



HAL
open science

Quelques aspects analytiques des zéros des fonctions L

Kamel Mazhouda

► **To cite this version:**

Kamel Mazhouda. Quelques aspects analytiques des zéros des fonctions L. Mathématiques [math].
Université Polytechnique Hauts-de-France, 2020. tel-03977341

HAL Id: tel-03977341

<https://uphf.hal.science/tel-03977341v1>

Submitted on 7 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0
International License

MÉMOIRE
présenté pour obtenir
L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
de
l'UNIVERSITE POLYTECHNIQUE HAUTS-DE-FRANCE
spécialité « Mathématiques »

Présentée par **Kamel MAZHOUDA.**

Intitulé

Quelques aspects analytiques des zéros des fonctions L

Soutenue le 26/10/2020 devant les membres du jury :

Mr. Abdelmejid BAYAD	Maître de conférences-HDR à l'université Paris-Saclay
Mr. Jean-Marc DESHOUILLERS	Professeur à l'université de Bordeaux-INP (Président)
Mr. Driss ESSOUABRI	Professeur à l'université de Saint-Etienne (Rapporteur)
Mr. Aziz EL KACIMI	Professeur à l'université polytechnique Hauts-de-France-LMI
Mr. Joseph OESTERLE	Professeur à Sorbonne université-IMJ-PRG (Rapporteur)
Mr. Bouchaïb SODAÏGUI	Professeur à l'université polytechnique Hauts-de-France-LMI

Après avis favorables émis par les rapporteurs :

Mr. Abdelmejid BAYAD	Maître de conférences-HDR à l'université Paris-Saclay
Mr. Jean-Marc DESHOUILLERS	Professeur à l'université de Bordeaux-INP
Mr. Driss ESSOUABRI	Professeur à l'université de Saint-Etienne

À la mémoire de mes parents Dhaoui et Selma.
À ma femme Houda.
À mes enfants Zouhaïr, Youssef, Zeineb et Nour.

Remerciements

En premier lieu je tiens à remercier le Professeur Bouchaïb SODAÏGUI et à lui exprimer toute ma gratitude pour m'avoir accompagné, conseillé et soutenu (c'est rien de le dire!) dans ce parcours de préparation de l'habilitation.

J'exprime toute ma reconnaissance aux Professeurs Abdelmejid BAYAD, Jean-Marc DESHOUILLERS et Driss ESSOUABRI pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon mémoire de HDR et pour m'avoir fait l'honneur de juger mon travail. Je remercie également tous les autres membres du jury : Professeurs Aziz EL KACIMI et Joseph OESTERLE d'avoir accepté d'être membres du jury.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été souvent réalisés en collaboration avec d'autres collègues. Les résultats obtenus n'auraient pas été possibles sans eux et je souhaite remercier en particulier : Lejla Smajlovic, Jie Wu, Joern Steuding et Sami Omar.

Et enfin, je remercie ma femme Houda, celle qui m'apporte de la joie, du bonheur, et un soutien indéfectible.

Introduction

Le domaine de recherche de ce mémoire d'habilitation est la théorie analytique des nombres. Notre objectif est l'étude théorique et numérique des zéros non-triviaux des fonctions L sur la ligne critique $\text{Re}(s) = 1/2$, où s est un nombre complexe.

Une fonction L en théorie des nombres est souvent définie par une série de Dirichlet, ou un produit Eulérien sur les nombres premiers, et satisfait certaines propriétés analytiques. L'exemple typique de fonctions L est la fonction zêta de Riemann définie par la série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \text{Re}(s) > 1,$$

où p parcourt l'ensemble des nombres premiers. La fonction zêta joue un rôle important en recherche mathématique. Elle constitue un premier lien entre l'arithmétique et l'analyse. Elle a été utilisée par Euler, Dirichlet, Tchebychev et Riemann pour étudier la distribution des nombres premiers. L'étude de la fonction zêta complexe de Riemann montre qu'elle passe par la valeur zéro. Il existe :

- des zéros triviaux comme -2, -4, -6... etc ;
- des zéros particuliers qui semblent s'aligner sur la droite des réels $\text{Re}(s) = 1/2$.

L'hypothèse ou la conjecture de Riemann consiste à affirmer que tous les zéros non-triviaux sont sur cette droite $\text{Re}(s) = 1/2$. Cette conjecture relativement simple, émise en 1859, résiste aux plus chevronnés des mathématiciens. Parmi beaucoup d'entre eux croient que l'hypothèse de Riemann et sa généralisation est probablement le problème le plus important dans les mathématiques. Cette hypothèse a été classée 8-ième dans la fameuse liste de 23 problèmes de Hilbert¹. Elle a été vérifiée numériquement pour les 10^{22} premiers zéros. Elle ne concerne pas seulement la fonction zêta, mais aussi toute une grande classe de fonctions, notamment les séries L de Dirichlet. En fait, dans le but d'isoler les conditions qui entraînent un tel alignement des zéros, Selberg [122] introduit en 1989 une classe de fonctions portant son nom. On pense alors qu'une fonction ayant les propriétés de la fonction zêta de Riemann doit satisfaire un analogue de l'hypothèse de Riemann.

L'un des charmes particuliers de l'étude de l'hypothèse de Riemann est la grande diversité de ses formulations équivalentes ; la plus simple est celle de Lagarias [55] : *pour tout entier $n \geq 1$, la somme des diviseurs de n est inférieure à*

$$H_n + e^{H_n} \log H_n,$$

où $H_n = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j}\right)$ est le n -ième nombre harmonique. C'est une reformulation élégante de celle de Robin [109].

En 1997, Li [61] a montré que l'hypothèse de Riemann est vraie si, et seulement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n > 0$, où

$$\lambda_n = \sum_{\rho} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^n\right]$$

1.

*If I were to awaken after having slept for a thousand years,
my first question would be : has the Riemann hypothesis been proven ?*
Attributed to David Hilbert ([6, p. 5])

et la somme est prise sur les zéros non-triviaux de la fonction zêta de Riemann. Bombieri et Lagarias [5] ont généralisé ce résultat en donnant une interprétation arithmétique des nombres λ_n via les formules explicites de Weil. Ils ont obtenu ainsi un théorème remarquable sur la localisation des zéros. Li [62] et Lagarias [56] ont étendu la formule arithmétique de λ_n aux fonctions L de Dirichlet et les fonctions L des courbes elliptiques ainsi qu'aux fonctions L de formes automorphes.

La distribution des zéros de la fonction zêta de Riemann ainsi que d'autres fonctions L est liée à des questions importantes dans la théorie des nombres. D'un intérêt particulier est l'hypothèse de Riemann. De plus, il existe un lien intime entre la distribution des zéros non-triviaux d'une fonction L et la répartition des nombres premiers. Beaucoup de théoriciens des nombres s'intéressent à la répartition horizontale des zéros. Il y a également un grand intérêt dans l'étude de la distribution de leurs parties imaginaires (la distribution verticale) ; ce problème a été étudié par Lang [57] et Tsfasman et Vlăduț [135] dans le cas des fonctions zêta de corps des nombres et de corps de fonctions.

De plus, les formes modulaires demeurent un sujet fascinant en théorie analytique des nombres. À partir de ces formes on construit un type très intéressant de fonctions : ce sont les fonctions L de puissances symétriques. Il est donc naturel de poser des questions sur leurs propriétés analytiques. Dans ce contexte, le problème de l'expression explicite de leurs coefficients et le changement de signe de ces derniers est posé.

Description des résultats

Dans la liste des travaux proposés on étudie **quelques approches de l'hypothèse de Riemann** pour les fonctions L de la classe de Selberg, les fonctions L -automorphes et les fonctions zêta associées au corps de fonctions. De plus, on étudie **la distribution des zéros non-triviaux** des fonctions L sur la ligne critique $\text{Re}(s) = 1/2$, ainsi que **l'équirépartition et le signe des coefficients** de Fourier des fonctions L de puissances symétriques. Des **sommes sur les a -points** de la fonction ζ (i. e., les racines de l'équation $\zeta(s) - a = 0$, où a est un nombre complexe) et la fonction L de Dirichlet ainsi que sa dérivée k -ième seront aussi étudiées. *Les publications choisies, se trouvant dans des journaux variés, illustrent les différents aspects de ma recherche.*

Ce mémoire d'habilitation est constitué de six parties (voir Table des matières).

Liste des travaux

Thèse doctorat :

Arithmétique de la classe de Selberg, **Faculté des sciences de Tunis (2011)**, 1-107.

Publications :

Parues dans des revues internationales à comité de lecture :

- (1) Mazhouda Kamel, Onozuka Tomokazu, *On some sums at the a -points of derivatives of the Riemann zeta-function*, à paraître dans AGNT Analysis, Geometry and Number Theory **(2020)**.
- (2) Mazhouda Kamel, Smajlovic Lejla, *Evaluation of the Li coefficients on function fields and applications*, Eur. J. Math. 5 (2) **(2019)**, 540-550.
- (3) Mazhouda Kamel, *On the τ -Li coefficients for automorphic L -functions*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, volume 4 (6) **(2017)**, 1987-2011.
- (4) Mazhouda Kamel, Mbarki Khadija, Wu Jie, *Le premier coefficient négatif des fonctions L de puissances symétriques*, Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici 56, 2 **(2017)**, 239-258.
- (5) Mazhouda Kamel, Smajlovic Lejla, *On relations equivalent to the generalized Riemann hypothesis for the Selberg class*, Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici 56, 1 **(2017)**, 67-93.
- (6) Jakhlouti Med-Taïb, Mazhouda Kamel, *Distribution of the values of the derivative of the Dirichlet L -function on its a -points*, Bull. Korean Math. Soc. **(2017)** , Vol. 54, No. 4, 1141-1158.
- (7) Jakhlouti Med-Taïb, Mazhouda Kamel, Joern Steuding, *On the Distribution of the a -points of a Selberg class L -function*, Archiv Der Mathematik, 104 (5) **(2015)**, 419-429.
- (8) Jakhlouti Med-Taïb, Mazhouda Kamel, *Distribution of the values of the derivative of the Riemann zeta function on its a -points*, Uniform Distribution Theory, 9 no. 1, **(2014)**, 115-125.
- (9) Mazhouda Kamel, Omar Sami, *The Euler ϕ -function associated to automorphic L -functions*, Analysis (Berlin) 34 **(2014)**, no. 1, 67–80.
- (10) Mazhouda Kamel, Omar Sami, Ouni Raouf, *On the Li coefficients for the Hecke L -functions*, Math. Phys. Anal. Geom. 17 **(2014)**, no. 1-2, 67-81.
- (11) Mazhouda Kamel, *On the Li coefficients for the Dirichlet L -functions*, Monatsh. Math. 170 **(2013)**, no. 3-4, 405-423.
- (12) Mazhouda Kamel, Omar Sami, *The Cardon and Robert criterion for the Riemann hypothesis*, Analysis (Berlin) 33 **(2013)**, no. 4, 309-318.
- (13) Mazhouda Kamel, Omar Sami, *Distribution of zeros of L -functions on the critical line*, Unif. Distrib. Theory 8 **(2013)**, no. 2, 39–47.
- (14) Mazhouda Kamel, *Regularized product for the zeros of L -functions in the Selberg class*, J. Ramanujan Math. Soc. 27 **(2012)**, no. 4, 397-410.
- (15) Mazhouda Kamel, *The saddle-point method and the Li coefficients*, Canad. Math. Bull. 54 **(2011)**, no. 2, 316–329.

- (16) Omar Sami, Mazhouda Kamel, *The Li criterion and the Riemann hypothesis for the Selberg class. II*, J. Number Theory 130 (2010), no. 4, 1098-1108.
- (17) Mazhouda, Kamel, *New asymptotic formulas for sums over zeros of functions from the Selberg class*, Ann. Sci. Math. Québec 34 (1) (2010), 85–108.
 "Correction to : New asymptotic formulas for sums over zeros of functions from the Selberg class, Ann. Sci. Math. Québec 34 (2010), no 1, 85–108". Ann. Sci. Math. 44 (1) (2020), 197-200.
- (18) Mazhouda Kamel, Omar Sami,, *Équirépartition des coefficients de Fourier des fonctions L de carrés et de cubes symétriques*, Ramanujan J. 20 (2009), no. 1, 81-89.
- (19) Mazhouda Kamel, Omar Sami,, *Le critère de Li et l'hypothèse de Riemann pour la classe de Selberg*, Journal of Number Theory 12 (1) (2007), 50–58.
Corrigendum et addendum à "Le critère de Li et l'hypothèse de Riemann pour la classe de Selberg " [J. Number Theory 125 (1) (2007) 50-58], Journal of Number Theory 130 (4) (2010), 1108–1114.
- (20) Mazhouda Kamel, Omar Sami,, *Le critère de positivité de Li pour la classe de Selberg*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série 345, issue 5, 1 septembre (2007), 245–248.

Conférences à comité de lecture international.

Mazhouda Kamel, Omar Sami, *Mean-square of L-functions in the Selberg class*, New directions in value-distribution theory of zeta and L-functions, 249-263, Ber. Math., Shaker Verlag, Aachen, (2009).

Articles soumis et prépublications :

- (1) Kamel Mazhouda, Kajtaz H. Bllaca, *Explicit formula on function fields and application : Li coefficients*, Soumis (2019).
- (2) Mohammed Mekkaoui, Abdallah Derbal, Kamel Mazhouda, *Note on the values distribution of the derivative of the Dirichlet L-functions at its a-points*, Soumis (2019).
- (3) Mohammed Mekkaoui, Abdallah Derbal, Kamel Mazhouda, *On some sums at the a-points of the k-th derivatives of the Dirichlet L-functions*, Prépublication (2020).
- (4) Kamel Mazhouda, Bouchaïb Sodaïgui, *The Li-Sekatskii coefficients for the Selberg class, Part I*, Prépublication (2019).
- (5) Kamel Mazhouda, Bouchaïb Sodaïgui, *The Li-Sekatskii coefficients for the Selberg class, Part II*, Prépublication (2019).

Textes pédagogiques :

- (1) **2014** : polycopié d'exercices corrigés d'algèbre pour la section LFI1 (licence fondamentale d'informatique).
- (2) **2011** : cours de Mastère en collaboration avec le Professeur Fethi Ben Saïd (année universitaire 2010-2011) sur la théorie des fonctions L, en particulier, sur les fonctions L de la classe de Selberg.
- (3) **2009** : note de lecture sur le critère de Li et l'hypothèse de Riemann, disponible sur le site <http://lipn.univ-paris13.fr/banderier/Seminaires/Slides/mazhouda.pdf>.

TABLE DES MATIÈRES

Partie 1. Le critère de Li	8
1. Critère de Li et l'hypothèse de Riemann dans la classe de Selberg	8
2. Autres relations équivalentes à l'hypothèse de Riemann	13
2.1. Représentations de $\text{Re}(\lambda_F(n))$ équivalente à HRG	15
2.2. Une formule intégrale des coefficients de Li généralisés	16
2.3. La HRG et les constantes d'Euler-Stieltjes généralisées de deuxième espèce	17
2.4. Application aux fonctions L automorphes	19
3. Application du critère de Li	20
3.1. Première application	20
3.2. Deuxième application	21
4. Critère de Li dans le corps de fonctions et application	22
4.1. Fonction zêta associée à un corps de fonctions	22
4.2. Définition et formules arithmétiques des coefficients de Li dans le corps de fonctions	23
4.3. Formules asymptotiques et intégrales des coefficients de Li	24
4.4. Application	25
5. Cas de fonctions L de Hecke	27
6. Les τ -Li coefficients associés aux fonctions L automorphes	31
Partie 2. Le critère de Cardon et Robert	35
Partie 3. Le produit régularisé des zéros	37
Partie 4. Autres travaux	40
7. Moments de fonctions L	40
8. Coefficients de Fourier de fonctions L	41
8.1. Équirépartition des coefficients de Fourier de fonctions L	41
8.2. Le premier coefficient négatif des fonctions L de puissances symétriques	44
9. La fonction φ d'Euler associée aux fonctions L automorphes	45
10. Distribution des zéros des fonctions L sur la ligne critique	47
11. Distribution des valeurs des fonctions L sur ses a -points	48
11.1. Distribution des valeurs de $\zeta'(s)$ sur les a -points de $\zeta(s)$	48
11.2. Distribution des valeurs de $L'(s, \chi)$ sur les a -points de $L(s, \chi)$	51
11.3. Quelques sommes sur les a -points de la dérivée de la fonction zêta de Riemann	52
11.4. Distribution uniforme des a -points de fonctions L de la classe de Selberg	53
Partie 5. Travaux en cours	55
12. Formule explicite sur les corps de fonctions et application : les coefficients de Li	55
13. Remarque sur la distribution des valeurs de la dérivée des fonctions L de Dirichlet sur ses a -points	56
14. Sur certaines sommes aux a -points des dérivées k -ièmes des fonctions L de Dirichlet	57
15. Reformulation du critère de Li dans la classe de Selberg	58
Partie 6. Cours, articles de présentation et co-encadrement	60
16. Introduction à la classe de Selberg	60
17. Critère de Li et l'hypothèse de Riemann	60
18. Co-encadrement	60

Partie 1. Le critère de Li

1. CRITÈRE DE LI ET L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN DANS LA CLASSE DE SELBERG

En 1997, Xian-Jin Li a découvert un nouveau critère de positivité pour l'hypothèse de Riemann. Dans [61], il a prouvé que l'hypothèse de Riemann est équivalente à la positivité des coefficients

$$\lambda_n = \sum_{\rho} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right],$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où la somme est prise sur tous les zéros non-triviaux ρ de la fonction zêta de Riemann. Plus tard, Bombieri et Lagarias [5] ont observé que le critère de Li peut être généralisé à un multi ensemble de nombres complexes satisfaisant certaines conditions, et ont donné une formule arithmétique des coefficients λ_n . Ils ont également prouvé que d'un seul côté, la croissance trempée des coefficients de Li est suffisante pour que l'hypothèse de Riemann soit vraie [5, Corollaire 1 (c)]. Voros [137] a montré que l'hypothèse de Riemann vraie est équivalente à la croissance de λ_n (comme $\frac{1}{2}n \log n$), déterminée par sa partie archimédienne ; tandis que l'hypothèse de Riemann fautive correspond au terme oscillatoire de λ_n avec une amplitude qui croît de façon exponentielle, laquelle est déterminée par sa partie finie (pour plus de détails, voir [137, Section 3.3]). Lagarias [56] a défini les coefficients de Li généralisés $\lambda_n(\pi)$, attachés à une représentation cuspidale irréductible unitaire automorphe π de $GL_m(\mathbb{Q})$, et a prouvé que l'hypothèse de Riemann généralisée pour les fonctions L automorphes correspondantes est équivalente à la positivité de $Re(\lambda_n(\pi))$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Lagarias a obtenu l'expression arithmétique de $\lambda_n(\pi)$ et a déterminé le comportement asymptotique de la partie archimédienne et de celle finie de $\lambda_n(\pi)$. Dans [62], les coefficients de Li ont également été généralisés aux fonctions L définies par les opérateurs de Hecke pour le sous groupe de congruence $\Gamma_0(N)$. Brown [7] a déterminé les régions sans zéros des fonctions L de Dirichlet et d'Artin (sous l'hypothèse d'Artin) en termes de taille de certains coefficients correspondant de Li généralisés. La classe de Selberg est une classe axiomatique des fonctions, contenant conjecturalement toutes les fonctions L ayant un produit eulérien. L'hypothèse de Riemann généralisée prédit que toutes ces fonctions L ont des zéros sur la ligne critique $Re(s) = 1/2$. Par conséquent, le problème de la formulation du critère à la Li équivalent à l'hypothèse de Riemann généralisée se pose naturellement dans le cadre de la classe Selberg.

On commence par donner la définition d'une large classe de séries de Dirichlet introduite par Selberg en 1989 (pour plus de détails sur la classe de Selberg, on se réfère aux papiers [46, 48, 106, 122]). Une fonction F d'une variable complexe $s = \sigma + it$ appartient à la classe de Selberg \mathcal{S} si elle satisfait les conditions suivantes :

i) **Série de Dirichlet.** Pour $\sigma > 1$, $F(s)$ est une série de Dirichlet convergente

$$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

où $a_1 = 1$. On notera aussi $a(n) = a_n$.

ii) **Prolongement analytique.** Il existe un entier naturel m tel que $(s-1)^m F(s)$ est une fonction entière d'ordre fini. On notera m_F le plus petit entier naturel m satisfaisant cette propriété.

iii) **Équation fonctionnelle.** La fonction F satisfait une équation fonctionnelle de la forme :

$$\phi(s) = \omega \bar{\phi}(1-s),$$

où

$$\phi(s) = \gamma_F(s)F(s), \quad \bar{\phi}(s) = \overline{\phi(\bar{s})},$$

avec $\gamma_F(s) = Q^s \prod_{j=1}^r \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$, $Q > 0$, $\lambda_j > 0$, $Re(\mu_j) \geq 0$ et $|\omega| = 1$. On dit que γ_F est un γ -facteur (ou un facteur admissible) de $F(s)$. On note $d = 2 \sum_{j=1}^r \lambda_j$, que l'on appelle degré de F .

iv) **Hypothèse de Ramanujan.**

$$\forall \epsilon > 0, \quad a(n) = O(n^\epsilon).$$

v) **Produit Eulérien.** Pour σ assez grand,

$$\log F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)}{n^s}$$

où $b(n) = 0$ si n n'est pas une puissance d'un nombre premier et $b(n) \ll n^\theta$ pour un certain $\theta < \frac{1}{2}$. On note aussi $b(n) = b_n$.

Pour tout $F \in \mathcal{S}$, comme pour la fonction ζ , on conjecture que les zéros non-triviaux (ceux qui ne proviennent pas d'un facteur admissible) de F sont sur la droite $Re(s) = \frac{1}{2}$. On l'appelle "*Hypothèse de Riemann Généralisée*", et on note (HRG) cette conjecture. Elle possède de nombreuses conséquences en arithmétique et permet en particulier d'affiner les estimations des valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques.

Rappelons qu'en 1997, Li [61] a montré que l'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si $\lambda_n = \sum \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right] > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où la somme est prise sur les zéros non-triviaux de la fonction zêta de Riemann.

Pour tout entier n , on considère

$$\lambda_F(n) = \sum_{\rho} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right],$$

où la somme est prise sur tous les zéros non-triviaux (ceux qui sont dans la bande $0 < Re(s) < 1$) de $F(s)$. Dans [76, Mazhouda-Omar, J. Number Theory (2007)], [77, Mazhouda-Omar, J. Number Theory (2010)], [78, Mazhouda-Omar, C.R. Acad. Sci. Paris (2007)], on étend ce critère à la classe de Selberg.

Théorème 1. [76, Mazhouda-Omar, J. Number Theory (2007)] *Soit F une fonction de la classe de Selberg non nulle en $s = 1$. Alors, tous les zéros non-triviaux de F sont situés sur la ligne $Re(s) = 1/2$, si et seulement si $Re(\lambda_F(n)) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Grâce aux formules explicites de Weil (voir [3]) écrites dans le contexte de la classe de Selberg, on établit une formule arithmétique des coefficients de Li généralisés $\lambda_F(n)$. Cette formule est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 2. [76, Mazhouda-Omar, J. Number Theory (2007)] *Soit F une fonction de la classe de Selberg \mathcal{S} vérifiant l'hypothèse suivante \mathcal{H} : il existe une constante $c > 0$ telle que F n'admet pas des zéros dans la région :*

$$\left\{ s = \sigma + it; \quad t \geq t_0 > 0; \quad \sigma \geq 1 - \frac{c}{\log(Q_F + 1 + |t|)} \right\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lambda_F(-n) &= m_F + n(\log Q_F - \frac{d_F}{2}\gamma) \\
&- \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!} \lim_{X \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{k \leq X} \frac{\Lambda(k)}{k} b_F(k) (\log k)^{l-1} - \frac{m_F}{l} (\log X)^l \right\} \\
&+ n \sum_{j=1}^r \lambda_j \left(-\frac{1}{\lambda_j + \mu_j} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\lambda_j + \mu_j}{l(l + \lambda_j + \mu_j)} \right) \\
&+ \sum_{j=1}^r \sum_{l=2}^n \binom{n}{l} (-\lambda_j)^l \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{m + \lambda_j + \mu_j} \right)^l.
\end{aligned}$$

Ce théorème est de nouveau obtenu dans [78, Mazhouda-Omar, C.R. Acad. Sci. Paris (2007)] en utilisant un résultat d'Ivic [35] et en développant au voisinage de 0 la fonction $\frac{d}{dz} \log \xi_F(\frac{1}{1-z})$, où

$$\xi_F(s) = s^{m_F} (s-1)^{m_F} \phi_F(s)$$

est la fonction complétée de $F(s)$.

Dans [82, Mazhouda-Omar, J. Number Theory (2010)], [73, Mazhouda, Canad. Math. Bull (2011)], une formule asymptotique des coefficients $\lambda_F(n)$ est établie par deux méthodes différentes, toutes deux aboutissent au même terme principal. La première est inspirée de celle de Lagarias [56] et la deuxième utilise la méthode du col en combinaison avec la théorie des intégrales de Nörlund-Rice. Ces deux dernières utilisent la formule arithmétique des coefficients $\lambda_F(n)$ et donnent un terme d'erreur plus optimal $O(\sqrt{n} \log n)$.

Théorème 3. [82, Mazhouda-Omar, J. Number Theory (2010)], [73, Mazhouda, Canad. Math. Bull (2011)] *Soit $F \in \mathcal{S}$. Alors*

$$HRG \Leftrightarrow \text{Pour tout } n, \lambda_F(n) = \frac{d_F}{2} n \log n + c_F n + O(\sqrt{n} \log n),$$

où

$$c_F = \frac{d_F}{2} (\gamma - 1) + \frac{1}{2} \log(\lambda Q_F^2), \quad \lambda = \prod_{j=1}^r \lambda_j^{2\lambda_j}$$

et γ est la constante d'Euler.

Dans ce théorème on retrouve la formule asymptotique établie par Voros [137] dans le cas de la fonction zêta de Riemann et celle établie par Lagarias [56] dans le cas des fonctions L attachées à une représentation cuspidale automorphe unitaire.

