. Une telle représentation possède un degré de liberté que nous utilisons pour déterminer une paramétrisation aussi uniforme que possible. La modélisation proposée conduit à un problème d'optimisation non linéaire que nous remplaçons par un problème asymptotique correspondant à un nombre infini de points. La solution de ce problème fournit une paramétrisation de l'arc de cercle

assez uniforme pour  $\theta \leq \frac{\pi}{3}$ .

L'objet principal de ce chapitre est la recherche d'une paramétrisation quasi-uniforme du cercle entier.

En *Section 4.3*, nous posons le problème de façon générale. Les changements de paramètres quadratiques et cubiques introduits pour représenter le cercle entier comme image de  $[0,1]$  dépendent de deux constantes arbitraires. Dans le cas d'un cercle  $C^1$  (*Section 4.4*), correspondant à un changement quadratique, nous aboutissons de nouveau à un problème d'optimisation non linéaire auquel nous substituons comme précédemment en *section 4.2* son problème asymptotique. Nous obtenons une valeur optimale des deux constantes qui détermine la forme (BR) de longueur 4 de ce cercle. Pour le cercle fermé  $C^3$  (*Section 4.5*), la complexité du problème ne nous permet pas de traiter formellement le problème asymptotique. Toutefois la solution obtenue pour  $n = 10$  points s'avèrent excellente pour un nombre quelconque de points. La forme (BR) correspondante est de longueur 6. Quelques figures montrent la qualité des paramétrisations proposées.

## 4.2 Paramétrisation quasi-uniforme d'un arc de cercle

La représentation la plus simple d'un arc de cercle sous forme de courbe (BR) est de degré 2. Elle est définie par 3 vecteurs massiques  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ , qui, comme nous allons le voir, sont définis à un paramètre près. Nous exploiterons ce degré de liberté pour obtenir une distribution des points aussi uniforme que possible.

Soient  $M_0$  et  $M_2$  deux points du cercle trigonométrique, définissant un arc de cercle de longueur  $2\theta$ . On peut déterminer un repère cartésien  $(\Omega_1, \vec{i}, \vec{j})$  de telle sorte que les coordonnées respectives des points  $M_0$  et  $M_2$  soient  $M_0 = (\sin \theta, \cos \theta)$  et  $M_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$  comme le montre la *Figure 4.1*. Le lemme suivant détermine la forme générale du polygone de contrôle de l'arc de cercle  $M_0M_2$  dans ce repère.

**Lemme 5** *L'arc de cercle  $M_0M_2$  décrit précédemment est défini par le polygone massique  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$  si et seulement si il existe un réel  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ , tel que*

$$\begin{aligned}\omega_0 &= ((\sin \theta, \cos \theta); 1) \\ \omega_1 &= \left( \left( 0, \frac{1}{\cos \theta} \right); \rho \cos \theta \right) \\ \omega_2 &= ((-\sin \theta, \cos \theta); \rho^2)\end{aligned}$$

**Preuve :** Le polygone de contrôle "usuel" de l'arc de cercle  $M_0M_2$  est constitué de trois vecteurs massiques:  $\tau_0 = (M_0; 1)$ ,  $\tau_1 = \left( \left( 0, \frac{1}{\cos \theta} \right); \cos \theta \right)$  et  $\tau_2 = (M_2; 1)$ .

On sait que tous les arcs de coniques sont paramétrés à un changement de variable

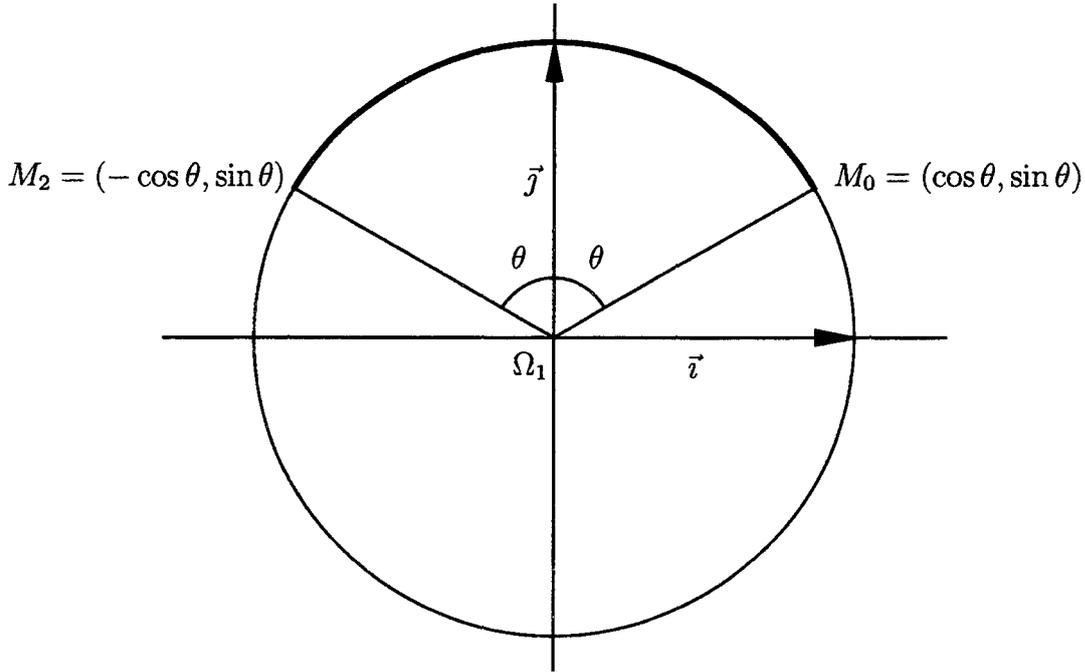


Figure 4.1: L'arc de cercle déterminé par les points  $M_0$  et  $M_2$ .

homographique  $h_\rho$  près, avec

$$h_\rho(u) = \frac{\rho u}{\rho u + (1 - u)}, \quad u \in [0, 1],$$

où  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  (si  $\rho < 0$  on obtient l'arc de cercle complémentaire de celui qui nous intéresse).

En utilisant le *Corollaire 5.2* de l'article [7], nous obtenons le résultat annoncé.  $\square$

**Proposition 18** *Le paramètre  $\rho$ , fonction de  $\theta$ , qui détermine la distribution de points la plus uniforme pour l'arc de cercle  $M_0M_2$  de longueur  $2\theta$  est la solution du problème d'optimisation  $(P_{1,n})$ :*

$$(P_{1,n}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \eta + 0.\rho \text{ sous les contraintes :} \\ \frac{n}{2} \cdot \Phi_{n,\rho,\theta}(\frac{i}{n}) - \theta \leq \eta, \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \\ -\frac{n}{2} \cdot \Phi_{n,\rho,\theta}(\frac{i}{n}) + \theta \leq \eta, \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \\ \eta \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho \geq 0. \end{array} \right.$$

où  $\Phi_{n,\rho,\theta}(t) = 2 \cdot \arctan \left( \left( \frac{1}{n} \rho \sin \theta \right) / \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \rho \cos \theta + t(-2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \rho^2 + 2\rho \cos \theta - 2\frac{1}{n} \rho \cos \theta) + t^2(1 - \rho^2 - 2\rho \cos \theta) \right) \right)$ .

**Preuve :** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t_i = \frac{i}{n}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Notons  $M(t) = BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2](t)$  le point courant sur l'arc de cercle, et  $(X(t), Y(t))$  ses coordonnées,  $t \in [0, 1]$ .

Nous cherchons la valeur de  $\rho$  telle que la longueur de l'arc de cercle  $M(t_i)M(t_{i+1})$  soit aussi proche de l'arc idéal  $\frac{2\theta}{n}$  que possible, pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Pour calculer  $M(t_i)M(t_{i+1})$ , nous faisons intervenir l'abscisse curviligne:

$$M(t_i)M(t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{X'(t)^2 + Y'(t)^2} dt$$

Nous en déduisons après quelques calculs que  $M(t_i)M(t_{i+1}) = \Phi_{n,\rho,\theta}(t_i)$  où  $\Phi_{n,\rho,\theta}$  est la fonction définie ci-dessus. Nous voulons donc déterminer la valeur de  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  minimisant:

$$\max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} \left| \Phi_{n,\rho,\theta}(t_i) - \frac{2\theta}{n} \right|,$$

ou,  $n$  étant une constante:

$$\max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} \left| \frac{n}{2} \cdot \Phi_{n,\rho,\theta}(t_i) - \theta \right|.$$

En notant  $\eta$  cette dernière valeur, nous obtenons  $(P_{1,n})$ . □

**Définition d'un problème asymptotique  $(P_{1,\infty})$ :**

$$(P_{1,\infty}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \eta + 0.\rho \text{ sous les contraintes:} \\ g_{\rho,\theta}(t) \leq \eta, \quad t \in [0, 1] \\ -g_{\rho,\theta}(t) \leq \eta, \quad t \in [0, 1] \\ \eta \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho \geq 0. \end{array} \right.$$

$$\text{où } g_{\rho,\theta}(t) = \frac{\rho \sin \theta}{(1-t)^2 + 2\rho t \cos \theta + t^2(\rho^2 - 2\rho \cos \theta)} - \theta$$

**Justification :** Considérons  $\Phi_{n,\rho,\theta}(t)$  comme une fonction de  $\frac{1}{n}$ . On peut alors déterminer son développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 1. On obtient

$$\frac{n}{2} \cdot \Phi_{n,\rho,\theta}(t) - \theta = g_{\rho,\theta}(t) + n.o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où le résultat proposé. □

La résolution du problème  $(P_{1,\infty})$  faisant intervenir une démonstration assez longue, nous proposons tout d'abord comme résultat intermédiaire le lemme suivant. Il permet de substituer un nouveau problème  $(P'_{1,\infty})$  ne comptant que cinq contraintes au problème  $(P_{1,\infty})$  qui en comporte une infinité.

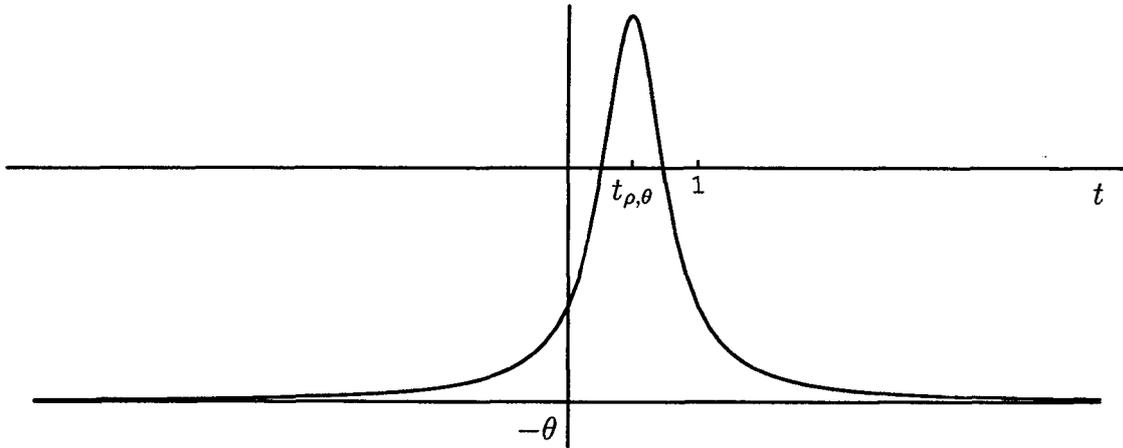


Figure 4.2: Exemple de graphe de la fonction  $g_{\rho, \theta}(t)$ .

**Lemme 6** *Le problème  $(P_{1, \infty})$  est équivalent au problème  $(P'_{1, \infty})$ :*

$$(P'_{1, \infty}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \eta + 0 \cdot \rho \text{ sous les contraintes :} \\ g_{\rho, \theta}(0) \leq \eta \\ -g_{\rho, \theta}(0) \leq \eta \\ g_{\rho, \theta}(1) \leq \eta \\ -g_{\rho, \theta}(1) \leq \eta \\ M(\rho, \theta) \leq \eta \\ \eta \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho \geq 0. \end{array} \right.$$

avec

$$M(\rho, \theta) = \begin{cases} g_{\rho, \theta}(t_{\rho, \theta}) & \text{si } t_{\rho, \theta} \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $t_{\rho, \theta} = \frac{1 - \rho \cos \theta}{\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 1}$  est l'unique valeur de  $\mathbb{R}$  pour laquelle  $g_{\rho, \theta}(t)$  admet un maximum.

**Preuve:** Soient  $\rho$  et  $\eta$  deux réels positifs. Si  $(\rho, \eta)$  vérifie les contraintes de  $(P_{1, \infty})$ , il est évident qu'il vérifie également celles de  $(P'_{1, \infty})$ . Réciproquement, supposons que  $(\rho, \eta)$  vérifie les contraintes de  $(P'_{1, \infty})$  et montrons qu'il vérifie aussi celles de  $(P_{1, \infty})$ .

Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} (g_{\rho, \theta}(t) \leq \eta \quad \forall t \in [0, 1]) &\Leftrightarrow (\sup_{t \in [0, 1]}(g_{\rho, \theta}(t)) \leq \eta) \\ (-g_{\rho, \theta}(t) \leq \eta \quad \forall t \in [0, 1]) &\Leftrightarrow (\sup_{t \in [0, 1]}(-g_{\rho, \theta}(t)) \leq \eta) \end{aligned} \tag{4.1}$$

En étudiant le comportement de la fonction  $g_{\rho,\theta}(t)$ , nous remarquons d'une part, que le dénominateur  $(1-t)^2 + 2\rho t \cos \theta + t^2(\rho^2 - 2\rho \cos \theta)$  est strictement positif pour  $\rho > 0$ ,  $\theta \in ]0, \pi[$  et  $t \in \mathbb{R}$ . D'autre part, sa dérivée n'admet qu'une seule racine  $t = t_{\rho,\theta} = \frac{1 - \rho \cos \theta}{\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 1}$  sur  $\mathbb{R}$ , correspondant à un maximum de  $g_{\rho,\theta}(t)$  (Figure 4.2). Pour étudier les contraintes de  $(P_{1,\infty})$ , on doit donc envisager deux cas:

- 1<sup>er</sup> cas:  $t_{\rho,\theta} \notin [0, 1]$ , donc  $M(\rho, \theta) = 0$ .  
La fonction  $g_{\rho,\theta}(t)$  est monotone sur  $[0, 1]$  et  $\sup_{t \in [0, 1]}(g_{\rho,\theta}(t)) = g_{\rho,\theta}(0)$  ou  $g_{\rho,\theta}(1)$ , or  $(\rho, \eta)$  vérifie les contraintes de  $(P'_{1,\infty})$ , donc  $g_{\rho,\theta}(0) \leq \eta$  et  $g_{\rho,\theta}(1) \leq \eta$ .  
On en déduit que  $\sup_{t \in [0, 1]}(g_{\rho,\theta}(t)) \leq \eta$ .  
De même,  $\sup_{t \in [0, 1]}(-g_{\rho,\theta}(t)) = -g_{\rho,\theta}(0)$  ou  $-g_{\rho,\theta}(1)$ , d'où  $\sup_{t \in [0, 1]}(-g_{\rho,\theta}(t)) \leq \eta$ .  
Donc, selon (4.1),  $(\rho, \eta)$  vérifie les contraintes de  $(P_{1,\infty})$ .
- 2<sup>eme</sup> cas:  $t_{\rho,\theta} \in [0, 1]$ , donc  $M(\rho, \theta) = g_{\rho,\theta}(t_{\rho,\theta})$ , et  $\sup_{t \in [0, 1]}(g_{\rho,\theta}(t)) = g_{\rho,\theta}(t_{\rho,\theta})$ , or  $(\rho, \eta)$  vérifie les contraintes de  $(P'_{1,\infty})$ , donc  $M(\rho, \theta) = g_{\rho,\theta}(t_{\rho,\theta}) \leq \eta$ , d'où  $\sup_{t \in [0, 1]}(g_{\rho,\theta}(t)) \leq \eta$ .  
De même,  $\sup_{t \in [0, 1]}(-g_{\rho,\theta}(t)) = -g_{\rho,\theta}(0)$  ou  $-g_{\rho,\theta}(1)$  donc  $\sup_{t \in [0, 1]}(-g_{\rho,\theta}(t)) \leq \eta$ .  
De (4.1), on déduit également que  $(\rho, \eta)$  vérifie les contraintes de  $(P_{1,\infty})$ .

□

**Proposition 19** Pour tout  $\theta \in ]0, \pi[$ , la solution de  $(P_{1,\infty})$  est

$$\bar{\rho} = 1 \text{ et } \bar{\eta} = \begin{cases} \theta - \sin \theta & \text{si } \theta \in ]0, \theta_0] \\ 2 \tan \frac{\theta}{2} - \theta & \text{si } \theta \in ]\theta_0, \pi[ \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $\theta_0 \simeq 1.97475$  radians est l'unique racine dans  $]0, \pi[$  de l'équation

$$\theta - \sin \theta = 2 \tan \frac{\theta}{2} - \theta.$$

**Preuve:** Selon le Lemme 6, la solution de  $(P_{1,\infty})$  est celle de  $(P'_{1,\infty})$ . Rappelons que  $\bar{\rho} = 1$ . Nous déterminons tout d'abord la plus petite valeur de  $\eta$  telle que  $(\bar{\rho}, \eta)$  soit une solution réalisable de  $(P'_{1,\infty})$ . Par la suite, nous noterons  $\bar{\eta}$  cette valeur.

Pour  $\bar{\rho} = 1$  nous avons  $t_{\bar{\rho},\theta} = \frac{1 - \cos \theta}{2 - 2 \cos \theta} = \frac{1}{2} \in ]0, 1[$ . Donc,  $\eta$  est réalisable pour  $(P'_{1,\infty})$  si

$$\sup\{g_{\bar{\rho},\theta}(t_{\bar{\rho},\theta}), -g_{\bar{\rho},\theta}(0), -g_{\bar{\rho},\theta}(1)\} \leq \eta.$$

La plus petite valeur de  $\eta$  vérifiant cette inéquation est

$$\eta = \sup\{g_{\bar{\rho},\theta}(t_{\bar{\rho},\theta}), -g_{\bar{\rho},\theta}(0), -g_{\bar{\rho},\theta}(1)\}.$$

or  $g_{\bar{\rho},\theta}(0) = g_{\bar{\rho},\theta}(1) = \sin \theta - \theta$ , et  $g_{\bar{\rho},\theta}(t_{\bar{\rho},\theta}) = \frac{2}{\sin \theta}(1 - \cos \theta) - \theta = 2 \tan \frac{\theta}{2} - \theta$ , donc

$$\eta = \bar{\eta} = \sup\{\theta - \sin \theta, 2 \tan \frac{\theta}{2} - \theta\}.$$

Si nous notons  $\theta_0$  l'unique solution de l'équation  $\theta - \sin \theta = 2 \tan \frac{\theta}{2} - \theta$  dans  $]0, \pi[$  ( $\bar{\eta} \simeq 1.97475$ ).

Montrons que cette solution réalisable  $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$  est la solution de  $(P'_{1,\infty})$ . Considérons  $(\rho_0, \eta_0)$  une solution réalisable de ce problème vérifiant  $\eta_0 \leq \bar{\eta}$ .

- 1<sup>er</sup> cas :  $\bar{\eta} = \theta - \sin \theta$ .

$(\rho_0, \eta_0)$  vérifie les contraintes de  $(P'_{1,\infty})$ , donc  $-g_{\rho_0,\theta}(0) \leq \eta_0 \leq \bar{\eta}$ ,

d'où  $\theta - \rho_0 \sin \theta \leq \theta - \sin \theta$ , et par suite  $\rho_0 \geq 1$ .

De même,  $-g_{\rho_0,\theta}(1) \leq \eta_0 \leq \bar{\eta}$ , donc  $\rho_0 \leq 1$ . On en déduit que  $\rho_0 = 1$ .

- 2<sup>eme</sup> cas :  $\bar{\eta} = \frac{2}{\sin \theta}(1 - \cos \theta) - \theta (= 2 \tan \frac{\theta}{2} - \theta)$ .

Ceci n'est possible que si  $\theta \geq \theta_0 \geq \frac{\pi}{2}$  (cf. (4.2)). Comme  $t_{\rho_0,\theta} = \frac{1 - \rho \cos \theta}{\rho^2 - 2 \cos \theta + 1}$  appartient  $[0,1]$ , nous en déduisons  $M(\rho_0, \theta) = g_{\rho_0,\theta}(t_{\rho_0,\theta})$ .

De même que précédemment,  $(\rho_0, \eta_0)$  est réalisable pour  $(P'_{1,\infty})$ , donc

$M(\rho_0, \theta) \leq \eta_0 \leq \bar{\eta}$  soit encore  $g_{\rho_0,\theta}(t_{\rho_0,\theta}) \leq \bar{\eta}$ . Par suite, en remplaçant  $t_{\rho_0,\theta}$  et  $\bar{\eta}$  par leur valeur, il vient simplement  $(\rho_0 - 1)^2 \leq 0$ , d'où  $\rho_0 = 1$ .

Dans les deux cas  $\rho_0 = 1$ . Or nous avons vu précédemment que, dans ce cas, la plus petite valeur de  $\eta$  telle que  $(\rho, \eta)$  soit réalisable est  $\bar{\eta}$ , donc  $\bar{\eta} \leq \eta_0$ , d'où  $\bar{\eta} = \eta_0$ . La solution de  $(P'_{1,\infty})$ , donc de  $(P_{1,\infty})$  est bien  $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$  défini précédemment. □

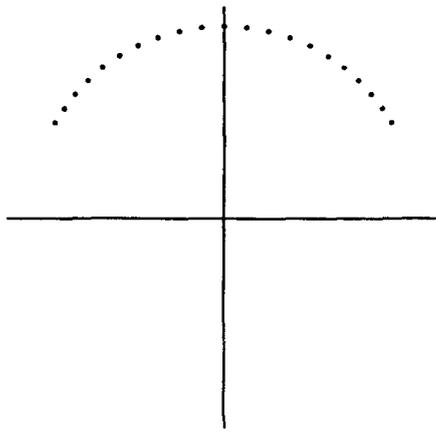
**Remarque :** La valeur  $\bar{\rho} = 1$  est indépendante de  $\theta$ , et correspond en fait au polygone de contrôle usuel dont les vecteurs sont  $\tau_0 = ((\sin \theta, \cos \theta); 1)$ ,  $\tau_1 = \left( \left( 0, \frac{1}{\cos \theta} \right); \cos \theta \right)$  et  $\tau_2 = ((-\sin \theta, \cos \theta); 1)$ .