Le calcul numérique des 100 premiers coefficients de Li λ_n a été fait par Coffey [11]) et aussi par Maslanka [65] qui calcule et vérifie la positivité d'environ 3300 coefficients de Li λ_n . L'observation empirique principale faite par Maslanka est que ces coefficients peuvent être séparés en deux parties, où l'un d'eux se développe en douceur tandis que l'autre est très petit et oscillatoire. Cette petitesse apparente est tout à fait inattendue. Si elle a persisté jusqu'à l'infini alors l'hypothèse de Riemann serait vraie. Comme nous l'avons dit ci-dessus, ce critère a été étendu à une large classe de séries de Dirichlet. Cependant, aucun calcul ou des vérifications du critère de positivité à ce jour dans la littérature n'ont été faits pour les autres fonctions L . Dans la section 5 ci-dessous, on étudie un exemple de fonctions L de la classe de Selberg, la fonction L de Hecke, où on établit théoriquement et numériquement des résultats concernant les coefficients de Li associés.

Dans [71, Mazhouda, Monatshefte fur Mathematik (2013)], on utilise les polynômes de Bell dans le but de prouver que les premiers coefficients de Li dans le cas de fonctions L de Dirichlet sont croissants et que la dernière hypothèse est valable pour les premières valeurs. Ensuite, une interprétation probabiliste des coefficients λ_χ est donnée. Enfin, on propose une autre méthode de calcul des coefficients de Li, $\lambda_\chi(n)$ en calculant au début les coefficients de Stieltjes généralisés. Détaillons la méthode. Soit χ un caractère mod q . On réarrange les termes dans la série $L(s, \chi)$ suivant les classes de résidus mod q . En écrivant $n = kq + r$, $1 \leq r \leq q$ $k = 0, 1, 2, \dots$, on obtient

$$L(s, \chi) = \frac{1}{q^s} \sum_{r=1}^q \chi(r) \zeta(s, r/q).$$

Rappelons que

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^s} = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n(a)}{n!} (s-1)^n,$$

où

$$\gamma_n(a) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{\log^n(k+a)}{k+a} - \frac{\log^{n+1}(m+a)}{n+1} \right).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \frac{1}{q^s} \sum_{r=1}^q \chi(r) \left[\frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n(r/q)}{n!} (s-1)^n \right] \\ &= \frac{1}{q^s} \frac{\sum_{r=1}^q \chi(r)}{s-1} + \frac{1}{q^s} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{r=1}^q \chi(r) \gamma_n(r/q) \right) (s-1)^n. \end{aligned}$$

Soit χ_0 le caractère principal. On a

$$\sum_{r=1}^q \chi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \neq \chi_0 \\ \varphi(q) & \text{si } \chi = \chi_0. \end{cases}$$

Pour $\chi \neq \chi_0$, on en déduit que

$$L(s, \chi) = \frac{1}{q^s} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \nu_n (s-1)^n,$$

où

$$\nu_n = \sum_{r=1}^q \chi(r) \gamma_n(r/q).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \log L(s+1, \chi) &= -\log(q^{s+1}) + \log \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \nu_n s^n \right] \\ &= -(s+1) \log q + \log \left[\nu_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \nu_n s^n \right] \\ &= -(s+1) \log q + \log \nu_0 + \log \left[1 + \frac{1}{\nu_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \nu_n s^n \right] \\ &= -(s+1) \log q + \log \nu_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{s}{\nu_0} \right)^k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n s^n \right)^k. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$-\frac{L'}{L}(s+1, \chi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_n s^n.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_n \frac{s^{n+1}}{n+1} &= -\log L(s+1, \chi) \\ (1) \qquad \qquad \qquad &= -(s+1) \log q + \log \nu_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{s}{\nu_0}\right)^k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n s^n\right)^k. \end{aligned}$$

Définissons les coefficients $C_n^{(k)}$ comme suit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C_n^{(k)} s^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n s^n\right)^k.$$

Les coefficients $C_n^{(k)}$ peuvent être exprimés par la relation de récurrence suivante

$$C_m^{(k)} = \frac{1}{m\nu_0} \sum_{i=0}^{m-1} [km - (k+1)i] \nu_{m-i} C_i^{(k)}, \quad \forall m \geq 1.$$

On en déduit que

$$(2) \qquad \qquad \eta_n = (n+1) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\nu_0^k} C_{n-k}^{(k+1)}.$$

En utilisant l'expression

$$\lambda_\chi(n) = \overline{\lambda}_\chi(n) + \widetilde{\lambda}_\chi(n),$$

où

$$\overline{\lambda}_\chi(n) = \frac{n}{2} \left(\log \frac{q}{\pi} - \gamma\right) + \tau_\chi(n) = \frac{1}{2} n \log n + \left(\frac{1}{2}(\gamma - 1) + \frac{1}{2} \log(q/\pi)\right) n,$$

et

$$\widetilde{\lambda}_\chi(n) = -\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \eta_{j-1} = -\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(k)}{k} \chi(k) (\log k)^{j-1}.$$

Grâce à l'équation (2), on obtient

$$\widetilde{\lambda}_\chi(n) = -\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (j) \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\nu_0^k} C_{j-1-k}^{(k+1)}.$$

Alors

$$\lambda_\chi(n) = \frac{1}{2} n \log n + \left(\frac{1}{2}(\gamma - 1) + \frac{1}{2} \log(q/\pi)\right) n - \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (j) \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\nu_0^k} C_{j-1-k}^{(k+1)}.$$

En utilisant la formule précédente de $\lambda_\chi(n)$, on peut calculer les premiers coefficients de Li.

2. AUTRES RELATIONS ÉQUIVALENTES À L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN

Il existe de nombreuses relations équivalentes à l'hypothèse de Riemann. Parmi elles celles prouvées par M. Balazard, E. Saias et M. Yor [2]. Cette relation (ou critère intégral) indique que l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |\zeta(1/2 + it)|}{1 + 4t^2} dt = 0,$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.

Un autre critère intégral est obtenu par V. Volchkov dans [136] et déclare que l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'équation

$$(3) \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{1 - 12t^2}{(1 + 4t^2)^3} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \log |\zeta(\sigma + it)| d\sigma \right) dt = \pi \frac{3 - \gamma}{32}.$$

Les deux résultats sont généralisés par S. K. Sekatskii, S. Beltraminelli et D. Merlini dans [120] et [121].

En fait, un calcul élémentaire, basé sur l'application du théorème de Littlewood à la fonction $\log \zeta(s)$ sur un contour rectangulaire approprié montre que l'équation (3) est équivalente à l'équation

$$(4) \quad \int_0^{\infty} \frac{t \arg \zeta(1/2 + it)}{(1/4 + t^2)^2} dt = \pi \frac{\gamma - 3}{2}.$$

Par conséquent, on appelle l'équation (4), le critère de Volchkov pour l'hypothèse de Riemann.

Le critère de Volchkov et les résultats de [121] sont encore généralisés dans [43], où l'équation (4) a été interprétée en termes d'argument de l'amplitude de Veneziano.

Dans [89, Mazhouda-Smajlović, Functiones et Approximatio (2017)], on montre que l'hypothèse de Riemann généralisée (HRG) pour la fonction $F \in \mathcal{S}_0^{\sharp\sharp}$ est équivalente à la représentation intégrale

$$(5) \quad \operatorname{Re}(\lambda_F(n)) = 16n \int_0^{\infty} N_F(x) \frac{x}{(4x^2 + 1)^2} U_{n-1} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right) dx - (1 - (-1)^n) N_F(0)$$

de la partie réelle du n ième coefficient généralisé de Li $\lambda_F(n)$, pour tous les entiers positifs n . Ici, $N_F(x)$ dénote la fonction de comptage du nombre de zéros non triviaux ρ dans $Z(F)$ tels que $|\operatorname{Im}(\rho)| \leq x$ et $U_{n-1}(x)$ est le polynôme de Tchebychev du second type. Evidemment, $N_F(0)$ est le nombre de zéros de Siegel de F , c'est-à-dire des zéros réels non-triviaux de F . On montre aussi que la HRG pour $F \in \mathcal{S}_0^{\sharp\sharp}$ est équivalente à la représentation

$$(6) \quad \operatorname{Re}(\lambda_F(n)) = \sum_{\rho=\sigma+i\gamma \in Z(F)} \left(1 - T_n \left(\frac{4\gamma^2 - 1}{4\gamma^2 + 1} \right) \right)$$

de $\operatorname{Re}(\lambda_F(n))$, pour tous les entiers positifs n , où $T_n(x)$ est le polynôme de Tchebychev de première espèce et les zéros du côté droit de (6) sont pris en fonction de leurs multiplicités.

Ensuite, on évalue partiellement l'intégrale dans (5) et on écrit $\operatorname{Re}(\lambda_F(n))$ comme une somme de partie intégrale et oscillatoire, qu'on relie aux constantes généralisées d'Euler-Stieltjes de deuxième espèce associé à la fonction $F \in \mathcal{S}_0^{\sharp\sharp}$. De plus, on montre que la HRG pour $F \in \mathcal{S}_0^{\sharp\sharp}$ est équivalente à une certaine formule intégrale asymptotique (voir formule (16) ci-dessous).

Dans le cas où $n = 1$ ou $n = 2$, sous des hypothèses supplémentaires sur l'emplacement de la partie imaginaire du premier zéro non trivial de $F \in \mathcal{S}^{\sharp}$, qui se trouve hors de la ligne critique, on prouve que les équations (5) et (6) sont équivalentes à la HRG. L'évaluation de l'intégrale dans (5) quand $F = \zeta$ et $n = 1$ donne l'équation (4), ce qui signifie que le critère de Volchkov pour l'hypothèse de Riemann est un cas particulier de nos résultats.

De plus, on montre que la HRG pour $F \in \mathcal{S}_{1/\sqrt{3}}^{\sharp}$ est équivalente à une certaine expression intégrale de la partie réelle du terme constant dans l'expression de la série de Laurent (Taylor) de $F'(s)/F(s)$ à $s = 1$.

La classe \mathcal{S}^{\sharp} contient inconditionnellement la classe des fonctions L attachées aux représentations unitaires irréductibles et cuspidales de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Q})$, par conséquent, plusieurs relations équivalentes à la HRG pour les fonctions L automorphes. Par exemple, soit $L(s, \pi)$ une fonction L associée à une représentation π telle que $L(s, \pi)$ ne possède pas de zéros sur la ligne critique avec la valeur absolue de la partie imaginaire inférieure à $1/\sqrt{3}$. On prouve que la HRG est équivalente à une relation simple

$$\mathrm{Re}(\gamma_{\pi}(0)) = 3\delta_{\pi} + 16 \int_0^{+\infty} \frac{xS_{\pi}(x)}{(4x^2 + 1)^2} dx,$$

où $\gamma_{\pi}(0)$ est le terme constant dans le développement de Laurent de $L'(s, \pi)/L(s, \pi)$ en $s = 1$, $\delta_{\pi} = 1$, si π est trivial et zéro sinon, et $S_{\pi}(T)$ est la valeur de la fonction $\frac{1}{\pi} \arg L(s, \pi)$ obtenue par variation le long des droites reliant les points $1/2 - iT$, $2 - iT$, $2 + iT$ et $1/2 + iT$.

Tout au long de cette section, on se concentre sur la classe \mathcal{S}^{\sharp} de fonctions satisfaisant les axiomes (i), (ii) et les deux axiomes suivants :

(iii') (Equation fonctionnelle) La fonction F satisfait l'équation fonctionnelle

$$\xi_F(s) = w \overline{\xi_F(1 - \bar{s})},$$

où

$$\xi_F(s) = s^{m_F} (1 - s)^{m_F} F(s) Q_F^s \prod_{j=1}^r \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) = \gamma_F(s) F(s)$$

avec $Q_F > 0$, $r \geq 0$, $\lambda_j > 0$, $|w| = 1$, $\mathrm{Re}(\mu_j) > -\frac{1}{4}$, $\mathrm{Re}(\lambda_j + 2\mu_j) > 0$, $j = 1, \dots, r$.

(v') (Somme d'Euler) La dérivée logarithmique de la fonction F admet un représentation en série de Dirichlet

$$\frac{F'}{F}(s) = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_F(n)}{n^s}$$

absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Notons que (iii') implique que $\mathrm{Re}(\lambda_j + \mu_j) > 0$.

Pour $F \in \mathcal{S}^{\sharp}$, il est facile de déduire, en utilisant le principe Phragmén-Lindelöf que la fonction complète ξ_F est une fonction entière d'ordre 1. De plus, en utilisant une formule explicite pour la classe \mathcal{S}^{\sharp} appliquée à une fonction de test convenablement choisie, il est prouvé dans [104] que pour tout $F \in \mathcal{S}_0^{\sharp}$ et tout $z \notin Z(F)$, on a

$$(7) \quad \frac{\xi'_F}{\xi_F}(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\rho \in Z(F), |\mathrm{Im}(\rho)| \leq T} \frac{1}{z - \rho} = \sum_{\rho \in Z(F)}^* \left(\frac{1}{z - \rho} \right),$$

où chaque zéro est compté avec sa multiplicité.

2.1. Représentations de $\text{Re}(\lambda_F(n))$ équivalente à HRG. Le théorème 4 montre que la HRG est équivalente à (6) et (5), pour tous les entiers positifs n . De plus, sous certaines hypothèses sur l'emplacement de la partie imaginaire du premier zéro non-trivial éventuel de $F \in \mathcal{S}^{\sharp b}$ qui est hors de la ligne critique, les équations (6) et (5) avec $n = 1$ ou $n = 2$ donnent la HRG pour F .

Théorème 4. [89, Mazhouda-Smajlović, *Functiones et Approximatio* (2017)] *La HRG pour $F \in \mathcal{S}_0^{\sharp b}$ est équivalente à la représentation (6) de $\text{Re}(\lambda_F(n))$ pour tout entier positif n , ou, de manière équivalente, à la représentation (5) de $\text{Re}(\lambda_F(n))$ pour tout entier n .*

Notons ici que chaque zéro dans la somme (6) doit être pris en fonction de sa multiplicité.

Dans certains cas, on peut déduire une relation plus générale. A savoir, le théorème suivant traitant les cas $n = 1$ et $n = 2$.

Théorème 5. [89, Mazhouda-Smajlović, *Functiones et Approximatio* (2017)]

(i) *La HRG pour $F \in \mathcal{S}_{1/\sqrt{3}}^{\sharp b}$ est équivalente à l'équation*

$$\text{Re}(\lambda_F(1)) = 16 \int_0^\infty \frac{x}{(4x^2 + 1)^2} N_F(x) dx$$

ou à l'équation

$$(8) \quad \text{Re}(\lambda_F(1)) = \sum_{\rho=\sigma+i\gamma \in Z(F)} \frac{2}{4\gamma^2 + 1}.$$

(ii) *Si, de plus, $F \in \mathcal{S}_{\sqrt{6}}^{\sharp b}$, alors, la HRG pour F est aussi équivalente à l'équation*

$$\text{Re}(\lambda_F(2)) = 64 \int_0^\infty \frac{x(4x^2 - 1)}{(4x^2 + 1)^3} N_F(x) dx$$

ou à l'équation

$$(9) \quad \text{Re}(\lambda_F(2)) = \sum_{\rho=\sigma+i\gamma \in Z(F)} \frac{32\gamma^2}{(4\gamma^2 + 1)^2}.$$

Remarque 6. Procédant de manière analogue à la démonstration du Théorème 5, pour tout entier positif n , il existe un nombre réel $t(n)$ où on peut obtenir plus de formules équivalentes au HRG pour les fonctions $F \in \mathcal{S}_{t(n)}^{\sharp b}$. En d'autres termes, on prouve que, pour $F \in \mathcal{S}_{t(n)}^{\sharp b}$, l'équation

$$\text{Re}(\lambda_F(n)) = 16n \int_0^\infty \frac{x N_F(x)}{(4x^2 + 1)^2} U_{n-1} \left(\frac{(4x^2 - 1)}{(4x^2 + 1)} \right) dx$$

ou, de manière équivalente, l'équation

$$\text{Re}(\lambda_F(n)) = \sum_{\rho=\sigma+i\gamma \in Z(F)} \left(1 - T_n \left(\frac{4\gamma^2 - 1}{4\gamma^2 + 1} \right) \right)$$

tous deux impliquent la HRG.

La suite $t(n)$ est croissante, d'où l'hypothèse que $F \in \mathcal{S}_{t(n)}^{\sharp b}$ devient plus restrictif pour un grand n .

Une conséquence immédiate de la première partie du Théorème 5 est le corollaire suivant.

Corollaire 7. *La HRG pour $F \in \mathcal{S}_{1/\sqrt{3}}^{\sharp\sharp}$ est équivalente à l'équation*

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\xi'_F(0)}{\xi_F(0)} \right) = -2 \sum_{\rho=\sigma+i\gamma \in Z(F)} \frac{1}{4\gamma^2 + 1}$$

ou à l'équation

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\xi'_F(0)}{\xi_F(0)} \right) = -16 \int_0^{\infty} \frac{x}{(4x^2 + 1)^2} N_F(x) dx.$$

Remarque 8. Lorsque tous les coefficients $a_F(n)$ dans la représentation de la série de Dirichlet de F sont réels, le principe de réflexion et l'équation fonctionnelle impliquent que $Z(F) = 1 - \overline{Z(F)}$, où $Z(F)$ désigne l'ensemble des zéros non-triviaux de F . Par conséquent, les coefficients de Li généralisés sont réels.

De plus, sous la HRG, il est possible d'appliquer des méthodes à partir de [85, Mazhouda-Omar-Ouni, Math. Phys. Anal. Geom (2014)] (dans le cas de fonctions L de Hecke) et obtenir que, pour toute fonction $F \in \mathcal{S}^{\sharp\sharp}$ telle que ses coefficients $a_F(n)$ sont réels et $N_F(0) = 0$, on a

$$\lambda_F(n) = 32n \int_0^{\infty} \frac{x}{(4x^2 + 1)^2} N_F^+(x) U_{n-1} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right) dx$$

et

$$\lambda_F(n) = 2 \sum_{\gamma>0} \left(1 - T_n \left(\frac{4\gamma^2 - 1}{4\gamma^2 + 1} \right) \right),$$

où chaque zéro de la dernière somme est compté en fonction de sa multiplicité.

Dans [89, Mazhouda-Smajlović, Functiones et Approximatio (2017)], on montre que les représentations de $\lambda_F(n)$ ci-dessus sont équivalentes à la HRG, qui est un résultat plus général. De plus, les techniques de la démonstration des Théorèmes 4 et 5 sont différentes de celles données dans [85, Mazhouda-Omar-Ouni, Math. Phys. Anal. Geom (2014)].

2.2. Une formule intégrale des coefficients de Li généralisés. Dans cette section, on évalue partiellement l'intégrale dans (5) et on écrit l'équation (5) comme une somme de partie intégrale et oscillatoire. A savoir, on prouve le théorème suivant.

Théorème 9. [89, Mazhouda-Smajlović, Functiones et Approximatio (2017)] *La HRG pour $F \in \mathcal{S}_0^{\sharp\sharp}$ est équivalente à la formule*
(10)

$$\operatorname{Re}(\lambda_F(n)) = n \log Q_F + (1 - (-1)^n)(2m_F - N_F(0)) + \mathcal{I}_F(n) + 16n \int_0^{+\infty} \frac{x S_F(x)}{(4x^2 + 1)^2} U_{n-1} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right) dx,$$

pour tous les entiers positifs n , où la fonction $S_F(T)$ est la valeur de la fonction $\frac{1}{\pi} \arg F(s)$ obtenue par variation le long des droites reliant les points $1/2 - iT$, $2 - iT$, $2 + iT$ et $1/2 + iT$ et, dans le cas où $\pm T$ est l'ordonnée d'un zéro non trivial de F , on définit $S_F(T)$ comme égal à $S_F(T + 0)$, et

$$\mathcal{I}_F = \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^r \left[n \lambda_j \psi(\lambda_j + \mu_j) + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{\lambda_j^k}{(k-1)!} \psi^{(k-1)}(\lambda_j + \mu_j) \right] \right).$$

Dans le cas où $n = 1$, la deuxième somme de l'équation ci-dessus est égale à zéro.

Dans le cas où $n = 1$, d'après le théorème ci-dessus et la première partie de Theorem 5, on déduit la généralisation suivante du critère de Volchkov.

Corollaire 10. *La HRG pour $F \in \mathcal{S}_{1/\sqrt{3}}^{\sharp\sharp}$ est équivalente à la formule*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x S_F(x)}{(x^2 + 1/4)^2} dx = -\operatorname{Re} \left(\frac{\xi'_F}{\xi_F}(0) \right) - \log Q_F - 4m_F - \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j \psi(\lambda_j + \mu_j) \right).$$

Exemple 11. Dans cet exemple, on montre comment obtenir le critère de Volchkov (4) pour la fonction zêta de Riemann comme un cas spécial du Corollaire 10. Pour la fonction zêta de Riemann, on a $r = 1$, $\lambda_1 = 1/2$, $\mu_1 = 0$, $Q_\zeta = \pi^{-1/2}$, $m_\zeta = 1$, $N_\zeta(0) = 0$ et le premier zéro non-trivial (qui est sur la ligne critique) a une partie imaginaire supérieure à 14, donc les hypothèses du Corollaire 10 sont satisfaites. De plus, on a $I_2(1) = \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{2}) = -\frac{\gamma}{2} - \log 2$. Les coefficients de la représentation en série de Dirichlet de $\zeta(s)$ sont réels, donc $\lambda_\zeta(1)$ est réel et $S_\zeta(x)$ est égal à $\frac{2}{\pi} \arg \zeta(1/2 + ix)$. Par conséquent, le Corollaire 10 implique que l'hypothèse de Riemann est équivalente à

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2x \arg \zeta(\frac{1}{2} + ix)}{(x^2 + 1/4)^2} dx = -\frac{\xi'_\zeta}{\xi_\zeta}(0) - 4 + \frac{\gamma}{2} + \log(2\sqrt{\pi}).$$

Maintenant, en utilisant le fait que

$$-\frac{\xi'_\zeta}{\xi_\zeta}(0) = \frac{\gamma}{2} + 1 - \frac{1}{2} \log(4\pi),$$

on déduit l'équivalence entre l'hypothèse de Riemann et (4).

2.3. La HRG et les constantes d'Euler-Stieltjes généralisées de deuxième espèce. Écrivons la formule arithmétique des coefficients de Li comme suit :

$$(11) \quad \lambda_F(-n) = m_F + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \gamma_F(l-1) + n \log Q_F + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \eta_F(l-1),$$

où

$$\eta_F(0) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \psi(\lambda_j + \mu_j)$$

et

$$\eta_F(l-1) = \sum_{j=1}^r (-\lambda_j)^l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_j + \mu_j + k)^l}, \text{ for } l \geq 2.$$

Ici, $\psi(s) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)$ désigne la fonction digamma (ou la fonction psi) et $\gamma_F(k)$ sont les coefficients dans le développement de Laurent (Taylor) de $\frac{F'}{F}(s)$ en $s = 1$. Les coefficients $\gamma_F(k)$ sont appelés les constantes d'Euler-Stieltjes généralisées de deuxième espèce.

Dans la suite, on a besoin d'une représentation légèrement différente des coefficients de Li généralisés $\lambda_F(-n)$, $n \in \mathbb{N}$, donnés dans le lemme suivant.

Lemme 12. *Pour $F \in \mathcal{S}_0^{\sharp\sharp}$, les coefficients de Li généralisés $\lambda_F(-n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ peuvent être exprimés comme suit*

$$(12) \quad \begin{aligned} \lambda_F(-n) &= m_F + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \gamma_F(l-1) + n \log Q_F + n \sum_{j=1}^r \lambda_j \psi(\lambda_j + \mu_j) \\ &+ \sum_{j=1}^r \sum_{l=2}^n \binom{n}{l} \frac{\lambda_j^l}{(l-1)!} \psi^{(l-1)}(\lambda_j + \mu_j). \end{aligned}$$

La somme

$$S_\infty(F, n) := n \log Q_F + n \sum_{j=1}^r \lambda_j \psi(\lambda_j + \mu_j) + \sum_{j=1}^r \sum_{l=2}^n \binom{n}{l} \frac{\lambda_j^l}{(l-1)!} \psi^{(l-1)}(\lambda_j + \mu_j)$$

provient des facteurs gamma dans l'équation fonctionnelle, d'où elle est appelée la partie archimédienne des coefficients de Li généralisés $\lambda_F(-n)$. De manière analogue, la somme

$$(13) \quad S_{\text{NA}}(F, n) := m_F + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \gamma_F(l-1)$$

est appelée la partie non-archimédienne de $\lambda_F(-n)$. De plus, on a

$$(14) \quad \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \operatorname{Re}(\gamma_F(l-1)) = O_F(\sqrt{n} \log n), \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Comme une conséquence immédiate des Théorèmes 5 et 9, et en utilisant la relation $\operatorname{Re}(\lambda_F(n)) = \operatorname{Re}(\lambda_F(-n))$, on obtient une formule intégrale pour la somme de $\operatorname{Re}(\gamma_F(l-1))$ apparaissant dans (11) et équivalente à la HRG, qu'on énonce dans le corollaire suivant.

Corollaire 13. *La HRG pour $F \in \mathcal{S}_0^{\sharp\sharp}$ est équivalente à la formule*

$$(15) \quad \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \operatorname{Re}(\gamma_F(l-1)) = (1 - (-1)^n)(2m_F - N_F(0)) - m_F + 16n \int_0^{+\infty} \frac{x S_F(x)}{(4x^2 + 1)^2} U_{n-1} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right) dx,$$

pour tous les entiers positifs n .

En particulier, pour les fonctions $F \in \mathcal{S}_{1/\sqrt{3}}^{\sharp\sharp}$ la HRG est équivalente à la formule

$$\operatorname{Re}(\gamma_F(0)) = 3m_F + \int_0^{+\infty} \frac{x S_F(x)}{(x^2 + 1/4)^2} dx.$$

De plus, le Corollaire 13 et la relation asymptotique (14) donnent le critère intégral asymptotique suivants pour la HRG.