Notons que  $\bar{\eta}$  représente, à un facteur  $\frac{1}{2}$  près, la différence maximale entre la vitesse idéale  $2\theta$  et la vitesse de parcours effective:  $\left\| \frac{dBR[\theta](t)}{dt} \right\|$ . En effet, nous avons ici

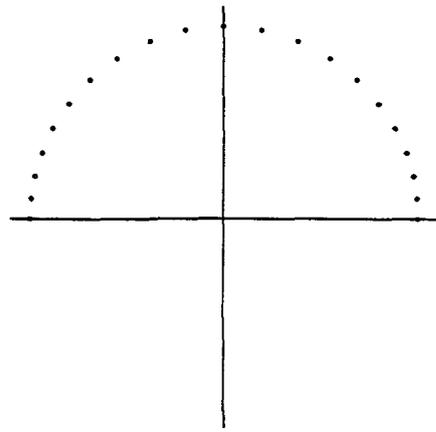
$$\bar{\eta} = \max_{i \in [0,1]} |g_{\rho,\theta}(t)|,$$

or, par définition (*Problème asymptotique*  $(P_{1,\infty})$ ),

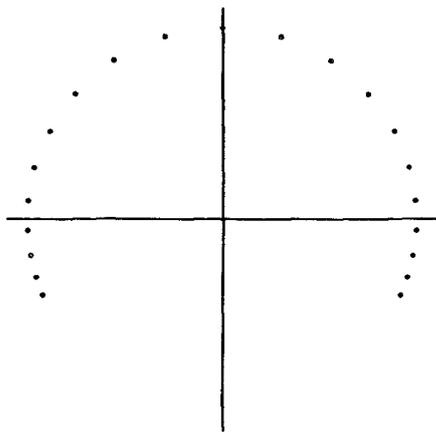
$$g_{\rho,\theta}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{2} M(t_i) M(t_{i+1}) - \theta \right)$$



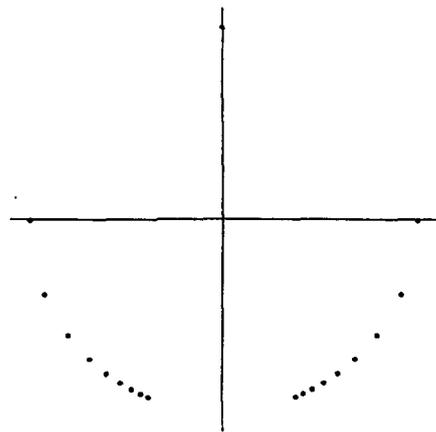
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$



$$\theta = \frac{\pi}{2}$$



$$\theta = \theta_0$$



$$\theta = \frac{7\pi}{8}$$

Figure 4.3: Quelques exemples de répartition de points pour différentes valeurs de  $\theta$ .

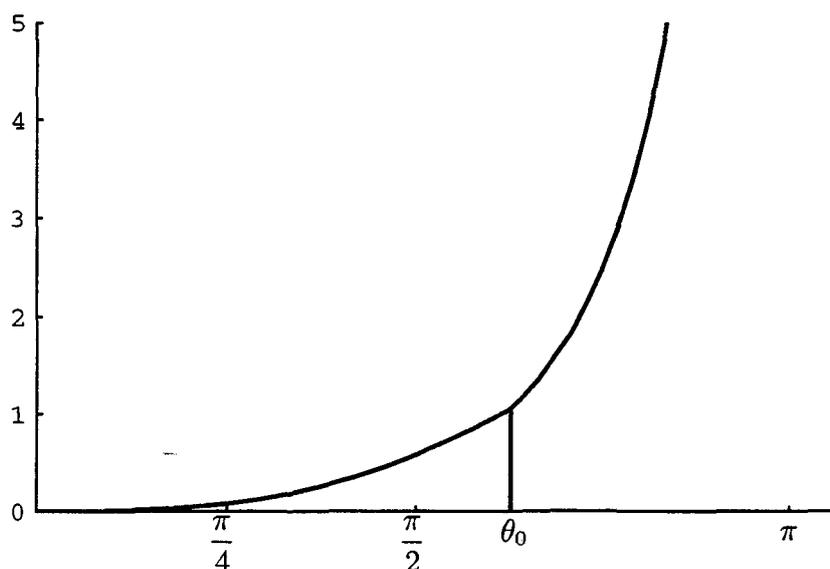


Figure 4.4: Courbe représentative de la fonction  $\eta$ .

donc

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta} &= \max_{i \in [0,1]} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{2} M(t_i) M(t_{i+1}) - \theta \right) \right|, \\
 &= \frac{1}{2} \max_{i \in [0,1]} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{M(t_i) M(t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i} \right) - 2\theta \right|, \\
 &= \frac{1}{2} \max_{i \in [0,1]} \left\| \left\| \frac{dBR[\theta](t)}{dt} \right\| - 2\theta \right\|.
 \end{aligned}$$

La valeur de  $\bar{\eta}$  est une fonction de  $\theta$  dont la *Figure 4.4.* donne le graphe. Nous observons que si la distribution de points sur l'arc de cercle est satisfaisante pour  $\theta \leq \frac{\pi}{3}$  (i.e.  $\bar{\eta} \leq 0.55$ ), elle devient très irrégulière pour de plus grandes valeurs de  $\theta$ , comme le montre la *Figure 4.3.* En fait  $\eta$  tend vers l'infini quand  $\theta$  tend vers  $\pi$ . Cette paramétrisation ne peut donc pas donner de distribution acceptable pour un cercle presque entier. Pour le cercle entier, nous utiliserons donc les paramétrisations de plus haut degré obtenues au *Chapitre 2.*

### 4.3 Un cercle entier: le problème

Nous avons vu au *Chapitre 2, Section 2.1* que le cercle ( $C$ ) admet la paramétrisation rationnelle (2.1) déduite de la paramétrisation trigonométrique du cercle ( $\cos \lambda; \sin \lambda$ ) en posant  $u = \tan \frac{\lambda}{2}$ , où  $\lambda = \text{angle} \left( \vec{i}, \overrightarrow{\Omega_1 C(u)} \right)$  est l'argument de  $C(u)$  (voir la *Figure 4.5*).

Pour représenter ce cercle comme image de l'intervalle  $[0, 1]$ , nous avons utilisé un

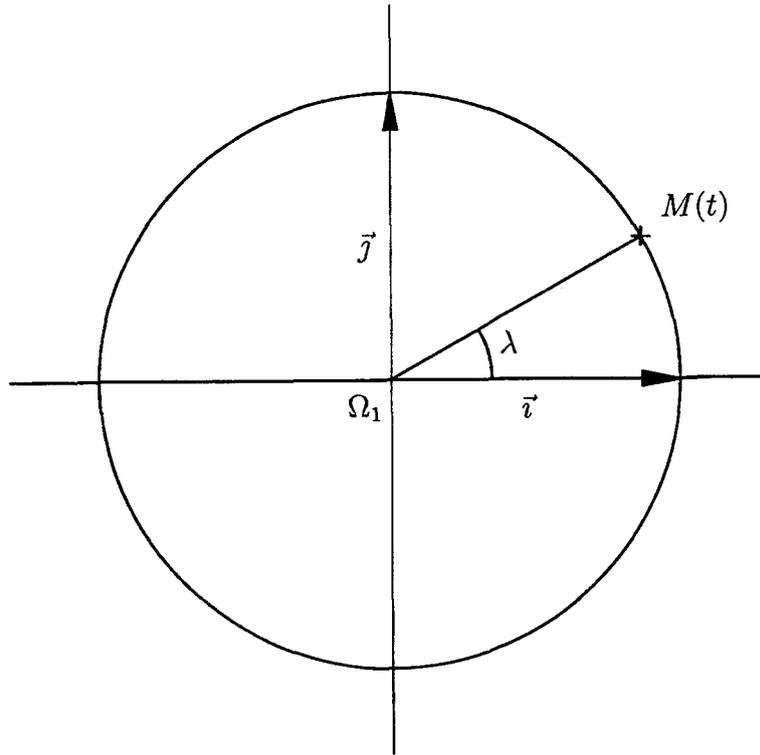


Figure 4.5: Le point  $M(t)$  et son argument  $\lambda$ .

changement de variable  $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ . Notons  $M(t) = C(\varphi(t))$ , on a alors

$$t \in [0, 1] \longrightarrow u = \varphi(t) \in \widetilde{\mathbb{R}} \longrightarrow M(t) \in (C).$$

Soit  $t_i = \frac{i}{n}$  pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . On cherche  $\varphi$  de telle sorte que les points  $M(t_i)$  soient aussi régulièrement espacés que possible sur le cercle.

**Lemme 7** Avec  $\varphi$ ,  $M$  et  $t_i$  définis précédemment, un changement de variable  $\varphi$  permet d'obtenir une distribution de points  $M(t_i)$  aussi uniforme que possible si  $\varphi$  minimise la valeur  $\eta$  satisfaisant

$$\left| n \cdot \arctan \left( \frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{1 + \varphi(t_{i+1})\varphi(t_i)} \right) - \pi \right| \leq \eta, \quad i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

**Preuve :** On cherche un changement de variable  $u = \varphi(t)$  tel que  $M(t) = C(\varphi(t))$  donne une distribution de points aussi uniforme que possible. La relation entre  $\lambda$  et  $t$ ,  $\varphi(t) = \tan \frac{\lambda}{2}$  nous permet d'écrire  $\lambda$  comme fonction de  $t$ :  $\lambda(t) = 2 \arctan(\varphi(t))$ .

Il nous faudrait obtenir  $n$  arcs de cercle  $M(t_i)M(t_{i+1})$  de même longueur. Le cercle étant de rayon 1, cette longueur doit être égale à  $\frac{2\pi}{n}$  et

$$M(t_i)M(t_{i+1}) = \lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i).$$

Il faut donc que  $\varphi$  minimise la valeur suivante:

$$\max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} \left| \lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i) - \frac{2\pi}{n} \right|.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i) &= 2(\arctan(\varphi(t_{i+1})) - \arctan(\varphi(t_i))) \\ &= 2 \arctan \left( \frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{1 + \varphi(t_{i+1})\varphi(t_i)} \right). \end{aligned}$$

Nous cherchons donc  $\varphi$  minimisant

$$\max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} \left| 2 \arctan \left( \frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{1 + \varphi(t_{i+1})\varphi(t_i)} \right) - \frac{2\pi}{n} \right|,$$

ou ( $n$  étant une constante dans ce problème)

$$\max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} \left| n \arctan \left( \frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{1 + \varphi(t_{i+1})\varphi(t_i)} \right) - \pi \right|.$$

Nous devons donc déterminer le plus petit  $\eta$  (fonction de  $\varphi$ ) vérifiant

$$\left| n \arctan \left( \frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{1 + \varphi(t_{i+1})\varphi(t_i)} \right) - \pi \right| \leq \eta \quad i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

□

## 4.4 Solution pour un cercle fermé $C^1$ -continûment

Au *Chapitre 2*, nous avons vu qu'un cercle fermé  $C^1$ -continûment peut être obtenu grâce à un changement de variable quadratique de la forme

$$q_1 = \frac{\alpha B_0^2 + \beta B_1^2 - \alpha B_2^2}{B_1^2}, \quad (2.3)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Nous voulons déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  définissant la distribution de points la plus uniforme pour une paramétrisation rationnelle du cercle de degré  $4/4$ .

**Proposition 20** *Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  qui déterminent la distribution la plus uniforme sont solutions du problème d'optimisation  $(P_{2,n})$ :*

$$(P_{2,n}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \eta + 0.\alpha + 0.\beta \text{ sous les contraintes:} \\ n.Q_{\alpha,\beta,n}(t_i) - \pi \leq \eta, \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \\ -n.Q_{\alpha,\beta,n}(t_i) + \pi \leq \eta, \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \\ \eta \geq 0. \end{array} \right.$$

où

$$Q_{\alpha,\beta,n}(t) = \arctan \left( \frac{q_1(t + \frac{1}{n}) - q_1(t)}{1 + q_1(t + \frac{1}{n})q_1(t)} \right).$$

**Preuve :** Cette proposition est une reformulation directe du *Lemme 7*, avec  $\varphi = q_1$ .  $\square$

Plutôt que de résoudre pour chaque  $n$  le problème précédent, nous lui substituons le problème asymptotique  $(P_{2,\infty})$  suivant.

**Définition du problème asymptotique associé à  $(P_{2,n})$ :**

$$(P_{2,\infty}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \eta + 0.\alpha + 0.\beta \text{ sous les contraintes:} \\ g_{\alpha,\beta}(t) - \pi \leq \eta \quad (D_t), t \in [0, 1] \\ -g_{\alpha,\beta}(t) + \pi \leq \eta \quad (D'_t), t \in [0, 1] \\ \eta \geq 0, \end{array} \right.$$

avec

$$g_{\alpha,\beta}(t) = \frac{-2\alpha(1 - 2t + 2t^2)}{(2t^2 - 2t)^2 + (\alpha(2t - 1) + \beta(2t^2 - 2t))^2}.$$

**Justification :** Considérons  $Q_{\alpha,\beta,n}(t)$  comme une fonction de  $\frac{1}{n}$ . Son développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 1 est alors

$$Q_{\alpha,\beta,n}(t) = \frac{1}{n} \cdot g_{\alpha,\beta}(t) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec  $g_{\alpha,\beta}(t)$  définie ci-dessus, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n \cdot Q_{\alpha,\beta,n}(t)) = g_{\alpha,\beta}(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

$\square$

**Proposition 21** La solution de  $(P_{2,\infty})$  est  $(\bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$  avec

$$\bar{\eta} = \pi - 2\sqrt{2} \simeq 0.3132, \quad \bar{\alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \bar{\beta} = 0.$$

**Preuve :**  $(\bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$  est une solution réalisable de  $(P_{2,\infty})$ . En effet, pour  $\bar{\alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\bar{\beta} = 0$ , on a

$$g'_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}(t) = \frac{4\sqrt{2}(-1+2t)(-1+8t-16t^2+16t^3-8t^4)}{(1-4t+12t^2-16t^3+8t^4)^2}$$

Le numérateur de cette dérivée admet trois racines réelles  $t_1 = \frac{1-\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2} \simeq 0.178$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$  et  $t_3 = \frac{1+\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2} \simeq 0.822$ . L'étude du signe de la dérivée prouve que  $g_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} - \pi$  admet deux maxima locaux en  $t_1$  et  $t_3$ , et un minimum en  $t_2$ . Or

$$\begin{aligned} g_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}(0) - \pi &= g_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}(1) - \pi = g_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}(t_2) - \pi = 2\sqrt{2} - \pi = -\bar{\eta} \quad \text{et} \\ g_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}(t_1) - \pi &= g_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}(t_3) - \pi = 2 + \sqrt{2} - \pi \leq \pi - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$-\bar{\eta} \leq g_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}(t) - \pi \leq \bar{\eta}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Déterminons maintenant les solutions réalisables  $(\eta, \alpha, \beta)$  vérifiant  $\eta \leq \bar{\eta}$ .

Selon  $(D_0)$  et  $(D'_0)$ ,  $\alpha$  vérifie:  $-\eta \leq -\frac{2}{\alpha} - \pi \leq \eta$ , or par hypothèse  $\eta \leq \bar{\eta}$ , donc  $-\pi + 2\sqrt{2} \leq -\frac{2}{\alpha} - \pi \leq \pi - 2\sqrt{2}$ . On en déduit l'encadrement suivant:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2} - \pi}. \quad (4.3)$$

De même, selon  $(D'_{\frac{1}{2}})$  et sachant que  $\eta \leq \bar{\eta}$ :

$$\frac{4\alpha}{1 + \beta^2} + \pi \leq \pi - 2\sqrt{2}, \quad (4.4)$$

donc  $\beta^2 \leq -1 - \alpha \cdot \sqrt{2}$ .

Or, selon (4.3)  $\alpha \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}-\pi}]$ , par conséquent  $-1 - \alpha\sqrt{2} \leq 0$ , d'où  $\beta = 0$ . On déduit donc de (4.4) que  $4\alpha + \pi \leq \pi - 2\sqrt{2}$  d'où  $\alpha \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Cette inéquation et l'encadrement (4.3) de  $\alpha$  impliquent que  $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

La contrainte  $(D'_0)$  devient alors

$$-g_{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0}(0) + \pi \leq \eta, \quad \text{i.e.} \quad \eta \geq \pi - 2\sqrt{2}$$

d'où  $\eta \geq \bar{\eta}$ , or par hypothèse  $\eta \leq \bar{\eta}$ , donc  $\eta = \bar{\eta}$ .

Nous avons ainsi prouvé que la seule solution réalisable vérifiant  $\eta \leq \bar{\eta}$  est  $(\bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ . C'est donc la solution de  $(P_{2,\infty})$ . □

Nous proposons  $(\bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \left(\pi - 2\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$  comme solution du problème  $(P_{2,n})$ , pour  $n$  assez grand. Remarquons qu'ici encore la valeur  $\bar{\eta}$  représente la moitié de l'écart maximal entre la vitesse idéale  $2\pi$  et la vitesse effective.

Pour évaluer cette solution, nous pouvons étudier la fonction

$$\Delta(t) = \sqrt{\frac{(\lambda(t) - (2\pi t - \pi))^2}{1 + 4\pi^2}}$$

appelée déviation cordale. Elle permet de comparer l'angle  $\lambda(t)$  d'un point courant de la paramétrisation avec l'angle idéal obtenu avec la paramétrisation  $\exp i(2\pi t - \pi)$ . Rappelons que nous avons ici  $\lambda(t) = 2\arctan\varphi(t)$ . Numériquement la valeur maximale de cette fonction est

$$\sup_{t \in [0,1]} \Delta(t) = 0.011.$$

La Figure 4.6 représente le graphe de cette fonction. Quelques exemples de répartitions des points sont également proposés (Figures 4.7 à 4.10).

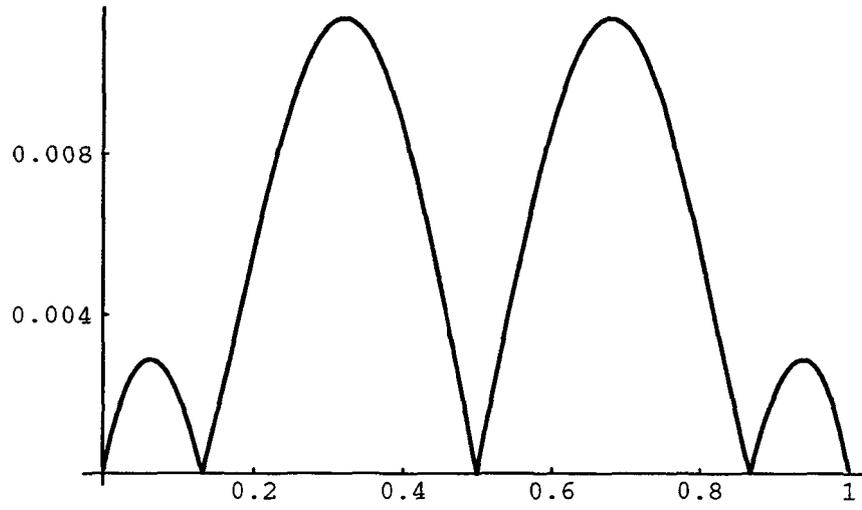


Figure 4.6: Graphe de la déviation cordale pour la solution quadratique.

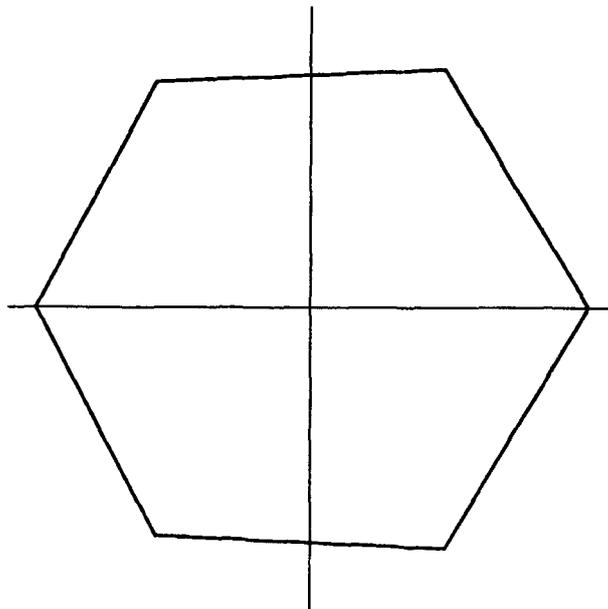


Figure 4.7: La solution quadratique appliquée à  $n = 6$  points.

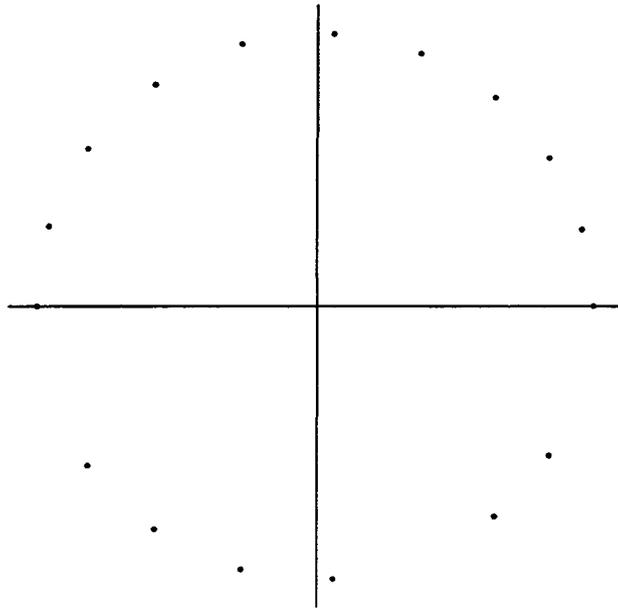


Figure 4.8: La solution quadratique appliquée à  $n = 20$  points.

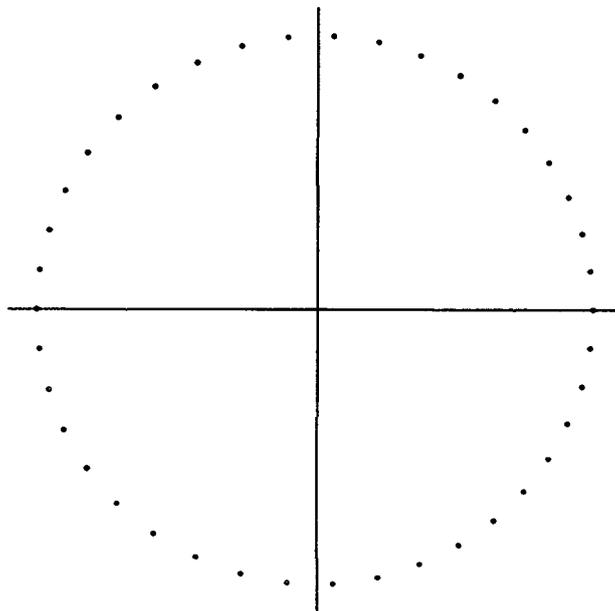


Figure 4.9: La solution quadratique appliquée à  $n = 40$  points.

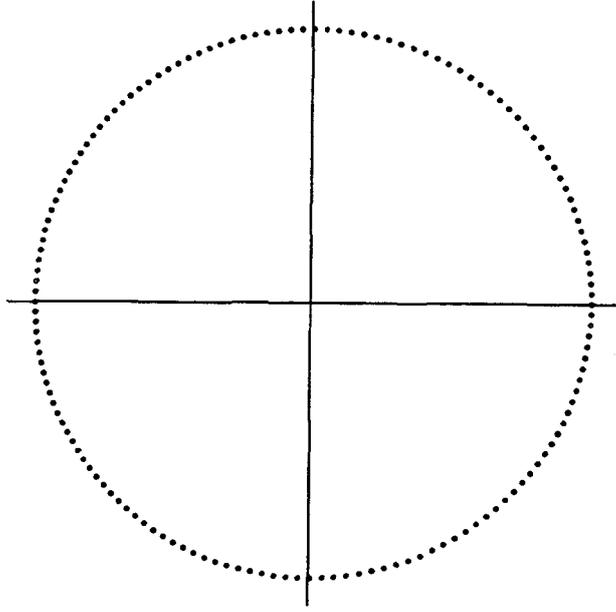


Figure 4.10: La solution quadratique appliquée à  $n = 150$  points.

**Corollaire 2** *Le polygone massique correspondant à  $M(t)$  pour  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$  est le suivant:*

$$\theta_0 = \left(\left(-1, 0\right); \frac{1}{2}\right) \quad \theta_1 = \left(\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); 0\right) \quad \theta_2 = \left(\left(\frac{5}{3}, 0\right); \frac{1}{2}\right)$$

$$\theta_3 = \left(\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); 0\right) \quad \theta_4 = \left(\left(-1; 0\right), \frac{1}{2}\right)$$

**Preuve:** Il suffit d'utiliser l'expression proposée en *Section 3.5.1 Chapitre 3* pour les valeurs optimales  $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\beta = 0$  du problème  $(P_{2,\infty})$ . □

La *Figure 4.11* montre les  $\pi$ -projections des points pondérés et les vecteurs purs du polygone de contrôle de la solution quadratique. On remarque de plus que ces masses vérifient les conditions de  $(S_1)$  (*Section 3.5.1*). Elles seront donc toutes strictement positives après une élévation de la longueur.

**Remarque:** On peut objecter que le changement de variable  $q_1$  n'est pas la formulation la plus générale. Cependant, nous avons vu au *Chapitre 2, Proposition 10* que tout changement de variable de type  $q_2$  donne la même distribution qu'un changement de type  $q_1$ , à une rotation près. Nous proposons donc le corollaire suivant:

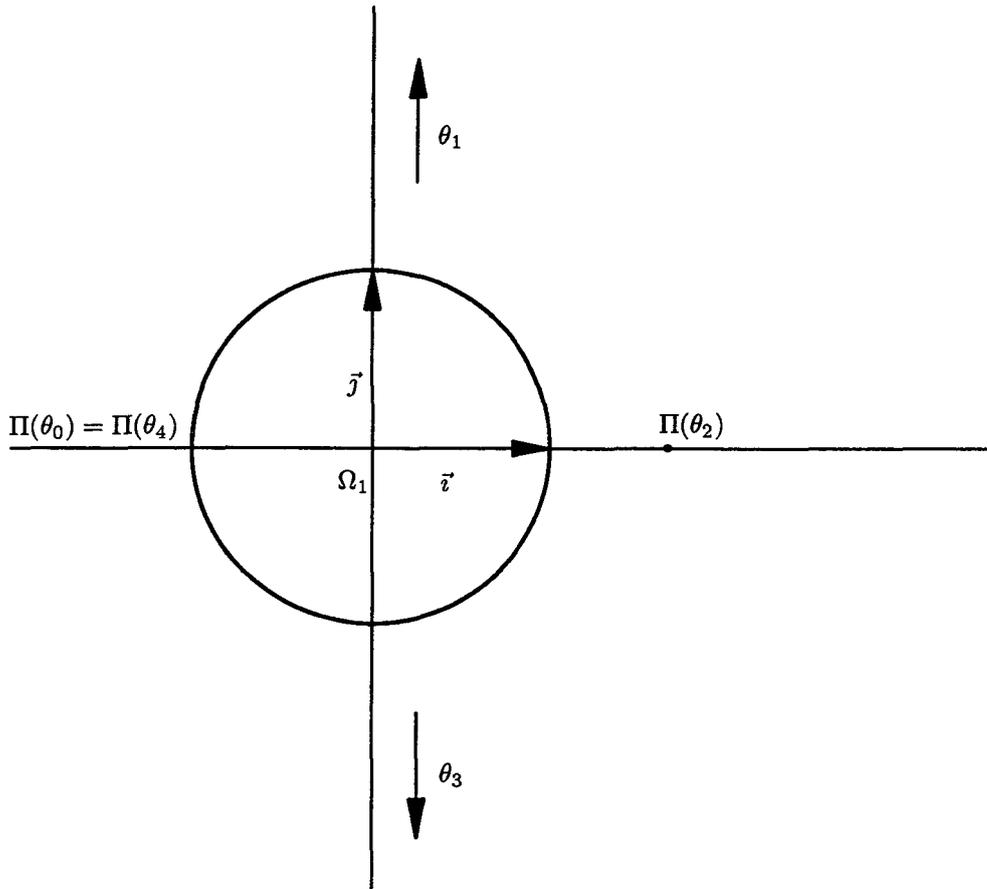


Figure 4.11: Le polygone de contrôle de la solution quadratique.

**Corollaire 3** Soit  $q_2$  un changement de variable décrit par (2.5), la distribution de points sur le cercle est optimale si et seulement si les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $e$  vérifient:

$$a = -\frac{\sqrt{2}}{2}e \quad \text{et} \quad b = \sqrt{2}$$

**Preuve:** Selon la *Proposition 10* du *Chapitre 2*, la distribution de points est optimale pour  $M_2(t) = C(q_2(t))$  si et seulement si elle est l'image par une rotation  $r_\theta$  de la distribution  $C(q_1(t))$  définie par  $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\beta = 0$ .

Selon les relations (2.16) et (2.17),  $a$ ,  $b$  et  $e$  doivent donc vérifier:

$$\begin{cases} \frac{1+a^2}{ae-b} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{e+ab}{ae-b} = 0. \end{cases}$$

Après quelques calculs, nous obtenons le résultat proposé. □

## 4.5 Solution pour un cercle fermé $C^3$ -continûment.

Au *Chapitre 2*, nous avons obtenu un cercle fermé  $C^3$ -continûment grâce à un changement de variable de degré  $\frac{3}{2}$  défini par

$$\varphi = \frac{aB_0^3 + bB_1^3 + \frac{1}{3}(3b - 4a)B_2^3 - aB_3^3}{B_1^2}, \quad (2.25)$$

avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Pour simplifier les calculs ultérieurs, nous pouvons le reformuler

$$\varphi(t) = p \cdot \frac{1 - 2t - 2t^2 + 2t^3}{t(1-t)} + q,$$

où  $p = \frac{1}{2}a \in \mathbb{R}^*$  et  $q = \frac{1}{2}(3b - a) \in \mathbb{R}$ . Comme dans le cas  $C^1$ , le *Lemme 7* nous permet de formaliser le problème de la façon suivante:

**Proposition 22** *Les valeurs de  $p$  et  $q$  définissant une distribution de points aussi uniforme que possible sur le cercle est solution du problème:*

$$(P_{3,n}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \eta + 0.p + 0.q, \text{ sous les contraintes:} \\ n \cdot \psi_{p,q,n}(t_i) - \pi \leq \eta, \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \\ -n \cdot \psi_{p,q,n}(t_i) + \pi \leq \eta, \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \\ \eta \geq 0, \quad p \in \mathbb{R}^*, q \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

$$\text{où } \psi_{p,q,n}(t) = \arctan \left( \frac{\varphi(t + \frac{1}{n}) - \varphi(t)}{1 + \varphi(t + \frac{1}{n})\varphi(t)} \right).$$

La fonction  $\psi_{p,q,n}(t)$  est assez complexe, elle dépend de 4 paramètres ( $p, q, n$  et  $t$ ). Nous ne pouvons donc pas résoudre facilement ce problème. Nous nous contenterons donc de la solution d'un problème formulé à l'aide d'une fonction plus simple, approximation de  $n \cdot \psi_{p,q,n}(t)$ , et pour une valeur fixée de  $n$ . Nous dirons alors que ce nouveau problème est une "approximation" du premier. Nous vérifierons ultérieurement que la solution ainsi obtenue donne une très bonne distribution de points, sinon la meilleure.

**Définition d'une approximation du problème  $(P_{3,n})$ :**

$$(P'_{3,n}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \eta + 0.p + 0.q \text{ sous les contraintes:} \\ f_{p,q}(t_i) - \pi \leq \eta \quad (E_i), \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \\ -f_{p,q}(t_i) + \pi \leq \eta \quad (E'_i), \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \\ \eta \geq 0. \end{array} \right.$$

avec

$$f_{p,q}(t) = p \cdot (1 - 2t + 4t^2 - 4t^3 + 2t^4) / (-p^2 + t(4p^2 - 2pq) + t^2(-1 + 6pq - q^2) + t^3(2 - 12p^2 + 2q^2) + t^4(-1 + 4p^2 - 8pq - q^2) + t^5(8p^2 + 4pq) - 4p^2t^6).$$

**Justification :** Comme pour  $(P_{2,\infty})$ , on considère  $\psi_{p,q,n}(t)$  comme une fonction de  $\frac{1}{n}$  et on détermine son développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 0:

$$\psi_{p,q,n}(t) = \frac{1}{n} \cdot f_{p,q}(t) + o\left(\frac{1}{n}\right), \forall t \in [0, 1].$$

La fonction  $f_{p,q}$  est donc une approximation de  $n \cdot \psi_{p,q,n}$ . □

**Proposition 23** Une solution de  $(P'_{3,10})$ , pour  $n = 10$ , est  $(\bar{\eta}; \bar{p}; \bar{q})$  avec:  $\bar{\eta} = 0.022$ ,  $\bar{p} = -0.3142$  et  $\bar{q} = -0.3138$ .

**Preuve :** Considérons  $(\eta_0, p_0, q_0) = \left(-\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, 05\right)$ . C'est une solution réalisable de  $(P'_{3,10})$ . Montrons que toute solution réalisable  $(\eta, p, q)$  vérifiant  $\eta \leq \eta_0$  est dans le domaine  $D = [0, 0.05] \times [-0.3235, -0.3133] \times [-0.3816, -0.2768]$ .

- $\eta \in [0, 0.05]$  est une conséquence immédiate de l'hypothèse  $\eta \leq \eta_0$ .
- $(\eta, p, q)$  étant une solution réalisable de  $(P'_{3,10})$ , elle vérifie  $(E_0)$  et  $(E'_0)$ :

$$-\eta \leq -\frac{1}{p} - \pi \leq \eta,$$

or  $0 \leq \eta \leq 0.05$ , donc  $p \in [-0.3235, -0.3133]$ .

- Pour déterminer un encadrement de  $q$ , étudions tout d'abord la contrainte  $(E_4)$ . Nous avons :

$$(E_4) : \frac{-9925p}{900 + p^2 + 60pq + 900q^2} - \pi \leq \eta.$$

Le dénominateur étant positif, en posant  $a = \pi + \eta$  (donc  $a \in [3.1415, 3.1916]$ ),  $(E_4)$  est équivalente à

$$900q^2 + 60pq + p^2 + 9925\frac{p}{a} + 900 \geq 0. \quad (4.5)$$

Considérons  $900q^2 + 60pq + p^2 + 9925\frac{p}{a} + 900$  comme un trinôme de variable  $q$ . Son discriminant,  $-36 - 397\frac{p}{a}$  est strictement positif (puisque  $a \in [3.1415, 3.1916]$  et  $p \in [-0.3235, -0.3133]$ ), il admet donc deux racines réelles, fonctions de  $p$  et de  $a$ :

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{1}{30}p - \frac{1}{6}\sqrt{-36 - 397\frac{p}{a}} \\ q_2 &= -\frac{1}{30}p + \frac{1}{6}\sqrt{-36 - 397\frac{p}{a}} \end{aligned}$$

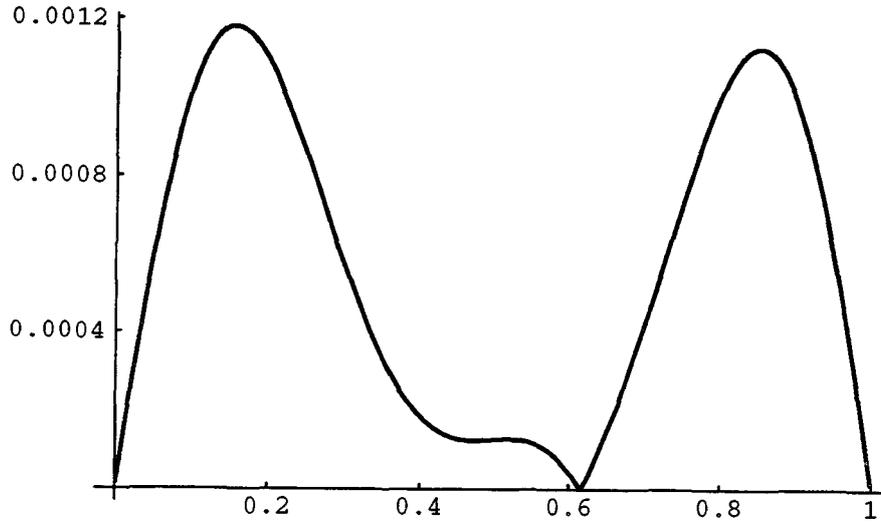


Figure 4.12: Graphe de la déviation cordale pour la solution cubique.

L'inégalité (4.5) est vérifiée si et seulement si  $q \leq q_1$  ou  $q \geq q_2$ . Cependant, en étudiant les variations de  $q_1$  et de  $q_2$  pour  $a$  appartient à  $[3.1415, 3.1916]$  et  $p$  à  $[-0.3235, -0.3133]$ , nous obtenons

$$q_1 \leq -0.2768, \text{ et } q_2 \geq 0.2978.$$

Nous en déduisons que  $q \leq -0.2768$ , ou  $q \geq 0.2978$ .

De la même manière, nous déduisons de  $(E'_4)$  que  $-0.3816 \leq q \leq 0.4032$  et de  $(E'_5)$ , que  $-0.5390 \leq q \leq -0.1081$ .

De ces trois encadrements, nous déduisons que  $q \in [-0.3816, -0.2768]$ .

Les contraintes de  $(P'_{3,10})$  sont non-linéaires et non-convexes. Toutefois le domaine  $(D)$  est assez restreint pour qu'on puisse supposer les contraintes presque convexes. Pour résoudre  $(P'_{3,10})$ , nous utilisons donc un algorithme de linéarisation: la méthode des plans sécants (Kelley, [26]). Nous obtenons, en deux itérations, la solution  $\bar{\eta} = 0.022$ ,  $\bar{p} = -0.3142$  et  $\bar{q} = -0.3138$ .  $\square$

Nous *proposons* cette solution  $(p, q) = (-0.3142, -0.3138)$ , pour le problème  $(P_{3,n})$ , pour toute valeur de  $n$  supérieure à 10. Comme dans le cas précédent, la déviation cordale

$$\Delta(t) = \sqrt{\frac{(\lambda(t) - (2\pi t - \pi))^2}{1 + 4\pi^2}}$$

nous permet d'évaluer cette solution (Figure 4.12). Nous avons cette fois

$$\sup_{t \in [0,1]} \Delta(t) = 0.00118.$$

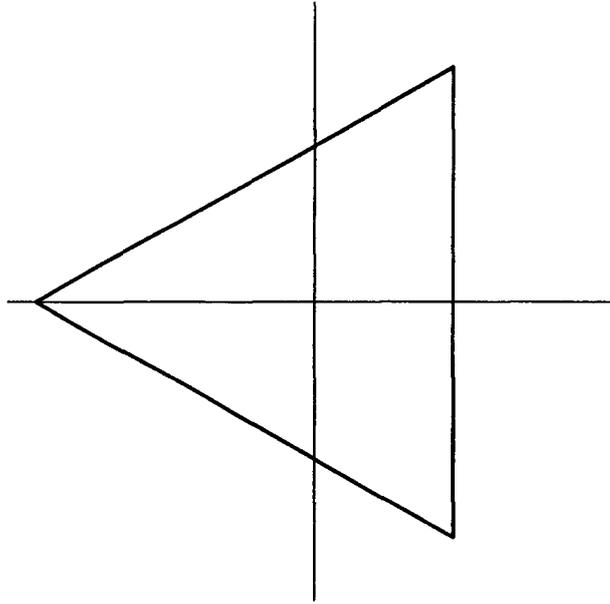


Figure 4.13: La solution cubique appliquée à  $n = 3$  points.

Les Figures 4.13 à 4.17 montrent que les résultats obtenus grâce à cette solution sont très satisfaisants non seulement pour  $n \geq 10$ , comme nous l'avions proposé, mais aussi pour de petites valeurs de  $n$  (ici  $n = 3$  et  $n = 6$ ).

**Corollaire 4** Avec  $p = -0.3142$  et  $q = -0.3138$ , le polygone massique correspondant à  $M(t)$  est le suivant:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= ((-1, 0); 0.3949) & \theta_1 &= ((-1, -1.5924); 0.2631) \\ \theta_2 &= ((1.0015, -1.8858); 0.2665) & \theta_3 &= ((2.9495, 0.0016); 0.2026) \\ \theta_4 &= ((0.9985, 1.8846); 0.2669) & \theta_5 &= ((-1, 1.5903); 0.2634) \\ \theta_6 &= ((-1, 0); 0.3949) \end{aligned}$$

**Preuve:** En utilisant les formules proposées en *Chapitre 3, Section 3.5.2*, avec la solution précédente correspondant à  $a = 2p = -0.6284$  et  $b = \frac{2}{3}(p+q) = -0.4187$  nous obtenons le polygone ci-dessus. □

On remarque que toutes les masses de ce polygone sont strictement positives. Les  $\Pi$ -projections des points pondérés sont proposées dans la *Figure 4.18*.

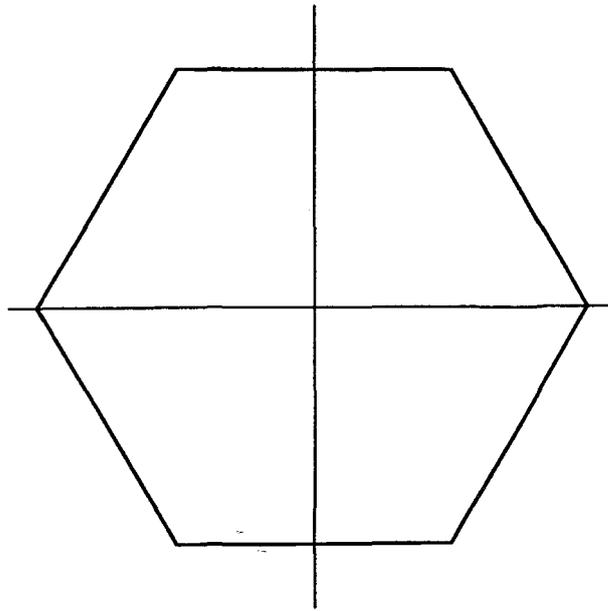


Figure 4.14: La solution cubique appliquée à  $n = 6$  points.