Corollaire 14. *La HRG pour $F \in \mathcal{S}_0^{\sharp\sharp}$ est équivalente à la formule*

$$(16) \quad \int_0^{+\infty} \frac{x S_F(x)}{(x^2 + 1/4)^2} U_{n-1} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right) dx = O \left(\frac{\log n}{\sqrt{n}} \right), \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Dans le cas particulier où les coefficients dans la série de Dirichlet de $F \in \mathcal{S}^{\sharp\sharp}$ sont réels et que la fonction F ne possède pas des zéros non triviaux sur la ligne réelle, les coefficients $\gamma_F(l)$ sont réels et $S_F(x) = \frac{2}{\pi} \arg F(1/2 + ix)$. Dans ce cas, on a le corollaire suivant.

Corollaire 15. *Soit $F \in \mathcal{S}^{\sharp\sharp}$ une fonction avec des coefficients réels dans la représentation en série de Dirichlet qui n'a pas de zéros de Siegel. Alors, la HRG est équivalente à la formule*

$$(17) \quad \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \gamma_F(l-1) = m_F(1 - 2(-1)^n) + \frac{32n}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x \arg F(1/2 + ix)}{(4x^2 + 1)^2} U_{n-1} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right) dx,$$

pour tous les entiers positifs n . Sous l'hypothèse supplémentaire que $F \in \mathcal{S}_{1/\sqrt{3}}^{\sharp\sharp}$, la HRG est équivalente à la relation

$$(18) \quad \gamma_F(0) = 3m_F + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x \arg F(1/2 + ix)}{(x^2 + 1/4)^2} dx.$$

Remarque 16. En supposant que les coefficients dans la représentation en série de Dirichlet de la fonction F sont réels, sous la HRG, la formule ci-dessus donne une représentation intégrale des coefficients $\gamma_F(l)$ apparaissant dans le développement de Laurent (Taylor) de la fonction $F'(s)/F(s)$ en $s = 1$.

Par exemple, lorsque $n = 1$, sous la HRG, le terme constant $\gamma_F(0)$ dans le développement Laurent (Taylor) de la fonction $F'(s)/F(s)$ en $s = 1$ possède la représentation intégrale (18). Prenant $n = 2$ dans la formule (17), sous la HRG, on a

$$\gamma_F(1) = -7m_F + \frac{64}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x(4x^2 - 3) \arg F(1/2 + ix)}{(4x^2 + 1)^3} dx.$$

En procédant par récurrence sur n et en utilisant la formule (17), il est possible d'obtenir une représentation intégrale de toutes les constantes d'Euler-Stieltjes généralisées de deuxième espèce sous la HRG.

Remarque 17. L'équation (18) est également équivalente au critère de Volchkov (4) pour l'hypothèse de Riemann, puisque $\gamma_\zeta(0) = \gamma$, $m_\zeta = 1$ et $S_\zeta(x) = \frac{2}{\pi} \arg \zeta(1/2 + ix)$, donc le Corollaire 13 peut aussi être vu comme une généralisation du critère de Volchkov à une plus grande classe de fonctions L .

2.4. Application aux fonctions L automorphes. Dans cette section, on déduit des relations équivalentes à la HRG pour les fonctions L automorphes attachées aux représentations unitaires irréductibles et cuspidales de $GL_N(\mathbb{Q})$.

La fonction L automorphe $L(s, \pi)$ attachée à une représentation irréductible cuspidale unitaire π de $GL_N(\mathbb{Q})$ est donnée pour $\text{Re}(s) > 1$ par le produit absolument convergent sur les premiers p de ses facteurs locaux

$$(19) \quad L(s, \pi) = \prod_p \prod_{j=1}^N (1 - \alpha_{p,j}(\pi) p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\pi)}{n^s}.$$

La fonction complétée

$$\Lambda(s, \pi) = Q(\pi)^{s/2} L_\infty(s, \pi) L(s, \pi),$$

où $Q(\pi)$ est le conducteur de π et

$$L_\infty(s, \pi) = \prod_{j=1}^N \Gamma_{\mathbb{R}}(s + k_j(\pi)) = \prod_{j=1}^N \pi^{-(s+k_j(\pi))/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}(s + k_j(\pi))\right)$$

est le facteur archimédien satisfaisant l'équation fonctionnelle suivante

$$(20) \quad \Lambda(s, \pi) = \epsilon(\pi) \overline{\Lambda(1 - \bar{s}, \pi)},$$

où la constante $\epsilon(\pi)$ est de valeur absolue 1.

En utilisant les résultats de [27], [44], [45], [115] et [124, 125, 126, 127], il est prouvé dans [104, Sec. 4] que la fonction $L(s, \pi)$ appartient à la classe $\mathcal{S}^{\#b}$. De plus, pour $F(s) = L(s, \pi)$ (qui est une fonction dans $\mathcal{S}^{\#b}$) on a : $r = N$, $Q_F = Q(\pi)^{1/2} \pi^{-N/2}$, $\lambda_j = 1/2$, $\mu_j = \frac{1}{2} k_j(\pi)$, $j = 1, \dots, N$ et $d_F = N$. De plus, si $N = 1$ et π est trivial, $F(s) = L(s, \pi)$ est réduit à la fonction zêta de Riemann, alors, dans ce cas $m_F = 1$ et si $N \neq 1$ ou π est non trivial, la fonction $F(s) = L(s, \pi)$ est holomorphe en $s = 1$ et par conséquent $m_F = 0$.

Posons $\delta_\pi = 1$ si $N = 1$ et π est trivial et $\delta_\pi = 0$, sinon. On note par $S_\pi(T)$ la valeur de la fonction $\frac{1}{\pi} \arg L(s, \pi)$ obtenue par variation continue le long des segments joignant les points $1/2 - iT$,

$2 - iT$, $2 + iT$ et $1/2 + iT$.

La fonction complétée $\Lambda(s, \pi)$ ne s'annule pas sur la ligne $\text{Re}(s) = 1$ (voir [28]), alors, grâce à l'équation fonctionnelle (20), $0 \notin Z(L(s, \pi))$, c-à-d $F(s) = L(s, \pi) \in \mathcal{S}_0^{\#p}$.

L'application du Théorème 23 et des Corollaires 24, 13 et 14 à $F(s) = L(s, \pi)$ donne le résultat suivant.

Corollaire 18. *On a*

(i) *La HRG pour la fonction $L(s, \pi)$ est équivalente à la formule*

$$\text{Re}(\lambda_\pi(n)) = \frac{n}{2} \log \left(\frac{Q(\pi)}{\pi^N} \right) + (1 - (-1)^n)(2\delta_\pi - N_\pi(0)) + \mathcal{I}_\pi(n) + 16n \int_0^{+\infty} \frac{x S_\pi(x)}{(4x^2 + 1)^2} U_{n-1} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right) dx,$$

pour tout entier positif n , où

$$\mathcal{I}_\pi(n) = \text{Re} \left(\sum_{j=1}^N \left[\frac{n}{2} \psi \left(\frac{1 + k_j}{2} \right) + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^k (k-1)!} \psi^{(k-1)} \left(\frac{1 + k_j}{2} \right) \right] \right).$$

(ii) *La HRG pour $L(s, \pi)$ est équivalente à la formule*

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \text{Re}(\gamma_\pi(l-1)) &= (1 - (-1)^n)(2\delta_\pi - N_\pi(0)) - \delta_\pi \\ &+ 16n \int_0^{+\infty} \frac{x S_\pi(x)}{(4x^2 + 1)^2} U_{n-1} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right) dx, \end{aligned}$$

pour tout entier positif n , où les coefficients $\gamma_\pi(l)$ désignent les constantes d'Euler-Stieltjes de deuxième espèce associée à $L(s, \pi)$.

(iii) *La HRG pour $L(s, \pi)$ est équivalente à la formule asymptotique*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x S_\pi(x)}{(x^2 + 1/4)^2} U_{n-1} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right) dx = O \left(\frac{\log n}{\sqrt{n}} \right), \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

(iv) *Sous l'hypothèse supplémentaire que $L(s, \pi)$ ne possède pas des zéros sur la ligne critique avec la valeur absolue de la partie imaginaire inférieure ou égale à $1/\sqrt{3}$, la HRG pour $L(s, \pi)$ est équivalente à l'équation*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x S_\pi(x)}{(x^2 + 1/4)^2} dx = \text{Re}(\lambda_\pi(1)) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{Q(\pi)}{\pi^N} \right) - 4\delta_\pi - \text{Re} \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \psi \left(\frac{1}{2}(1 + k_j) \right) \right),$$

ou, de manière équivalente, à l'équation

$$\text{Re}(\gamma_\pi(0)) = 3\delta_\pi + 16 \int_0^{+\infty} \frac{x S_\pi(x)}{(4x^2 + 1)^2} dx.$$

3. APPLICATION DU CRITÈRE DE LI

3.1. Première application. Soient a, b deux nombres réels positifs tels que $a + b = 1$, $a > 1/2$, et, pour un entier arbitraire $m > 1$, on définit la fonction $G_m(s) = (1 - m^{as})(1 - m^{bs})$ (la fonction $G_2(s)$ est introduite dans [106], p.28 comme exemple de fonction de la classe de Selberg qui ne

satisfait pas la HRG. Il est évident que pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, la dérivée logarithmique $G'_m(s)/G_m(s)$ possède une représentation de la somme d'Euler absolument convergente

$$\frac{G'_m(s)}{G_m(s)} = \log m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{ak} + m^{bk}}{(m^k)^s},$$

d'où $G_m \in \mathcal{S}^{\sharp}$. De plus, G_m satisfait l'équation fonctionnelle $G_m(s) = m \cdot m^{-2s} G_m(1-s)$, et par suite $\xi_{G_m}(s) = m^s G_m(s)$.

Un calcul immédiat montre que

$$\lambda_{G_m}(1) = -\frac{\xi'_{G_m}(0)}{\xi_{G_m}(0)} = \log m \left(\frac{m^a}{m^a - 1} + \frac{m^b}{m^b - 1} - 1 \right) = \frac{m^a(m-1) \log m}{(m^a - 1)(m - m^a)} > 0.$$

Donc, le critère de Li pour $n = 1$ est rempli et $\lambda_{G_m}(1)$ est une fonction de $a \in [1/2, 1]$. D'autre part, les parties imaginaires des zéros de $G_m(s)$ sont évidemment indépendantes de a , d'où la somme positive qui apparaît dans (8) est différente de l'expression ci-dessus, ce qui montre ainsi que cette fonction G ne vérifie pas la HRG.

Si on prend $a = b = 1/2$ et on définit $G_m(s) = (1 - m^{1/2-s})^2$, alors $G_m(s) \in \mathcal{S}_0^{\sharp}$ et satisfait l'hypothèse de Riemann généralisée, puisque, les zéros de G_m sont $1/2 + 2k\pi i / \log m$, où $k \in \mathbb{Z}$ et chaque zéro est de multiplicité deux. De plus,

$$-\frac{\xi'_{G_m}(0)}{\xi_{G_m}(0)} = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1} \log m,$$

alors, la formule (8) donne une formule de sommation intéressante

$$\frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1} = 4 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\log m}{16k^2\pi^2 + \log^2 m},$$

valable pour tous les entiers $m > 1$.

3.2. Deuxième application. Soit χ un caractère de Dirichlet impair. En procédant comme dans [106], p. 28, on considère la fonction $G(s) = L(2s - 1/2, \chi)$, où $L(s, \chi)$ est la fonction L de Dirichlet associée au caractère singulier primitif χ modulo q . Pour $\delta \in (0, 1/4)$ on peut montrer que la fonction $F(s) = G(s - \delta)G(s + \delta)$ appartient à la classe \mathcal{S}^{\sharp} et ne satisfait pas la conjecture de Ramanujan.

De plus, $\rho \in Z(F)$ si et seulement si $\rho - \delta$ ou $\rho + \delta$ appartient à $Z(G)$. Un calcul simple montre que les fonctions complétées $\xi_F(s)$ et $\xi_G(s)$ associées à F et G respectivement sont liées par $\xi_F(s) = \xi_G(s - \delta)\xi_G(s + \delta)$, d'où

$$\frac{\xi'_F(0)}{\xi_F(0)} = \frac{\xi'_G(\delta)}{\xi_G(\delta)} + \frac{\xi'_G(-\delta)}{\xi_G(-\delta)} = \sum_{\rho \in Z(G)} \frac{-2\rho}{(\rho - \delta)(\rho + \delta)}.$$

Il est intéressant de noter que les fonctions $F(s)$ et $G(s)^2$ ont le même degré et le même conducteur, d'où le même comportement asymptotique de la partie archimédienne du n -ième coefficient de Li (qui croît comme $2n \log n + 2[(\gamma - 1) + \log(q/\pi)]n + O(1)$, quand $n \rightarrow \infty$). De plus, sous la HRG pour $L(s, \chi)$, il est évident que $F(s)$ ne vérifie pas la HRG.

Dans cet exemple, on montre comment déduire que $F(s)$ ne satisfait pas la HRG en utilisant nos résultats. Supposons que la plus petite partie imaginaire positive y_0 du zéro non-trivial $x_0 + iy_0 \in$

$Z(G)$ est telle que $y_0 > \sqrt{3}/4$. D'où, $\delta^2 + 3y^2 > x^2$ pour tous les zéros $x + iy \in Z(G)$, ce qui donne l'inégalité

$$\frac{x(x^2 + y^2 - \delta^2)}{(x^2 + y^2)^2 + \delta^2(\delta^2 + 2y^2 - 2x^2)} < \frac{x}{x^2 + y^2},$$

pour tout $x + iy \in Z(G)$.

De plus, pour $y \geq y_0 > \sqrt{3}/4$ fixé, la fonction $g(x) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ est telle que $g''(x) < 0$ pour tout $x \in (1/4, 3/4)$, et par suite $\frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(1-x) < g(1/2)$. Par conséquent, on conclut que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda_F(1)) &= \operatorname{Re}\left(-\frac{\xi'_F}{\xi_F}(0)\right) = 2 \sum_{x+iy \in Z(G)} \frac{x(x^2 + y^2 - \delta^2)}{(x^2 + y^2)^2 + \delta^2(\delta^2 + 2y^2 - 2x^2)} \\ &< 2 \sum_{x+iy \in Z(G)} \frac{x}{x^2 + y^2} < 4 \sum_{x+iy \in Z(G)} \frac{1}{1 + 4y^2} = 2 \sum_{\sigma+i\gamma \in Z(F)} \frac{1}{1 + 4\gamma^2}, \end{aligned}$$

d'où, le Théorème 4 avec $n = 1$ implique que $F(s) = G(s - \delta)G(s + \delta)$ ne vérifie pas la HRG.

4. CRITÈRE DE LI DANS LE CORPS DE FONCTIONS ET APPLICATION

Dans [90, Mazhouda-Smajlović, Europ. Math. Journal (2019)], on montre quelques formules du n -ième coefficient de Li $\lambda_K(n)$ associé à un corps de fonction K de genre g avec un corps fini de constantes \mathbb{F}_q , incluant une formule arithmétique, une formule intégrale et une formule asymptotique. Ensuite, on s'intéresse à l'application des formules obtenues en conjonction avec les inégalités $\lambda_K(n) \geq 0$ pour tous les entiers positifs n afin d'approximer certains invariants arithmétiques de corps de fonctions K .

4.1. Fonction zêta associée à un corps de fonctions. Soit K un corps de fonctions avec un corps fini de constantes \mathbb{F}_q et soit X sa courbe algébrique correspondante de genre g définie sur \mathbb{F}_q (on se réfère au livre de Salvador [116] pour plus de détails). La fonction zêta de K est définie par

$$Z_K(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n T^n = \prod_{D \text{ premier}} (1 - T^{\deg(D)})^{-1},$$

où $C_n = \#\{D \in \operatorname{Div}(K); D \geq 0, \deg(D) = n\}$. En substituant $T = q^{-s}$, on obtient

$$\zeta_K(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n q^{-ns} = Z_K(q^{-s}),$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. La fonction Z_K est en fait une fonction rationnelle

$$(21) \quad Z_K(T) = \frac{L(T)}{(1-T)(1-qT)},$$

où $L(T) = \prod_{j=1}^{2g} (1 - \alpha_j T) \in \mathbb{Z}[T]$ est un polynôme de degré $2g$. De plus, les nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}$, sont des entiers algébriques, et ils peuvent être arrangés de sorte que $\alpha_j \alpha_{g+j} = q$, $j = 1, \dots, g$, donc on peut ordonner les indices $j \in \{1, \dots, g\}$ pour que $\alpha_j = q^{1/2} \exp(i\theta_j)$, avec $\theta_j \in [0, \pi]$. La valeur spéciale $L(1) = \prod_{i=1}^{2g} (1 - \alpha_i)$ est le nombre de classe de K , noté h_K .

La fonction $\zeta_K(s)$ est méromorphe dans tout le plan complexe \mathbb{C} avec des pôles simples à $1 + k \frac{2\pi i}{\log q}$ et $k \frac{2\pi i}{\log q}$, pour $k \in \mathbb{Z}$. De plus, ζ_K satisfait l'équation fonctionnelle

$$(22) \quad q^{s(g-1)} \zeta_K(s) = q^{(1-s)(g-1)} \zeta_K(1-s).$$

L'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions, prouvée par A. Weil [140], indique que les zéros de $\zeta_K(s)$ se trouvent sur la ligne $\operatorname{Re}(s) = 1/2$, ou de manière équivalente, que les racines α_i ,

$i = 1, \dots, 2g$ de $L(T)$ sont de valeur absolue $q^{1/2}$. En fait, en notant $\mathcal{Z}(K)$ l'ensemble des zéros de $\zeta_K(s)$, avec la notation ci-dessus, on a

$$\mathcal{Z}(K) = \left\{ \rho = \frac{1}{2} \pm i \frac{\theta_j}{\log q} + i \frac{2k\pi}{\log q}, j \in \{1, \dots, g\}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pour $T > 0$, si T et $-T$ ne sont pas les ordonnés d'un zéro non trivial, on note $N(T) := \#\{\rho \in \mathcal{Z}(K) : -T \leq \text{Im}(\rho) \leq T\}$. Dans le cas où T ou $-T$ est l'ordonné d'un zéro non trivial, on définit $N_K(T) = N_K(T+0)$. Ensuite, à partir de la définition de l'ensemble $\mathcal{Z}(K)$, il est évident que

$$(23) \quad N_K(T) = 2 \sum_{j=1}^g \left(\left\lfloor \frac{T \log q - \theta_j}{2\pi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{T \log q + \theta_j}{2\pi} \right\rfloor + 1 \right) = \frac{2g \log q}{\pi} T + C_K(T),$$

où $-2g < C_K(T) \leq 2g$ et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x .

On pose $\Lambda_K(s) = q^{(g-1)s} \zeta_K(s)$, il vient de l'équation fonctionnelle (22) que $\Lambda_k(s) = \Lambda_k(1-s)$. Cependant, $\Lambda_K(s)$ n'est pas une fonction entière, car elle possède des pôles à $1 + k \frac{2\pi i}{\log q}$ et $k \frac{2\pi i}{\log q}$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, on définit la fonction zêta complétée comme suit

$$(24) \quad \xi_K(s) = q^s (1 - q^{-s})(1 - q^{1-s}) \Lambda_K(s) = q^{gs} L(q^{-s}),$$

qui est évidemment une fonction entière d'ordre un dont les zéros coïncident avec les zéros de $\zeta_K(s)$. De plus, $\xi_K(s)$ satisfait l'équation fonctionnelle $\xi_K(s) = \xi_K(1-s)$.

4.2. Définition et formules arithmétiques des coefficients de Li dans le corps de fonctions. Pour un entier $n \neq 0$, le n -ième coefficient de Li dans le corps de fonctions K est défini par la somme

$$\begin{aligned} \lambda_K(n) &= \sum_{\rho \in \mathcal{Z}(K)}^* \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\rho \in \mathcal{Z}(K), |\text{Im}(\rho)| \leq T} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right). \end{aligned}$$

De la définition de l'ensemble $\mathcal{Z}(K)$, il est évident que $\mathcal{Z}(K) = 1 - \mathcal{Z}(K) = 1 - \overline{\mathcal{Z}(K)}$, donc, les coefficients de Li $\lambda_K(n)$ sont réels et $\lambda_K(-n) = \overline{\lambda_K(n)} = \lambda_K(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, en procédant de manière analogue à [8, Proposition 2.1. (v)] et en utilisant l'équation fonctionnelle $\xi_K(s) = \xi_K(1-s)$, on déduit que

$$\frac{\xi'_K(z)}{\xi_K(z)} = \sum_{\rho \in \mathcal{Z}(K)}^* \frac{1}{z - \rho}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}(K)$. Ensuite, en appliquant les mêmes calculs que dans [129, Appendix 1], on obtient la proposition suivante.

Proposition 19. *Les coefficients de Li $\lambda_K(n)$ associés au corps de fonctions K peuvent être exprimés pour tout entier positif n comme suit*

$$(25) \quad \lambda_K(n) = -\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{dz^n} \left((z-1)^{n-1} \log \xi_K(z) \right) \Big|_{z=0}.$$

En utilisant les résultats de Bombieri et Lagarias [5], le critère Li pour le corps de fonctions K de genre g sur un corps fini \mathbb{F}_q est facilement généralisable pour indiquer que les zéros de la fonction zêta $\zeta_K(s)$ se trouvent sur la ligne $\text{Re}(s) = 1/2$ si et seulement si les coefficients de Li $\lambda_K(n)$ sont positifs pour tout $n \geq 1$.

Pour tout entier positif n , on définit

$$\gamma_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{L'}{L}(T) \right)^{(n)} \Big|_{T=1}$$

comme étant les coefficients dans le développement de Taylor de la fonction holomorphe $L'(T)/L(T)$ en $T = 1$, à savoir, que

$$(26) \quad \frac{L'}{L}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (T-1)^n.$$

En utilisant l'expression (25) du n -ième coefficient de Li, on obtient la formule arithmétique suivante.

Théorème 20. [90, Mazhouda-Smajlović, Europ. Math. Journal (2019)] *Pour tout entier positif n , on a*

$$(27) \quad \lambda_K(n) = \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \gamma_{l-1} \log^l q - ng \log q.$$

L'évaluation des coefficients γ_l implique le corollaire suivant.

Corollaire 21. *Pour tout entier positif n , on a*

$$(28) \quad \lambda_K(n) = 2g - \sum_{j=1}^{2g} \left(1 + \frac{\alpha_j \log q}{(1 - \alpha_j)} \right)^n - ng \log q.$$

4.3. Formules asymptotiques et intégrales des coefficients de Li. Une formule asymptotique des coefficients de Li $\lambda_K(n)$ peut être déduite facilement du fait que dans ce contexte l'hypothèse de Riemann est vraie, en utilisant l'expression (23) du nombre de zéros en conjonction avec l'argument de Voros (basé sur une communication privée avec Oesterlé) comme dans [137].

Théorème 22. [90, Mazhouda-Smajlović, Europ. Math. Journal (2019)] *On a*

$$(29) \quad \lambda_K(n) = (g \log q) n + o(n), \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

La formule asymptotique des coefficients de Li dans le cas de corps de fonctions est différente de celle dans le cas de corps de nombres, car il n'y a aucun facteur d'Archimède. Le terme principal dans leur développement asymptotique est Cn (avec $C = g \log q$) plutôt que $Cn \log n$, qui est le terme dominant apparaissant dans le cas du corps de nombres, comme observé par Lagarias dans [56, Remarque 2, Section 8].

En suivant les mêmes arguments que dans [89, Théorème 2 et 9, Mazhouda-Smajlović, *Fonctions et Approximatio* (2017)] modulo quelques modifications, on donne une formule intégrale de $\lambda_K(n)$ et on obtient une expression équivalente à l'hypothèse de Riemann dans ce contexte.

Théorème 23. [90, Mazhouda-Smajlović, Europ. Math. Journal (2019)] *Pour tout entier positif n on a*

$$(30) \quad \lambda_K(n) = g \log q \cdot n + 16n \int_0^{+\infty} \frac{x C_K(x)}{(4x^2 + 1)^2} U_{n-1} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right) dx,$$

où la fonction $C_K(x)$ est définie dans l'équation (23) et U_{n-1} est le polynôme de Tchebychev de deuxième espèce.

Le Théorèmes 23 et 90 donnent l'équation suivante, équivalente à l'hypothèse de Riemann pour le corps de fonctions.

Corollaire 24. *On a*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x C_K(x)}{(4x^2 + 1)^2} U_{n-1} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right) dx = o(1), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

4.4. Application. Comme application, on obtient des équations et des inégalités intéressantes pour les valeurs spéciales des fonctions L dans le corps de fonctions. Ces résultats découlent des formules obtenues des coefficients de Li $\lambda_K(n)$ et du fait que l'hypothèse de Riemann est vrai dans ce cas.

On commence par l'équation (27) avec $n = 1$:

$$(31) \quad \lambda_K(1) = \log q \left(\sum_{i=1}^{2g} \frac{\alpha_i}{\alpha_i - 1} - g \right) = \log q \left(\frac{L'}{L}(1) - g \right).$$

Ceci donne une inégalité bilatérale intéressante entre le genre g et le nombre de classe h_K avec la valeur spéciale $L'(1)$.

Corollaire 25. *On a*

$$(32) \quad gh_K \max\{1, 2(1 - 2/\log q)\} \leq L'(1) \leq 2gh_K(1 + 2/\log q).$$

L'inégalité bilatérale (32) peut être interprétée en termes de sommes sur des classes de diviseurs de la façon suivante. On commence avec l'équation (21) et la formule dans [93, Corollaire 3.1.1]

$$\begin{aligned} (q-1)L(T) &= (1-qT)(1-T) \{(q-1)Z_K(T)\} = \\ &= (1-qT)(1-T) \left\{ \sum_{\tilde{D}} q^{N(\tilde{D})} T^{\deg(\tilde{D})} + h_K q^{1-g} \frac{(qT)^{2g-1}}{1-qT} - \frac{h_K}{1-T} \right\}, \end{aligned}$$

où la somme est sur toutes les classes de diviseur \tilde{D} avec des degrés vérifiant $0 \leq \deg(\tilde{D}) \leq 2g-2$ et $N(\tilde{D})$ est le nombre maximal de diviseurs positifs linéairement indépendants dans \tilde{D} . Après dérivation, on obtient à

$$L'(1) = \sum_{\tilde{D}} q^{N(\tilde{D})} - h_K \left(\frac{q^g - q}{q-1} \right).$$

L'équation (32) donne le résultat suivant

$$\begin{aligned} (33) \quad h_K \left(\frac{q^g - q}{q-1} + g \max\{1, 2(1 - 2/\log q)\} \right) &\leq \sum_{0 \leq \deg(\tilde{D}) \leq 2g-2} q^{N(\tilde{D})} \leq \\ &\leq h_K \left(\frac{q^g - q}{q-1} + 2g(1 + 2/\log q) \right). \end{aligned}$$

Quand q est assez grand, $2g(1 \pm 2/\log q)$ est plutôt proche de $2g$, ce qui montre que l'inégalité (33) est optimale dans ce cas.