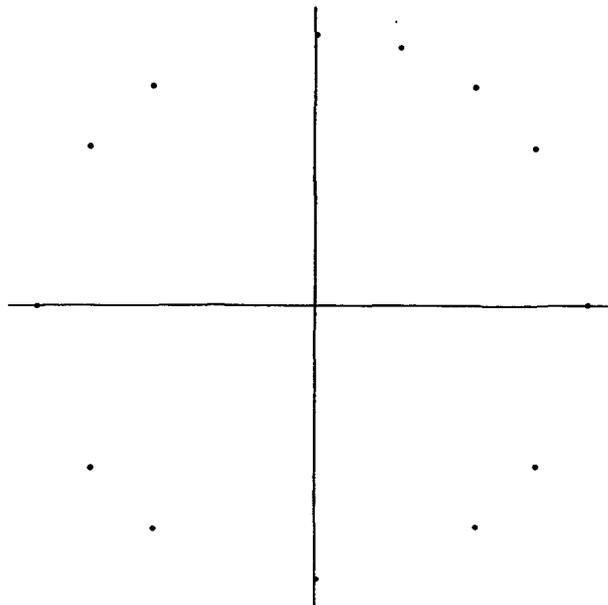


Figure 4.15: La solution cubique appliquée à  $n = 20$  points.

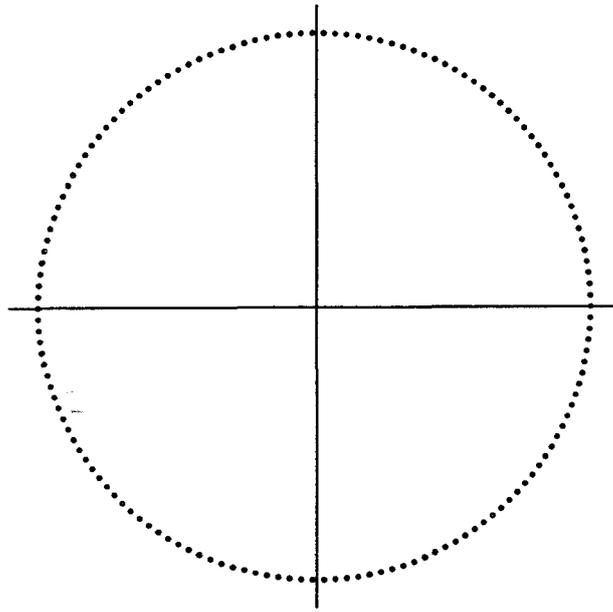


Figure 4.16: La solution cubique appliquée à  $n = 150$  points.

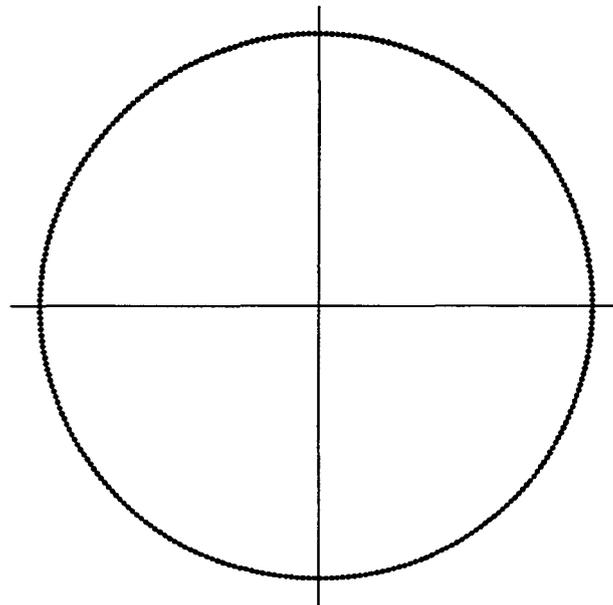


Figure 4.17: La solution cubique appliquée à  $n = 300$  points.

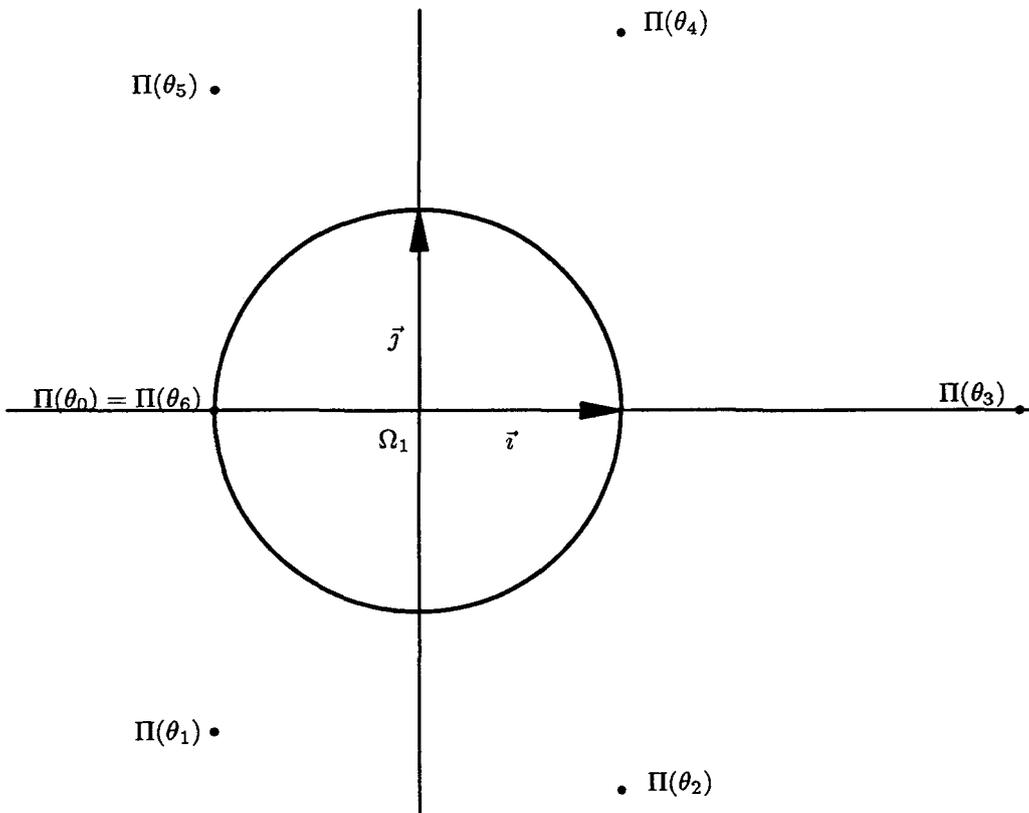


Figure 4.18: Le polygone de contrôle de la solution cubique.

# Chapitre 5

## Élévation de la longueur d'un polygone de contrôle et masses positives

### 5.1 Introduction et résultats préliminaires

La représentation des courbes (BR) à l'aide des vecteurs massiques permet de traiter ces courbes quel que soit le signe des masses de leur polygone de contrôle. Toutefois, dans le cadre de certains systèmes informatiques, ces masses doivent être strictement positives. Cela permet, par exemple, de déterminer la région du plan où se situe la courbe puisqu'elle est alors incluse dans l'enveloppe convexe des  $\Pi$ -projections du polygone de contrôle.

L'une des méthodes employées pour obtenir un polygone à masses positives est l'élévation de la longueur, dont les formules sont rappelées au *Chapitre 1, Proposition 7 et 8*. Cette préoccupation est étroitement liée à la détermination de polynôme de signe constant sur un intervalle. Citons dans ce domaine les travaux de Pólya et Szegő [27] (1976), ainsi que de Karlin et Studden [28] (1966). Micchelli et Pinkus [29] (1989) ont traité le cas de polynômes à plusieurs variable. Un des résultats proposés établit qu'un polynôme  $p$  de degré  $n$  est positif sur  $[0,1]$  si et seulement si il existe  $m \geq n$  tel que  $p$  s'écrive  $p(x) = \sum_{j=0}^m b_j B_j^m(x)$  où les coefficients  $b_j$  sont tous positifs. Dans le cas des courbes rationnelles, on en déduit la proposition suivante, donnant une interprétation géométrique de notre problème.

*Un polygone  $\theta$  aura des masses toutes strictement positives après un certain nombre d'élévations de longueur si et seulement si la courbe décrite par  $BR[\theta](t)$  pour  $t \in [0, 1]$  ne comporte pas d'asymptote.*

Cependant, nous abordons ici ce problème du point de vue direct des vecteurs massiques, que nous avons présenté dans la communication [30]. Nous proposons tout d'abord quelques résultats préliminaires. Puis, nous établissons trois conditions générales, les deux premières étant suffisantes et la troisième nécessaire à l'obtention d'un polygone à masses positives par élévation de la longueur. Plus spécifiquement, nous

développons le cas d'un polygone de longueur  $n = 2$  (coniques), pour lequel nous donnons une évaluation du nombre d'élévations nécessaires. En dernière partie, nous étudions le cas  $n = 3$  (cubiques), pour lequel nous proposons plusieurs conditions s'appuyant sur une condition nécessaire et suffisante donnée par Schmidt et Heß [31], ainsi que, dans divers cas un encadrement du nombre d'élévations nécessaires.

Soit un espace affine  $\mathcal{E}$  (ici  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ), et  $\hat{\mathcal{E}}$  l'espace des vecteurs massiques associés. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère l'espace vectoriel  $\hat{\mathcal{E}}^n$  des polygones massiques de longueur  $n$ , muni des lois  $\oplus$  et  $\bar{*}$ , définies par

$$\begin{aligned} \oplus : \hat{\mathcal{E}}^n \times \hat{\mathcal{E}}^n &\longrightarrow \hat{\mathcal{E}}^n \\ ({}^1\omega, {}^2\omega) &\longmapsto ({}^1\omega_0 \oplus {}^2\omega_0, \dots, {}^1\omega_n \oplus {}^2\omega_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{*} : \mathbb{R} \times \hat{\mathcal{E}}^n &\longrightarrow \hat{\mathcal{E}}^n \\ (\lambda, \omega) &\longmapsto (\lambda * \omega_0, \dots, \lambda * \omega_n) \end{aligned}$$

où  $\oplus$  et  $*$  sont les lois de  $\hat{\mathcal{E}}$  dont les définitions sont rappelées au *Chapitre 1*.

Pour simplifier la rédaction des démonstrations ultérieures, nous proposons les notations suivantes:

- Soient  $\omega \in \hat{\mathcal{E}}^n$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\omega^{(k)} = (\omega_0^{(k)}, \dots, \omega_{n+k}^{(k)})$  est le polygone massique obtenu à partir du polygone  $\omega$ , après  $k$  élévations de longueur. Par convention  $\omega^{(0)} = \omega$ .
- Soient  ${}^1\omega$  et  ${}^2\omega \in \hat{\mathcal{E}}^n$ , et  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $({}^1\omega \oplus {}^2\omega)_i$  est le  $i^{\text{eme}}$  vecteur massique du polygone  ${}^1\omega \oplus {}^2\omega$ .
- Soient  $\omega \in \hat{\mathcal{E}}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $(\lambda \bar{*} \omega)_i$  est de même le  $i^{\text{eme}}$  vecteur massique du polygone  $\lambda \bar{*} \omega$ .

Avec l'aide de ces notations nous pouvons formaliser le problème que nous souhaitons traiter: Soit  $\theta$  un polygone massique de longueur  $n$ . Peut-on obtenir un polygone dont les masses sont toutes strictement positives, en élevant suffisamment la longueur de  $\theta$ ? C'est à dire:

$$\exists K \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall j \in \{0, \dots, K+n\}, \chi(\theta_j^{(K)}) > 0 ?$$

Ce problème n'a de sens que si, pour un certain rang  $K$ , les masses  $\chi(\theta_0)$  et  $\chi(\theta_n)$  sont strictement positives, puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\theta_0^{(k)} = \theta_0$  et  $\theta_{n+k}^{(k)} = \theta_n$ . Remarquons cependant que si un polygone  $\theta^{(K)}$  n'a que des masses positives à un certain rang  $K$ , il en sera de même à tout rang  $k > K$ , puisque les masses des polygones  $\theta^{(k)}$  s'écriront alors comme combinaisons linéaires à coefficients positifs des masses de  $\theta^{(K)}$ , elles-mêmes positives. Nous formaliserons donc notre problème de la façon suivante:

*Le polygone  $\theta$  vérifie-t-il l'assertion*

$$A(\theta) : \exists K \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \geq K, \forall j \in \{0, \dots, k+n\}, \chi(\theta_j^{(k)}) > 0 ?$$

Il est à noter que si  $A(\theta)$  est fautive, le polygone  $\theta^{(k)}$  comportera toujours au moins une masse négative ou nulle, aussi grand que soit  $k$ .

Dans ce cadre, nous proposons deux lemmes élémentaires dont les résultats interviendront dans les développements ultérieurs.

**Lemme 8** Soient  ${}^1\omega$  et  ${}^2\omega \in \hat{\mathcal{E}}^n$  deux polygones de longueur  $n$ , et  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$({}^1\omega \oplus {}^2\omega)^{(k)} = {}^1\omega^{(k)} \oplus {}^2\omega^{(k)}.$$

**Preuve :** On démontre ce résultat par récurrence:

- Pour  $k = 0$ , cette assertion est évidemment vraie.
- Dans le cas  $k = 1$ , on a

$$\begin{aligned} ({}^1\omega \oplus {}^2\omega)_0^{(1)} &= ({}^1\omega \oplus {}^2\omega)_0 = {}^1\omega_0 \oplus {}^2\omega_0 = {}^1\omega_0^{(1)} \oplus {}^2\omega_0^{(1)}, \\ ({}^1\omega \oplus {}^2\omega)_{n+1}^{(1)} &= ({}^1\omega \oplus {}^2\omega)_n = {}^1\omega_n \oplus {}^2\omega_n = {}^1\omega_{n+1}^{(1)} \oplus {}^2\omega_{n+1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Soit  $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} ({}^1\omega \oplus {}^2\omega)_j^{(1)} &= \frac{j}{n+1} * ({}^1\omega \oplus {}^2\omega)_{j-1} \oplus \frac{n+1-j}{n+1} * ({}^1\omega \oplus {}^2\omega)_j \\ &= \frac{j}{n+1} * ({}^1\omega_{j-1} \oplus {}^2\omega_{j-1}) \oplus \frac{n+1-j}{n+1} * ({}^1\omega_j \oplus {}^2\omega_j) \\ &= \left( \frac{j}{n+1} * {}^1\omega_{j-1} \oplus \frac{n+1-j}{n+1} * {}^1\omega_j \right) \\ &\quad \oplus \left( \frac{j}{n+1} * {}^2\omega_{j-1} \oplus \frac{n+1-j}{n+1} * {}^2\omega_j \right) \\ &= {}^1\omega_j^{(1)} \oplus {}^2\omega_j^{(1)}. \end{aligned}$$

- Supposons l'assertion vraie pour  $k \geq 1$ , et montrons qu'elle est alors vraie pour  $k+1$ :

$$\begin{aligned} ({}^1\omega \oplus {}^2\omega)^{(k+1)} &= ({}^1\omega^{(k)} \oplus {}^2\omega^{(k)})^{(1)} \\ &= ({}^1\omega^{(k)})^{(1)} \oplus ({}^2\omega^{(k)})^{(1)} \\ &= {}^1\omega^{(k+1)} \oplus {}^2\omega^{(k+1)}. \end{aligned}$$

□

**Lemme 9** Soient  ${}^1\omega$  et  ${}^2\omega$  deux polygones de longueur  $n$  vérifiant

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \chi({}^1\omega_j) \leq \chi({}^2\omega_j),$$

alors, pour tout entier naturel  $k$ ,  ${}^1\omega^{(k)}$  et  ${}^2\omega^{(k)}$  vérifient

$$\forall j \in \{0, \dots, n+k\}, \chi({}^1\omega_j^{(k)}) \leq \chi({}^2\omega_j^{(k)}).$$

De plus, dans ce cas, si  $A({}^1\omega)$  est vraie,  $A({}^2\omega)$  l'est aussi. De même, si  $A({}^2\omega)$  est fautive,  $A({}^1\omega)$  est fautive également.

**Preuve :** Procédons par récurrence.

- Pour  $k = 0$ , cette assertion est évidemment vraie.
- Montrons que cette assertion est vraie pour  $k = 1$ .

Soit  $j \in \{0, \dots, n+1\}$ .

$$\text{Si } j = 0, \chi({}^1\omega_0^{(1)}) = \chi({}^1\omega_0) \leq \chi({}^2\omega_0) = \chi({}^2\omega_0^{(1)}).$$

$$\text{Si } j = n+1, \chi({}^1\omega_{n+1}^{(1)}) = \chi({}^1\omega_n) \leq \chi({}^2\omega_n) = \chi({}^2\omega_{n+1}^{(1)}).$$

Si  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on a  ${}^1\omega_{n+1}^{(1)} = \frac{j}{n+1} * {}^1\omega_{j-1} \oplus \frac{n+1-j}{n+1} * {}^1\omega_j$ . La fonction  $\chi$  étant linéaire, on en déduit que

$$\chi({}^1\omega_j^{(1)}) = \frac{j}{n+1}\chi({}^1\omega_{j-1}) + \frac{n+1-j}{n+1}\chi({}^1\omega_j).$$

De même

$$\chi({}^2\omega_j^{(1)}) = \frac{j}{n+1}\chi({}^2\omega_{j-1}) + \frac{n+1-j}{n+1}\chi({}^2\omega_j).$$

Or, par hypothèse  $\chi({}^1\omega_{j-1}) \leq \chi({}^2\omega_{j-1})$  et  $\chi({}^1\omega_j) \leq \chi({}^2\omega_j)$  ce qui permet de conclure que  $\chi({}^1\omega_j^{(1)}) \leq \chi({}^2\omega_j^{(1)})$ .

• Supposons cette assertion vraie pour  $k \geq 1$  et montrons qu'elle l'est également pour  $k+1$ . Pour tout  $j \in \{0, \dots, n+k+1\}$ , on a

$$\chi({}^1\omega_j^{(k+1)}) = \chi({}^1\omega_j^{(k)}) \text{ et } \chi({}^2\omega_j^{(k+1)}) = \chi({}^2\omega_j^{(k)}).$$

L'assertion est vraie pour  $k$ , donc

$$\forall j \in \{0, \dots, n+k\}, \chi({}^1\omega_j^{(k)}) \leq \chi({}^2\omega_j^{(k)}).$$

D'autre part, l'assertion étant vraie pour 1, on déduit de l'inéquation précédente

$$\chi({}^1\omega_j^{(1)}) \leq \chi({}^2\omega_j^{(1)}),$$

d'où

$$\chi({}^1\omega_j^{(k+1)}) \leq \chi({}^2\omega_j^{(k+1)}).$$

Les résultats complémentaires découlent immédiatement de ce résultat.  $\square$

## 5.2 Résultats généraux

**Lemme 10** Soit  $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$  un polygone massique de longueur  $n$  vérifiant les hypothèses suivantes:

- $\chi(\omega_0) > 0$  et  $\chi(\omega_n) > 0$ ,
- $\exists i \in \{1, \dots, n-1\}$  tel que  $\forall j \in \{1, \dots, n-1\} - \{i\}, \omega_j = \vec{0}$ .

Ce polygone vérifie alors

$\exists K \in \mathbb{N}, K \geq n$  tel que  $\forall k \geq K, \forall j \in \{0, \dots, n-1\} \cup \{k+1, \dots, k+n\}, \chi(\omega_j^{(k)}) > 0$ .

**Preuve :** Soit  $\omega$  un polygone de contrôle de  $\hat{\mathcal{E}}^n$  vérifiant les hypothèses précédentes. Montrons qu'il existe un entier naturel  $K$ , tel que

$$\forall k \geq K, \forall j \in \{0, \dots, n-1\} \cup \{k+1, \dots, k+n\}, \chi(\omega_j^{(K)}) > 0. \quad (5.1)$$

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , la formule générale d'élevation de longueur (*Chapitre 1, Proposition 8*) est

$$\omega_j^{(k)} = \frac{1}{\binom{n+k}{j}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \binom{k}{j-l} * \omega_l, \quad j \in \{0, \dots, k+n\}.$$

Dans notre cas, la plupart des termes de cette somme sont nuls. Pour tout  $j \in \{0, \dots, k+n\}$  nous obtenons

$$\omega_j^{(k)} = \frac{1}{\binom{n+k}{j}} * \left( \binom{k}{j} * \omega_0 \oplus \binom{n}{i} \binom{k}{j-i} * \omega_i \oplus \binom{k}{j-n} * \omega_n \right).$$

La fonction  $\chi$  étant linéaire, on en déduit, pour tout  $j \in \{0, \dots, k+n\}$

$$\chi(\omega_j^{(k)}) = \frac{1}{\binom{n+k}{j}} \left( \binom{k}{j} \chi(\omega_0) + \binom{n}{i} \binom{k}{j-i} \chi(\omega_i) + \binom{k}{j-n} \chi(\omega_n) \right).$$

Donc, pour tout  $j \in \{0, \dots, k+n\}$ ,  $\chi(\omega_j^{(k)}) > 0$  si et seulement si

$$\binom{k}{j} \chi(\omega_0) + \binom{n}{i} \binom{k}{j-i} \chi(\omega_i) + \binom{k}{j-n} \chi(\omega_n) > 0. \quad (5.2)$$

En supposant  $k \geq n$ , l'étude de l'inéquation (5.2) peut se décomposer en 5 cas, illustrés par la *Figure 5.1* où chaque ligne représente une élévation de longueur. Dans le cadre de la présente démonstration nous n'envisagerons que les cas 1, 2, 4 et 5, qui correspondent à  $j \in \{0, \dots, n-1\} \cup \{k+1, \dots, k+n\}$ .

**1<sup>er</sup> cas :**  $0 \leq j < i$ .

On a alors  $\binom{k}{j-i} = 0$  et  $\binom{k}{j-n} = 0$ , puisque  $j < i < n$ , donc (5.2) est équivalente à  $\binom{k}{j} \chi(\omega_0) > 0$ , ce qui est toujours vrai puisque par hypothèse,  $\chi(\omega_0) > 0$ .