Le cas particulier où $n = 2$ est également intéressant, car il donne d'autres bornes de $L''(1)$. À savoir, on a le corollaire suivant.

Corollaire 26. *On a*

$$(34) \quad \max\{0, 2g \log q - 4g\} \leq \lambda_K(2) \leq 2g \log q + 4g,$$

ou encore

$$\begin{aligned} (35) \quad 2g \max\{1, 2(1 - 2/\log q)\} &\leq 2 \frac{L'(1)}{L(1)} + \frac{L''(1)}{L(1)} \log q - \left(\frac{L'(1)}{L(1)} \right)^2 \log q \leq \\ &\leq 4g(1 + 2/\log q). \end{aligned}$$

Les équations (35) and (32) donnent ensemble une inégalité pour $L''(1)$, ce qui est très net pour un q assez grand. Un calcul simple basé sur ces deux équations donne

$$h_K(4g^2(1 - 2/\log q)^2 - 16g/\log^2 q) \leq L''(1) \leq h_K(4g^2(1 + 2/\log q)^2 + 16g/\log^2 q).$$

Par conséquent, on conclut que si le genre de la courbe est fixé, on a $L'(1) \sim 2gh_K$ et $L''(1) \sim (2g)^2 h_K$ pour q suffisamment grand.

L'équation (28) et le critère de Li ($\lambda_K(n) \geq 0$) donnent la suite d'inégalités satisfaite par α_j , $j = 1, \dots, 2g$, pour tout entier positif entier n , comme indiqué dans le corollaire suivant.

Corollaire 27. *Pour tout entier positif entier n , on a*

$$ng \log q + \sum_{j=1}^{2g} \left(1 + \frac{\alpha_j \log q}{1 - \alpha_j}\right)^n \leq 2g.$$

Exemple 28. En procédant de manière analogue à [89, Mazhouda-Smajlović, *Functiones et Approximatio* (2017)], il est facile de déduire que l'hypothèse de Riemann pour le corps de fonctions est équivalente aux représentations

$$(36) \quad \lambda_K(n) = 16n \int_0^\infty N_K(x) \frac{x}{(4x^2 + 1)^2} U_{n-1} \left(\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right) dx$$

et

$$(37) \quad \lambda_K(n) = \sum_{\rho=\sigma+i\gamma \in \mathcal{Z}(K)} \left(1 - T_n \left(\frac{4\gamma^2 - 1}{4\gamma^2 + 1} \right)\right)$$

pour tous les entiers positifs n , où T_n est le polynôme de Tchebychev de première espèce.

On termine avec l'exemple qui montre que l'application de la formule (37) donne une formule sommatoire intéressante. Par la définition de l'ensemble des zéros $\mathcal{Z}(K)$ et le fait que $T_1(x) = x$, la formule (37) avec $n = 1$ s'écrit come suit

$$\lambda_K(1) = \sum_{\rho=\sigma+i\gamma \in \mathcal{Z}(K)} \frac{2}{4\gamma^2 + 1} = 4 \log^2 q \sum_{j=1}^g \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4(\theta_j + 2k\pi)^2 + \log^2 q}.$$

De plus, à partir de l'équation (31) et le fait que

$$\gamma_{l-1} = - \sum_{j=1}^{2g} \frac{\alpha_j^l}{(1 - \alpha_j)^l},$$

on en déduit que

$$\lambda_K(1) = \log q \left(\frac{L'}{L}(1) - g \right) \quad \text{et} \quad \frac{L'}{L}(1) = \sum_{i=1}^{2g} \frac{\alpha_i}{\alpha_i - 1} = \gamma_0.$$

Ainsi, on obtient la formule sommatoire

$$\sum_{j=1}^g \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4(\theta_j + 2k\pi)^2 + \log^2 q} = \frac{\gamma_0 - g}{4 \log q},$$

vraie pour tous les entiers $q > 1$.

5. CAS DE FONCTIONS L DE HECKE

Dans [85, Mazhouda-Omar-Ouni, Math. Phys. Anal. Geom (2014)], on étudie un exemple de fonctions L de la classe de Selberg, c'est la fonction L de Hecke. Soit f une forme nouvelle de $S_k(N, \chi)$. On la normalise afin que son premier coefficient de Fourier soit 1. Alors

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} e^{2i\pi n z},$$

où les coefficients de Fourier sont les valeurs propres des opérateurs de Hecke. Les opérateurs de Hecke $T(n)$ sont définis par

$$(T(n)f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{ad=n} \chi(a) a^k \sum_{0 \leq b < d} f\left(\frac{az+b}{d}\right),$$

pour $f \in S_k(N, \chi)$. La fonction L de Hecke associée à f est donnée par

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}$$

pour tout $\text{Re}(s) > (k+1)/2$. Elle admet le produit Eulérien

$$L_f(s) = \prod_p (1 - \lambda_f(p)p^{-s} + \chi(p)p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Si on note

$$\xi_f(s) = \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right) \Gamma\left(\frac{k-1}{2} + s\right) L_f\left(\frac{k-1}{2} + s\right),$$

alors $\xi_f(s)$ est une fonction entière et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\xi_f(s) = i^k \bar{\eta} \overline{\xi_f(1-\bar{s})}.$$

où χ est un caractère primitif, on a $\eta = \tau(\bar{\chi})\lambda(N)N^{-k/2}$ avec $\tau(\chi)$ est la somme de Gauss de χ . Soit

$$L_N(s) = \prod_{p \nmid N} \det |1 - T(p)p^{-s} + \chi(p)p^{k-1-2s} I|^{-1},$$

où I est l'application identique agissant sur l'espace $S_k(N, \chi)$ et $T(p)$ désigne les opérateurs de Hecke définis ci-dessus. Soit

$$\xi_N(s) = N^{gs/2} (2\pi)^{-gs} \Gamma^g \left(\frac{k-1}{2} + s\right) L_N\left(\frac{k-1}{2} + s\right),$$

où le poids $k > 2$ et g est la dimension de l'espace $S_k(N, \chi)$. Alors, $\xi_N(s)$ est une fonction entière d'ordre 1. De plus, la fonction $\xi_N(s)$ vérifie

$$(38) \quad \xi_N(s, \chi) = i^k \eta \xi_N(1) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

où le produit est pris sur tous les zéros de $\xi_N(s)$ vérifiant $|\text{Im}(\rho)| < T$ pour $T \rightarrow \infty$. L'hypothèse de Riemann (RH) affirme que tous les zéros de $\xi_N(s)$ sont situés sur la ligne critique $\text{Re}(s) = 1/2$. Si $\mathcal{N}_{L_N}(T)$ compte le nombre de zéros de $L_N(s)$ dans le rectangle $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1$, $0 < \text{Im}(s) \leq T$ (selon les multiplicités), alors on a la formule suivante :

$$\mathcal{N}_{L_N}(T) = \frac{g}{2\pi} T \log T + c_1 T + O(\log T),$$

où

$$c_1 = \frac{g}{2\pi} \log \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi e} \right).$$

Posons

$$\lambda_{N,k}(n) = \sum_{\rho} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right],$$

avec

$$\sum_{\rho} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\operatorname{Im}(\rho)| \leq T}.$$

Le critère de Li dans le cas de fonctions L de Hecke : $\lambda_{N,k}(n) > 0$ pour tout n entier naturel non nul si et seulement si tout les zéros de $\xi_N(s)$ sont sur la droite critique $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.

Une formule arithmétique des coefficients $\lambda_{N,k}(n)$ est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 29. (Li, 2004) *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$(39) \quad \begin{aligned} \lambda_{N,k}(n) &= n \left(\log \frac{\sqrt{N}}{2\pi} - \gamma \right) - \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{m=1, (m,N)=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^{(k+1)/2}} B(m) (\log m)^{l-1} \\ &+ n \left(-\frac{2}{k+1} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{k+1}{l(2l+k+1)} \right) + \sum_{m=2}^n \binom{n}{m} (-1)^m \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(l + \frac{k-1}{2} \right)^m}, \end{aligned}$$

où

$$B(p^l) = \operatorname{Tr}(T(p^l)) - \chi(p)p^{k-1}\operatorname{Tr}(T(p^{l-2}))$$

pour $p \nmid N$ avec $\operatorname{Tr}(T(p^l))$ désigne la trace de l'opérateur de Hecke $T(p^l)$ agissant sur l'espace $S_k(N, \chi)$. Le second terme du côté droit de l'identité est interprété comme la limite

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{1 \leq m < X, (m,N)=1} \frac{\Lambda(m)}{m^{(k+1)/2}} B(m) (\log m)^{l-1}$$

qui existe.

Le deuxième terme de la partie droite peut être écrit comme suit

$$\sum_{m=1, (m,N)=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^{(k+1)/2}} B(m) L_{n-1}^1(\log m),$$

où L_{n-1}^1 est le polynôme de Laguerre de degré $n-1$. Une formule asymptotique pour les nombres $\lambda_{N,k}(n)$ équivalente à l'hypothèse de Riemann est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 30. (Lagarias, 2002) *On a*

$$RH \Leftrightarrow \lambda_{N,k}(n) = \frac{g}{2} n \log n + C_N n + O(\sqrt{n} \log n),$$

où

$$C_N = \frac{g}{2}(\gamma - 1) + \log \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)$$

et γ désigne la constante d'Euler.

Dans le but de calculer les coefficients de Li $\lambda_{N,k}(n)$, on a besoin de la formule des traces de Serre [123] qui est déduite de la formule des traces de Selberg-Eichler.

Lemme 31. *Pour tout entier $n \geq 1$, la trace des opérateurs de Hecke $T(n)$ agissant sur $S_k(N, \chi)$ sont donnée par*

$$\text{Tr}(T(n)) = \frac{k-1}{12} \psi(N) n^{\frac{k}{2}-1} \chi(\sqrt{n}) + O(N^{1/2} \tau_4(N)),$$

où

$$\psi(N) = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Écrivons les coefficients $\lambda_{N,k}(n)$ comme suit

$$\lambda_{N,k}(n) = \widetilde{\lambda}_{N,k}(n, M) + E_{M,k},$$

où

$$(40) \quad \begin{aligned} \widetilde{\lambda}_{N,k}(n, M) &= n \left(\log \frac{\sqrt{N}}{2\pi} - \gamma \right) + n \left(-\frac{2}{k+1} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{k+1}{l(2l+k+1)} \right) \\ &+ \sum_{m=2}^n \binom{n}{m} (-1)^m \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(l + \frac{k-1}{2})^m} - \sum_{2 \leq m \leq M, (m, N)=1} \frac{\Lambda(m)}{m^{(k+1)/2}} B(m) L_{n-1}^1(\log m) \end{aligned}$$

et

$$E_{M,k} = - \sum_{m > M, (m, N)=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^{(k+1)/2}} B(m) L_{n-1}^1(\log m).$$

Dans la suite, on a besoin de trouver M tel que $|E_M| \leq 10^{-d}$. Pour cela on utilise une estimation de polynômes de Laguerre établie par Koepf and Schmersau [53]

$$|L_n^\alpha(x)| < e^{x/2} [(n+\alpha)/x]^{\alpha/2},$$

pour $x \in [0, 4(n+\alpha)]$ où $n+\alpha > 0$ et α est un entier. Alors, on obtient

$$(41) \quad \begin{aligned} |E_{M,k}| &\leq \sqrt{\frac{n}{\log M}} \sum_{m > M}^{+\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^{k/2}} |B(m)| \\ &\leq \sqrt{\frac{n}{\log M}} \sum_{p^j > M}^{+\infty} \frac{\log p}{p^{jk/2}} |B(p^j)|. \end{aligned}$$

Grâce au Lemme 31 de Serre, on a $B(p^{2j+1}) = 0$ et

$$(42) \quad B(p^{2j}) = p^{2j(\frac{k}{2}-1)} (1-p) \# H_k^*(N) + O(\sqrt{N} \tau_4(N)).$$

Par conséquent, pour $k > 2$, on en déduit

$$\begin{aligned}
|E_{M,k}| &\leq \sqrt{\frac{n}{\log M}} \left[\#H_k^*(N) \sum_{p^{2j} > M} \frac{\log p}{p^{2j-1}} + \sqrt{N} \tau_4(N) \sum_{p^{2j} > M} \frac{\log p}{p^{jk}} \right] \\
&\leq \sqrt{\frac{n}{\log M}} \left[\#H_k^*(N) \sum_{p^j > \sqrt{M}} \frac{\log p}{p^{2j-1}} + \sqrt{N} \tau_4(N) \sum_{p^j > \sqrt{M}} \frac{\log p}{p^{jk}} \right] \\
&\leq \sqrt{\frac{n}{\log M}} \begin{cases} \frac{\#H_k^*(N) \log \sqrt{M}}{\sqrt{M}} + \frac{\sqrt{N} \tau_4(N) \log \sqrt{M}}{\sqrt{M}} & \text{si } \sqrt{M} + 1 \text{ est premier,} \\ \frac{\#H_k^*(N)}{\sqrt{M}} + \frac{\sqrt{N} \tau_4(N)}{\sqrt{M}} & \text{sinon} \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} \sqrt{n} \log \sqrt{M} \left[\frac{\#H_k^*(N) + \sqrt{N} \tau_4(N)}{\sqrt{M}} \right] & \text{si } \sqrt{M} + 1 \text{ est premier,} \\ \sqrt{n} \left[\frac{\#H_k^*(N) + \sqrt{N} \tau_4(N)}{\sqrt{M}} \right] & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{43}$$

D'ou, si $|E_{M,k}| \leq 10^{-d}$, alors

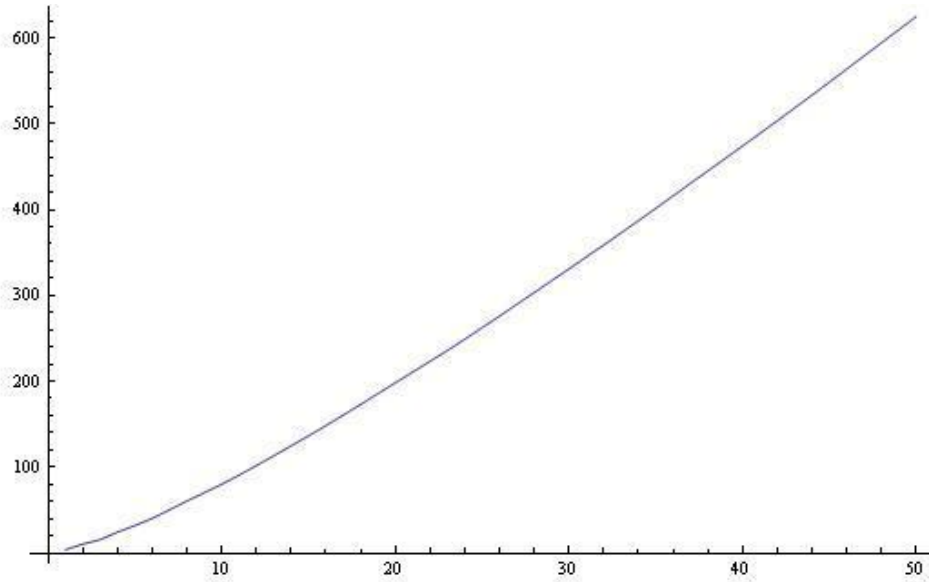
$$\begin{cases} \sqrt{n} \log \sqrt{M} \left[\frac{\#H_k^*(N) + \sqrt{N} \tau_4(N)}{\sqrt{M}} \right] \leq 10^{-d} & \text{si } \sqrt{M} + 1 \text{ est premier,} \\ \sqrt{n} \left[\frac{\#H_k^*(N) + \sqrt{N} \tau_4(N)}{\sqrt{M}} \right] \leq 10^{-d} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour notre calcul ci-dessous, on choisit

$$(44) \quad M = \begin{cases} n \left[\#H_k^*(N) + \sqrt{N} \tau_4(N) \right]^2 W_{-1}^2 \left(\frac{-10^{-d}}{\sqrt{n} [\#H_k^*(N) + \sqrt{N} \tau_4(N)]} \right) & \text{si } \sqrt{M} + 1 \text{ est premier,} \\ \left[\#H_k^*(N) + \sqrt{N} \tau_4(N) \right]^2 10^{2d} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où W_{-1} désigne la branche satisfaisant $W(x) \leq -1$ et $W(x)$ est la fonction W de Lambert qui représente l'inverse de la fonction $w \mapsto we^w$,

$$\#H_k^*(N) = \frac{k-1}{12} \psi(N) \quad \text{et} \quad \tau_4 \leq \tau(N)^4.$$

FIGURE 1. Case $N=12$ and $k=4$

$N = 12, k = 4$					
n	$\widetilde{\lambda}_{N,k}(n, M)$	n	$\widetilde{\lambda}_{N,k}(n, M)$	n	$\widetilde{\lambda}_{N,k}(n, M)$
1	3.861	18	173.054	35	401.511
2	10.362	19	185.601	36	415.999
3	15.503	20	198.097	37	430.508
4	24.159	21	210.561	38	445.017
5	31.902	22	223.112	39	459.534
6	40.232	23	235.890	40	474.087
7	50.239	24	248.977	41	488.718
8	60.430	25	262.360	42	503.462
9	70.198	26	275.957	43	518.339
10	80.054	27	289.658	44	533.350
11	90.561	28	303.380	45	548.478
12	101.701	29	317.099	46	563.691
13	113.143	30	330.844	47	578.961
14	124.675	31	344.674	48	594.264
15	136.344	32	358.646	49	608.332
16	148.290	33	372.788	50	624.939
17	160.562	34	387.090		

En se basant sur les calculs numériques faits sur l'exemple précédent qui est un élément de la classe de Selberg ainsi que le récent travail de Omar et Ouni [103] sur les fonctions L de Dirichlet, on conjecture que les coefficients de $\text{Li } \widetilde{\lambda}_F(n)$, où F est une fonction de la classe de Selberg, sont croissants en n .

6. LES τ -LI COEFFICIENTS ASSOCIÉS AUX FONCTIONS L AUTOMORPHES

Dans [70, Mazhouda, Rocky Mountain J. of Math (2017)], on introduit d'une façon similaire à celle de Freitas dans [21] les coefficients de Li étendus ou les τ -Li coefficients. Pour $\tau \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$,

soit

$$\lambda_n(\pi, \tau) := \sum'_{\rho \in Z(\pi)} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho - \tau} \right)^n \right).$$

La définition de $\lambda_n(\pi, \tau)$ pour $\tau = 1$ n'est pas identique à celle donnée par Lagarias dans [56]. Notons que $\lambda_n(\pi, 1) = \lambda_{-n}(\pi)$ suivant sa notation. La convergence de la somme sur les ρ est justifiée par le lemme suivant.

Lemme 32. *Soit $\tau \geq 1$. Alors, on a*

- a) $\lambda_n(\pi, \tau)$ est *-convergent pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b) Les parties réelles des sommes sont absolument convergentes pour tout $n \geq 1$.
- c)

$$\sum_{\rho \in Z(\pi, \tau)} \frac{1 + |\operatorname{Re}(\rho)|}{(1 + |\rho|)^2} < \infty.$$

Soit $\tau \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, considérons

$$\alpha_n(\pi, \tau) := \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{ds^n} [s^{n-1} \log \xi(s, \pi)]_{s=\tau}.$$

Soit $s_0 \neq 1$ un nombre réel. Notons $\varphi(s, \pi) = \xi\left(\frac{1}{s-1}, \pi\right)$ et $d_n(s_0, \pi)$ les coefficients dans le développement de la dérivée logarithmique de $\varphi(s, \pi)$ en s_0 .

$$\frac{\varphi'(s, \pi)}{\varphi(s, \pi)} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(s_0, \pi) (s - s_0)^n.$$

Notons de plus que pour $\tau \geq 1$, si $0 \notin Z(\pi)$ alors $\tau \notin Z(\pi)$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_n(\pi, \tau) &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{ds^n} [s^{n-1} \log \xi(s, \pi)]_{s=\tau} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{d^k}{ds^k} s^{n-1} \right) \left(\frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} \log \xi(s, \pi) \right) \right]_{s=\tau} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} s^{n-1-k} \left(\frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} \log \xi(s, \pi) \right) \right]_{s=\tau}. \end{aligned}$$

Rappelons aussi que pour $s \notin Z(\pi)$

$$(45) \quad \frac{\xi'(s, \pi)}{\xi(s, \pi)} = b(\pi) + \sum'_{\rho \in Z(\pi)} \left[\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right],$$

avec

$$b(\pi) = - \sum'_{\rho \in Z(\pi)} \frac{1}{\rho}.$$

Donc

$$\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[\frac{\xi'(s, \pi)}{\xi(s, \pi)} \right] = - \sum'_{\rho \in Z(\pi)} \frac{(n-1)!}{(\rho - s)^n}.$$

Puisque $\tau \geq 1$ n'appartient pas à $Z(\pi)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha_n(\pi, \tau) &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} s^{n-1-k} \left(\frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} \log \xi(s, \pi) \right) \right]_{s=\tau} \\
&= -\frac{1}{(n-1)!} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} s^{n-1-k} \sum_{\rho \in Z(\pi)}' \frac{(n-1-k)!}{(\rho-s)^{n-k}} \right]_{s=\tau} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \tau^{n-k-1} \sum_{\rho \in Z(\pi)}' \frac{1}{(\rho-\tau)^{n-k}} \\
&= -\frac{1}{\tau} \sum_{\rho \in Z(\pi)}' \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{\tau}{\rho-\tau} \right)^{n-k} \\
&= -\frac{1}{\tau} \sum_{\rho \in Z(\pi)}' \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\tau}{\rho-\tau} \right)^{n-k} - 1 \right] \\
&= -\frac{1}{\tau} \sum_{\rho \in Z(\pi)}' \left[\left(1 + \frac{\tau}{\rho-\tau} \right)^n - 1 \right] \\
&= \frac{1}{\tau} \sum_{\rho \in Z(\pi)}' \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho-\tau} \right)^n \right] \\
(46) \quad &= \frac{1}{\tau} \lambda_n(\pi, \tau).
\end{aligned}$$

Le même argument utilisé ci-dessus donne

$$(47) \quad \alpha_n(\pi, \tau) = \frac{1}{\tau^{n+1}} d_{n-1}(1 - 1/\tau, \pi).$$

Le théorème principal dans [70, Mazhouda, Rocky Mountain J. of Math (2017)] qui étend le résultat de Freitas [21, Theorem 1] à une large classe de séries de Dirichlet (les fonctions L automorphes) est le suivant.

Théorème 33. [70, Mazhouda, Rocky Mountain J. of Math (2017)] *Soit $\tau \geq 1$ un nombre réel. Alors, on a*

$$1 - \frac{\tau}{2} \leq \operatorname{Re}(\rho) \leq \frac{\tau}{2} \iff \operatorname{Re}(\lambda_n(\pi, \tau)) \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

où ρ désigne les zéros de $\xi(s, \pi)$.

Remarquons que si $\tau = 1$, on retrouve la définition des coefficients de Li de fonctions L automorphes donnée par Lagarias dans [56]. La positivité de $\operatorname{Re}(\lambda_n(\pi, \tau))$ pour d'autres valeurs de τ est équivalente à la non existence de zéros dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \tau/2$. En particulier, si $\tau \leq 1$, on obtient une région contenant la ligne critique. Dans ce dernier cas, quelques coefficients $\operatorname{Re}(\lambda_n(\pi, \tau))$ doivent être négatifs. D'autre part, pour $\tau \geq 2$, on est en dehors de la bande critique et par suite les coefficients $\operatorname{Re}(\lambda_n(\pi, \tau))$ doivent être tous positifs.

Dans le but de démontrer le Théorème 33, on a besoin du lemme suivant qui est une adaptation du théorème de Bombieri et lagarias [5, Theorem 1].

Lemme 34. Soient $\tau > 0$ un nombre réel, R un ensemble de nombres complexes tels que $\tau \notin R$ et

$$\sum_R \frac{1 + |\operatorname{Re}(\rho)|}{(1 + |\rho|)^2} < \infty.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- a) $\operatorname{Re}(\rho) \leq \frac{\tau}{2}$ pour tout $\rho \in R$.
- b) $\sum_R \operatorname{Re} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho - \tau} \right)^n \right] \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $c(\epsilon)$, telle que

$$\sum_R \operatorname{Re} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho - \tau} \right)^n \right] \geq -c(\epsilon)e^{\epsilon n}$$

pour tout $n \geq 1$.

La preuve du lemme 34 est identique à celle de Bombieri et Lagarias dans [5, Theorem 1] avec $R_\tau = \{\frac{\rho}{\tau} / \rho \in R\}$ où $\frac{\rho}{\tau}$ est de même multiplicité dans R_τ que ρ dans R .

Une formule arithmétique de coefficients $\lambda_n(\pi, \tau)$ est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 35. [70, Mazhouda, Rocky Mountain J. of Math (2017)] Soit π une représentation parabolique (cuspidale) automorphe et irréductible de $GL(N)$ sur \mathbb{Q} . Alors, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \lambda_n(\pi, \tau) = & \delta(\pi) \left[2 + \frac{(-1)^{n+1}}{(\tau - 1)^n} \right] + \frac{n\tau}{2} \log Q(\pi) - n\tau N \left(\gamma + \frac{1}{2} \log \pi \right) \\ & + \frac{n\tau}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{-2}{\tau + k_j(\pi)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tau + k_j(\pi)}{l(2l + \tau + k_j(\pi))} \right) \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{k=2}^n \binom{k}{n} (-\tau)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\tau + k_j(\pi) + 2m)^k} \\ (48) \quad & + \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \frac{(-\tau)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda_\pi(m) (\log m)^{k-1}}{n^\tau}, \end{aligned}$$

où

$$\delta(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = \pi_{\text{tiv}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, une formule asymptotique de coefficients $\lambda_n(\pi, \tau)$ est établie.

Théorème 36. [70, Mazhouda, Rocky Mountain J. of Math (2017)] Pour toute représentation cuspidale automorphe unitaire et irréductible π sur $GL(N)$, on a

$$\begin{aligned} \lambda_n(\pi, \tau) = & \frac{N\tau}{2} n \log n + \left\{ \frac{N\tau}{2} (\gamma - 1 - \log \pi) + \frac{\tau}{2} \log Q(\pi) + N \frac{\tau}{2} \log \left(\frac{\tau}{2} \right) \right\} n \\ (49) \quad & + O(N) + S_L(\pi, \tau), \end{aligned}$$

où

$$S_L(\pi, \tau) := \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \tau^k l_{k-1}(\pi, \tau),$$

γ est la constante d'Euler et la constante dans le terme d'erreur est absolue.

Partie 2. Le critère de Cardon et Robert

Dans [83, Mazhouda-Omar, Analysis (2013)], on reformule l'hypothèse de Riemann pour une large classe de séries de Dirichlet (classe de fonctions L automorphes) en utilisant la théorie des polynômes orthogonaux.

Commençons par rappeler des résultats basiques sur les fonctions L principales $L(s, \pi)$ associées à des représentations automorphes paraboliques irréductibles et unitaires de $GL(N)$ comme celles définies par Rudnick et Sarnak [115]. Ces fonctions L sont associées à $GL(n, \mathbb{Q})|GL(n, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ et sont notées par $L(s, \pi, \rho)$, où $l_G = GL(N, \mathbb{C})$ désigne le L -groupe de Langland et $\rho : l_G \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ est la représentation standard. Pour les représentations triviales π_{triv} de $GL(1)$, on a la fonction L automorphe complétée $\Lambda(s, \pi_{triv}) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$. Cette fonction admet des pôles simples en $s = 0$ et $s = 1$. À part cette représentation, toutes les autres $\Lambda(s, \pi)$ sont des fonctions entières. Chaque fonction L automorphe complétée $\Lambda(s, \pi)$ admet une factorisation en produit eulérien

$$\Lambda(s, \pi) = Q(\pi)^{s/2} L_{\infty}(s, \pi) L(s, \pi).$$

Ici $Q(\pi)$, est un entier positif appelé *conducteur* de la représentation π et le *facteur archimédien* est

$$L_{\infty}(s, \pi) = \prod_{k=1}^N \Gamma_{\mathbb{R}}(s + k_j(\pi)),$$

où $k_j(\pi)$ sont des constantes et

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2} \Gamma(s/2).$$

La fonction $L(s, \pi)$ est définie par le produit eulérien

$$L(s, \pi) = \prod_p \prod_{j=1}^N (1 - \alpha_{p,j}(\pi) p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\pi) n^{-s}.$$

Le produit eulérien et sa série de Dirichlet associée convergent absolument dans le demi-plan $Re(s) > 1$. La conjecture de **Ramanujan-Peterson** annonce que les paramètres locaux $|\alpha_{p,j}(\pi)|$ sont de valeurs absolues au plus un. Pour tout $n \geq 1$, $|a_n(\pi)| \leq d(n) n^{N/2}$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n (voir [37, §5.11 and 5.12]). La fonction $\Lambda(s, \pi)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(s, \pi) = \epsilon(\pi) \Lambda(1 - s, \tilde{\pi}),$$

Où $\epsilon(\pi)$ est une constante de valeur absolue un, et $\tilde{\pi}$ désigne la représentation contragradiente. Le facteur archimédien $\Gamma_{\mathbb{R}}(s + k_j(\pi))$ dans le produit eulérien de la fonction $\Lambda(s, \pi)$ satisfait $Re(k_j(\pi)) > -1/2$ et $L_{\infty}(s, \pi) = \overline{L_{\infty}(\bar{s}, \pi)}$ (voir [115]). Les zéros de $\Lambda(s, \pi)$ sont tous situés dans la bande critique $0 < Re(s) < 1$. En particulier, la fonction $\Lambda(s, \pi)$ ne s'annule pas sur les lignes $Re(s) = 0$ et $Re(s) = 1$ (voir [37, Theorem 5.42]). Soit $N_{\pi}(T)$ le nombre de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de $L(s, \pi)$ tels que $0 \leq \beta \leq 1$ et $|\gamma| \leq T$, alors (voir [37, Theorem 5.8])

$$(50) \quad N_{\pi}(T) = \frac{N}{2\pi} T \log T + C(\pi) T + O(\log T),$$

où $C(\pi) = \frac{1}{\pi} \log Q(\pi) - \frac{N}{2} (1 + \log 2\pi)$. On définit la fonction $\xi(s, \pi)$ associée à π comme suit

$$\xi(s, \pi) = s^{-e(0, \pi)} (s - 1)^{-e(1, \pi)} \left(\frac{1}{\sqrt{(-1)^{e(\frac{1}{2}, \pi)} \epsilon(\pi)}} \Lambda(s, \pi) \right),$$

où $e(s_0, \pi)$ désigne l'ordre de zéro ou pôle de $\Lambda(s, \pi)$ en $s = s_0$, avec les pôles sont d'ordres négatifs. Par l'équation fonctionnelle, on a $e(0, \pi) = e(1, \pi)$. Cette définition assure que la fonction $\xi(s, \pi)$

est holomorphe et ne s'annule pas en $s = 0$ et $s = 1$. De plus, dans la définition précédente, la racine carrée doit être choisie telle que

$$\sqrt{(-1)^{e(\frac{1}{2}, \pi)} \epsilon(\pi)} \sqrt{(-1)^{e(\frac{1}{2}, \tilde{\pi})} \epsilon(\tilde{\pi})} = 1.$$

Pour la représentation triviale π_{triv} de $GL(1)$, on a $e(0, \pi_{triv}) = e(1, \pi_{triv}) = -1$ et $\xi(s, \pi_{triv}) = 2\xi(s)$. On prend cette convention si on veut obtenir une fonction entière dans tous les cas, où on déplace les pôles en $s = 0$ et $s = 1$ pour le cas π_{triv} . Notons que la fonction $\xi(s, \pi)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$\xi(s, \pi) = (-1)^k \xi(1 - s, \tilde{\pi}),$$

où $k = e(\frac{1}{2}, \pi) = e(\frac{1}{2}, \tilde{\pi})$ est l'ordre de zéro de $\xi(s, \pi)$ en $s = 1/2$. Elle est à valeur réelle sur la ligne critique $Re(s) = 1/2$. Soit $Z(\pi)$ l'ensemble des zéros de $\xi(s, \pi)$ (compté avec multiplicité) qui est la même que de la fonction $\Lambda(s, \pi)$ sauf peut-être en $s = 0$ et $s = 1$. L'ensemble $Z(\pi)$ est invariant sous l'application $\rho \mapsto 1 - \bar{\rho}$. Notons aussi que la fonction $\xi(s, \pi)$ est entière d'ordre 1 et de type maximal. Elle est bornée dans la bande $-B < Re(s) < B$ pour tout B fini et décroît rapidement quand $|\text{Im}(s)| \rightarrow \infty$. La fonction $\xi(s, \pi)$ admet la factorisation de Hadamard suivante

$$\xi(s, \pi) = e^{C(\pi) + iD(\pi)s} \prod_{\rho \notin \{0,1\}} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}},$$

où la constante $D(\pi)$ dans la dernière équation satisfait (voir [37, Theorem 5.6])

$$Re(D(\pi)) = - \sum_{\rho} Re\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Définissons la fonctions $E(z) = \xi(1/2 + iz, \pi)$. Puisque les zéros de $E(z)$ sont situés dans la bande $-1/2 < \text{Im}(z) < 1/2$, alors $E(z)$ est réelle pour tout réel z et si ρ est un zéro de $E(z)$, alors $1 - \bar{\rho}$ l'est aussi avec la même multiplicité. Pour $z = x + iy$ dans la région $x \geq 0$, $-1/2 \leq y \leq 1/2$, soit la fonction analytique $f(z)$ satisfaisant

$$(51) \quad f(z) \text{ est réelle pour tout } z \text{ réel, } Re(f(z)) > 0, |f(x + iy)| < e^{-cx},$$

où c est une constante positive. Pour $T \geq 0$, soit

$$F(T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_T} \frac{E'(z)}{E(z)} f(z) dz,$$

avec γ_T est le bord orienté positivement de la région $0 \leq x \leq T$, $-1/2 \leq y \leq 1/2$. Notons les zéros de $E(z)$ dans la région $x > 0$, $0 \leq y < 1/2$, par $\alpha_k + i\beta_k$ où $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$. Sachant que les zéros complexes (non réels) de $E(z)$ apparaissent en paire $(\rho, 1 - \bar{\rho})$, alors si $T \neq \alpha_k$ pour tout k , on obtient

$$(52) \quad F(T) = \sum_{\substack{\alpha_k < T \\ \beta_k = 0}} f(\alpha_k) + \sum_{\substack{\alpha_k < T \\ \beta_k > 0}} \{f(\alpha_k + i\beta_k) + f(\alpha_k - i\beta_k)\}.$$

Pour $T < 0$, soit $F(T) = -F(-T)$. Si $f = 1$, alors $F(T) = N_\pi(T)$. On définit le produit intérieur par l'intégrale de Riemann-Stieltjes suivante

$$(53) \quad \langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)q(x) dF(x),$$

où les polynômes $p(x)$ et $q(x)$ sont à coefficients réels. En appliquant la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt aux polynômes $1, x, x^2, \dots$, on obtient une famille de polynômes

orthogonaux $\{P_n(x)\}$ où le degré de $P_n(x)$ est n .

Dans [83, Mazhouda-Omar, Analysis (2013)], on montre le résultat suivant.

Théorème 37. [83, Mazhouda-Omar, Analysis (2013)] *L'hypothèse de Riemann avec zéros simples est vraie si et seulement si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}(z)}{P_{2n}(0)} = \frac{\xi(1/2 + iz, \pi)}{\xi(1/2, \pi)}.$$

On note que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}(z)}{P_{2n}(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_{2n+1}(z)}{zP'_{2n+1}(0)}.$$

Cette approche a été traitée par Cardon et Roberts [9] dans le cas de la fonction zêta de Riemann.

Une question très intéressante peut être posée comme suite à ce travail, c'est déterminer avec précision le terme d'erreur

$$\frac{P_{2n}(z)}{P_{2n}(0)} - \frac{\xi(1/2 + iz)}{\xi(1/2)}.$$

Si l'hypothèse de Riemann est vraie, la preuve montre que la dernière quantité tend vers 0. Cependant, on ne sait pas exactement avec quelle rapidité elle tend vers 0. Peut-être, on pourrait trouver des résultats sur la rapidité dont les zéros de polynômes orthogonaux s'approchent de leurs limites qui peuvent être appliqués à notre contexte. En fait, nous nous attendons à ce que la recherche d'une majoration très précise du terme d'erreur nécessite un argument beaucoup plus profond que celui utilisé dans ce travail.

Partie 3. Le produit régularisé des zéros

Dans [72, Mazhouda, J. Ramanujan Math. Soc (JRMS) (2012)], on donne une autre approche de l'hypothèse de Riemann pour les fonctions L de la classe (ou sous-classe) de Selberg en utilisant le produit régularisé des zéros non-triviaux défini ci-dessous. Remarquons d'abord que le produit eulérien de toute fonction $F \in \mathcal{S}$ peut s'écrire sous la forme standard

$$F(s) = \prod_p F_p(s), \quad \text{où } F_p(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_F(p^m)}{p^{ms}}.$$

Kaczorowski et Perelli [49] conjecturent que les p -facteurs F_p sont de type polynômiaux, i. e.

$$(54) \quad F_p(s) = \prod_{i=1}^{\nu_F} \left(1 - \frac{\alpha_i(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

avec $|\alpha_i(p)| \leq 1$ et pour tout i et p , $|\alpha_i(p)| = 1$ pour $i = 1, \dots, \nu_F$, pour tout (sauf un nombre fini) nombre premier p . Une fonction $F \in \mathcal{S}$ admet un produit eulérien polynômial si elle satisfait (54). Le semi-groupe des fonctions $F \in \mathcal{S}$ avec produit eulérien polynômial est noté par \mathcal{S}^{poly} , ainsi conjecturalement $\mathcal{S}^{poly} = \mathcal{S}$. Le nombre entier positif ν_F est appelé le degré d'Euler de $F(s)$. Conjecturalement $\nu_F = d_F$ pour toute fonctions de \mathcal{S}^{poly} , et cette conjecture est vraie pour toutes les fonctions L classiques de \mathcal{S}^{poly} connues (fonctions L de Hecke, fonction zêta de Dedekind,...). On définit la fonction ξ_F comme suit

$$\xi_F(s) = s^{m_F} (s-1)^{m_F} \phi_F(s),$$

où

$$\phi_F(s) = F(s) Q_F^s \prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j).$$

La fonction ξ_F est une fonction entière d'ordre 1 et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\xi_F(s) = \overline{\omega \xi_F(1 - \bar{s})}.$$

Si $N_F(T)$ désigne le nombre de zéros non-triviaux de $F \in \mathcal{S}$ dans le rectangle $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$, $0 < \operatorname{Im}(s) \leq T$ (avec multiplicités), alors on a la formule suivante

$$N_F(T) = \frac{d_F}{2\pi} T \log T + c_1 T + O(\log T),$$

où

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} (\log q_F - d_F (\log 2\pi + 1)),$$

$$q_F = \frac{(2\pi)^{d_F} Q_F^2}{\beta} \quad \text{et} \quad \beta = \prod_{j=1}^r \lambda_j^{-2\lambda_j}$$

par analogie avec la formule de Riemann-von Mangoldt dans le cas de la fonction zêta de Riemann ζ , l'exemple typique de la classe de Selberg \mathcal{S} . Notons aussi N_F l'ensemble de tous les zéros non-triviaux de la fonction $F \in \mathcal{S}$. Soit $z \in \mathbb{C}$, où $z - \rho \notin \mathbb{R}^-$ pour $\rho \in N_F$. Ici et partout dans cette section, on suppose que $0 \in \mathbb{R}^-$ et on définit $z \mapsto z^{-s}$ d'une façon standard en utilisant la branche principale du logarithme avec $\arg(z) \in [-\pi, \pi]$ dans le plan $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. La fonction

$$(55) \quad \mathcal{H}_F(s, z) = \sum_{\rho \in N_F} \left(\frac{z - \rho}{2\pi} \right)^{-s} := \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\rho \in N_F(T)} \left(\frac{z - \rho}{2\pi} \right)^{-s}.$$

est bien définie par la série absolument convergente pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ (ce déduit de la Proposition 38 ci-dessous). Par la même proposition, on prouve que pour z fixé, elle se prolonge analytiquement en une fonction holomorphe $s \mapsto \mathcal{H}_F(s, z)$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Soit r un entier positif et considérons la fonction

$$(56) \quad \phi_{F,r}(z) := \exp \left(-\frac{d}{ds} \mathcal{H}_F(s, z) \Big|_{s=1-r} \right).$$

Pour $r = 1$, le membre droit de l'équation (56) est appelé le zêta-régularisée de la suite $\left\{ \left(\frac{z-\rho}{2\pi} \right) \right\}_{\rho \in N_F}$. Pour $r > 1$, la fonction $\phi_{F,r}$ est appelé produit régularisé de profondeur r (déterminants de profondeur supérieure) de la suite $\left\{ \left(\frac{z-\rho}{2\pi} \right)^{-s} \right\}_{\rho \in N_F}$. Notons que dans le cas $F = \zeta$ et $r = 1$, on a

$$\phi_{\zeta,1}(z) := \phi_{\zeta}(z) = \exp \left(-\frac{d}{ds} \mathcal{H}_{\zeta}(s, z) \Big|_{s=0} \right) = \prod_{\rho \in N_{\zeta}} \left(\frac{z - \rho}{2\pi} \right).$$

Deninger [14, Theorem 3.3] a prouvé que

$$(57) \quad \prod_{\rho \in N_{\zeta}} \left(\frac{z - \rho}{2\pi} \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \prod_{\rho \in N_{\zeta}(T)} \left(\frac{z - \rho}{2\pi} \right) = 2^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-2} \pi^{-\frac{5}{2}} \Gamma \left(\frac{z}{2} \right) \zeta(z) z(z-1) = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} \pi^2} \xi_{\zeta}(z).$$

En utilisant les formules explicites de Weil érites dans le contexte de la classe de Selberg [77, Proposition 1], on en déduit le résultat suivant.

Proposition 38. [72, Mazhouda, J. Ramanujan Math. Soc (JRMS) (2012)] *Soit $F \in \mathcal{S}^{\text{poly}}$ une fonction ne s'annulant pas en $s = 0$. Alors, pour $\operatorname{Re}(z) > 1$, on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_F(s, z) &= m_F \left(\left(\frac{2\pi}{z} \right)^s + \left(\frac{2\pi}{z-1} \right)^s \right) + \frac{(2\pi)^s}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{F'}{F}(z-t) t^{-s} dt \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\nu} (2\pi \lambda_j)^s \zeta(s, \lambda_j z + \mu_j), \end{aligned}$$

où C désigne le contour constitué du bord inférieur de la coupe de $-\infty$ à $-a$, le cercle $t = ae^{i\theta}$, où $-\pi \leq \theta \leq \pi$ et le bord supérieur de la coupe de $-a$ à $-\infty$ avec a désigne une constante qui dépend de z .

Considérons le poly-logarithme de degré r : $Li_r(z) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^r}$ défini pour $|z| < 1$, $K_r(z) := \exp(-Li_r(z))$ et un "poly-fonction L " $F^{(r)}$. La fonction $F^{(r)}$ est définie par le produit eulérien suivant

$$F^{(r)}(s) = \prod_{i=1}^{\nu_F} F_p^{(r,i)}(s), \quad \text{où } F_p^{(r,i)}(s) = \prod_p K_r \left(\frac{\alpha_i(p)}{p^s} \right)^{-(\log p)^{1-r}}.$$

Le produit converge absolument pour $Re(s) > 1$ ².

Une expression explicite de $\phi_{F,r}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$ est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 39. [72, Mazhouda, J. Ramanujan Math. Soc (JRMS) (2012)] *Soit $F \in \mathcal{S}^{poly}$ une fonction ne s'annulant pas en $s = 0$. Alors, pour $Re(z) > 1$, on a*

$$\begin{aligned} \phi_{F,r}(z) &= \left(\frac{z}{2\pi} \right)^{m_F \left(\frac{z}{2\pi} \right)^{r-1}} \left(\frac{z-1}{2\pi} \right)^{m_F \left(\frac{z-1}{2\pi} \right)^{r-1}} F^{(r)}(z)^{(-1)^{r-1} (r-1)! (2\pi)^{1-r}} \\ &\times \prod_{j=1}^{\nu} (2\pi \lambda_j)^{-\left(\frac{(2\pi \lambda_j)^{1-r}}{r} B_r(\lambda_j z + \mu_j) \right)} \Gamma_r(\lambda_j z + \mu_j)^{(2\pi \lambda_j)^{1-r}}, \end{aligned}$$

où $B_r(z)$ est le r -ième polynôme de Bernoulli et Γ_r désigne la fonction gamma de Milnor de degré r définie par

$$\Gamma_r(z) := \exp \left(\frac{d}{ds} \zeta(s, z) \Big|_{s=1-r} \right),$$

avec $\zeta(s, z) := \sum_{m=0}^{\infty} (m+z)^{-s}$ est la fonction zêta d'Hurwitz.

Posons $Q_1 = \frac{Q_F}{(2\pi \lambda_j)^{d_F/2}}$, $\mu = \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j$ et $\phi_F(z) = \phi_{F,1}(z)$. De l'équation (55), on a

$$\phi_F(z) = \exp \left(-\frac{d}{ds} \mathcal{H}_F(s, z) \Big|_{s=0} \right) = \prod_{\rho \in N_F} \left(\frac{z-\rho}{2\pi} \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \prod_{\rho \in N_F(T)} \left(\frac{z-\rho}{2\pi} \right).$$

Grâce aux égalités $B_1(z) = z - \frac{1}{2}$ et $\Gamma_1(z) = \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}}$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 40. *Soit $F \in \mathcal{S}^{poly}$ une fonction ne s'annulant pas en $s = 0$. Alors, pour $Re(z) > 1$, on a*

$$\prod_{\rho \in N_F} \left(\frac{z-\rho}{2\pi} \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \prod_{\rho \in N_F(T)} \left(\frac{z-\rho}{2\pi} \right) = \frac{Q_1^{-z} \xi_F(z)}{(2\pi)^{2m_F - \mu} \left(\prod_{j=1}^{\nu} \lambda_j^{\frac{1}{2} - \mu_j} \right)}.$$

Soit Ω l'ensemble des nombres complexes ne s'écrivant pas sous la forme $\rho - \lambda$, avec $\rho \in N_F$ et $\lambda \geq 0$. Par récurrence sur r et en utilisant la formule suivante

$$\frac{d}{dz} L_{i_r}(z) = \frac{1}{z} L_{i_{r-1}}(z),$$

on en déduit le résultat suivant.

Lemme 41. *Soit $F \in \mathcal{S}^{poly}$. Pour $Re(s) > 1$, on a*

$$\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \log F^{(r)}(s) = (-1)^{r-1} \log F(s).$$

². Notons que si $r = 1$, $F^{(1)}(s) = \prod_{i=1}^{\nu_F} F_p^{(1,i)}(s)$. Puisque $L_{i_r}(z) = -\log(1-z)$ et $K_1(z) = (1-z)$, on obtient $F^{(1)}(s) = F(s)$

Grâce au Lemme 41 et par récurrence encore une fois sur r , on établit le résultat suivant.

Corollaire 42. ³ Soient $F \in \mathcal{S}^{poly}$ une fonction ne s'annulant pas en $s = 0$ et $Re(a) > 1$. Alors, pour $r \geq 2$, on a

$$(58) \quad F^{(r)}(s) = D^{(r)}(s, a) \exp \left[\int_a^s \int_a^{\xi_{r-1}} \dots \int_a^{\xi_2} \log F(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{r-1} \right]^{(-1)^{r-1}},$$

où

$$D^{(r)}(s, a) = \prod_{i=0}^{r-2} (F^{(r-i)}(a))^{\frac{(-1)^k}{k!} (s-a)^k}$$

et le contour dans chaque intégrale est contenu dans Ω .

Soit Δ l'ensemble de nombres complexes ne s'écrivant pas sous la forme $-\frac{\mu_j}{\lambda_j} - \lambda$ pour $\lambda \geq 0$. Puisque la fonction gamma de Milnor Γ_r est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, par le Corollaire 42, l'expression de $\phi_{F,r}(z)$ est valide pour $z \in (\Omega \cap \Delta = \Omega)$.

Une **reformulation de l'hypothèse de Riemann généralisée (HRG)** pour F est donnée dans le corollaire suivant.

Corollaire 43. [72, Mazhouda, J. Ramanujan Math. Soc (JRMS) (2012)] Soit $F \in \mathcal{S}^{poly}$ une fonction ne s'annulant pas en $s = 0$. Alors

$$HRG \Leftrightarrow (s-1)^{-m_F(s-1)} F^{(2)}(s) \text{ est une fonction holomorphe pour } Re(s) > \frac{1}{2}.$$

Partie 4. Autres travaux

7. MOMENTS DE FONCTIONS L

L'outil standard dans l'étude des propriétés analytiques des fonctions L est l'équation fonctionnelle approchée, qui exprime les fonctions L comme une somme de deux séries de Dirichlet contenant les coefficients de Dirichlet de $F(s)$ multipliés par une fonction convenable. Pour ce faire, on écrit pour toute fonction $F(s)$ de la classe de Selberg

$$F(s) = \sum_{m \leq X} \frac{a_F(m)}{m^s} \exp \left(- \left(\frac{m}{X} \right)^t \right) + H_F(s) \sum_{n \leq Y} \frac{\overline{a_F(n)}}{n^{1-s}} + \text{reste.}$$

où

$$H_F(s) = \omega Q^{1-2s} \prod_{j=1}^r \frac{\Gamma(\lambda_j(1-s) + \overline{\mu_j})}{\Gamma(\lambda_j s + \mu_j)}.$$

Ici le produit XY dépend des paramètres de l'équation fonctionnelle. La situation avec les moments quadratiques de $F \in \mathcal{S}$ sur la droite critique $s = 1/2$ est la suivante : Le cas classique $d = 1$ est bien connu, puisque les éléments de degré un de \mathcal{S} sont la fonction zêta de Riemann et les fonctions L de Dirichlet (voir [48] ou [67] pour un résumé sur les moments de quelques fonctions L). Notons également que Kaczorowski et Perelli en 2010 démontrent la non existence de fonctions L de degré $1 < d < 2$. Tandis que pour $d \geq 2$, on ignore la structure de \mathcal{S} . En outre, il semble qu'il n'y ait pas de formules asymptotiques générales déclarées pour les moments quadratiques de $|F(1/2 + it)|$ pour tout $F \in \mathcal{S}$ sauf pour certains exemples comme $F = \zeta^2$ (voir le livre d'Ivić [36]).

³. Puisque log est une fonction holomorphe sur Ω , l'expression dans le dernier corollaire donne un prolongement analytique de $F^{(r)}$ à Ω .

Dans [81, Mazhouda-Omar, Proceedings of the conference, Würzburg (2009)], on donne une formule asymptotique des moments quadratiques d'une fonction $F(s) \in \mathcal{S}$.

Théorème 44. [81, Mazhouda-Omar, Proceedings of the conference, Würzburg (2009)] *Soit $F \in \mathcal{S}$. Alors*

$$\int_0^T \left| F\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \ll_{F,\delta} T^{\frac{d}{2} + \delta},$$

où δ est une constante positive arbitraire.

Plus précisément, grâce au théorème de moments de Montgomery [95], on montre le résultat suivant.

Théorème 45. [81, Mazhouda-Omar, Proceedings of the conference, Würzburg (2009)] *Soit $F \in \mathcal{S}$ satisfaisant*

$$\sum_{n \leq X} |a_F(n)|^2 \ll kX(\log X)^M,$$

où k est une constante positive et M est un entier naturel arbitraire. Alors, on a

$$\int_0^T \left| F\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \ll_M c_F T^{\frac{d}{2}} (\log T)^{M+1},$$

où $c_F = k(Q_1^4 + 1)d^{2(M+1)}$.