**2<sup>eme</sup> cas :**  $i \leq j < n$ .

On a ici  $\binom{k}{j-n} = 0$ , car  $j < n$  donc (5.2) est équivalente à

$$\binom{k}{j} \chi(\omega_0) + \binom{n}{i} \binom{k}{j-i} \chi(\omega_i) > 0.$$

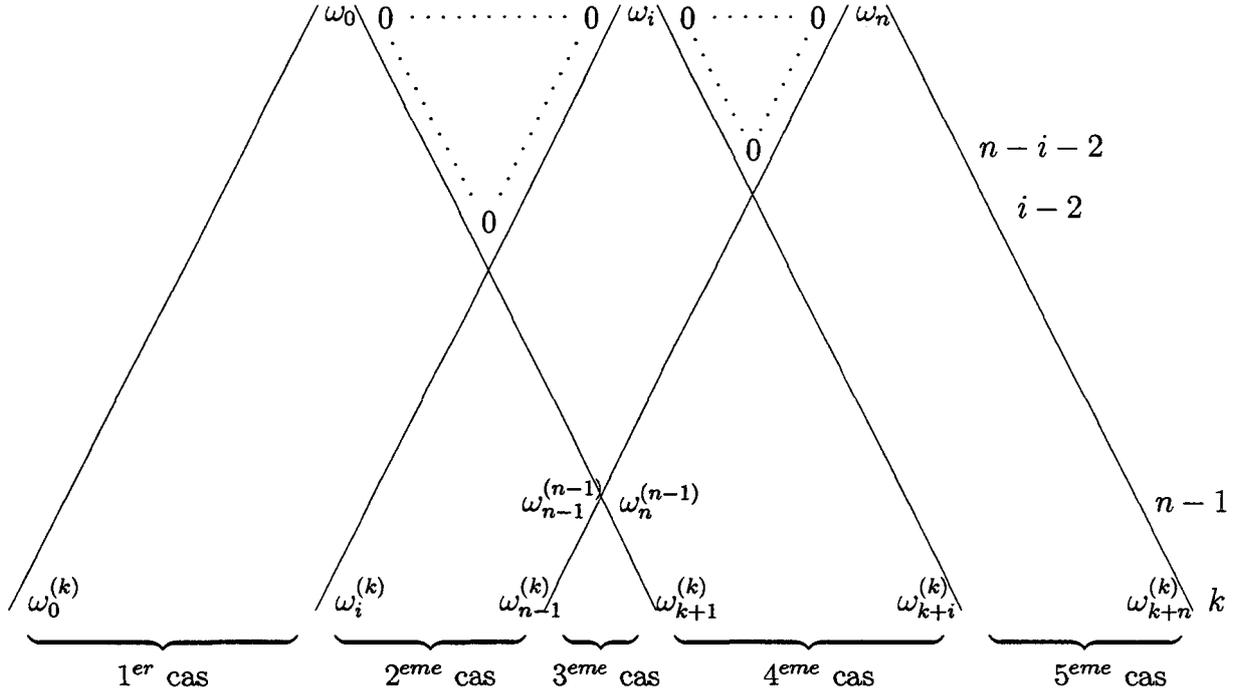


Figure 5.1: Les cinq cas composant l'étude de l'inéquation (5.2).

Montrons qu'il existe un entier naturel  $K'$ , tel que

$$\forall k \geq K', \forall j \in \{i, \dots, n-1\}, \binom{k}{j} \chi(\omega_0) + \binom{n}{i} \binom{k}{j-i} \chi(\omega_i) > 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall k \geq K', \forall j \in \{i, \dots, n-1\}, \binom{k}{j} \binom{k}{j-i}^{-1} > - \binom{n}{i} \frac{\chi(\omega_i)}{\chi(\omega_0)}. \quad (5.3)$$

Le terme de droite de cette inégalité est constant par rapport à  $k$  et  $j$ . Pour que (5.3) soit vérifiée, il suffit donc que le terme de gauche diverge lorsque  $k$  tend vers l'infini, et ce, indépendamment de  $j$ . Pour le prouver, nous allons minorer ce terme par une suite indépendante de  $j$  que nous prouverons divergente.

$$\text{On a } \binom{k}{j} \binom{k}{j-i}^{-1} = \frac{(j-i)!(k-j+i)!}{j!(k-j)!}.$$

Notons  $\varphi_{ik}(j)$  cette suite positive de rang  $j$ , et montrons qu'elle est décroissante, Pour  $j \in \{i, \dots, n-1\}$  c'est-à-dire que  $\forall j \in \{i, \dots, n-1\}, 0 < \frac{\varphi_{ik}(j+1)}{\varphi_{ik}(j)} < 1$ .

La première partie de cette double inéquation est évidente. D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{ik}(j+1)}{\varphi_{ik}(j)} < 1 &\iff \frac{(k-j)(j-i+1)}{(j+1)(k-j+i)} < 1 \\ &\iff (k-j)(j-i+1) < (j+1)(k-j+i) \\ &\iff -i(k+1) < 0, \text{ ce qui est toujours vrai.} \end{aligned}$$

$(\varphi_{ik}(j))_j$  est donc décroissante pour  $j \in \{i, \dots, n-1\}$ . Donc  $\varphi_{ik}(n)$  constitue un minorant de  $(\varphi_{ik}(j))_{j \in \{i, \dots, n-1\}}$  indépendant de  $j$ , d'où

$$\forall j \in \{i, \dots, n-1\} \varphi_{ik}(j) > \varphi_{ik}(n).$$

Montrons maintenant que l'on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_{ik}(n) = +\infty$ . Il suffit pour cela de remarquer que

$$\varphi_{ik}(n) = \frac{(n-i)!(k-n+i)!}{n!(k-n)!} = \prod_{l=1}^i \frac{k-n+l}{n-l+1}.$$

Or pour tout  $l \in \{1, \dots, i\}$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k-n+l}{n-l+1} = +\infty$  donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_{ik}(n) = +\infty$ , ce que nous voulions prouver. Il existe bien  $K' \in \mathbb{N}$  vérifiant (5.3).

4<sup>eme</sup> cas :  $k < j \leq k+i$ .

On a ici  $\binom{k}{j} = 0$ , car  $j > k$ , donc (5.2) est équivalente à

$$\binom{n}{i} \binom{k}{j-i} \chi(\omega_i) + \binom{k}{j-n} \chi(\omega_n) > 0.$$

Nous cherchons  $K''$ , tel que

$$\forall k \geq K'', \forall j \in \{k+1, \dots, k+i\}, \binom{n}{i} \binom{k}{j-i} \chi(\omega_i) + \binom{k}{j-n} \chi(\omega_n) > 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall k \geq K'', \forall j \in \{k+1, \dots, k+i\}, \binom{k}{j-i} \binom{k}{j-n}^{-1} > -\binom{n}{i} \frac{\chi(\omega_i)}{\chi(\omega_n)}.$$

Posons  $j' = n+k-j$  et  $i' = n-i$ . On a alors  $i' \leq j' < n$  et notre problème revient à déterminer  $K''$  vérifiant

$$\forall k \geq K'', \forall j' \in \{i', \dots, n-1\}, \binom{k}{j'} \binom{k}{j'-i'}^{-1} > -\binom{n}{i'} \frac{\chi(\omega_i)}{\chi(\omega_n)},$$

ce qui nous ramène au problème (5.3) qui possède une solution.

5<sup>eme</sup> cas :  $k + i < j \leq k + n$ .

(5.2) est alors équivalente à  $\binom{k}{j-i} \chi(\omega_n) > 0$ . En effet,  $j > k + i > k$  donc  $\binom{k}{j} = 0$  et  $\binom{k}{j-i} = 0$ . Or, par hypothèse  $\chi(\omega_n) > 0$ , donc l'inéquation (5.2) est toujours vérifiée.

L'entier  $K = \sup\{K', K''\}$  vérifie l'assertion (5.1). De plus, on a bien  $K > n$  puisque  $k > n$  est une condition nécessaire à l'existence des cinq cas que nous venons d'étudier.  $\square$

Nous allons utiliser ce lemme pour prouver l'existence d'une condition suffisante à l'obtention d'un polygone à masses strictement positives.

**Proposition 24** Soit  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$  un polygone de longueur  $n$ . Si  $\theta$  vérifie les deux conditions

- $\chi(\theta_0) > 0$  et  $\chi(\theta_n) > 0$ ,
- $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, -\binom{n}{i} \frac{(n-1)\chi(\theta_i)}{\inf\{\chi(\theta_0), \chi(\theta_n)\}} < 1$ ,

alors l'assertion  $A(\theta)$  est vraie.

**Preuve :** Soit  $\theta$  un polygone vérifiant  $\chi(\theta_0) > 0, \chi(\theta_n) > 0$  et

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, -\binom{n}{i} \frac{(n-1)\chi(\theta_i)}{\inf\{\chi(\theta_0), \chi(\theta_n)\}} < 1.$$

Soit  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Nous définissons le polygone  ${}^i\omega$  (de longueur  $n$ ) en fonction du polygone  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \text{pour } j \in \{0, \dots, n\}, \quad {}^i\omega_j &= \frac{1}{n-1} * \theta_j \text{ si } j = 0 \text{ ou } j = n, \\ {}^i\omega_j &= \theta_i \text{ si } j = i, \\ {}^i\omega_j &= \vec{0} \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Le polygone  ${}^i\omega$  vérifie donc  $\chi({}^i\omega_0) > 0, \chi({}^i\omega_n) > 0$  et

$$-\binom{n}{i} \frac{\chi({}^i\omega_i)}{\inf\{\chi({}^i\omega_0), \chi({}^i\omega_n)\}} < 1. \quad (5.4)$$

Montrons que

$$\exists K_i \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq K_i, \forall j \in \{0, \dots, k+n\}, \chi({}^i\omega_j^{(k)}) > 0. \quad (5.5)$$

- Selon le Lemme 10, il existe  $K'_i$  tel que

$$\forall k \geq K'_i, \forall j \in \{0, \dots, n-1\} \cup \{k+1, \dots, k+n\}, \chi({}^i\omega_j^{(k)}) > 0.$$

- Montrons qu'il existe  $K_i''$  tel que

$$\forall k \geq K_i'', \forall j \in \{n, \dots, k\}, \chi(i\omega_j^{(k)}) > 0,$$

c'est-à-dire que pour tout entier  $k \geq K_i''$

$$\forall j \in \{n, \dots, k\}, \binom{k}{j} \chi(i\omega_0) + \binom{n}{i} \binom{k}{j-i} \chi(i\omega_i) + \binom{k}{j-n} \chi(i\omega_n) > 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall j \in \{n, \dots, k\}, \frac{1}{\binom{k}{j-i}} \left( \binom{k}{j} \chi(i\omega_0) + \binom{k}{j-n} \chi(i\omega_n) \right) > - \binom{n}{i} \chi(i\omega_i). \quad (5.6)$$

Pour que (5.6) soit vérifiée, il suffit que

$$\forall j \in \{n, \dots, k\}, \frac{1}{\binom{k}{j-i}} \left( \binom{k}{j} + \binom{k}{j-n} \right) > - \binom{n}{i} \frac{\chi(i\omega_i)}{\inf\{\chi(i\omega_0), \chi(i\omega_n)\}}. \quad (5.7)$$

Remarquons que (5.7) est une condition suffisante, mais non nécessaire à (5.6).

Pour prouver cette proposition, il nous faut déterminer une minoration indépendante de  $j$  de la fonction  $f_{ik}(j)$  définie pour tout  $j \in \{n, \dots, k\}$  par

$$f_{ik}(j) = \frac{1}{\binom{k}{j-i}} \left( \binom{k}{j} + \binom{k}{j-n} \right).$$

Déterminons tout d'abord explicitement la fonction  $M_{ik}(j) = \max \left\{ \binom{k}{j}, \binom{k}{j-n} \right\}$  qui minore strictement  $\binom{k}{j} + \binom{k}{j-n}$ . Par quelques calculs élémentaires, on obtient

$$\begin{aligned} \binom{k}{j} < \binom{k}{j-n} &\iff \frac{(j-n)!(k-j+n)!}{j!(k-j)!} < 1 \\ &\iff \prod_{l=1}^n \frac{k+l-j}{j+l-n} < 1. \end{aligned}$$

Or, on remarque que, indépendamment de  $l$ ,  $\frac{k+l-j}{j+l-n} < 1$  si et seulement si  $j > \frac{k+n}{2}$ . Donc, si  $j > \frac{k+n}{2}$ , alors  $\forall l \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\frac{k+l-j}{j+l-n} < 1$ , donc  $\prod_{l=1}^n \frac{k+l-j}{j+l-n} < 1$  et  $M_{ik}(j) = \binom{k}{j-n}$ . Sinon,  $\prod_{l=1}^n \frac{k+l-j}{j+l-n} \geq 1$  et  $M_{ik}(j) = \binom{k}{j}$ .

Nous supposons dans la suite que  $k$  est tel que  $k + n$  soit pair. Les résultats ainsi obtenus pourront être généralisés à toutes les valeurs de  $k$ , puisque si  $\theta^{(k)}$  est à masses strictement positives,  $\theta^{(k+1)}$  l'est aussi et, par contraposition, si  $\theta^{(k)}$  possède des masses négatives,  $\theta^{(k-1)}$  également.

Montrons maintenant que  $\binom{k}{j-i}^{-1} M_{ik}(j)$ , qui minore  $f_{ik}(j)$  atteint son minimum pour  $j = \frac{k+n}{2}$ .

1<sup>er</sup> cas:  $j \leq \frac{n+k}{2}$ , on a alors

$$\binom{k}{j-i}^{-1} M_{ik}(j) = \frac{(j-i)!(k-j+i)!}{j!(k-j)!} = \varphi_{ik}(j),$$

où  $(\varphi_{ik}(j))_j$  est la suite définie lors de la démonstration du *Lemme 10* (2<sup>eme</sup> cas) où nous avons vu que cette suite décroît suivant la variable  $j$ . La fonction

$$\binom{k}{j-i}^{-1} M_{ik}(j) \text{ atteint donc son minimum pour } j = \frac{n+k}{2}.$$

2<sup>eme</sup> cas:  $j \geq \frac{n+k}{2}$ , on a alors

$$\binom{k}{j-i}^{-1} M_{ik}(j) = \frac{(j-i)!(k-j+i)!}{(j-n)!(k-j+n)!} = \varphi_{n-i,k}(k-j+n).$$

Nous avons vu précédemment que la fonction  $\varphi_{i,k}(j)$  est décroissante selon les  $j$ . La fonction  $\varphi_{n-i,k}(k-j+n)$  est donc croissante selon la variable  $j$ . Elle atteint donc son minimum en  $j = \frac{n+k}{2}$  et on a alors

$$\binom{k}{j-i}^{-1} M_{ik}(j) = \varphi_{n-i,k}\left(k - \frac{n+k}{2} + n\right) = \varphi_{n-i,k}\left(\frac{n+k}{2}\right) = \varphi_{i,k}\left(\frac{n+k}{2}\right).$$

Nous en déduisons que  $\forall j \in \{n, \dots, k\}$ ,  $\binom{k}{j-i}^{-1} M_{ik}(j) \geq \varphi_{ik}\left(\frac{k+n}{2}\right)$ . Or nous avons vu que  $f_{ik}(j) > \binom{k}{j-i}^{-1} M_{ik}(j) \geq \varphi_{ik}\left(\frac{k+n}{2}\right)$ . Nous avons ainsi trouvé une minoration de  $f_{ik}(j)$  indépendante de  $j$ , ce que nous cherchions. Etudions maintenant son comportement.

$$\varphi_{ik}\left(\frac{k+n}{2}\right) = \frac{\left(\frac{k+n}{2} - i\right)! \left(\frac{k-n}{2} + i\right)!}{\left(\frac{k+n}{2}\right)! \left(\frac{k-n}{2}\right)!}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{ik}\left(\frac{k+n}{2}\right) &= \prod_{l=1}^i \frac{\frac{k-n}{2} + l}{\frac{k+n}{2} - i + l} \\ &= \prod_{l=1}^i \frac{k-n+2l}{k+n-2i+2l}.\end{aligned}$$

La suite  $\left(\varphi_{ik}\left(\frac{k+n}{2}\right)\right)_k$  ainsi définie converge vers 1. En effet, on a d'une part  $0 < \frac{k-n+l}{k+n-2i+l} < 1$ . Donc  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_{ik}\left(\frac{k+n}{2}\right) < 1$ , comme produit fini de termes strictement inférieurs à 1.

D'autre part, on remarque que

$$\forall l \in \{1, \dots, 2i\}, k-n+2l \geq k-n \text{ et } 0 < k+n-2i+2l \leq k+n,$$

La suite  $\left(\varphi_{ik}\left(\frac{k+n}{2}\right)\right)_k$  est donc minorée par la suite  $\left(\left(\frac{k-n}{k+n}\right)^i\right)_k$  qui converge vers 1. On a donc bien  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_{ik}\left(\frac{k+n}{2}\right) = 1$ .

Or selon l'hypothèse (5.4),  $-\binom{n}{i} \frac{\chi^{(i\omega_i)}}{\inf\{\chi^{(i\omega_0)}, \chi^{(i\omega_n)}\}} < 1$ , donc

$$\exists K_i'' \in \mathbb{N}, \forall k \geq K_i'', \varphi_{ik}\left(\frac{k+n}{2}\right) > -\binom{n}{i} \frac{\chi^{(i\omega_i)}}{\inf\{\chi^{(i\omega_0)}, \chi^{(i\omega_n)}\}}. \quad (5.8)$$

Mais, nous avons vu précédemment que  $\forall j \in \{n, \dots, k\}$ ,  $f_{ik}(j) > \varphi_{ik}\left(\frac{k+n}{2}\right)$ . De (5.8) nous déduisons alors que

$$\exists K_i'' \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq K_i'', \forall j \in \{n, \dots, k\}, f_{i,k}(j) > -\binom{n}{i} \frac{\chi^{(i\omega_i)}}{\inf\{\chi^{(i\omega_0)}, \chi^{(i\omega_n)}\}}.$$

Pour tout  $k \geq K_i''$ , (5.7) est vraie et  $K_i''$  vérifie

$$\forall k \geq K_i'', \forall j \in \{n, \dots, k\}, \chi^{(i\omega_j^{(k)})} > 0.$$

Avec  $K_i = \sup\{K_i', K_i''\}$ , la condition (5.5) est vérifiée. Or, en remarquant que

$$\theta = {}^1\omega \oplus {}^2\omega \oplus \dots \oplus {}^i\omega \oplus \dots \oplus {}^{n-1}\omega,$$

selon le *Lemme 8*, nous obtenons, pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\theta^{(k)} = {}^1\omega^{(k)} \oplus {}^2\omega^{(k)} \oplus \dots \oplus {}^i\omega^{(k)} \oplus \dots \oplus {}^{n-1}\omega^{(k)}.$$

La fonction  $\chi$  étant linéaire, on en déduit que

$$\forall j \in \{0, \dots, k+n\}, \chi(\theta_j^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n-1} \chi({}^i\omega_j^{(k)}).$$

Pour  $K = \max_{\{i, \dots, n-1\}} (K_i)$ . Puisque (5.5) est vérifiée, on obtient donc

$$\forall k \geq K, \forall j \in \{0, \dots, k+n\}, \chi(\theta_j^{(k)}) > 0,$$

car  $\chi(\theta_j^{(k)})$  est une somme de termes strictement positifs, ce qui prouve que  $A(\theta)$  est vraie. □

Le résultat suivant, qui concerne les polygones ne comportant que des points pondérés à masses positives et des vecteurs purs, est bien connu. Il peut être formulé comme une conséquence directe de cette proposition.

**Corollaire 5** Soit  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$  un polygone massique de longueur  $n$  vérifiant

- $\chi(\theta_0) > 0$  et  $\chi(\theta_n) > 0$ ,
- $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \chi(\theta_i) \geq 0$ .

Alors l'assertion  $A(\theta)$  est vraie.

L'hypothèse  $\chi(\theta_0) = \chi(\theta_n)$  permet d'établir une condition plus forte que celle de la proposition précédente. C'est pourquoi nous établissons le résultat suivant:

**Proposition 25** Soit  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$  un polygone de longueur  $n$ . Si  $\theta$  vérifie les deux conditions

- $\chi(\theta_0) = \chi(\theta_n) > 0$
- $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, -\binom{n}{i} \frac{(n-1)\chi(\theta_i)}{2\chi(\theta_0)} < 1$ ,

alors l'assertion  $A(\theta)$  est vraie.

**Preuve:** La démonstration de cette proposition est similaire à celle de la proposition précédente.

Considérons un polygone  $\theta$  vérifiant ces conditions.

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , on définit le polygone  ${}^i\omega$  comme précédemment. Il vérifie donc  $\chi({}^i\omega_0) = \chi({}^i\omega_n) > 0$  et

$$-\binom{n}{i} \frac{\chi({}^i\omega_i)}{2\chi({}^i\omega_0)} < 1. \quad (5.9)$$

Pour chacun de ces polygones, nous voulons démontrer que

$$\exists K_i \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq K_i, \forall j \in \{0, \dots, k+n\}, \chi({}^i\omega_j^{(k)}) > 0.$$

Or, selon le *Lemme 10*, il existe  $K'_i$  tel que

$$\forall k \geq K'_i, \forall j \in \{0, \dots, n-1\} \cup \{k+1, \dots, k+n\}, \chi^{(i\omega_j^{(k)})} > 0.$$

Montrons qu'il existe  $K''_i$  tel que

$$\forall k \geq K''_i, \forall j \in \{n, \dots, k\}, \chi^{(i\omega_j^{(k)})} > 0,$$

où encore tel que, pour tout  $k \geq K''_i$ ,

$$\forall j \in \{n, \dots, k\}, \frac{1}{\binom{k}{j-i}} \left( \binom{k}{j} \chi^{(i\omega_0)} + \binom{k}{j-n} \chi^{(i\omega_n)} \right) > - \binom{n}{i} \chi^{(i\omega_i)}.$$

Comme  $\chi^{(i\omega_0)} = \chi^{(i\omega_n)}$ , ceci est équivalent à

$$\forall j \in \{n, \dots, k\}, \frac{1}{\binom{k}{j-i}} \left( \binom{k}{j} + \binom{k}{j-n} \right) > - \binom{n}{i} \frac{\chi^{(i\omega_i)}}{2\chi^{(i\omega_0)}}.$$

où encore, avec  $f_{ik}(j)$  définie dans la démonstration précédente

$$\forall j \in \{n, \dots, k\}, f_{ik}(j) > - \binom{n}{i} \frac{\chi^{(i\omega_i)}}{2\chi^{(i\omega_0)}}. \quad (5.10)$$

Mais, pour tout  $j \in \{n, \dots, k\}$ ,  $f_{ik}(j) > \varphi_{ik} \left( \frac{k+n}{2} \right)$ . D'autre part, nous avons prouvé que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_{ik} \left( \frac{k+n}{2} \right) < 1$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_{ik} \left( \frac{k+n}{2} \right) = 1$ .

Or selon l'hypothèse (5.9),  $-\binom{n}{i} \frac{\chi^{(i\omega_i)}}{2\chi^{(i\omega_0)}} < 1$ , donc

$$\exists K''_i \in \mathbb{N}, \forall k \geq K''_i, \varphi_{ik} \left( \frac{k+n}{2} \right) > - \binom{n}{i} \frac{\chi^{(i\omega_i)}}{2\chi^{(i\omega_0)}}.$$

Par conséquence, pour tout  $k \geq K''_i$ , (5.10) est vraie. Avec le même raisonnement que lors de la démonstration précédente, on obtient que pour  $K = \max_{i \in \{n, \dots, k\}} \{K'_i, K''_i\}$ ,

$$\forall k \geq K, \forall j \in \{0, \dots, k\}, \chi^{(i\omega_j^{(k)})} > 0.$$

$A(\theta)$  est donc vraie. □

La proposition suivante énonce une condition suffisante pour qu'un polygone  $\theta$  ne vérifie pas  $A(\theta)$ , mais aussi, par contraposée, une condition nécessaire pour que  $A(\theta)$  soit vraie.

**Proposition 26** Soit  $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$  un polygone massique de longueur  $n$  vérifiant les hypothèses suivantes:

- $\chi(\omega_0) > 0$  et  $\chi(\omega_n) > 0$ ,
- $\exists i \in \{1, \dots, n-1\}$  tel que  $\left| \begin{array}{l} \forall j \in \{1, \dots, n-1\} - \{i\}, \omega_j = \vec{0} \text{ et} \\ - \binom{n}{i} \frac{\chi(\omega_i)}{\chi(\omega_0) + \chi(\omega_n)} \geq 1, \end{array} \right.$

l'assertion  $A(\omega)$  est alors fausse car

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists j \in \{0, \dots, n+k\}, \chi(\theta_j^{(k)}) < 0, \quad (5.11)$$

**Preuve:** Soit  $\omega$  un polygone vérifiant les hypothèses ci-dessus. Pour prouver (5.11),  $j \in \{n, \dots, k\}$  tel que  $\chi(\theta_j^{(k)}) < 0$ . En effet, si  $k+n$  est impair,  $k+n+1$  est pair. Or si nous prouvons que  $\theta^{(k+1)}$  possède au moins une masse négative, nous avons vu que nous pouvons en déduire que  $\theta^{(k)}$  en possède également au moins une.

Prenons  $j = \frac{k+n}{2}$ . Selon un raisonnement identique à celui présenté au début de la démonstration de la *Proposition 24*,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\chi(\omega_j^{(k)}) < 0$  si et seulement si

$$\left( \binom{k}{\frac{k+n}{2} - i} \right)^{-1} \left( \left( \binom{k}{\frac{k+n}{2}} \chi(\omega_0) + \binom{k}{\frac{k-n}{2}} \chi(\omega_n) \right) < - \binom{n}{i} \chi(\omega_i), \right.$$

ou encore, puisque  $\binom{k}{\frac{k-n}{2}} = \binom{k}{k - \frac{k-n}{2}} = \binom{k}{\frac{k+n}{2}}$

$$\left( \binom{k}{\frac{k+n}{2} - i} \right)^{-1} \binom{k}{\frac{k+n}{2}} (\chi(\omega_0) + \chi(\omega_n)) < - \binom{n}{i} \chi(\omega_i),$$

ce qui est équivalent à l'inégalité suivante

$$\binom{k}{\frac{k+n}{2}} \left( \binom{k}{\frac{k+n}{2} - i} \right)^{-1} < - \binom{n}{i} \frac{\chi(\omega_i)}{\chi(\omega_0) + \chi(\omega_n)}. \quad (5.12)$$

On remarque que le terme de droite est une constante par rapport à  $k$ . On reconnaît par contre dans le membre de gauche le terme de rang  $k$  de la suite  $\left( \varphi \left( \frac{n+k}{2} \right) \right)_k$  que nous avons étudiée dans la démonstration de la *Proposition 24* et dont nous savons qu'elle converge vers 1 et qu'elle vérifie pour tout entier  $k$  tel que  $n+k$  soit pair,  $\varphi_{ik} \left( \frac{n+k}{2} \right) < 1$ . Or, par hypothèse,  $- \binom{n}{i} \frac{\chi(\omega_i)}{\chi(\omega_0) + \chi(\omega_n)} \geq 1$  ce qui vérifie (5.12).

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k+n$  soit pair, il existe  $j = \frac{k+n}{2}$  tel que  $\chi(\omega_j^{(k)}) < 0$ .

Donc  $A(\theta)$  est fausse. □

Le *Lemme 9* nous permet alors d'énoncer le corollaire suivant:

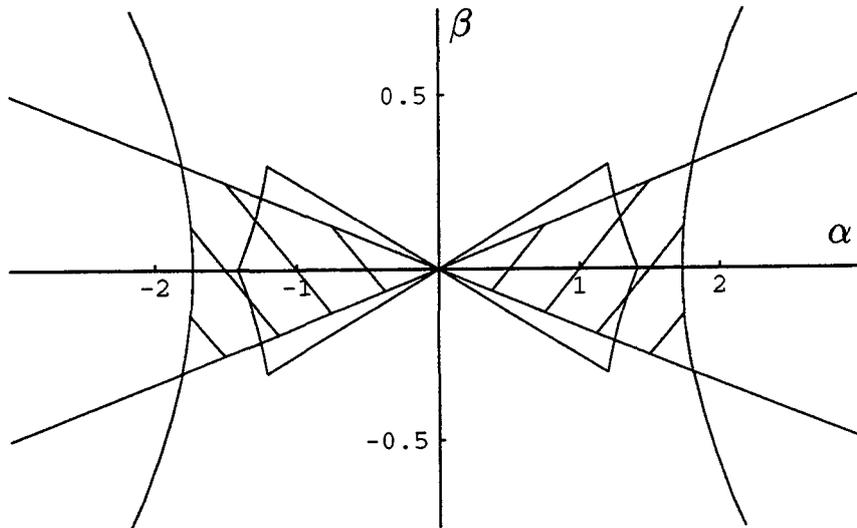


Figure 5.2: Comparaison des domaines de  $(R_1)$  et  $(S_1)$ .

**Corollaire 6** *Pour tout polygone  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$  de longueur  $n$  dont les masses minorent celles d'un polygone  $\omega$  qui vérifie les conditions de la Proposition 26,  $A(\theta)$  est fausse.*

**Exemple :**

Nous pouvons appliquer ces résultats aux diverses paramétrisations du cercle proposées au *Chapitre 3*. Intéressons nous au cas du cercle  $C^1$  obtenu après un changement de variable quadratique, dont le polygone massique  $\theta$  de longueur 4, est proposé en *Section 3.5.1*. Rappelons que les masses de ce polygone sont

$$\begin{aligned}\chi(\theta_0) &= \alpha^2, \\ \chi(\theta_1) &= \alpha\beta, \\ \chi(\theta_2) &= \frac{1}{3}(2 + 2\beta^2 - \alpha^2), \\ \chi(\theta_3) &= -\alpha\beta, \\ \chi(\theta_4) &= \alpha^2,\end{aligned}$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Après quelques calculs, nous remarquons que si  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient les inéquations du système  $(R_1)$

$$(R_1) \quad \begin{cases} \frac{1}{6} > \frac{\beta}{\alpha} > -\frac{1}{6} \\ 3 + 3\beta^2 - \alpha^2 > 0 \end{cases}$$

alors  $\theta$  vérifie les conditions de la *Proposition 25*, donc  $A(\theta)$  est vraie.

Rappelons que les masses de  $\theta^{(1)}$  sont toutes strictement positives si et seulement si les inéquations de  $(S_1)$  (Section 3.5.1) sont vérifiées, avec

$$(S_1) \quad \begin{cases} \alpha(\alpha + 4\beta) > 0 \\ \alpha(\alpha - 4\beta) > 0 \\ 2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 > 0 \\ 2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 > 0. \end{cases}$$

La Figure 5.2 représente le domaine hachuré défini par le système  $(R_1)$ , ainsi que le contour du domaine de  $(S_1)$ .

### 5.3 Le cas quadratique: $n = 2$

Nous étudions ici le cas particulier des polygones de contrôle  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$  de longueur 2 qui correspondent aux coniques.

Nous supposons toujours que  $\chi(\theta_0) > 0$  et  $\chi(\theta_2) > 0$ , afin que le problème ait un sens. Nous allons proposer une condition nécessaire et suffisante pour que  $A(\theta)$  soit vraie, ainsi qu'une évaluation du nombre d'itérations nécessaires. Afin de simplifier les écritures, nous noterons  $a = \chi(\theta_0)$ ,  $b = \chi(\theta_1)$  et  $c = \chi(\theta_2)$ .

**Proposition 27** Soit  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$  un polygone de longueur 2 vérifiant  $a > 0$  et  $c > 0$ .  $A(\theta)$  est vraie si et seulement si  $b + \sqrt{ac} > 0$ .

Une bonne évaluation du nombre  $K$  d'itérations nécessaires pour obtenir un polygone à masses strictement positives est alors

- Si  $a > -2b$  et  $c > -2b$ ,  $K = 1$ .
- Si  $a \geq c$  et  $-\frac{1}{2}c > b > \frac{1}{4}(c - 3\sqrt{ac})$ ,

$$K = E \left( \frac{1}{2c} \left( c - 4b + \sqrt{(4b - c)^2 - 8ac} \right) \right) + 1.$$

- Si  $a < c$  et  $-\frac{1}{2}a > b > \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{ac})$ ,

$$K = E \left( \frac{1}{2a} \left( a - 4b + \sqrt{(4b - a)^2 - 8ac} \right) \right) + 1.$$

- Si aucun de ces trois cas n'est vérifié

$$K = E \left( \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 - 4b}{2(b + \sqrt{ac})} \right) + 1.$$

**Preuve :** Soit  $\theta$  un polygone de longueur 2 vérifiant  $a > 0$  et  $c > 0$ . Nous supposons également  $b \leq 0$ , afin que le problème ait un sens. Remarquons que les masses de  $\theta^{(1)}$  sont

$$\chi(\theta_0^{(1)}) = a, \quad \chi(\theta_1^{(1)}) = \frac{1}{3}(2b + a), \quad \chi(\theta_2^{(1)}) = \frac{1}{3}(2b + c) \quad \text{et} \quad \chi(\theta_0^{(1)}) = c.$$

Ces masses sont toutes positives si et seulement si  $a > -2b$  et  $c > -2b$ . On a alors  $K = 1$ .

Nous supposons dans la suite que  $k \geq 2$ . Le polygone  $\theta$  vérifiant les conditions du *Lemme 10*, on en déduit

$$\exists K_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq K_1, \forall j \in \{0, 1, k+1, k+2\}, \chi(\theta_j^{(k)}) > 0.$$

Evaluons la plus petite valeur de  $K_1$ . Nous déduisons de la démonstration du *Lemme 10* qu'il suffit que  $K_1$  vérifie  $\chi(\theta_1^{(K_1)}) > 0$  et  $\chi(\theta_{k+1}^{(K_1)}) > 0$ , i.e.  $\binom{K_1}{1} a + 2 \binom{K_1}{0} b > 0$  et  $2 \binom{K_1}{0} b + \binom{K_1}{1} c > 0$ , ou encore  $K_1 > -2 \frac{b}{a}$  et  $K_1 > -2 \frac{b}{c}$ . Nous pouvons donc choisir

$$K_1 = \max \left\{ E \left( -2 \frac{b}{a} \right), E \left( -2 \frac{b}{c} \right) \right\} + 1. \quad (5.13)$$

Etudions le cas où  $j \in \{2, \dots, k\}$ , correspondant au troisième cas du *Lemme 10* ou de la *Figure 5.1*.

$$\begin{aligned} \chi(\theta_j^{(k)}) > 0 &\iff \binom{k}{j} a + 2 \binom{k}{j-1} b + \binom{k}{j-2} c > 0 \\ &\iff \frac{k \times \dots \times (k-j+1)}{j \times \dots \times 1} a + 2 \frac{k \times \dots \times (k-j+2)}{(j-1) \times \dots \times 1} b \\ &\quad + \frac{k \times \dots \times (k-j+3)}{(j-2) \times \dots \times 1} c > 0 \\ &\iff \frac{k \times \dots \times (k-j+3)}{j \times \dots \times 1} ((k-j+1)(k-j+2) a \\ &\quad + 2j(k-j+2) b + j(j-1) c) > 0 \\ &\iff (k-j+1)(k-j+2) a + 2j(k-j+2) b + j(j-1) c > 0 \end{aligned}$$

Nous définissons la fonction de deux variable  $k$  et  $j$ :

$$f(k, j) = (k-j+1)(k-j+2) a + 2j(k-j+2) b + j(j-1) c$$

Sauf précision, nous considérerons dans la suite  $k$  et  $j$  comme réelles.  $A(\theta)$  est alors vraie si et seulement si

$$\exists K_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq K, \forall j \in \{2, \dots, k\}, f(k, j) > 0. \quad (5.14)$$

Nous allons donc étudier le comportement de cette fonction. Après quelques simplifications, on obtient

$$\frac{df(k, j)}{dj} = 2(a - 2b + c)j - (2k + 3)a + (2k + 4)b - c,$$

or  $a - 2b + c > 0$  (car  $a > 0$ ,  $c > 0$  et  $b \leq 0$ ). Donc,  $f(k, j)$  admet un minimum en

$$J_m(k) = \frac{(2k + 3)a - (2k + 4)b + c}{2(a - 2b + c)} > 0,$$

pour lequel la valeur de  $f(k, j)$  est

$$f(k, J_m(k)) = \frac{4k^2(ac - b^2) + 4k(ab - 4b^2 + 2ac + bc) - a^2 + 8ab - 16b^2 + 2ac + 8bc - c^2}{4(a - 2b + c)}.$$

1<sup>er</sup> cas :  $b + \sqrt{ac} < 0$ , i.e.  $ac - b^2 < 0$ .

Montrons tout d'abord que  $2 \leq J_m(k) \leq k$ , au moins à partir d'une certaine valeur de  $k$ . D'une part, nous remarquons que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} J_m(k) = +\infty$ , donc pour  $k$  assez grand,  $J_m(k) \geq 2$ . D'autre part

$$J_m(k) - k = \frac{2(b - c)k + 3a - 4b + c}{2(a - 2b + c)} \rightarrow -\infty,$$

donc pour  $k$  assez grand  $J_m(k) \leq k$ .

Le terme de plus haut degré (en fonction de  $k$ ) de  $f(k, J_m(k))$  étant  $\frac{ac - b^2}{a - 2b + c}$ , on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k, J_m(k)) = -\infty$ .

D'autre part  $f(k, J_m(k) - 1) = f(k, J_m(k) + 1) = f(k, J_m(k)) + a - 2b + c$  donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k, J_m(k) - 1) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(k, J_m(k) + 1) = -\infty$ .

Or, il existe un entier naturel  $J \in \{2, \dots, k\}$  tel que  $J_m(k) - 1 < J \leq J_m(k)$  ou  $J_m(k) < J \leq J_m(k) + 1$ . La fonction  $f$  étant continue et décroissante selon les  $j$  sur l'intervalle  $[0, J_m(k)]$  et croissante sur  $[J_m(k), k]$ , on en déduit que

$$f(k, J_m(k) - 1) > f(k, J) \geq f(k, J_m(k)),$$

$$\text{ou } f(k, J_m(k) + 1) > f(k, J) \geq f(k, J_m(k)).$$

Donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k, J) = -\infty$ . Ce dernier résultat contredit (5.14), et  $A(\theta)$  est fausse.

2<sup>eme</sup> cas :  $ac - b^2 = 0$ , i.e.  $b = -\sqrt{ac}$  (puisque  $b \leq 0$ ). On a

$$\begin{aligned} f(k, J_m(k)) &= -\frac{4k(a\sqrt{ac} + 2ac + c\sqrt{ac}) + a^2 + 8a\sqrt{ac} + 14ac + 8c\sqrt{ac} + c^2}{4(a + 2\sqrt{ac} + c)} \\ &= -\frac{1}{4}(a + 6\sqrt{ac} + c + 4k\sqrt{ac}). \end{aligned}$$

$f(k, J_m(k))$  est alors négative pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . De plus, quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , sa limite est  $-\infty$ . On montre de la même façon que pour le 1<sup>er</sup> cas que l'assertion (5.14) ne peut donc pas être vérifiée, et que  $A(\theta)$  est fausse.

3<sup>eme</sup> cas :  $b + \sqrt{ac} > 0$  i.e.  $ac - b^2 > 0$ .

Quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , la limite de  $f(k, J_m(k))$  est donc  $+\infty$ . Donc, pour  $k$  assez grand,  $f(k, J_m(k))$  est strictement positive. Or, rappelons que  $J_m(k)$  constitue le minimum de la fonction  $f(k, j)$  suivant la variable  $j$ . A partir d'une certaine valeur de  $k$ , on a donc  $\forall j \in \{2, \dots, k\}$ ,  $f(k, j) > 0$  ce qui garantit la réalisation de (5.14). On a alors, pour tout  $k \geq \max\{K_1, K_2\}$

$$\forall j \in \{0, \dots, k+2\}, \chi(\theta_j^{(k)}) > 0,$$

donc  $A(\theta)$  est vraie.

Déterminons une évaluation de la valeur minimale de  $K$  vérifiant  $A(\theta)$ . Pour cela, notons  $j_m(k)$  la valeur de  $j$  pour laquelle, à  $k$  fixé,  $f(k, j)$  atteint son minimum sur l'intervalle  $[2, k]$ . On peut choisir pour valeur minimale de  $K_2$  vérifiant (5.14) est alors la plus petite valeur entière de  $k$  pour laquelle  $f(k, j_m(k))$  est strictement positive, et la valeur de  $K$  que nous cherchons est alors  $K = \max\{K_1, K_2\}$ , où  $K_1$  est déterminée par l'expression (5.13).

Remarquons tout d'abord que

$$J_m(k) \geq 2 \iff k \geq \frac{a - 4b + 3c}{2(a - b)} = k_m,$$

$$\text{et } J_m(k) \leq k \iff k \geq \frac{3a - 4b + c}{2(c - b)} = k_M.$$

D'autre part, la fonction  $f(k, J_m(k))$  peut être considérée comme un polynôme de variable  $k$  dont les deux racines réelles sont

$$k_1 = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2 - 4b}{2(b - \sqrt{ac})},$$

et

$$k_2 = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 - 4b}{2(b + \sqrt{ac})}.$$

On remarque que, si  $k_1$  est toujours strictement négative, indépendamment des valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ , par contre,  $k_2$  n'est positive que si  $b + \sqrt{ac} > 0$ . Remarquons dans ce cas, pour tout entier  $k > k_2$ , les masses  $\chi(\theta_j^{(k)})$ ,  $j \in \{2, \dots, k\}$  sont positives, puisque on a alors  $f(k, j_m(k)) > 0$ . Donc  $E(k_2) + 1$  constitue une majoration de la valeur  $K_2$  recherchée.

Supposons  $a \geq c$  pour la suite du raisonnement (le cas  $a \leq c$  est obtenu par symétrie). On alors

$$\frac{a - 4b + 3c}{2(a - b)} \leq \frac{3a - 4b + c}{2(c - b)}, \quad \text{i.e. } k_m \leq k_M.$$

1<sup>er</sup> cas :  $k_2 \leq k_m \leq k_M$ , alors  $k < J_m(k) \leq 2$  ce qui ne peut se produire que si  $k = 1$ . Or, on ne peut obtenir des masses uniquement positives à la première itération que si  $a > -2b$  et  $c > -2b$ . On a alors  $K=1$ .

2<sup>eme</sup> cas :  $k_m < k_2 < k_M$ , ce qui ne se produit que si  $b > \frac{1}{4}(c - 3\sqrt{ac})$ . Pour tout  $k < k_M$ , on a alors  $2 \leq k < J_m(k)$  et  $f(k, j)$  est décroissante selon les  $j$  sur l'intervalle  $[2, k]$ , donc  $j_m(k) = k$ , et

$$f(k, j_m(k)) = f(k, k) = ck^2 + k(4b - c) + 2a,$$

donc  $f(k, j_m(k)) > 0$  si  $k > \frac{1}{2c} \left( c - 4b + \sqrt{(4b - c)^2 - 8ac} \right)$ . La valeur minimale de  $K_2$  est alors

$$K_2 = E \left( \frac{1}{2c} \left( c - 4b + \sqrt{(4b - c)^2 - 8ac} \right) \right) + 1.$$

De plus  $-\frac{2b}{a} < -\frac{2b}{c} < \frac{1}{2c} \left( c - 4b + \sqrt{(4b - c)^2 - 8ac} \right)$ , donc  $K = \max\{K_1, K_2\} = K_2$ .