La situation est différente pour les moments quadratiques des fonctions L de la classe de Selberg dans la bande $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$. Rappelons que le résidu de $\frac{F(s)x^s}{s}$ en $s = 1$ est de la forme $xP_F(\log x)$, où P_F est un polynôme de degré $m_F - 1$. Considérons la fonction $\Delta_F(x)$ définie par

$$\Delta_F(x) = \sum_{n \leq x} a_F(n) - xP_F(\log x),$$

pour tout $x > 1$. Soit $\alpha \geq 0$, supposons que F satisfait les conditions suivantes

$$(59) \quad \Delta_F(X) = O(X^{\alpha+\epsilon})$$

et

$$(60) \quad \int_X^{2X} |\Delta_F(x)|^2 dx = O(X^{1+2\alpha+\epsilon}).$$

En fait, les estimations (59) et (60) sont prouvées par Anne de Roton [110, Theorem 2.1 and 2.2] sous certaines conditions pour une classe étendue de la classe de Selberg.

Théorème 46. [81, Mazhouda-Omar, Proceedings of the conference, Würzburg (2009)] *Soit $F \in \mathcal{S}$ satisfaisant l'hypothèse du Théorème 45 et les équations (59) et (60). Alors, pour $\max\{\alpha, \frac{1}{2}\} < \sigma \leq 1$, $\alpha \geq 0$ et tout $\epsilon > 0$, on a*

$$\int_0^T |F(\sigma + it)|^2 dt = T \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_F(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O_{\epsilon,F} \left(T^{\frac{d(1-\sigma)}{(1-\alpha)} + \epsilon} (\log T)^M \right).$$

8. COEFFICIENTS DE FOURIER DE FONCTIONS L

8.1. Équirépartition des coefficients de Fourier de fonctions L . Soit Ω un espace compact muni d'une mesure de Radon positive μ de masse 1. Soit L une suite d'indices tendant vers $+\infty$ et, pour tout $\lambda \in L$, soit I_λ un ensemble fini non vide paramétrant une suite $x_\lambda = (x_{i,\lambda})_{i \in I_\lambda}$. On dit

que la famille $\{x_\lambda, \lambda \in L\}$ est équirépartie pour la mesure μ si, pour toute fonction f appartenant à l'ensemble $C(\Omega)$ des fonctions réelles continues sur Ω , on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#I_\lambda} \sum_{i \in I_\lambda} f(x_{i,\lambda}) = \int_{\Omega} f(x) d\mu.$$

On peut remplacer $C(\Omega)$ par n'importe quelle base de polynômes réels. Il en résulte assez clairement que si ϕ est un difféomorphisme C^1 par morceaux de Ω dans Ω' et si $\{x_\lambda, \lambda \in L\}$ est équirépartie pour la mesure μ alors la famille $\{\phi(x_\lambda), \lambda \in L\}$ de Ω' est équirépartie pour la mesure image $\phi * \mu$ définie pour tout ouvert $U \subset \Omega'$ par $\phi * \mu(U) = \mu(\phi^{-1}(U))$ et qui s'intègre en

$$\int f(t) \phi * \mu(t) = \int f(\phi(t)) d\mu(t).$$

Sarnak [117], puis Serre [123] et Conrey, Duke et Farmer [13] ont prouvé le résultat suivant concernant la répartition des coefficients de Fourier de formes primitives. Si N est un entier et si k est un entier pair, notons $H_k^*(N)$ l'ensemble des formes primitives de poids k sur $\Gamma_0(N)$. Si $f \in H_k^*(N)$, elle a un développement de Fourier qu'on note

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} e^{2i\pi n z}$$

Un résultat de Deligne implique que $|\lambda_f(n)|$ est majorée par le nombre de diviseurs $\tau(n)$ de n . Fixons un entier k et un nombre premier p . Le résultat d'équirépartition de Sarnak et *al.* est que la famille

$$\{(\lambda_f(p))_{f \in H_k^*(N)} : N \in \mathbb{N} \setminus \{p\}\}$$

est équirépartie dans $[-2, 2]$ pour la mesure

$$\mu_p = \frac{p+1}{\pi} \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}{(p^{1/2} + p^{-1/2})^2 - x^2} dx.$$

Désormais, nous supposons toujours N sans facteur carré et on note \mathcal{N} l'ensemble des entiers sans facteur carré. Si r est un entier et $f \in H_k^*(N)$, on construit la puissance symétrique r^e de f qu'on note $Sym^r f$. Pour tout $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, on sait que $Sym^r f$ est une forme automorphe. Dans le cas général, c'est prédit par la conjecture de Langlands. Il est aisé de la définir via sa fonction L . Si p est un nombre premier, on peut écrire $\lambda_f(p) = \alpha_f(p) + \beta_f(p)$ avec $|\alpha_f(p)| = |\beta_f(p)| = 1$ et $\alpha_f(p)\beta_f(p) = 1$ si p est premier à N et $\beta_f(p) = 0$ si p divise N . On définit alors

$$L(Sym^r f, s) = \prod_p \prod_{\text{premier } j=0}^r \left(1 - \frac{\alpha_f(p)^{r-j} \beta_f(p)^j}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{Sym^r f}(n) n^{-s}.$$

On peut montrer que si p est premier à N alors

$$(61) \quad \lambda_{Sym^r f}(p) = \lambda_f(p^r) = X_r(\lambda_f(p))$$

où X_r est le polynôme de Tchebychef de deuxième espèce de degré r . Les polynômes de Tchebychef de deuxième espèce considérés ici sont définis par leur série génératrice

$$\sum_{u=0}^{+\infty} X_u(T) X^u = \frac{1}{1 - TX + X^2}.$$

Il est clair d'après (61) et le résultat d'équirépartition de Sarnak et *al.* que la famille

$$(62) \quad \{(\lambda_{Sym^r f}(p))_{f \in H_k^*(N)} : N \in \mathcal{N} \setminus \{p\}\}$$

est équirépartie dans $[\min X_r, \max X_r]$ pour la mesure image de μ_p par X_r .

Dans [80, Mazhouda-Omar, Ramanujan J. (2009)], on redémontre l'équirépartition de

$$\{(\lambda_{Sym^2 f}(p))_{f \in H_k^*(N)} : N \in \mathcal{N} \setminus \{p\}\}$$

sans utiliser le résultat de Sarnak et *al.*, en étudiant les relations entre coefficients de Fourier de $Sym^2 f$. Plus précisément, on montre le résultat suivant.

Théorème 47. [80, Mazhouda-Omar, Ramanujan J. (2009)] *Soient p un nombre premier fixé et $k > 0$ un entier pair fixé. La famille*

$$\{(\lambda_{Sym^2 f}(p))_{f \in H_k^*(N)} : N \in \mathcal{N} \setminus \{p\}\}$$

devient équirépartie suivant la mesure

$$\tilde{\mu}_p = \frac{p+1}{2\pi} \frac{1}{(p^{1/2} + p^{-1/2})^2 - (x+1)} \sqrt{\frac{3-x}{x+1}} dx.$$

Notons que ce résultat aurait pu être démontré en calculant la mesure image de μ_p par X_2 . Néanmoins la mesure image de μ_p par X_r ne peut être explicitement évaluée que pour les petites valeurs de r . Par exemple, pour $r = 3$, on a le résultat suivant.

Théorème 48. [80, Mazhouda-Omar, Ramanujan J. (2009)] *Soient p un nombre premier fixé et $k > 0$ un entier pair fixé. La famille*

$$\{(\lambda_{Sym^3 f}(p))_{f \in H_k^*(N)} : N \in \mathcal{N} \setminus \{p\}\}$$

devient équirépartie suivant la mesure $\hat{\mu}_p$ définie ci-dessus.

Posons

$$\omega_N^*(f) = \frac{N}{\varphi(N)} \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1} \|f\|^2}.$$

Le choix $m = n = 1$ dans la formule de trace établie par Iwaniec et al. (2000), conduit à

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{f \in H_k^*(N)} \omega_N^*(f) = 1.$$

Cette remarque permet de comparer la pondération harmonique $f \rightarrow \omega_N^*(f)$ avec la pondération naturelle $f \rightarrow \frac{1}{H_k^*(N)}$. Plus précisément, Iwaniec et al. [39], Royer et Wu [113] ont montré, au moins lorsque N parcourt l'ensemble des entiers sans facteur carré ayant un plus petit facteur premier toujours supérieur à $\log(2N)$ comment remplacer le poids harmonique par le poids naturel.

Soit \mathcal{N} un ensemble infini d'entiers strictement positifs. On dit alors qu'une famille

$$\{(X(f))_{f \in H_k^*(N)} : N \in \mathcal{N}\}$$

à valeurs dans un compact Ω devient *harmoniquement équirépartie* pour une mesure μ lorsque N parcourt \mathcal{N} si pour toute fonction $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on a

$$\lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ N \in \mathcal{N}}} \sum_{f \in H_k^*(N)} \omega_N^*(f) \phi(X(f)) = \int_{\Omega} \phi d\mu.$$

Les Théorèmes 47 et 48 sont aussi valables en remplaçant l'équirépartition par l'équirépartition harmonique. On obtient des mesures indépendantes de p . Plus précisément, pour le cas des carrés symétriques, on montre le résultat suivant.

Théorème 49. [80, Mazhouda-Omar, Ramanujan J. (2009)] *Soient p un nombre premier fixé et $k > 0$ un entier pair fixé. La famille*

$$\{(\lambda_{Sym^2 f}(p))_{f \in H_k^*(N)} : N \in \mathcal{N} \setminus \{p\}\}$$

devient harmoniquement équirépartie suivant la mesure

$$\widetilde{\mu}_\infty(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3-t}{t+1}} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} d\widetilde{\mu}_p(t).$$

8.2. Le premier coefficient négatif des fonctions L de puissances symétriques. Le changement de signes des coefficients de Fourier des formes modulaires est largement étudié. Il est connu que les coefficients de Fourier d'une forme primitive sont réels, alors ils changent infiniment de signes, c'est à dire qu'il existe une infinité des entiers n tels que $\lambda_f(n) > 0$ et une infinité des entiers n tels que $\lambda_f(n) < 0$. La preuve de ce résultat provient du théorème de Landau sur les séries de Dirichlet à coefficients non négatifs. De plus, plusieurs résultats quantitatifs sur le nombre de changement de signes de la suite des coefficients de Fourier ont été établis. Le changement de signes de la suite des coefficients de Fourier en nombres premiers est tout d'abord étudié par Ram Murty [97], Iwaniec, Kohnen et Sengupta [38] ont montré l'existence des entiers n tels que $(n, N) = 1$, $\lambda_f(n) < 0$ et vérifiant

$$n \ll (k^2 N)^{\frac{29}{60}}.$$

où la constante impliquée est absolue. L'exposant $29/60$ a été amélioré en $9/20$ et $3/8$ par Kowalski, Lau, Soundararajan et Wu [54] et par Matomäki [66], respectivement. Des résultats similaires sont obtenus par Qu [107] pour les coefficients de Dirichlet de fonction L de formes automorphes associées à une représentation cuspidale irréductible de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Très récemment, Qu généralise ses résultats pour le cas des coefficients de fonction L de formes automorphes associée à une forme primitive de rang N sur $\Gamma_0(N)$.

On note $n_{Sym^r f}$ le premier changement de signes de la suite des coefficients de Fourier des fonctions L de puissances symétriques, c'est-à-dire le plus petit entier positif tel que $\lambda_{Sym^r f}(n_{Sym^r f}) < 0$ et $(n_{Sym^r f}, N) = 1$. Pour $r = 2$, Lau, Liu et Wu [63, Theorem 1] ont établi que

$$n_{Sym^2 f} \ll (k^2 N^2)^{\frac{40}{113}},$$

où la constante dans le symbole de Landau est absolue. Pour $r \geq 2$, Liu, Qu et Wu [64, Theorem 1.1] ont montré qu'il existe des entiers n tels que $(n, N) = 1$, $\lambda_{Sym^r f}(n) < 0$ et vérifiant

$$n \ll_{r, \varepsilon} (Q_f)^{\frac{1}{2} + \varepsilon},$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et la constante dans le symbole de Landau ne dépend que de r et de ε . Le nombre Q_f désigne le conducteur de $L(Sym^r f, s)$, il est donné par

$$(63) \quad Q_f = \begin{cases} k^r N^r & \text{si } r \text{ est pair;} \\ k^{r+1} N^r & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases}$$

Dans le théorème qui suit (voir [75, Mazhouda-Mbark-Wu, Fonctions et approximation (2017)]), on réduit la puissance $\frac{1}{2} + \varepsilon$. On prendra à titre d'exemples les cas de puissances $r = 3$ et $r = 4$.

Théorème 50. [75, Mazhouda-Mbark-Wu, Fonctions et approximation (2017)] *Soient k un entier pair ≥ 2 , N un entier sans facteurs carrés ≥ 1 et $f \in H_k^*(N)$. Alors, on a*

$$n_{Sym^3 f} \ll Q_f^{6/31} \quad \text{et} \quad n_{Sym^4 f} \ll Q_f^{5/36},$$

où les constantes impliquées sont absolues.

Remarque. Soient $L(s, \pi)$ la fonction automorphe associée à une représentation cuspidale irréductible π de $GL_m(\mathbb{A}_{qb})$ et $\lambda_\pi(n)$ le n -ème coefficient de Dirichlet de $L(s, \pi)$. Désignons par n_π le plus petit entier n tel que

$$\lambda_\pi(n) < 0 \text{ et } (n, N_\pi) = 1,$$

où N_π est le conducteur arithmétique de $L(s, \pi)$. En désignant par Q_π le conducteur analytique de $L(s, \pi)$, Qu [107] a montré que $n_\pi \ll Q_\pi^{1609:r/2+2+\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$, où la constante impliquée ne dépend que de r et ϵ . L'exposant $r = 2$ a été réduit à 1 pour $r > 2$ par Liu, Qu et Wu [64]. Puisque sym_f^r est un cas particulier de représentations cuspidales irréductibles π de $GL_{r+1}(\mathbb{A}_{qb})$, notre théorème améliore le résultat de Liu, Qu et Wu dans ce cas particulier pour $r = 3, 4$.

La démonstration du Théorème précédent se base sur la proposition suivante.

Proposition 51. [75, Mazhouda-Mbarki-Wu, Fonctions et approximation (2017)] *Soient $k \geq 2$ un entier pair, $N \geq 1$ un entier sans facteurs carrés et $f \in H_k^*(N)$. Pour tous entiers $r \geq 1$ et $\nu \geq 0$, on a*

$$\lambda_{sym^r f}(p^\nu) = \prod_{j=1}^r \frac{\sin((\nu + j)\theta_f(p))}{\sin(j\theta_f(p))} \quad (p \nmid N),$$

où $\theta_p(f)$ est défini comme suit : pour tout nombre premier p il existe $\theta_f(p) \in [0, \pi]$ tel que $\lambda_f(p) = 2 \cos(\theta_f(p))$.

9. LA FONCTION φ D'EULER ASSOCIÉE AUX FONCTIONS L AUTOMORPHES

Dans [84, Mazhouda-Omar, Analysis (2014)], on définit la fonction phi d'Euler $\varphi_\pi(n)$ associée aux fonctions L automorphes $L(s, \pi)$, où π est une représentation automorphe irréductible parabolique (cuspidale) unitaire de $GL_N(\mathbb{Q})$. De plus, on étudie les propriétés asymptotiques de $\varphi_\pi(n)$ et on prouve quelques résultats sur la fonction sommatoire $\sum_{n \leq x} \varphi_\pi(n)$.

La fonction phi d'Euler $\varphi(n)$ est une fonction arithmétique qui compte le nombre d'entiers positifs inférieurs ou égaux à n qui sont premiers avec n . Autrement dit, si n est un entier positif, alors $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers k dans l'intervalle $1 \leq k \leq n$ dont $\text{pgcd}(n, k) = 1$. La fonction $\varphi(n)$ est également définie par

$$(64) \quad \varphi(n) = \sum_{md=n} \mu(d)m = n \prod_{p|n} (1 - 1/p) = n \prod_{p|n} \frac{1}{\zeta_p(1)},$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann (en d'autres termes, la fonction classique φ d'Euler est associée à la fonction classique zêta de Riemann). Mertens a prouvé (voir, [96, §2.5, la page 68]) que pour x tendant vers l'infini

$$(65) \quad \sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x).$$

Walfisz dans [139, Page 144] a prouvé la dernière formule avec le meilleur terme d'erreur

$$(66) \quad O(x(\log x)^{2/3}(\log \log x)^{4/3}).$$

Montgomery et Vaughan dans [96, Théorème 2.1, page 36] ont étudié la somme $\sum_{n \leq x} \varphi(n)/n$ et ont prouvé que, pour $x \geq 2$

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2} x + O(\log x).$$

Il existe de nombreuses généralisations, extensions et fonctions analogues à la fonction d'Euler dans le contexte de semi-groupes arithmétiques, groupes finis, les corps de nombres algébriques, semi-groupes, anneaux commutatifs finis et domaines de Dedekind finis. Alors, il semble intéressant de généraliser la fonction d'Euler du point de vue purement analytique en utilisant les fonctions L de manière similaire à (64) dans le cas classique de la fonction zêta de Riemann. Par exemple, dans la suite, nous définissons la fonction phi d'Euler $\varphi_\pi(n)$ associée aux fonctions automorphes $L(s, \pi)$, où π est une représentation automorphe irréductible parabolique (cuspidale) unitaire de $GL_N(\mathbb{Q})$. Par ailleurs, nous étudions les propriétés asymptotiques pour $\varphi_\pi(n)$ et nous montrons quelques résultats sur la fonction de sommation $\sum_{n \leq x} \varphi_\pi(n)$ semblable à (65) sans ou sous l'hypothèse de Riemann.

Dans [84, Mazhouda-Omar, Analysis (2014)], on suppose que la conjecture de Ramanujan qui affirme que pour tout nombre premier non ramifié p , $|\alpha_{p,j}(\pi)| = 1$.

On définit la fonction d'Euler associée à $L(f, s)$ comme suit ⁴

$$\varphi_\pi(n) = n \prod_{p|n} \frac{1}{L_p(1, \pi)},$$

où

$$L_p(1, \pi) = \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{\alpha_{p,j}(\pi)}{p^s} \right).$$

Soit

$$(67) \quad \gamma_p(\pi) = p \left(1 - \frac{1}{L_p(1, \pi)} \right)$$

et

$$(68) \quad D_\pi = \frac{1}{2} \prod_p \left(1 - \frac{\gamma_p(\pi)}{p^2} \right).$$

Le premier résultat principal de [84, Mazhouda-Omar, Analysis (2014)] est indiqué dans le théorème suivant.

Théorème 52. [84, Mazhouda-Omar, Analysis (2014)]⁵ *Sous la conjecture de Ramanujan, pour $x \geq 1$, on a*

$$\sum_{n \leq x} \varphi_\pi(n) = D_\pi x^2 + O(x(\log x)^N).$$

Définissons la fonction $E_f(x)$ comme suit

$$E_\pi(x) = \sum_{n \leq x} \varphi_\pi(n) - D_\pi x^2.$$

4. On peut prendre $L_p(1, \pi)/L_p(2, \pi)$ dans la définition du facteur local plutôt que $1/L_p(1, \pi)$ pour prendre l'opération de "somme de diviseurs" au lieu de l'opération "phi d'Euler".

5. Pour obtenir un meilleur terme d'erreur comme prouvé par Walfisz [139] dans (66) dans la formule asymptotique de la fonction phi classique, nous avons besoin de plus d'informations sur la région sans zéro de $L(s, \pi)$ (par exemple similaire à la région sans zéros de Vinogradov utilisée par Walfisz) plutôt que de la région sans zéros de type Landau.

Théorème 53. [84, Mazhouda-Omar, Analysis (2014)] *Sous la conjecture de Ramanujan, pour $x \geq 1$, on a*

$$\int_1^x |E_\pi(z)|^2 dz = \frac{1}{6\pi^2} C_\pi x^3 + O\left(x^3 e^{-c_1 \sqrt{\log x}}\right),$$

où

$$(69) \quad C_\pi = \prod_p \left(1 + \frac{|\gamma_p(\pi) - 1|^2}{p^2 - 1}\right)$$

et c_1 est une constante positive en fonction de π .

Un résultat similaire a été établi par Chowla [10] dans le cas de la fonction phi d'Euler classique $\varphi(n)$, pour $x \geq 2$

$$\int_1^x \left| \sum_{n \leq z} \varphi(n) - \frac{3}{\pi} z^2 \right|^2 dy = \frac{1}{6\pi^2} x^3 + O\left(\frac{x^3}{\log^4 x}\right).$$

Notons que, sous l'hypothèse de Riemann, le terme d'erreur dans le Théorème 66 peut être remplacé par $O(x^{14/5+\epsilon})$, où $\epsilon > 0$ est arbitraire. En outre, comme conséquence de ces deux derniers théorèmes 65 et 66, pour $x \rightarrow \infty$, on a

$$|E_\pi(x)| = \Omega(x).$$

10. DISTRIBUTION DES ZÉROS DES FONCTIONS L SUR LA LIGNE CRITIQUE

Dans [79, Mazhouda-Omar, Uniform Distribution Theory (2013)], on montre que sous l'hypothèse de Riemann, les zéros des fonctions L de la classe Selberg sont uniformément répartis sur la ligne critique $Re(s) = 1/2$, lorsque le conducteur est suffisamment grand et le degré de ces fonctions L grandit avec le conducteur analytique.

On appelle une suite $\{F_k(s)\}_{k=1,2,\dots,+\infty}$ de fonctions L de la classe Selberg une famille si $d_k = d_{F_k}$ tend vers l'infini. Une famille $\{F_k(s)\}_{k=1,2,\dots,+\infty}$ de fonctions L de la classe Selberg est appelée asymptotiquement exacte si la limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log q_{F_k}}{\log q_{F_k} + \log d_k} = \eta$$

existe. Elle est appelée asymptotiquement mauvaise si $\eta = 0$ et asymptotiquement bonne sinon. Soit $\{F_k(s)\}_{k=1,2,\dots,+\infty}$ une famille de fonctions asymptotiquement exacte dans la classe Selberg de degré d_k . Pour chaque F_k , on définit la mesure

$$H_{F_k} = \frac{2\pi}{\log q_{F_k}} \sum_{F_k(\rho)=0} \delta_{t(\rho)},$$

où $t(\rho) = \frac{1}{i}(\rho - \frac{1}{2})$, et ρ parcourt tous les zéros non-triviaux des fonctions F_n . Ici δ_a désigne la mesure atomique (Dirac) en a . En supposant que l'hypothèse de Riemann, $t(\rho)$ est réel et H_{F_k} est une mesure discrète sur \mathbb{R} .

Le résultat principal de [79, Mazhouda-Omar, Uniform Distribution Theory (2013)], exprime la limite de la distribution des zéros des fonctions L de la classe de Selberg.

Théorème 54. [79, Mazhouda-Omar, Uniform Distribution Theory (2013)] *Soit $\{F_k(s)\}_{k=1,2,\dots,+\infty}$ une famille de fonctions de la classe de Selberg de degré d_k tel que $q_{F_k} \rightarrow +\infty$. Sous l'hypothèse de Riemann et dans l'espace des mesures de croissance lente sur \mathbb{R} , la limite*

$$H = \lim_{k \rightarrow +\infty} H_k = \lim_{d_k \rightarrow +\infty} H_{F_k}$$

existe.

11. DISTRIBUTION DES VALEURS DES FONCTIONS L SUR SES a -POINTS

11.1. **Distribution des valeurs de $\zeta'(s)$ sur les a -points de $\zeta(s)$.** Nombreux théoriciens des nombres ont étudiés les zéros de la fonction zêta de Riemann. Le premier qui a investigué ce sujet était Bernard Riemann en 1859. Ensuite, Bohr et Jessen ont développé en 1932 l'étude de ces zéros afin d'obtenir des résultats asymptotiques concernant les racines de l'équation $\zeta(s) = a$, où a est un nombre complexe quelconque. Influencés par ces études, Levinson a amélioré en 1975 ces travaux et il a traité la répartition de ces racines. Récemment, en 2007, Steuding [131] étend l'étude de ces racines à une large classe de séries de Dirichlet qui possèdent des propriétés analytiques communes.

Soient $s = \sigma + it$ et a un nombre complexe. Les racines de l'équations $\zeta(s) - a = 0$, sont appelés les a -points de la fonction $\zeta(s)$ et seront notés $\rho_a = \beta_a + i\gamma_a$. Les a -valeurs sont en relation avec les zéros triviaux de la fonction zêta de Riemann, en effet : Il existe un entier $n_0(a)$ tel que la fonction $\zeta(s) - a$ admet un zéro assez proche de $s = -2n$ pour tout $n > n_0(a)$. De plus, il y a au plus un nombre fini de zéros de $\zeta(s) - a$ autres que ces zéros et qui sont dans $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) \leq 0\}$ et il existe une constante $A = A(a) > 0$ telle que $\zeta(s) - a \neq 0$ pour tout s , $\operatorname{Re}(s) > A$. Les zéros de la fonction $\zeta(s) - a$ vérifiant $\operatorname{Re}(s) \leq 0$ sont nommés les a -points triviaux de la fonction zêta de Riemann, les autres sont dits les a -points non-triviaux. Ces derniers sont situés dans la bande $0 < \operatorname{Re}(s) < A$, avec A un réel strictement positif qui dépend de a . Leurs nombres satisfont une formule de type Riemann-von Mangoldt (voir [60] ou [131] pour les fonctions L de la classe de Selberg où la fonction zêta est un élément)

$$(70) \quad N_a(T) = \sum_{0 < \gamma_a < T; \beta_a > 0} 1 = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi c_a e} + \mathcal{O}(\log T),$$

où

$$c_a = \begin{cases} 2 & \text{if } a = 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous observons que ces formules asymptotiques sont essentiellement indépendantes de a et que

$$N_a(T) \sim N(T), \quad T \rightarrow \infty,$$

où $N(T) = N_0(T)$ désigne le nombre de zéros non-triviaux $\rho = \beta + i\gamma$ satisfaisant $0 < \gamma < T$. Levinson [60] a montré que tous sauf $\mathcal{O}\left(\frac{N(T)}{\log \log T}\right)$ des a -points de parties imaginaires dans $T < t < 2T$ sont situés dans la région $|\operatorname{Re}(s) - \frac{1}{2}| < \frac{(\log \log T)^2}{\log T}$. Ainsi, les a -points sont regroupés autour de la ligne $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Dans [40, Jakhouliti-Mazhouda, Uniform Distribution Theory (2014)], on s'intéresse à la somme

$$\sum_{\rho_a = \beta_a + i\gamma_a; 0 < \gamma_a \leq T} \zeta'(\rho_a) X^{\rho_a},$$

où X est une constante positive fixée. La méthode est basée sur une formule indiquée par Garunkštis et Steuding [28] avec le choix de la fonction $f(s) = \zeta'(s)X^s$.