3<sup>eme</sup> cas :  $k_m \leq k_M \leq k_2$ , ce qui est équivalent à  $b \leq \frac{1}{4}(c - 3\sqrt{ac})$ . Supposons qu'il existe un réel  $k_0$  tel que

$$k_m < k_0 < k_M \text{ et } f(k_0, j_m(k_0)) > 0.$$

A partir du rang  $E(k_0) + 1$ , toutes les masses sont donc strictement positives. Cependant, si il existe un entier  $K_0$  tel que

$$\frac{3a - 4b + c}{2(c - b)} \leq K_0 \leq k_2,$$

on a alors  $J_m(K_0) \in [2, K_0]$  puisque  $K_0 \geq \frac{3a - 4b + c}{2(c - b)}$  donc  $j_m(K_0) = J_m(K_0)$  et  $f(K_0, j_m(K_0)) \leq 0$  car  $K_0 \leq k_2$ . Le polygone  $\theta^{(K_0)}$  pourrait donc posséder des masses négatives, ce qui serait en contradiction avec le fait que  $k_0 < K_0$ . Nous allons donc exclure ce cas.

Nous considérons donc ici  $k \geq k_M$ , donc  $2 \leq J_m(k) \leq k$  et  $j_m(k) = J_m(k)$ . La valeur  $f(k, j_m(k))$  est alors strictement positive si et seulement si  $k > k_2$  donc  $K_2 = E(k_2) + 1$ . De plus  $k_2 > -\frac{2b}{a} \geq -\frac{2b}{c}$ , donc

$$K = \max\{K_1, K_2\} = E(k_2) + 1.$$

Nous devons toutefois remarquer qu'il peut arriver qu'il n'existe pas d'entier  $K_0$  vérifiant  $k_M \leq K_0 \leq k_2$ . Dans ce cas, la valeur de  $K$  que nous venons de proposer ne donne qu'une majoration de la valeur recherchée.

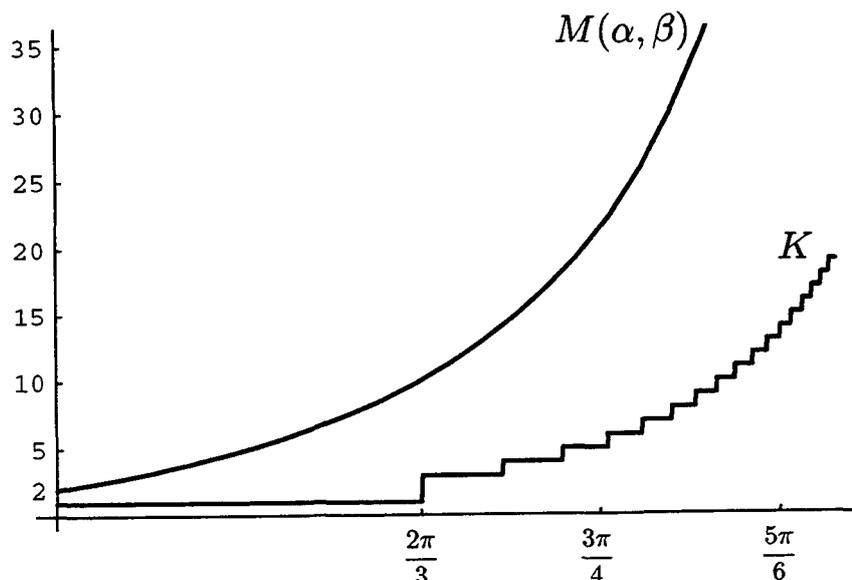


Figure 5.3: Le nombre d'itérations  $K$  et  $M(\alpha, \beta)$  en fonction de l'angle  $\gamma$ .

□

**Remarque :** Dans tous les cas,  $K = E\left(\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 - 4b}{2(b + \sqrt{ac})}\right) + 1$  constitue une majoration du nombre d'itérations nécessaires et suffisantes pour obtenir un polygone à masses positives.

**Exemple :** Considérons un arc de cercle de longueur  $2\gamma$ , tel qu'il est décrit au *Paragraphe 4.1*. Rappelons que le polygone massique est alors

$$\theta_0 = ((\sin \gamma, \cos \gamma); 1)$$

$$\theta_1 = \left( \left( 0, \frac{1}{\cos \gamma} \right); \cos \gamma \right)$$

$$\theta_2 = ((-\sin \gamma, \cos \gamma); 1)$$

avec  $\gamma \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$  pour que le problème ait un sens (c'est-à-dire, pour que  $\chi(\theta_1) \leq 0$ ).

On a  $\chi(\theta_1) + \sqrt{\chi(\theta_0)\chi(\theta_2)} = \cos \gamma + 1 > 0$ , donc  $A(\theta)$  est vraie.

Évaluons le nombre d'itérations nécessaires en fonction de  $\gamma$ . En utilisant les résultats de la *Proposition 27*, avec, dans le cas présent,  $a = c = 1$  et  $b = \cos \gamma$ , nous obtenons

$$K = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma < \frac{2\pi}{3} \\ E\left(\frac{-2 \cos \gamma}{\cos \gamma + 1}\right) + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est croissante et admet une asymptote pour  $\gamma = \pi$  (voir la *Figure 5.3*). Au delà d'une certaine valeur de  $\gamma$ , le nombre considérable d'itérations fournit un

polygone, certes à masses toutes positives, mais de longueur élevée. Il serait préférable d'utiliser un des changements de paramètre décrits dans les chapitres précédents. Le *Corollaire 2* du *Chapitre 4* propose un polygone de contrôle de longueur 4 dont les masses seront strictement positives après une élévation de longueur.

On peut comparer cette évaluation à celle obtenue par l'intermédiaire des résultats plus généraux proposés par Fiorot et Jeannin [32, Théorème 1] :

Une courbe polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n$  est représentée sous la forme de Bézier-de Casteljaou relative à l'intervalle  $[0,1]$  par

$$F(x) = \sum_{i=0}^n B_i^n(x) P_i,$$

ou, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , par

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n+k} B_i^{n+k}(x) P_i^{(k)},$$

avec les mêmes notations que celles que nous utilisons pour les vecteurs et les polygones massiques (*Section 5.1*).

**Théorème** Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r$  ( $r \in \mathbb{N}^*$ ) une courbe polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n$ . Nous écrivons

$$F(x) = \sum_{j=0}^{n+k} b_j x^j, \quad b_j \in \mathbb{R}^r.$$

Pour toute valeur réelle  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $M(\varepsilon)$  tel que pour tout entier  $k \geq M(\varepsilon) - n$ ,  $\forall i = 0 \dots n+k$

$$\left| P_i^{(k)} - F\left(\frac{i}{k+n}\right) \right| \leq \varepsilon,$$

$$M(\varepsilon) = \sup_{j \in J} \frac{j-1}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{|J||b_j|}\right)^{\frac{1}{j-1}} - 1},$$

où  $J = \{j/j = 2, \dots, n, b_j \neq 0\}$  et  $|J| = \text{Card}(J)$ .

Une borne plus simple mais moins précise est

$$M(\varepsilon) = |J| \sup_{j \in J} \frac{(j-1)^2 |b_j|}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2|J||b_j|}\right)^{-1}.$$

Ici, le dénominateur de  $BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2]$  est une fonction polynomiale de  $\mathbb{R}$ :

$$F(t) = \sum_{j=0}^2 b_j x^j$$

avec  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 2(\cos \gamma - 1)$  et  $b_2 = 2(1 - \cos \gamma)$ .

Les points de contrôle de  $F(x)$  sont des réels et constituent les masses de  $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ . Notant  $\alpha = \min_{t \in [0,1]} F(t)$  et  $\beta \in ]0, 1[$ ,  $\beta$  étant assez proche de 1, nous déduisons de ce théorème que

$$\forall k \geq M(\alpha\beta) - 2, \forall i \in \{0, \dots, k+2\}, \chi(\theta_i^{(k)}) > 0.$$

Or  $\alpha = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\cos \gamma - 1)$ , d'où  $M(\alpha\beta) = \frac{4(1 - \cos \gamma)}{\beta(1 + \cos \gamma)}$ . Donc pour tout  $k > \frac{4(1 - \cos \gamma)}{1 + \cos \gamma} - 2$ , toutes les masses de  $\theta^{(k)}$  sont strictement positives. Cette dernière fonction apparaît également sur la *Figure 5.3*.

Etudions plus particulièrement le cas  $\gamma = \frac{3\pi}{4}$ . On a alors  $K=5$ . Numériquement, les masses des vecteurs  $\theta_j^{(k)}$  constituant les polygones successifs  $\theta^{(k)}$  sont les suivantes:

$k \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	-0.71	1						
1	1	-0.14	-0.14	1					
2	1	0.15	-0.14	0.15	1				
3	1	0.32	-0.02	-0.02	0.32	1			
4	1	0.43	0.09	-0.02	0.09	0.43	1		
5	1	0.51	0.19	0.02	0.02	0.19	0.51	1	
6	1	0.57	0.27	0.09	0.02	0.09	0.27	0.57	1

Les  $\Pi$ -projections du polygone de contrôle  $\theta^{(5)}$  sont présentées dans la *Figure 5.4*. Les points  $\Pi(\theta_3^{(5)}) \simeq (4.12, 10.95)$  et  $\Pi(\theta_4^{(5)}) \simeq (-4.12, 10.95)$ , trop éloignés de l'origine, ne sont pas représentés.

**Remarque:** Nous pouvons comparer ces résultats à ceux obtenus par une autre méthode d'élevation de la longueur consistant à multiplier les numérateurs et le dénominateur de la paramétrisation  $BR[\theta](t) = \left( \frac{X(t)}{Z(t)}, \frac{Y(t)}{Z(t)} \right)$  par un même polynôme  $P$ . On obtient ainsi un nouveau polygone de contrôle  $\theta'$  tel que

$$BR[\theta'](t) = \left( \frac{X(t)P(t)}{Z(t)P(t)}, \frac{Y(t)P(t)}{Z(t)P(t)} \right).$$

Dans le cas d'un polygone  $\theta$  de longueur 2 tel qu'il est décrit dans cette partie, et d'un polynôme  $P$  de degré 1 que nous définissons par  $P(t) = \alpha B_0^1(t) + \beta B_1^1(t)$ , avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , on obtient

$$Z(t)P(t) = a\alpha B_0^3(t) + \frac{1}{3}(2b\alpha + a\beta)B_1^3(t) + \frac{1}{3}(c\alpha + 2b\beta)B_2^3(t) + c\beta B_3^3(t).$$

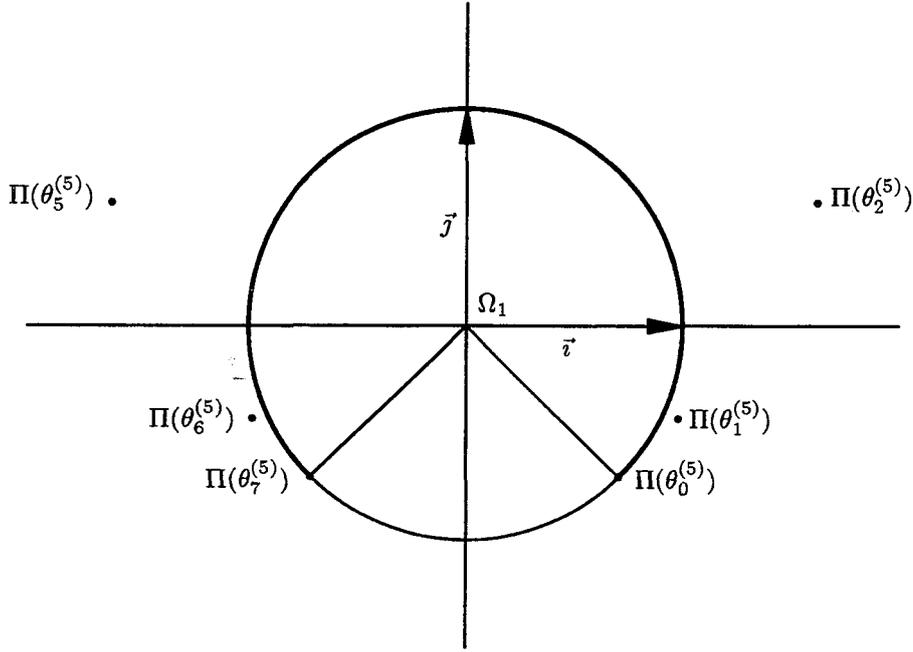


Figure 5.4: Polygone de contrôle de  $\theta^{(5)}$ .

Pour que les masses de  $\theta^l$  soient positives, il faut donc que

$$\begin{cases} a\alpha > 0 \\ 2b\alpha + a\beta > 0 \\ c\alpha + 2b\beta > 0 \\ c\beta > 0. \end{cases}$$

Comme  $b < 0$ , ce système est équivalent au système  $(R_2)$

$$(R_2) \quad \begin{cases} \alpha > 0 \\ -\frac{c}{2b}\alpha > \beta > -\frac{2b}{a}\alpha. \end{cases}$$

Ce système d'inéquations possède des solutions si et seulement si  $-\frac{c}{2b}\alpha > -\frac{2b}{a}\alpha$ . Or

$$\begin{aligned} -\frac{c}{2b}\alpha > -\frac{2b}{a}\alpha &\iff -\frac{c}{2b} > -\frac{2b}{a} \text{ puisque } \alpha > 0 \\ &\iff (2b + \sqrt{ac})(\sqrt{ac} - b) > 0 \\ &\iff 2b + \sqrt{ac} > 0 \text{ puisque } b < 0. \end{aligned}$$

Remarquons que, puisque  $b$  est strictement négatif, cette condition est plus restrictive que celle de la *Proposition 27*:  $b + \sqrt{ac} > 0$ .

**Exemple :** Appliquons cette méthode aux arcs de cercle, avec les notations de l'exemple précédent. Pour que l'on puisse ainsi obtenir un polygone à masses strictement positives, il faut et il suffit que  $2 \cos \gamma + 1 > 0$ , c'est-à-dire  $\frac{\pi}{2} \leq \gamma < \frac{2\pi}{3}$ . Remarquons qu'avec la méthode précédente, pour  $\frac{\pi}{2} \leq \gamma < \frac{2\pi}{3}$ , on obtient également un polygone à masses positives en une unique itération.

Une fraction rationnelle étant définie à un facteur près (ce qui apparaît d'ailleurs dans les inéquations de  $(R_2)$ ), nous pouvons choisir  $\alpha = 1$ . Pour que  $(R_2)$  soit vérifié, nous devons alors choisir  $\beta$  tel que  $-\frac{1}{2 \cos \gamma} > \beta > -2 \cos \gamma$ , c'est-à-dire

$$\beta = - \left( \frac{\lambda}{2 \cos \gamma} + 2(1 - \lambda) \cos \gamma \right), \quad \lambda \in ]0, 1[.$$

Le nouveau polygone de contrôle est alors

$$\theta'_0 = ((\sin \gamma, \cos \gamma); 1)$$

$$\theta'_1 = \left( \left( \frac{(1 + \lambda + 2\lambda \cos 2\gamma) \sin \gamma}{(-1 + \lambda)(1 + 2 \cos 2\gamma)}, \frac{\cos \gamma(3 - \lambda - 2\lambda \cos 2\gamma)}{(1 - \lambda)(1 + 2 \cos 2\gamma)} \right); \frac{(1 - \lambda)(1 + 2 \cos 2\gamma)}{6 \cos \gamma} \right)$$

$$\theta'_2 = \left( \left( \frac{\sin \gamma}{\lambda + 2\lambda \cos 2\gamma}, \frac{(4\lambda - 1) \cos^2 \gamma + 1 - \lambda}{\lambda(1 + 2 \cos 2\gamma) \cos \gamma} \right); \frac{-\lambda(1 + 2 \cos 2\gamma)}{3} \right)$$

$$\theta'_3 = \left( (-\sin \gamma, \cos \gamma); \frac{-(1 + \lambda + 2\lambda \cos 2\gamma)}{2 \cos \gamma} \right).$$

Rappelons que, lorsque les masses d'un polygone sont toutes strictement positives, la courbe qu'il contrôle est inscrite dans l'enveloppe convexe des  $\Pi$ -projections de ce polygone. Il est donc important que la surface ainsi délimitée soit la plus petite possible. Déterminons pour un angle  $\gamma$  donné, la valeur de  $\lambda$  permettant d'obtenir l'enveloppe convexe la plus restreinte possible, c'est-à-dire le polygone  $\theta'$  pour lequel les distances  $\Pi(\theta'_0)\Pi(\theta'_1)$  et  $\Pi(\theta'_2)\Pi(\theta'_3)$  sont minimales. Les formules explicites de ces longueurs sont

$$\begin{aligned} \Pi(\theta'_0)\Pi(\theta'_1) &= \frac{4 \sin \gamma \cos \gamma}{1 - \lambda(4 \cos^2 \gamma - 1)} \\ \Pi(\theta'_2)\Pi(\theta'_3) &= \tan \gamma \left( 1 + \frac{1}{\lambda(4 \cos^2 \gamma - 1)} \right). \end{aligned}$$

Nous cherchons  $\lambda \in ]0, 1[$  tel que, pour une valeur de  $\gamma$  donnée dans  $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}[$ , la fonction

$$M(\lambda, \gamma) = \max\{\Pi(\theta'_0)\Pi(\theta'_1), \Pi(\theta'_2)\Pi(\theta'_3)\}$$

soit minimale.

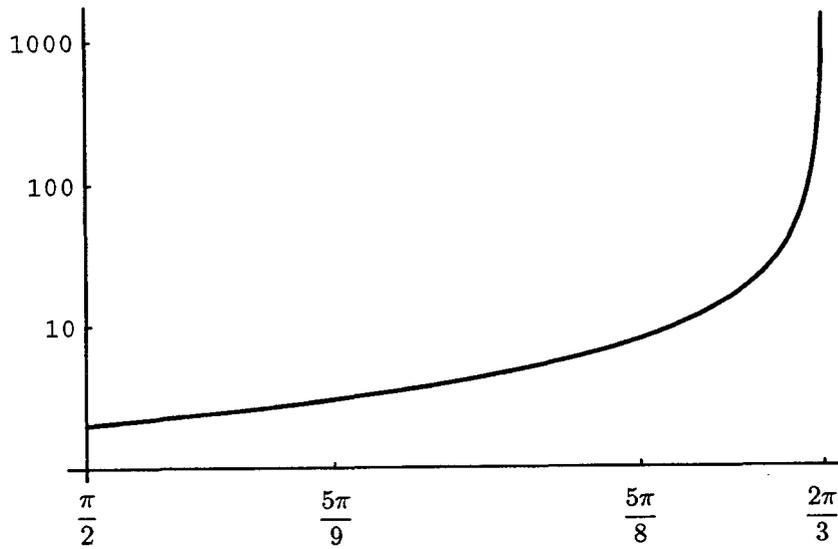


Figure 5.5: Graphe de la fonction  $M\left(\frac{1}{1-2\cos\gamma}, \gamma\right)$ .

Après quelques calculs, nous obtenons ce résultat pour  $\lambda = \frac{1}{1-2\cos\gamma}$ . Le comportement de la fonction  $M\left(\frac{1}{1-2\cos\gamma}, \gamma\right) = \frac{2\sin\gamma}{1+2\cos\gamma}$  est illustré par la *Figure 5.5* (l'axe des ordonnées est muni d'une échelle logarithmique).

Malgré cette "optimisation" de la surface, nous remarquons que, bien que pour certaines valeurs de  $\gamma$  ( $\gamma = \frac{5\pi}{9}$ , *Figure 5.6*) l'enveloppe convexe garde des dimensions raisonnables, celles-ci deviennent excessives lorsque la valeur de  $\gamma$  se rapproche de  $\frac{2\pi}{3}$  ( $\gamma = \frac{5\pi}{8}$ , *Figure 5.7*).

## 5.4 Le cas cubique: $n = 3$

Soit  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  un polygone massique de longueur 3, correspondant donc à une fonction rationnelle cubique. Nous proposons dans cette partie quelques résultats permettant de déterminer si en élevant la longueur de  $\theta$ , on peut obtenir un polygone à masses exclusivement positives. Afin de simplifier les expressions, nous noterons

$$\chi(\theta_0) = a \quad \chi(\theta_1) = b \quad \chi(\theta_2) = c \quad \chi(\theta_3) = d.$$

Dans la suite, nous supposons  $a > 0$ ,  $d > 0$  et  $b \leq 0$  ou  $c \leq 0$ , afin que le problème ait un sens.

**Proposition 28** *Soit  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  un polygone massique de longueur 3, dont les masses vérifient:  $a > 0$ ,  $d > 0$  et  $b \leq 0$  ou  $c \leq 0$ .  $A(\theta)$  est vraie si et seulement si*

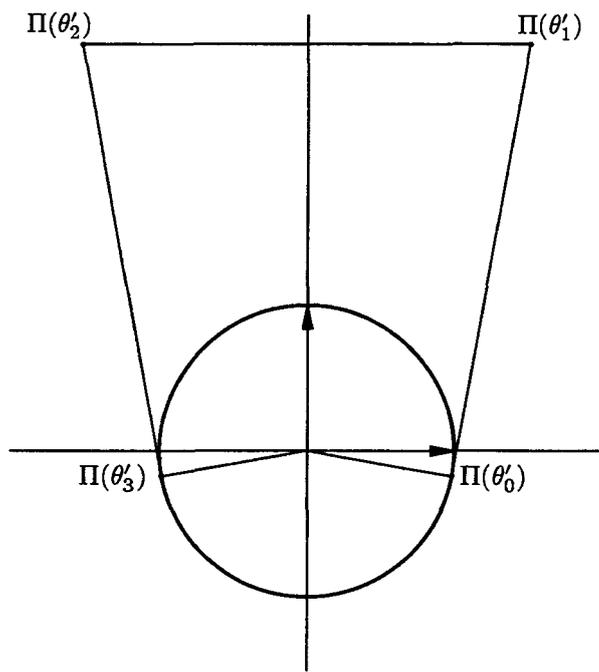


Figure 5.6: Le polygone de contrôle  $\theta'$  pour  $\gamma = \frac{5\pi}{9}$ .