Il y a plusieurs raisons pour lesquelles la dernière somme ci-dessus est intéressante. La première est, l'estimation de cette somme peut être utilisée pour étudier la distribution normale des valeurs de $\log |\zeta'(\rho_a)|$, la seconde est d'étudier la distribution verticale de a -points de ζ . Rappelons que dans le cas de $a = 0$, récemment Hiary et Odlyzko [33] ont étudié la partie principale de la conjecture sur la distribution normale des valeurs de $\log \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + i\gamma_n \right) \right|$; pour cela ils se sont intéressés à la somme

$$\sum_{T \leq \gamma_n \leq T+H} \zeta' \left(\frac{1}{2} + i\gamma_n \right) e^{2\pi i n x}$$

comme fonction de x , où $\rho = \beta + i\gamma$ désigne les zéros non-triviaux de ζ et γ_n est la n -ième partie imaginaire positive de zéros de $\zeta(s)$. Ils ont approximé la dernière somme par

$$\sum_{T \leq \gamma_n \leq T+H} \zeta' \left(\frac{1}{2} + i\gamma_n \right) e^{2\pi i \gamma_n x},$$

où $\tilde{\gamma}_n = \frac{1}{2\pi} \gamma_n \log \frac{T}{2\pi}$. Des sommes similaires ont été étudiées par Steuding [132], pour tout réel positif $x \neq 1$ et si $T \rightarrow \infty$,

$$\sum_{\rho_a = \beta_a + i\gamma_a; 0 < \gamma_a < T} x^{\rho_a} = (\alpha(x) - x\Lambda(1/x)) \frac{T}{2\pi} + O\left(T^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

avec $\alpha(x)$ et $\Lambda(x)$ sont les coefficients (respectivement) dans les séries de Dirichlet de

$$\zeta'(s)/(\zeta(s) - a) = \sum_{n \geq 2} \alpha(n)n^{-s} \quad \text{et} \quad \zeta'(s)/\zeta(s) = \sum_{n \geq 2} \Lambda(n)n^{-s},$$

si $x = n$ ou $x = 1/n$ pour certain entier $n \geq 2$, et zéro sinon. En outre, il en déduit que pour tout complexe a , les ordonnées γ_a des a -points sont uniformément distribués modulo 1. De plus, Garunkštis et Steuding [28] ont montré que si $T \rightarrow \infty$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{\rho_a; 0 < \gamma_a \leq T} \zeta'(\rho_a) &= \left(\frac{1}{2} - a\right) \frac{T}{2\pi} \log^2 \frac{T}{2\pi} + (C_0 - 1 + 2a) \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} \\ (71) \quad &+ (1 - C_0 - C_0^2 + 3C_1 - 2a) \frac{T}{2\pi} + \mathbf{E}(T), \end{aligned}$$

où C_n désigne les constantes de Stieltjes⁶ et

$$E(T) = \begin{cases} \mathcal{O}\left(T^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) & \text{sous l'hypothèse de Riemann,} \\ \mathcal{O}\left(Te^{-C\sqrt{\log T}}\right) & \text{inconditionnelle.} \end{cases}$$

Grâce à la formule précédente (71), ils ont conclu que le terme principal décrit comment les valeurs $\zeta(1/2 + il)$ se rapprochent en moyenne de la valeur a dans le plan complexe.

Le résultat principal du papier [40, Jakhlouti-Mazhouda, Uniform Distribution Theory (2014)] est indiqué dans le théorème suivant :

Théorème 55. [40, Jakhlouti-Mazhouda, Uniform Distribution Theory (2014)] *1) Si X est un entier ≥ 1 , alors*

$$\begin{aligned} &\sum_{\rho_a; 0 < \gamma_a \leq T} \zeta'(\rho_a) X^{\rho_a} \\ &= \left(\frac{1}{2} - a\right) \frac{T}{2\pi} \log^2 \frac{T}{2\pi} + (2a + C_0 - 1 - \log X) \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} \\ &\quad + \left(1 - 2a - C_0 - C_0^2 + 3C_1 + \sum_{X=mn} \Lambda(n) \log m - (C_0 - 1 + \frac{1}{2} \log X) \log X\right) \frac{T}{2\pi} \\ &\quad + \mathcal{O}\left(Te^{-C\sqrt{\log T}}\right). \end{aligned} \tag{72}$$

6. Les constantes de Stieltjes sont données par le développement de Laurent de la fonction $\zeta(s)$ en $s = 1$, $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_n}{n!} (s-1)^n$. Par exemple, $C_0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N\right)$.

2) Si $X = \frac{h}{q}$ est un nombre rationnel avec $q > 1$, $h > 0$ et $\text{pgcd}(h, q) = 1$, alors

$$\begin{aligned}
& \sum_{\rho_a; 0 < \gamma_a \leq T} \zeta'(\rho_a) X^{\rho_a} = -\frac{aT}{2\pi} \log^2 \frac{T}{2\pi} \\
& + \frac{T}{2\pi q} \log \frac{T}{2\pi q} \left\{ 2qa - \sum_{p|q} \frac{\log p}{p-1} - \log q + \sum_{d|q, d \neq q} \Lambda(d) \frac{P(d)}{P(d) - \psi_0(P(d))} \right\} \\
& + \frac{T}{2\pi q} \left[2aq - (C_0 - 1) \log q + C_1 + \sum_{p|q} \left(\frac{p \log^2 p}{(p-1)^2} + \frac{\log p}{p-1} \right) \right] \\
& + \frac{T}{2\pi q} \left[- \sum_{c=1}^{q-1} \frac{\mu(q/(q, c))}{\varphi(q/(q, c))} \left(B_0 \left(\frac{c}{q} \right) \log q - B_1 \left(\frac{c}{q} \right) \right) + \sum_{d|q} \Lambda(d) \left(\log d + \frac{\log P(d)}{P(d) - 1} \right) \right] \\
& + \frac{T}{2\pi q} \left[- \sum_{d|q, d \neq q} \Lambda(d) \left(\frac{P(d)}{P(d) - \psi_0(P(d))} \log d + \frac{P(d)}{P(d) - \psi_0(P(d))} + \frac{P(d)\psi_0(P(d)) \log P(d)}{(P(d) - \psi_0(P(d)))^2} \right) \right] \\
& + \frac{T}{2\pi q} \left[\log X \left(\sum_{p|q} \frac{\log p}{p-1} + \log q - \sum_{d|q, d \neq q} \Lambda(d) \frac{P(d)}{P(d) - \psi_0(P(d))} \right) \right] + \mathcal{O} \left(T e^{-C\sqrt{\log T}} \right),
\end{aligned}$$

où φ est la fonction d'Euler, μ est la fonction de Möbius, p décrit les nombres premiers, C_0 et C_1 sont les constantes données dans l'équation (46),

$$P(n) = \begin{cases} p & \text{si } n = p^k \text{ où } p \text{ est un nombre premier et } k \text{ est un entier } \geq 1, \\ 2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ψ_0 est le caractère principal mod $\frac{q}{d}$, $B_0(\omega)$ et $B_1(\omega)$ sont les constantes dans le développement de la fonction zêta d'Hurwitz en $s = 1$ qui, pour $0 < \omega \leq 1$, est définie par

$$Z(s, \omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l + \omega)^s} = \omega^{-s} + \frac{1}{s-1} + B_0(\omega) + B_1(\omega)(s-1) + \dots$$

3) Si X est un nombre irrationnel positif satisfaisant $|X - \frac{\hat{h}}{\hat{q}}| \leq \frac{1}{\hat{q}^2}$, avec les entiers $\hat{q}, \hat{h} \geq 1$ et $\text{pgcd}(\hat{q}, \hat{h}) = 1$, alors

$$\begin{aligned}
(73) \quad \sum_{\rho_a; 0 < \gamma_a \leq T} \zeta'(\rho_a) X^{\rho_a} &= \frac{aT}{2\pi} \left[-\log^2 \frac{T}{2\pi} + 2 \log \frac{T}{2\pi} - 2 \right] \\
&+ \mathcal{O} \left[\left(\frac{T}{\sqrt{\hat{q}}} + T^{9/10} + \sqrt{T} \sqrt{\hat{q}} \right) D \log^9 T \right],
\end{aligned}$$

où

$$D = \max_{k \leq \frac{T}{2\pi X}} \sum_{d|k} 1.$$

Quand $X = 1$, on obtient le résultat de Garunkštis et Steuding [28] donné par l'équation (71). À savoir, quand $a = 0$, on obtient le résultat de Fujii [22]. Sous l'hypothèse de Riemann, le terme d'erreur dans le théorème 65 peut être raffiné comme dans le papier de Garunkštis et Steuding [28] à $\mathcal{O} \left(T^{\frac{1}{2} + \epsilon} \right)$.

11.2. Distribution des valeurs de $L'(s, \chi)$ sur les a -points de $L(s, \chi)$. Dans [41, Jakhlouti-Mazhouda, Bull. Korean. Math. Soc (2017)], on étend les résultats de [40, Jakhlouti-Mazhouda, Uniform Distribution Theory (2014)] aux fonctions L de Dirichlet. Étant donnée une fonction L de Dirichlet $L(s, \chi)$ associée à un caractère primitive $\chi \pmod q$ et a un nombre complexe non nul. Les zéros de $L(s, \chi) - a$, notés dans la suite par $\rho_{a, \chi} = \beta_{a, \chi} + i\gamma_{a, \chi}$, sont appelés les a -points de $L(s, \chi)$. On note qu'il existe un a -point proche de tout zéro trivial $s = -2n$ pour n assez large et sauf ces a -points les autres sont en nombre fini et sont situés dans le demi-plan $Re(s) = \sigma \leq 0$. Les a -points avec $\beta_{a, \chi} \leq 0$ sont dits triviaux. Tous les autres sont localisés dans la bande $0 < Re(s) < A$, où A dépend de a et sont appelés les a -points non-triviaux. Leur nombre satisfait une formule de type Riemann-von Mangoldt (on se réfère à [131, §7.2] pour plus de détails sur la preuve qui est en fait établie pour les fonctions L de la classe de Selberg dont la fonction L de Dirichlet est un élément de degré un), plus précisément

$$(74) \quad N_{a, \chi}(T) = \sum_{\substack{\rho_{a, \chi}; \\ \beta_{a, \chi} > 0 \\ 0 < \gamma_{a, \chi} \leq T}} 1 = \frac{T}{2\pi} \log \left(\frac{qT}{2\pi c_a e} \right) + O(\log T),$$

où $c_a = m$ si $a = 1$ et $c_a = 1$ sinon, avec $m = \min\{n \geq 2 : \chi(n) \neq 0\}$. Remarquons que cette formule asymptotique est indépendante de a et que $N_{a, \chi}(T) \sim N_\chi(T)$ si $T \rightarrow \infty$, où $N_\chi(T) = N_{0, \chi}(T)$ désigne le nombre de zéros non-triviaux $\rho_\chi = \beta_\chi + i\gamma_\chi$ of $L(s, \chi)$ vérifiant $0 < \gamma_\chi < T$. Gonek [30] a prouvé que, si l'hypothèse de Riemann est vraie pour $L(s, \chi)$, alors au moins $(\frac{1}{2} + o(1)) \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi}$ des a -points non-triviaux avec parties imaginaires dans $[0, T]$ de la fonction $L(s, \chi)$ sont simples et sont situées à gauche de la ligne $Re(s) = 1/2$.

Dans [41, Jakhlouti-Mazhouda, Bull. Korean. Math. Soc (2017)], on continue les investigations de Fujii [22], Garunkštis & Steuding [28] et on étend les résultats ci-dessus établis récemment. Plus précisément, on s'intéresse à la somme

$$\sum_{\rho_{a, \chi}; 0 < \gamma_{a, \chi} \leq T} L'(\rho_{a, \chi}) X^{\rho_{a, \chi}},$$

où X est un nombre réel positif fixé et $\chi \pmod q$ désigne un caractère primitif. L'argument est basé sur une formule établie par Garunkštis et Steuding dans [28, §6, Remarque ii)] où on choisit la fonction $f(s) = L'(s, \chi)X^s$. Il y a plusieurs raisons pour lesquelles la dernière somme avec le paramètre X est intéressante. La première est, l'estimation de cette somme peut être utilisée pour étudier la distribution normale des valeurs de $\log |L'(\rho_{a, \chi}, \chi)|^7$. La seconde est d'étudier la distribution verticale de a -points de $L(s, \chi)$. Rappelons que dans le cas $a = 0$, récemment Fujii a étudié dans [23] des sommes sur les zéros non-triviaux de $L(s, \chi)$. Il a montré que, sous l'hypothèse de Riemann, pour $X > 1$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T/2\pi} \sum_{0 < \gamma \leq T} X^{1/2+i\gamma} (L(1/2+i\gamma, \chi) - 1) - \xi(X) = \begin{cases} M(X, \chi) & \text{si } X \text{ est rationnel,} \\ 0 & \text{si } X \text{ est irrationnel,} \end{cases}$$

7. Dans les cas $a = 0$, pour étudier la distribution normale des valeurs de $\log |\zeta(1/2 + i\gamma_n)|$, Hiary et Odlyzko [33] ont étudié le comportement de la somme

$$\sum_{T \leq \gamma_n \leq T+H} \zeta(1/2 + i\gamma_n) e^{2\pi i n x}$$

comme une fonction de x avec $\rho = \beta + i\gamma$ désigne un zéro non-trivial de $\zeta(s)$ et γ_n est le n -ième partie imaginaire positive de ρ . Pour le faire, ils ont estimé la dernière somme par

$$\sum_{T \leq \gamma_n \leq T+H} \zeta(1/2 + i\gamma_n) e^{2\pi i \tilde{\gamma}_n x},$$

où $\tilde{\gamma}_n = \frac{1}{2\pi} \gamma_n \log \frac{T}{2\pi}$.

où $\xi(X)$ et $M(X, \chi)$ sont des constantes. En outre, Garunkštis, Grahl et Steuding [29] ont obtenu des informations plus précises sur la distribution de valeurs de la fonction L de Dirichlet en considérant certains moments discrets

$$\sum_{\rho_{a,\chi}; 0 < \gamma_{a,\chi} < T} L(\rho_{a,\chi}, \psi).$$

Leur formule étend un résultat précédent de Fujii [23, 24].

Le résultat principal est énoncé dans le théorème suivant :

Théorème 56. [41, Jakhouti-Mazhouda, Bull. Korean. Math. Soc (2017)] *Soit X un nombre réel positif. Alors*

$$\begin{aligned} & \sum_{\rho_{a,\chi}; 0 < \gamma_{a,\chi} \leq T} L'(\rho_{a,\chi}, \chi) X^{\rho_{a,\chi}} \\ = & -\frac{aT}{2\pi} \log^2\left(\frac{qT}{2\pi}\right) + \frac{aT}{\pi} \log\left(\frac{qT}{2\pi}\right) - \frac{aT}{\pi} \\ & - \Delta(X)\chi[\Delta(X)X] \log(X) \left\{ \frac{T}{4\pi} \log\left(\frac{qT}{2\pi}\right) - \frac{T}{4\pi} + \frac{i\pi}{4} \frac{T}{2\pi} \right\} \\ & + \Delta(X)\chi[\Delta(X)X] \frac{T}{2\pi} \sum_{X=mn} \Lambda(n) \log(m) \\ & + \frac{X}{\sqrt{q}} \sum_{k \leq \frac{qT}{2\pi X}} \log^2(k) \bar{\chi}(k) e^{2i\pi kX/q} + \frac{1}{2\sqrt{q}} X \log(X) \sum_{k \leq \frac{qT}{2\pi X}} \log(k) \bar{\chi}(k) e^{2i\pi kX/q} \\ & - \left(\frac{1}{2\sqrt{q}} X \log^2(X) - \frac{i\pi}{4\sqrt{q}} X \log X \right) \sum_{k \leq \frac{qT}{2\pi X}} \bar{\chi}(k) e^{2i\pi kX/q} \\ (75) \quad & - \frac{X}{\sqrt{q}} \sum_{k \leq \frac{qT}{2\pi X}} \sum_{k=mn} \Lambda(n) \bar{\chi}(n) \bar{\chi}(m) \log(m) e^{2i\pi kX/q} + O\left(\sqrt{T} \log^3 T\right), \end{aligned}$$

où $\Delta(X)$ est défini par

$$(76) \quad \Delta(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \text{ est un entier } \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. Lorsque $X = 1$, on retrouve le résultat de Garunkštis et Steuding [28] dans le cas de la fonction zêta de Riemann. À savoir, si $q = 1$ et $a = 0$, on obtient le résultat de Fujii [22].

11.3. Quelques sommes sur les a -points de la dérivée de la fonction zêta de Riemann.

En collaboration avec Tomokazu Onozuka de l'université de Nagoya (Japan), on étend le résultat obtenu avec Jakhouti [40, Jakhouti-Mazhouda, Uniform Distribution Theory (2014)] au cas de la dérivée j -ième de la fonction zêta de Riemann $\zeta^{(j)}$. Plus précisément, dans [86, Mazhouda-Onozuka, AGNT (2020)], on obtient le résultat suivant.

Théorème 57. [86, Mazhouda-Onozuka, AGNT (2020)] *Soient $j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $a \in \mathbb{C}$. Pour T suffisamment large, on a*

$$\sum_{0 < \gamma_a^{(k)} \leq T} \zeta^{(j)}(\rho_a^{(k)}) = (-1)^j (\delta_{j,0} + a\delta_{k,0} + B(j, k)) \frac{T}{2\pi} \left(\log \frac{T}{2\pi} \right)^{j+1} + O_{j,k,a}(T \log^j T),$$

où $\delta_{c,0} = 1$ si $c = 0$ et 0 sinon et

$$B(j, k) = -\frac{k+1}{j+1} - j! \sum_{r=1}^k \frac{e^{-z_r}}{z_r^{j+1}} P_j(z_r) + j! \sum_{r=1}^k \frac{1}{z_r^{j+1}}.$$

La somme sur r n'apparaît pas dans le cas $k = 0$ et z_r ($r = 1, \dots, k$) désignent les zéros de $P_k(z) = \sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j!}$.

11.4. Distribution uniforme des a -points de fonctions L de la classe de Selberg.

Beaucoup de théoriciens des nombres sont intéressés à la distribution horizontale ou verticale de zéros. Cependant il y a aussi beaucoup d'intérêt lors de la généralisation de cette distribution à celle des a -points des fonctions L . Levinson [60] a été parmi les premiers qui ont traité la répartition des a -points de $\zeta(s)$ sur la bande critique $0 < \text{Re}(s) \leq 1$. Récemment, Steuding [132] a démontré que pour tout a un nombre complexe, les ordonnées γ_a des a -points de la fonction zêta de Riemann sont uniformément distribués modulo un. De plus, dans son livre [131, Chap.7], il a étendu l'étude de ces a -points à une large classe de série de Dirichlet qui possèdent des propriétés analytiques communes dont la fonction zêta de Riemann est le célèbre exemple.

Le papier [42, Jakhouti-Mazhouda-Steuding, Archiv der mathematik (2015)] porte sur l'étude de la distribution uniforme modulo un des ordonnées des a -points des fonctions L . En fait, à partir du lemme de Landau [59], et en se basant sur un résultat établi pour la fonction zêta de Riemann par Steuding [132], on va étudier la répartition générale des valeurs des fonctions L de la classe de Selberg \mathcal{S} ayant la représentation en produit eulérien polynômial et satisfaisant l'analogie de l'hypothèse de Lindelöf. Ensuite, on va démontrer que les ordonnées de ses a -points sont réparties uniformément modulo un.

Definition 58. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels est distribuée uniformément modulo 1 si pour tout intervalle $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$, la limite suivante existe.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \# \{n \leq N : \{x_n\} \in [\alpha, \beta]\} = \beta - \alpha,$$

où $\{x\} = x - [x]$ est la partie fractionnelle de x et $[x]$ sa partie entière.

Par ailleurs, un outil très efficace pour démontrer la distribution uniforme d'une suite de nombres réels est le critère de Weyl [141] : Une suite $(x_n)_n$ de nombres réels est uniformément distribuée si et seulement si pour tout entier naturel non nul m

$$(77) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{(mx_n)} = 0,$$

où $e^{(x)} := \exp(2\pi i x)$. Considérons ensuite le résultat suivant

Théorème 59. [42, Jakhouti-Mazhouda-Steuding, Archiv der mathematik (2015)] Soient a un nombre complexe quelconque et $x \neq 1$ un réel positif et soit $F \in \mathcal{S}^{\text{poly}}$ un produit eulérien polynômial. Alors, lorsque $T \rightarrow \infty$,

$$\sum_{\substack{\rho_a = \beta_a + i\gamma_a \\ 0 < \gamma < T}} x^{\rho_a} = \left\{ \alpha_F(x) - x \overline{\Lambda_F(1/x)} \right\} \frac{d_F T}{2\pi} + O\left(T^{\frac{1}{2} + \epsilon}\right);$$

où les variables Λ_F et α_F sont certains coefficients des séries de Dirichlet définies par 78 et 79

$$(78) \quad -\frac{F'}{F}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Lambda_F(n) n^{-s} \quad (\text{Re } s > 1),$$

où $\Lambda_F(n) = b(n) \log n$ est la fonction généralisée de la celle de von Mangoldt et l'autre est donnée par

$$(79) \quad \frac{F'(s)}{F(s) - a} = \sum_{n \geq 2} \frac{\alpha_F(n)}{n^s}.$$

Ici et dans la suite, la constante implicite dans les termes d'erreurs peuvent dépendre de F , a et x .

Comme conséquence, on en déduit :

Théorème 60. [42, Jakhlouti-Mazhouda-Steuding, Archiv der mathematik (2015)] *Soit $F \in \mathcal{S}^{poly}$ un produit eulérien polynômial satisfaisant l'analogue de l'hypothèse de Lindelöf, i.e., $F(\frac{1}{2} + it) \ll |t|^\epsilon$ si $|t| \rightarrow \infty$ pour tout $\epsilon > 0$. Alors, pour tout nombre complexe a et tout réel α positif, la suite $\alpha \gamma_a$ des parties imaginaires des a -points non-triviaux de F est uniformément distribuée modulo un. Dans le cas $a = 0$ l'hypothèse de Lindelöf peut être remplacée par la condition déduite de (80); si $a \neq 0$, alors, elle peut être remplacée par la condition déduite de (81).*

Si $a = 0$, on utilise un résultat d' Akbary et Murty [1] qui affirme que la suite de parties imaginaires des zéros non-triviaux de fonctions L d'une large classe est uniformément distribuée mod un sous certaines hypothèses. Plus précisément, ils ont montré que leur hypothèse de moments, à savoir l'existence d'un nombre réel $k > 0$ tel que

$$(80) \quad \frac{1}{T} \int_0^T |F(\frac{1}{2} + it)|^{2k} dt \ll \exp(\psi(T)),$$

où $\psi(T)$ est une fonction réelle positive arbitraire telle que $\psi(T) = o(\log T)$ et la constante implicite peut dépendre de k et F , implique

$$\sum_{\substack{0 < \gamma < T \\ \beta > \frac{1}{2}}} (\beta - \frac{1}{2}) = o(N(T)).$$

De toute évidence, l'hypothèse de Lindelöf implique l'existence d'un k pour lequel (80) est vraie. Si $a \neq 0$, on remplace ce dernier par

$$(81) \quad \frac{1}{T} \int_0^T |F(\frac{1}{2} + it) - a|^{2k} dt \ll \exp(\psi(T))$$

avec la même hypothèse sur k et ψ .

Dans la suite, on donne une application du théorème 60. Étant données deux suites monotones positives de nombres réels $\mathbf{a} = (a_n)_n$ et $\mathbf{b} = (b_k)_k$, les deux étant réparties uniformément modulo un, Akbary et M. Murty [1] ont alors prouvé que l'union des deux, à savoir la suite $\mathbf{a} \cup \mathbf{b} := (a_n, b_k)_{n,k}$ est uniformément répartie modulo un; ici la suite $(a_n, b_k)_{n,k}$ est ordonnée selon la valeur absolue de ses éléments. En fait, si $N_{\mathbf{a}}(x)$ désigne le nombre d'éléments a_n de \mathbf{a} satisfaisant $a_n \leq x$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_{\mathbf{a} \cup \mathbf{b}}(x)} \left| \sum_{a_n, b_k \leq x} (m(a_n, b_k)) \right| &= \frac{1}{N_{\mathbf{a}}(x) + N_{\mathbf{b}}(x)} \left| \sum_{a_n \leq x} (m a_n) + \sum_{b_k \leq x} (m b_k) \right| \\ &\leq \frac{1}{N_{\mathbf{a}}(x)} \left| \sum_{a_n \leq x} (m a_n) \right| + \frac{1}{N_{\mathbf{b}}(x)} \left| \sum_{b_k \leq x} (m b_k) \right|. \end{aligned}$$

Par conséquent, le critère de Weyl implique l'assertion. Alors, on déduit du Théorème 60 le résultat suivant.

Corollaire 61. Soient $F \in \mathcal{S}^{poly}$ un produit eulérien polynômial satisfaisant les conditions du Théorème 60, $M \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_M$, des nombres réels positifs arbitraires et a_1, \dots, a_M des nombres complexes arbitraires. Alors, la suite

$$\cup_{1 \leq m \leq M} (\alpha_m \gamma_{a_m}) = (\alpha_1 \gamma_{a_1}, \dots, \alpha_M \gamma_{a_M})$$

est uniformément distribuées modulo un. En particulier, les parties imaginaires de zéros de $P(F(s))$ sont uniformément distribués modulo un, où P est un polynôme non constant à coefficients complexes.

L'affirmation concernant $P(F(s))$ résulte de la factorisation

$$P(F) = \prod_j (F - a_j)$$

avec certains nombres complexes a_j et grâce au théorème fondamental d'algèbre et une application de la distribution uniforme modulo un de l'union des parties imaginaires des a_j -points de F .