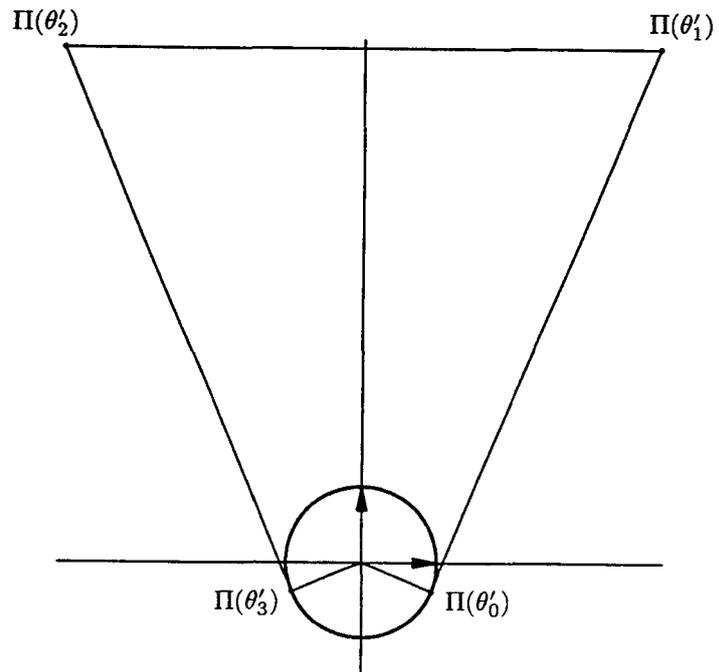


Figure 5.7: Le polygone de contrôle  $\theta'$  pour  $\gamma = \frac{5\pi}{8}$ .

$$4ac^3 + 4b^3d + a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2 > 0.$$

**Preuve :** Considérons un polygone  $\theta$ , dont les masses  $a, b, c$  et  $d$  vérifient  $a > 0, d > 0$  et  $b \leq 0$  ou  $c \leq 0$ .

Nous avons vu que  $A(\theta)$  est vraie si et seulement si la courbe  $BR[\theta]$  n'admet pas d'asymptote, c'est-à-dire si son dénominateur  $p(t) = aB_0^3(t) + bB_1^3(t) + cB_2^3(t) + dB_3^3(t)$  n'admet pas de racine sur l'intervalle  $[0, 1]$ .  $A(\theta)$  est donc vraie si et seulement si  $p(t) > 0, \forall t \in [0, 1]$ .

Or, selon Schmidt et Heß[29, Théorème 1], un polygone cubique vérifiant nos conditions est non-négatif si et seulement si

$$4ac^3 + 4b^3d + a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2 \geq 0.$$

En étudiant la démonstration proposée, nous remarquons que l'on a également  $p(t) > 0, \forall t \in [0, 1]$  si et seulement si

$$4ac^3 + 4b^3d + a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2 > 0.$$

□

**Corollaire 7** *Supposons  $a > 0, d > 0$  et  $b \leq 0$  ou  $c \leq 0$ . Soient  $m_1 = \min\{a, d\}$ ,  $m_2 = \min\{b, c\}$ ,  $M_1 = \max\{a, d\}$  et  $M_2 = \max\{b, c\}$ .*

- Si  $\frac{M_2}{M_1} \leq -\frac{1}{3}$ ,  $A(\theta)$  est fausse.
- Si  $\frac{m_2}{m_1} > -\frac{1}{3}$ ,  $A(\theta)$  est vérifiée. Dans ce cas, le nombre minimal  $K$  d'itérations nécessaires est majoré par

$$K_M = E \left( \frac{2(m_1 - 3m_2)}{m_1 + 3m_2} \right).$$

De plus si  $M_2 \leq 0$ ,  $K$  est minoré par

$$K_m = E \left( \frac{2(M_1 - 3M_2)}{M_1 + 3M_2} \right).$$

**Preuve :** Considérons un polygone  $\omega$  de longueur 3, dont les masses sont de la forme  $\chi(\omega_0) = \mu, \chi(\omega_1) = q\mu, \chi(\omega_2) = q\mu$  et  $\chi(\omega_3) = \mu$ , avec  $\mu \in \mathbb{R}^{*+}$  et  $q \in \mathbb{R}^-$ .

Selon la Proposition 28,  $A(\omega)$  est vraie si et seulement si  $\mu^4(1 - q)^3(1 + 3q) > 0$ .  $A(\omega)$  est donc vraie si et seulement si  $q > -\frac{1}{3}$ , car  $q \leq 0$ .

- Supposons  $\frac{M_2}{M_1} \leq -\frac{1}{3}$ . Pour  $q = \frac{M_2}{M_1}$  et  $\mu = M_1$ , on a alors  $q \leq -\frac{1}{3}$ , donc  $A(\omega)$  est fausse. Les masses de  $\theta$  minorant celles de  $\omega$ , le Lemme 9 nous prouve que  $A(\theta)$  est également fausse.

- Supposons  $\frac{m_2}{m_1} \geq -\frac{1}{3}$ . Posons  $q = \frac{m_2}{m_1}$  et  $\mu = m_1$ . On a alors  $q > -\frac{1}{3}$  donc  $A(\omega)$  est vraie. Or les masses de  $\theta$  majorent celles de  $\omega$  donc, selon le *Lemme 9*,  $A(\theta)$  est également vraie.

Dans ce cas, le polynôme dénominateur de la courbe  $BR[\omega](t)$  est

$$\begin{aligned} p(t) &= \mu B_0^3(t) + q\mu B_1^3(t) + q\mu B_2^3(t) + \mu B_3^3(t) \\ &= \mu B_0^2(t) + \frac{1}{2}(3q\mu - \mu)B_1^2(t) + \mu B_2^2(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

et est en fait de degré 2. Le dénominateur  $p(t)$  est un trinôme dont les coefficients dans la base de Bernstein de degré 2 sont  $a' = \mu$ ,  $b' = \frac{\mu}{2}(3q - 1)$  et  $c' = \mu$ . Nous pouvons donc lui appliquer la *Proposition 27*. On remarque que

$$\begin{aligned} a' > -2b' &\iff \mu > -2\frac{\mu}{2}(3q - 1) \\ &\iff q > 0. \end{aligned}$$

ce qui est impossible. D'autre part

$$\begin{aligned} b' > \frac{1}{4}(c' - 3\sqrt{a'c'}) &\iff \frac{\mu}{2}(3q - 1) > -\frac{\mu}{2} \\ &\iff q > 0, \end{aligned}$$

ce qui est également faux.

Nous avons donc  $b' \leq \frac{1}{4}(c' - 3\sqrt{a'c'})$ . Nous sommes dans le 4<sup>eme</sup> cas de la *Proposition 27*, et le nombre d'itérations nécessaires pour que les coefficients de ce polynôme soient tous positifs est donc

$$\begin{aligned} K' &= E\left(\frac{-4\frac{\mu}{2}(3q - 1)}{2(\frac{\mu}{2}(3q - 1) + \mu)}\right) + 1 \\ &= E\left(\frac{2(1 - 3q)}{1 + 3q}\right) + 1. \end{aligned}$$

Dans le cas du polygone  $\omega$ , nous commençons à l'itération suivante. Les masses de  $\omega^{(K)}$  sont donc toutes positives à partir de  $K = E\left(\frac{2(1 - 3q)}{1 + 3q}\right)$ . Les masses de  $\omega$  minorant celles de  $\theta$ , ce nombre constitue une majoration du nombre d'itérations nécessaires pour  $\theta$ . On a donc

$$K_M = E\left(\frac{2(1 - 3q)}{1 + 3q}\right) = E\left(\frac{2(m_1 - 3m_2)}{m_1 + 3m_2}\right),$$

car ici  $q = \frac{m_1}{m_2}$ .

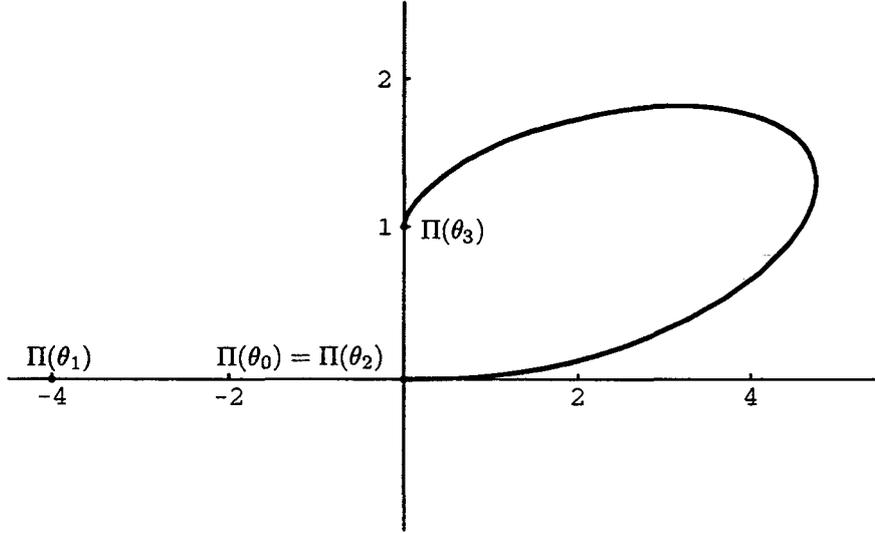


Figure 5.8: La courbe  $BR[\theta]$  et les  $\Pi$ -projections de ses points de contrôle.

D'autre part, si  $M_2 < 0$ , les réels  $q' = \frac{M_2}{M_1}$  et  $\mu' = M_1$  vérifient les mêmes relations que  $q$  et  $\mu$ . Par contre, le polygone  $\theta$  est cette fois majoré. Le nombre d'itérations nécessaires à l'obtention de masses toutes positives est donc minoré par

$$K_m = E \left( \frac{2(M_1 - 3M_2)}{M_1 + 3M_2} \right).$$

□

**Corollaire 8** *Supposons que  $b \leq 0$  et  $c > 0$ . Notons  $m = \min\{a, c, d\}$  et  $M = \max\{a, c, d\}$ .*

- Si  $m > -\frac{4}{5}b$ ,  $A(\theta)$  est vraie.
- Si  $M < -\frac{4}{5}b$ ,  $A(\theta)$  n'est pas vérifiée.

Le cas  $b > 0$  et  $c \leq 0$  est symétrique.

**Preuve:** Considérons un polygone  $\omega$  de longueur 3, dont les masses sont de la forme  $\chi(\omega_0) = \chi(\omega_2) = \chi(\omega_3) = \mu$ , et  $\chi(\omega_1) = b$  avec  $\mu \in \mathbb{R}^{*+}$  et  $b \in \mathbb{R}^-$ .

Selon la *Proposition 28*,  $A(\omega)$  est vraie si et seulement si  $\mu(\mu - b)^2(4b + 5\mu) > 0$ .  
Donc  $A(\omega)$  est vraie si et seulement si  $4b + 5\mu > 0$  i.e.  $\mu > -\frac{4}{5}b$ .

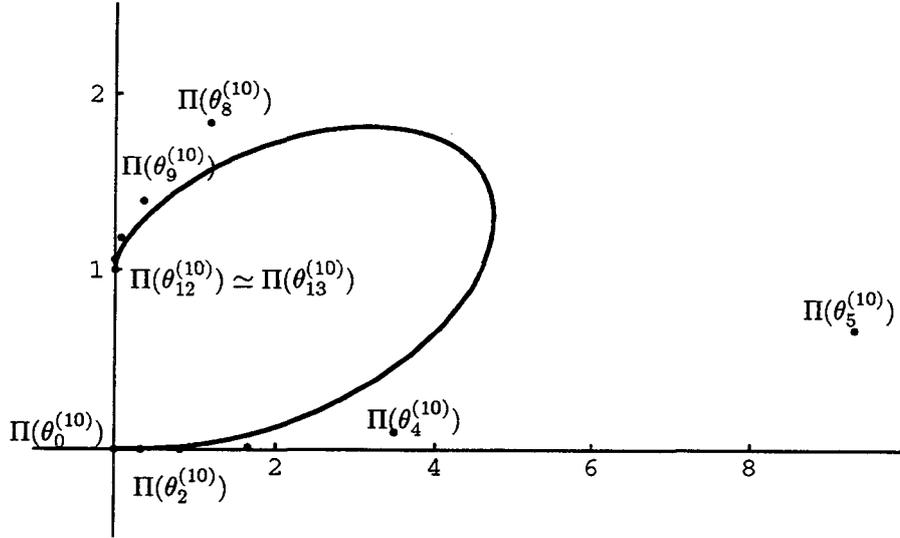


Figure 5.9: La courbe  $BR[\theta^{(10)}]$  et les  $\Pi$ -projections de ses points de contrôle.

- Si  $m > -\frac{4}{5}b$ , on pose  $\mu = m$ . Les masses de  $\theta$  majorent celles de  $\omega$  qui vérifie  $A(\omega)$ . Donc, selon le *Lemme 9*,  $A(\theta)$  est vraie.
- Si  $M < -\frac{4}{5}b$ , on pose  $\mu = M$ . Les masses de  $\theta$  minorent celles de  $\omega$  qui invalide  $A(\omega)$ . Donc, selon le *Lemme 9*,  $A(\theta)$  est fausse.

□

**Exemple :** Considérons le polygone massique

$$\begin{aligned}\theta_0 &= ((0, 0); 1) \\ \theta_1 &= \left( (-4, 0); -\frac{1}{4} \right) \\ \theta_2 &= \left( (0, 0); -\frac{1}{5} \right) \\ \theta_3 &= ((0, 1); 1)\end{aligned}$$

dont les  $\Pi$ -projections et la courbe  $BR[\theta]$  sont représentées par la *Figure 5.8*.

Ces vecteurs massiques vérifient les conditions du *Corollaire 7*. En effet, avec les notations de ce corollaire, nous avons ici  $\frac{m_2}{m_1} = -\frac{1}{4}$  ce qui prouve que  $A(\theta)$  est vraie. Le nombre  $K$  d'itérations nécessaires pour que toutes les masses de  $\theta^{(K)}$  soient strictement positives est donc encadré par  $K_m = 8$  et  $K_M = 14$ .

Numériquement, on constate que les masses sont toutes positives à partir de  $K = 10$ . La *Figure 5.9* représente les  $\Pi$ -projections du polygone  $\theta^{(10)}$ . Les points  $\Pi(\theta_6^{(10)}) \simeq (50.4, 8)$  et  $\Pi(\theta_7^{(10)}) \simeq (29.58, 9.86)$  étant trop éloignés de la courbe, nous ne les avons pas représentés. Le point  $\Pi(\theta_{12}^{(10)}) \simeq (0, 1.06)$  se confond avec le point  $\Pi(\theta_{13}^{(10)}) = (0, 1)$ .

## Références Bibliographiques

[1] Fiorot, J.C. et Jeannin, P. (1986), Courbes Bézier rationnelles, *XIX<sup>eme</sup> Congrès d'Analyse Numérique*, Port-Barcarés, France, 26-30 Mai 1986.

[2] Fiorot, J.C. et Jeannin, P. (1987), Nouvelle description et calcul des courbes rationnelles à l'aide de points et vecteurs de contrôle, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 305, Sér. I, 435-440.

[3] Fiorot, J.C. et Jeannin, P. (1988), Surfaces rationnelles sur un carré contrôlées par des points pondérés et des vecteurs, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 306, Sér. I, 87-92.

[4] Fiorot, J.C. et Jeannin, P. (1989), *Courbes et Surfaces Rationnelles, Applications à la CAO*, RMA 12, Masson, Paris. English translation (1992) *Rational Curves, Applications to CAD*, Wiley, Chichester, UK.

[5] Farouki, R.T. and Goodman, T.N.T. (1996), On the optimal stability of the Bernstein basis, *Mathematics of Computation* 65 (216), 1553-1566.

[6] Fiorot, J.C., Jeannin, P. and Taleb, S. (1993), B-rational curves and reparameterization: the quadratic case, *RAIRO, Mathematical modeling and Numerical Analysis (M<sup>2</sup>AN)* 27, 289-311.

[7] Fiorot, J.C., Jeannin, P. and Taleb, S. (1994), New control polygon of a B-rational curve resulting from a homographic change of parameter, *Numerical Algorithms* 6, 379-418.

[8] Farouki, R.T. and Sakkalis, T. (1991), Real rational curves are not 'unit-speed', *Computer Aided Geometric Design* 8, 151-157.

[9] De Casteljaou, P. (1959), Outillage, méthode de calcul, Rapport technique, André Citroën Automobile S.A., Paris.

[10] De Casteljaou, P. (1963), Courbes et surfaces à pôles, Rapport technique, André Citroën Automobile S.A., Paris.

- [11] Bézier, P. (1966), Définition numérique des courbes et surfaces I, *Automatisme*, 11, 625-632.
- [12] Bézier, P. (1977), Essai de définition numérique des courbes et surfaces expérimentales, Thèse d'Etat, Université de Paris VI.
- [13] Farin, G.E. (1994), *NURB Curves and Surfaces, from Projective Geometry to Practical Use*, AK Peters, Wellesley, MA.
- [14] Piegl, L. (1986), The sphere as a rational Bézier surface, *Computer Aided Geometric Design* 3 (1), 45-52.
- [15] Farin, G.E. (1993), *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. A Practical Guide*, 3rd ed., Academic Press, San Diego, CA.
- [16] Piegl, L. and Tiller, W. (1989), A menagerie of rational B-splines circles, *IEEE Computer Graphics Applications* 9 (5), 48-56.
- [17] Cattiaux-Huillard, I. et Fiorot, J.C. (1995), Paramétrage du cercle comme courbe (BR) à forte régularité, exposé lors du Colloque Approximations Hilbertiennes, Splines, Ondelettes et Fractales, CIRM, Luminy 2-6 Avril 1995.
- [18] Cattiaux-Huillard, I. et Fiorot, J.C. (1996), The circle as a smoothly joined BR-curve on  $[0,1]$ , exposé lors des Conférences on Curves and Surfaces, Chamonix Mont Blanc, 27 Juin-3 Juillet 1996.
- [19] Cattiaux-Huillard, I. et Fiorot, J.C. (1997), Paramétrisation quasi-uniforme du cercle entier comme courbe (BR) image de  $[0,1]$ , exposé lors du 29<sup>eme</sup> Congrès National d'Analyse Numérique, Domaine d'Imbours, Larnas 26-30 Avril 1997.
- [20] Fiorot, J.C., Jeannin, P. and Cattiaux-Huillard, I. (1997), The circle as a smoothly joined BR-curve on  $[0,1]$ , *Computer Aided Geometric Design* 14, 313-323.
- [21] Chou, J.J. (1995), Higher order Bézier circles, *Computer-Aided Design* 27, 303-309.
- [22] Blanc, C. and Schlick C. (1996), Accurate parameterization of conics by NURBS, *IEEE Computer Graphics Applications* 6 (16), 64-71.
- [23] Farouki, R.T. (1997), Optimal parameterization, *Computer Aided Geometric Design* 14, 153-168.

- [24] Cattiaux-Huillard, I. et Fiorot, J.C. (1996), Uniform points distribution on the circle, exposé lors des Conférences on Curves and Surfaces, Chamonix Mont Blanc, 27 Juin-3 Juillet 1996.
- [25] Fiorot, J.C. and Cattiaux-Huillard, I. (1997), Uniform Point-distribution on a circle, in *Curves and Surfaces with Applications in CAGD*, A. Le Méhauté, C. Rabut, and L. L. Schumaker (eds.), Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 103-110.
- [26] Kelley, J.E. (1960), The cutting plane method for solving convex programs, *SIAM Journal of Numerical Analysis* 8 (1960), 703-719.
- [27] Pólya, G. and Szegő, G. (1976), *Problems and Theorems in Analysis, Volume II*, Springer-Verlag, New York.
- [28] Karlin, S., and Studden, W.J. (1966), *Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics*, Interscience Publishers, New York.
- [29] Micchelli, C.A., and Pinkus, A. (1989), Some Remarks on Nonnegative Polynomials on Polyhedra, *Probability, Statistics and Mathematics, Paper in Honor of Samuel Karlin*, Academic Press, 163-186.
- [30] Cattiaux-Huillard, I. et Fiorot, J.C. (1997), Détermination d'un polygone massique à masses toutes positives pour le contrôle des courbes rationnelles (BR), exposé lors du Colloque Modélisation et Approximations des Courbes et Surfaces, CIRM, Luminy 1-4 Avril 1997.
- [31] Schmidt, J.W. and Heß, W. (1988), Positivity of cubic polynomials on intervals and positive spline interpolation, *BIT* 28, 340-352.
- [32] Fiorot, J.C. et Jeannin, P. (1996), A blossoming approach to accuracy of the degree elevation process, *Numerical Algorithms* 13, 265-306.

## Lexique:

$\mathcal{E}$  : espace affine réel.

$\vec{\mathcal{E}}$  : espace vectoriel associé à  $\mathcal{E}$ .

$\tilde{\mathcal{E}}$  : complété projectif  $\mathcal{E}$ .

$\mathcal{F}$  : espace affine dont  $\mathcal{E}$  est un hyperplan.

$\vec{\mathcal{F}}$  : espace vectoriel associé à  $\mathcal{F}$ .

$\Omega$  : un point de  $\mathcal{F}$  n'appartenant pas à  $\mathcal{E}$ .

$\hat{\mathcal{E}}$  : espace des vecteurs massiques de  $\mathcal{E}$ .

$\hat{\Omega}$  : isomorphisme de  $(\hat{\mathcal{E}}, \oplus, *)$  dans  $(\vec{\mathcal{F}}, +, \cdot)$ .

$\Pi\Omega$  : projection conique de sommet  $\Omega$ , de  $\mathcal{F} - \{\Omega\}$  dans  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

$\Pi$  : projection naturelle de  $\hat{\mathcal{E}} - \{\vec{0}\}$  dans  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

$\chi(\theta)$  : masse de  $\theta$ .

$B_i^n$  :  $i^{\text{eme}}$  polynôme de Bernstein de degré  $n$  à une variable.

$BR[\theta]$  : Courbe B-rationnelle de polygone de contrôle  $\theta$ .

$\omega^{(k)}$  : le polygone de contrôle obtenu après  $k$  élévations de longueur du polygone  $\omega$ .

Bibliothèque Universitaire de Valenciennes



00904849