Partie 5. Travaux en cours

12. FORMULE EXPLICITE SUR LES CORPS DE FONCTIONS ET APPLICATION : LES COEFFICIENTS DE LI

Dans un travail [74, Mazhouda-Bllaca (2019)] en collaboration avec Kajtaz Bllaca de l'université de Prishtina (Kosovo), nous formulons une formule explicite de la fonction zêta complétée pour un corps de fonctions K de genre g sur un corps fini \mathbb{F}_q , analogue à la formule explicite de Weil. Ensuite, nous donnons une formule arithmétique pour le n -ème coefficient de Li $\lambda_K(n)$ pour le corps de fonctions K . De plus, comme application, nous donnons quelques formules pour les constantes d'Euler-Stieltjes γ_K sur les corps de fonctions.

Les formules explicites codent une relation entre les propriétés analytiques de la fonction zêta et les fonctions L , ainsi que les propriétés géométriques, algébriques, arithmétiques, etc. de l'objet auquel la fonction est associée.

On commence par donner l'analogie de la formule explicite connue dans le cas de la fonction zêta de Riemann classique pour la fonction zêta complétée ξ_K

Théorème 62. Soit G une fonction satisfaisant les conditions suivantes :

1. $G \in \phi BV(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.
2. $G(x)e^{(1/2+\epsilon)|x|} \in \phi BV(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, pour certain $\epsilon > 0$.
3. $G(x) + G(-x) - 2G(0) = O(|\log |x||^{-\alpha})$, si $x \rightarrow 0$, pour certain $\alpha > 2$.

Soit $g(x) = G(-\log x)$, pour $x > 0$ et soit $\mathcal{Z}(K)$ l'ensemble des zéros non-triviaux de la fonction zêta complétée ξ_K . Alors, la formule

$$(82) \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\rho \in \mathcal{Z}(K) \\ |\operatorname{Im} \rho| \leq A}} \operatorname{ord}(\rho) M_{\frac{1}{2}} g(\rho) \\ = \sum_{\tilde{q}} \frac{\alpha_K(\tilde{q}) \log \tilde{q}}{\tilde{q}^{1/2}} \left(g(\tilde{q}) + g\left(\frac{1}{\tilde{q}}\right) \right) + 2G(0)g \log q$$

est vraie pour ξ_K , $M_{\frac{1}{2}} g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{-(s-1/2)x} dx$ désigne la translatée par 1/2 de la transformée de Mellin de la fonction g . Ici, $\phi BV(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions ϕ à variation bornées, pour une fonction ϕ convenablement choisie.

Notons $\gamma_K(n)$ les coefficients apparaissant dans le développement en série de Taylor de la fonction $(\log \xi_K(s))'$ autour de $s = 1$,

$$(83) \quad (\log \xi_K(s))' = g \log q + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_K(n)(s-1)^n$$

où s est proche de 1. Les coefficients γ_K sont appelés les constantes d'Euler-Stieltjes de deuxième espèce sur les corps de fonctions.

En appliquant la formule explicite (82) à une fonction test convenable, on exprime les coefficients de Li en fonction des constantes $\gamma_K(n)$.

Bombieri et Lagarias montrent que si

$$G_n(x) = \begin{cases} e^{-x/2} \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \frac{(-1)^{l-1} (x)^{l-1}}{(l-1)!}, & \text{si } x > 0, \\ n/2, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

alors

$$F_n(s) = M_{\frac{1}{2}} g_n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(x) e^{-(s-1/2)x} dx = 1 - \left(1 - \frac{1}{s}\right)^n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $g_n(x) = G_n(-\log x)$, pour $x > 0$.

Remarquons que la fonction $F_n(s)$ admet un pôle en $s = 1$ lorsque n est négatif, et un pôle en $s = 0$ si n est positif. Grâce à la formule explicite (82), on obtient une formule arithmétique des coefficients de Li $\lambda_K(n)$, donnée dans le théorème suivant.

Théorème 63. [74, Mazhouda-Bllaca (2019)] *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$(84) \quad \lambda_K(n) = ng \log q + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \gamma_K(l-1),$$

où $\gamma_K(l-1)$ sont définis ci-dessus dans (83).

Les constantes d'Euler-Stieltjes sont importantes à la fois dans la théorie des nombres théorique et algorithmique, car elles apparaissent dans diverses estimations et comme résultats d'une analyse asymptotique. Les constantes d'Euler-Stieltjes généralisées du second type, c'est-à-dire les coefficients dans l'expansion de la série de Laurent (Taylor) de la dérivée logarithmique de la fonction zêta ou de la fonction L à $s = 1$, ont fait l'objet d'études dans de nombreux contextes différents.

13. REMARQUE SUR LA DISTRIBUTION DES VALEURS DE LA DÉRIVÉE DES FONCTIONS L DE DIRICHLET SUR SES a -POINTS

Dans un article récent [41, Jakhouti-Mazhouda, Bull. Korean Math. Soc (2017)], nous avons considéré une formule asymptotique pour la somme des valeurs de la dérivée de la fonction L de Dirichlet prise sur ses a -points non triviaux. Dans un travail [91, Mekkaoui-Derbal-Mazhouda (2019)] en collaboration avec Mohammed Mekkaoui et Abdallah Derbal de l'École Normale Supérieure de Kouba (Algérie), nous étudions ici cette formule asymptotique dans un cas particulier lorsque le paramètre X est multiple du conducteur q .

Notons d'abord que si χ est un caractère primitif et non principal, une simple conséquence du Théorème 1 de [41, Jakhouti-Mazhouda, Bull. Korean Math. Soc (2017)] donne

$$\begin{aligned}
& \sum_{\rho_{a,\chi}; 0 < \gamma_{a,\chi} \leq T} L'(\rho_{a,\chi}, \chi) X^{\rho_{a,\chi}} \\
= & -\frac{aT}{2\pi} \log^2\left(\frac{T}{2\pi}\right) + \left(2a - a \log q - \frac{1}{4} \log X\right) \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) \\
& + \left(2a(\log q - 1) - a \log^2 q + \log X \left(\frac{1}{2} - \frac{i\pi}{4} - \log \sqrt{q}\right) + \sum_{X=mn} \Lambda(n) \log(m)\right) \frac{T}{2\pi} \\
& - \frac{X}{\sqrt{q}} L'(\beta, \chi) \frac{1}{\beta} \left(\frac{qT}{2\pi X}\right)^\beta + O(Te^{-c\sqrt{\log T}}),
\end{aligned}$$

où β est un zéro exceptionnel de $L(s, \chi)$ et le terme qu'il le contient n'existe que si ce zéro existe.

Plus précisément, on s'intéresse au cas où $\chi = \chi_0$ est le caractère principal et on montre le résultat suivant.

Théorème 64. [91, Mekkaoui-Derbal-Mazhouda (2019)] *Soit (X/q) un entier ≥ 1 . Soit $\chi = \chi_0$ le caractère principal modulo $q > 1$. On a*

$$\begin{aligned}
& \sum_{\rho_{a,\chi}; 0 < \gamma_{a,\chi} \leq T} L'(\rho_{a,\chi}, \chi) X^{\rho_{a,\chi}} \\
= & \left(\frac{\phi(q)}{2\sqrt{q}} - a\right) \frac{T}{2\pi} \log^2\left(\frac{T}{2\pi}\right) \\
& + \left\{ a(1 - \log q) - \frac{1}{4} \log X + \frac{\phi(q)}{4\sqrt{q}} \left(-\log X - 2 + 2 \log q + 2C_0 + 2 \sum_{p|q} \frac{\log(p)}{p-1}\right) \right\} \frac{T}{\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) \\
& + \left\{ -a \left(1 + -\log q + \frac{1}{2} \log^2 q\right) - \frac{1}{4} \log X \log q + \frac{1}{2} \log X \left(\frac{1}{2} - \frac{i\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \sum_{X=mn} \Lambda(n) \log m \right\} \frac{T}{\pi} \\
& + \frac{\phi(q)}{2\sqrt{q}} \left\{ 1 + \log^2 q - \frac{1}{2} \log^2 X + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log q - C_0 - \sum_{p|q} \frac{\log(p)}{p-1} + \frac{i\pi}{4}\right) \log X + \left(-1 + C_0 + \sum_{p|q} \frac{\log(p)}{p-1}\right) \log q \right\} \frac{T}{\pi} \\
& + \frac{\phi(q)}{2\sqrt{q}} \left\{ -C_0 - C_0^2 + 2C_1 - \sum_{p|q} \frac{\log(p)}{p-1} - \sum_{p|q} \frac{p \log^2(p)}{(p-1)^2} \right\} \frac{T}{\pi} \\
& - \frac{1}{2\sqrt{q}} \sum_{r=1}^q \chi(r) \left\{ B_0(r/q) \log q - B_1(r/q) + q \frac{\log(r)}{r} \right\} \frac{T}{\pi} + O(Te^{-c\sqrt{\log T}}).
\end{aligned}$$

où, pour $n \geq 0$, les C_n désignent les coefficients de Stieltjes et sont donnés par la formule

$$(85) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C_0 + C_1(s-1) + \dots,$$

B_0 et B_1 sont les constantes de l'expansion de la fonction zêta de Hurwitz donnée par la formule

$$(86) \quad \zeta(s, w) = \frac{1}{w^s} + \frac{1}{s-1} + B_0(w) + B_1(w)(s-1) + \dots$$

et c est un nombre réel positif.

14. SUR CERTAINES SOMMES AUX a -POINTS DES DÉRIVÉES k -IÈMES DES FONCTIONS L DE DIRICHLET

Dans un travail [92, Mekkaoui-Derbal-Mazhouda (2019)] en collaboration avec Mohammed Mekkaoui et Abdallah Derbal de l'École Normale Supérieure de Kouba (Algérie), nous donnons une formule asymptotique pour les sommes

$$\sum_{\rho_{0,\chi}^{(k)}: 0 < \gamma_{0,\chi}^{(k)} < T} L^{(j)}(\rho_{0,\chi}^{(k)}, \chi) \quad \text{et} \quad \sum_{\rho_{a,\chi}^{(k)}: 1 < \gamma_{a,\chi}^{(k)} < T} L^{(j)}(\rho_{a,\chi}^{(k)}, \chi) \quad \text{si} \quad T \rightarrow \infty$$

où j et k sont des entiers non négatifs et $\rho_{a,\chi}^{(k)}$ désigne un a -point de la k -ième dérivée $L^{(k)}(s, \chi)$ et $\gamma_{a,\chi}^{(k)} = \text{Im}(\rho_{a,\chi}^{(k)})$.

La première somme étend le résultat de Karabulut et Yildirim [51] à la dérivée k -ième des fonctions L de Dirichlet et est évaluée dans le théorème suivant.

Théorème 65. [92, Mekkaoui-Derbal-Mazhouda (2019)] *Soient $k, j \in \mathbb{N}$ deux entiers fixés et χ un caractère primitif modulo q . Alors, si $T \rightarrow \infty$, on a*

$$(87) \quad \sum_{\rho_{\chi}^{(k)}; 0 < \gamma_{\chi}^{(k)} \leq T} L^{(j)}(\rho_{\chi}^{(k)}, \chi) = (-1)^j (\delta_{j,0} + B(j, k)) \frac{T}{2\pi} \left(\log \frac{qT}{2\pi} \right)^{j+1} + O_{j,k} \left(T (\log qT)^j \right),$$

où $\delta_{j,0} = 1$ si $j = 0$ et 0 sinon et $B(j, k)$ est défini par

$$(88) \quad B(j, k) = -\frac{k+1}{j+1} - j! \sum_{r=1}^k \frac{e^{-z_r}}{z_r^{j+1}} P_k(z_r) + j! \sum_{r=1}^k \frac{1}{z_r^{j+1}},$$

Du théorème 65, nous obtenons notre résultat principal

Théorème 66. [92, Mekkaoui-Derbal-Mazhouda (2019)] *Soient $k, j \in \mathbb{N}$ deux entiers fixés, a un nombre complexe et χ un caractère primitif modulo q . Alors, si $T \rightarrow \infty$, on a*

$$(89) \quad \sum_{\rho_{a,\chi}^{(k)}; 1 < \gamma_{a,\chi}^{(k)} \leq T} L^{(j)}(\rho_{a,\chi}^{(k)}, \chi) = (-1)^j (\delta_{j,0} + a\delta_{k,0} + B(j, k)) \frac{T}{2\pi} \left(\log \frac{qT}{2\pi} \right)^{j+1} + O_{j,k} \left(T (\log qT)^j \right).$$

Ici, la constante implicite dans le terme d'erreur peut dépendre de a .

15. REFORMULATION DU CRITÈRE DE LI DANS LA CLASSE DE SELBERG

Dans [87, Mazhouda-Sodaïgui (2019)] et [88, Mazhouda-Sodaïgui (2019)] en collaboration avec le professeur Bouchaib Sodaïgui de l'université de Valenciennes (France), on donne une autre extension de critère de Li ainsi que les coefficients de Li pour les fonctions L de la classe de Selberg. Soient F une fonction de la classe de Selberg \mathcal{S} et a un nombre réel différent de $1/2$. Considérons la somme

$$\lambda_F(n, a) = \sum_{\rho} \left[1 - \left(\frac{\rho - a}{\rho + a - 1} \right)^n \right],$$

où ρ décrit les zéros non-triviaux de F .

Dans [87, Mazhouda-Sodaïgui (2019)], on montre que l'hypothèse de Riemann généralisée est équivalente à la positivité des "coefficients de Li modifiés" ou "coefficients de Li-Sekatskii" $\lambda_F(n, a)$, pour $n = 1, 2, \dots$ et $a < 1/2$. De plus, on donne une formule arithmétique et asymptotique de ces coefficients.

Une reformulation de critère de Li pour la classe de Selberg est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 67. [87, Mazhouda-Sodaïgui (2019)]⁸ Soient a un nombre réel tel que $a < 1/2$ et $F \in \mathcal{S}^\#$ une fonction telle que $a \notin Z(F)$. Alors, tous les zéros non-triviaux de F sont situés sur la ligne $Re(s) = 1/2$ si et seulement si $Re(\lambda_F(n, a)) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. Grâce aux Théorème 67 et la note de bas de page 8, on n'a pas besoin d'appeler ce critère comme dans la définition originale de Li [61] dans le cas classique de la fonction zêta de Riemann " critère de positivité de Li".

Une formule arithmétique de $\lambda_F(n, a)$ est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 68. [87, Mazhouda-Sodaïgui (2019)] Soit $F \in \mathcal{S}$ non nul sur $Re(s) = 1$. Pour $a < 0$ un nombre réel. On a⁹

$$\begin{aligned} & \lambda_F(-n, a) \\ = & m_F \left[2 - \left(1 - \frac{2a-1}{a} \right)^n - \left(1 + \frac{2a-1}{1-a} \right)^n \right] + n(1-2a) \left[\log Q_F - \frac{d_F}{2} \gamma \right] \\ & + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \frac{(2a-1)^l}{(l-1)!} \lim_{X \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{k \leq X} \frac{\Lambda_F(k)}{k^{1-a}} \log^{l-1} k - \frac{m_F(l-1)!}{X^{-a}} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\log^k X}{k!(-a)^{l-k}} \right\} \\ & + n(1-2a) \sum_{j=1}^r \lambda_j \left(-\frac{1}{\lambda_j + \mu_j} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda_j + \mu_j}{l(l + \lambda_j + \mu_j)} \right) \\ & - n(1-2a) \sum_{j=1}^r \lambda_j \sum_{k=0}^{+\infty} (a\lambda_j)^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m + \lambda_j + \mu_j)^{k+1}} \\ & + \sum_{j=1}^r \sum_{l=2}^n \binom{n}{l} (-1-2a)\lambda_j^l \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m + (1-a)\lambda_j + \mu_j)^l}. \end{aligned}$$

Par la méthode des point col et la théorie de l'intégrale de Nörlund-Rice, on déduit une formule asymptotique des coefficients de Li modifiés équivalente à l'hypothèse de Riemann.

Théorème 69. [87, Mazhouda-Sodaïgui (2019)] Soit $F \in \mathcal{F} \in \mathcal{S}^\#$. Pour $a < 1/2$, $a \neq 0$, on a,

HR

\iff

$$\begin{aligned} \lambda_F(n, a) &= \left(\frac{1}{2} - a \right) d_F n \log n + \left\{ \frac{d_F}{2} (\gamma - 1 - \log(1-2a)) + \frac{1}{2} \log(\lambda Q_F^2) \right\} (1-2a)n \\ &+ O_a(\sqrt{n} \log n), \end{aligned}$$

où γ désigne la constante d'Euler.

Les Théorèmes 68 et 69 sont montrés autrement dans [88, Mazhouda-Sodaïgui (2019)].

8. Si on suppose $a > 1/2$, alors le critère de Li modifié est écrit comme suit : tous les zéros non-triviaux de F sont situés sur la ligne $Re(s) = 1/2$ si et seulement si $Re(\lambda_F(n, a)) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. Si $a = 0$, on en déduit $\lambda_F(-n, 0) = \lambda_F(-n)$ comme établi dans [82, Theorem 2] ou [129].

Partie 6. Cours, articles de présentation et co-encadrement

16. INTRODUCTION À LA CLASSE DE SELBERG

Le premier travail de présentation [69] est une partie de cours de Master en collaboration avec le Professeur Fethi Ben Saïd (année universitaire 2011-2012) sur la théorie des fonctions L , en particulier, sur les fonctions L de la classe de Selberg. Une première partie présente la théorie classique des fonctions L (la classe de Selberg et comme exemple la fonction zêta de Riemann). Une deuxième partie présente, notamment, le très récent critère de Li concernant l'hypothèse de Riemann ainsi que ses généralisations.

17. CRITÈRE DE LI ET L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN

Le second travail de présentation (note de lecture au LIPN, Université Paris 13) [68] porte sur le critère de Li et l'hypothèse de Riemann dans le cas classique de la fonction zêta de Riemann. L'objectif de mon texte est de présenter, à un public non spécialiste (notamment des informaticiens), ce critère dans le cas de la fonction ζ jusqu'à ces derniers développements.

18. CO-ENCADREMENT

En collaboration avec le professeur Fathi Ben Saïd de l'université de Monastir (Tunisie), j'ai encadré deux étudiants en master :

- (1) **Khadija Mbarki : Équirépartition des coefficients de Fourier des fonctions L de puissances symétriques**
(Faculté des sciences de Monastir, Mai 2012)

Résumé : Ce mémoire est constitué de cinq chapitres. Dans le premier, on donne un survol de la théorie des formes modulaires et des opérateurs de Hecke en rappelant quelques résultats qui vont être utilisés tout au long de ce mémoire. Dans le second chapitre, on définit les fonctions L de puissances symétriques et on cite certaines de ses propriétés analytiques; ensuite, on présente les travaux établis concernant les fonctions L de carrés symétriques. On finit ce chapitre par donner des formules de traces que nous serviront par la suite. Dans le troisième chapitre, on étudie l'équirépartition et l'équirépartition harmonique des coefficients de Fourier des fonctions L de puissances symétriques d'une forme primitive. Plus précisément, on montre le résultat de l'équirépartition dans le cas des fonctions L des formes modulaires et de carrés et de cubes symétriques et le résultat de l'équirépartition harmonique dans le cas des fonctions L des formes modulaires et de carrés symétriques. Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse au changement de signes de la suite des coefficients de Fourier des fonctions L de puissances symétriques d'une forme primitive en donnant une borne de premier changement de signes de ces coefficients et en mesurant la longueur de la suite des coefficients qui ont le même signe. Par absence des travaux dans le cas des puissances qui sont supérieures à deux, on analyse seulement le cas des fonctions L des formes modulaires et de carrés symétriques. Le dernier chapitre est un annexe dans lequel on rappelle quelques résultats arithmétiques et analytiques que nous avons utilisés au cours de ce travail.

Mots-clés : Formes modulaires, opérateurs de Hecke, fonctions L de puissances symétriques, formule de traces, coefficients de Fourier, équirépartition, équirépartition harmonique.

- (2) **Med. Taïb Jakhouti : Les a -valeurs des fonctions L**
(Faculté des sciences de Monastir, Mai 2012)

Résumé : Ce mémoire est constitué de six chapitres. Le premier chapitre est une mise en place de tous les objets nécessaires à la lecture de ce mémoire, où on rappelle des résultats fondamentaux concernant la fonction zêta de Riemann ainsi que les fonctions L de Dirichlet.

Dans le second chapitre, on définit les a -valeurs de la fonction zêta de Riemann ainsi que de sa dérivée et des fonctions L de Dirichlet, en mettant l'accent sur la répartition de ses a -valeurs dans le plan complexe, on étudie ainsi les fonctions de comptage de ces a -valeurs, on établit une formule de type Riemann-von Mangoldt et on étudie quelques résultats concernant l'ordre de multiplicité de ces a -valeurs. Dans le troisième chapitre, on commence par étudier des cas particuliers basés essentiellement sur la méthode de Conrey, Ghosh et Gonek. On s'intéresse ensuite à la méthode de Steuding afin de démontrer deux théorèmes remarquables, l'un détermine la somme sur les a -valeurs de la fonction zêta et l'autre établit la somme des a -valeurs de la fonction zêta de sa dérivée. Dans le quatrième chapitre, on expose des théorèmes de densité de quelques ensembles dans \mathbb{C}^n , $n \geq 1$ et on établit le lien entre ces théorèmes et les a -valeurs. Dans le cinquième chapitre, on étend la notion des a -valeurs à une large classe de séries de Dirichlet vérifiant des propriétés analytiques similaires et contenant l'exemple typique, la fonction zêta de Riemann. Cette classe est connue sous le nom "la classe de Selberg". Enfin, le dernier chapitre est un annexe dans lequel on rappelle quelques résultats analytiques et arithmétiques que nous avons utilisés au cours de ce travail.

Mots-clés : Fonction zêta de Riemann, hypothèse de Riemann, classe de Selberg, a -valeurs, distribution des a -valeurs, densité.

Aussi, en collaboration avec le professeur Fathi ben Saïd, j'ai encadré les deux étudiants cités ci-dessus en thèse. L'étudiante Khadija Mbarki a soutenu sa thèse intitulée

Coefficients de Dirichlet des fonctions L de puissances symétriques

en 2017 avec deux papiers publiés [75] à *Functiones et Approximatio* (2017) et à *Intgers* (2016), en collaboration aussi avec Jie Wu de l'université Loraine (Nancy, France) et le professeur Alexandre Ivic de Beograd (Serbie). Alors que pour l'étudiant Med-Taïb Jakhouliti a soutenu aussi sa thèse intitulée

Sur la distribution des valeurs des fonctions L sur ses a -points

en 2017 avec trois papiers publiés [40], [41, 42] en collaboration avec le professeur Joern Steuding de l'université Würzburg (Allemagne).

Co-encadrement en cours.

En collaboration avec le professeur Bouchaïb Sodaïgui de l'université de Valenciennes (France), on encadre un étudiant en mastère sur les sujets suivant :

Sujet. L'approche de Voros pour l'hypothèse de Riemann.

Description du sujet : Dans un travail récent de Voros, le critère de Li est transposé en une nouvelle suite de coefficients dans le développement de la fonction zêta de Riemann basée au point $1/2$. De plus, Voros a trouvé des sommes incluant certaines puissances de $(s - 1/2)$ sur les zéros de la fonction zêta de Riemann, dont la positivité est équivalente à l'hypothèse de Riemann. Sekatskii a analysé et modifié les sommes de Voros.

Pour aborder ce sujet.

- On devrait avoir une connaissance sur la théorie analytique des nombres et la théorie des fonctions (analyse complexe) ; en particulier, une connaissance de base sur la fonction zêta serait utile.
- On devrait étudier l'article de Voros et fournir une preuve détaillée autoécrite de tous les résultats dans ce document (et tout ce qui est implicitement nécessaire).
- On pourrait aussi essayer d'étendre les résultats aux fonctions L de Dirichlet ; le cas des fonctions L de degré supérieur serait extrêmement intéressant, mais cela semble être une tâche très difficile.

En collaboration avec la professeure Lejla Smajlovic de l'université de Sarajevo (Bosnie-Herzégovine), on a donné un cours cette année universitaire 2019-2020 sur la théorie des fonctions L et les relations avec l'hypothèse de Riemann. De plus, on encadre un étudiant en mastère sur le sujet suivant :

Sujet. Fonctions Superzêta et applications. Le but du sujet est de comprendre les différents types de fonctions superzêta telles qu'introduites par Voros dans son livre [138]. A savoir, Voros introduit trois types de fonctions superzêta et, dans le chapitre 10 de son livre traite des extensions possibles à d'autres classes de fonctions zêta et L .

On pense que le contenu du mémoire du Master pourrait être le suivant :

- (1) La classe de Selberg et la classe de Selberg étendue. Dans cette section, on pourrait discuter des propriétés de la classe de Selberg et la classe de Selberg étendue, comme indiqué par exemple par Kaczorowski et Perelli. Un accent particulier devrait être mis sur les zéros (l'emplacement et le comptage).
- (2) Fonctions zêta construites à partir de zéros d'autres fonctions de type zêta. Dans cette section, on pourrait réécrire en termes mathématiquement précis les sections 1 et 2 du livre de Voros.
- (3) Fonctions Superzêta pour la classe de Selberg et applications. On pourrait discuter des fonctions superzêta associées aux fonctions de la classe Selberg, comme présenté par Lejla Smajlovic.
 - i) Expliquer l'application de cette fonction au calcul des H -invariants dans la classe Selberg.
 - ii) Expliquer comment les valeurs spéciales des fonctions superzêta sont liées aux coefficients de Li dans la classe de Selberg (en imitant les résultats du chapitre 11 de livre de Voros).

RÉFÉRENCES

- [1] A. Akbary and R. Murty, *Uniform distribution of zeros of Dirichlet series*, in : *Anatomy of integer*, CRM Proceedings and Lecture Notes, **46** (2008), 143–158.
- [2] M. Balazard, E. Saias, and M. Yor, Notes sur la fonction de Riemann, 2, *Adv. Math.* **143** (1999), 284–287.
- [3] K. Barner, *On A. Weil's explicit formula*, *J. Reine Angew. Math.* **323** (1981), 139–152.
- [4] H. Bohr, E. Landau, J.E. Littlewood, *Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le voisinage de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$* , *Bull. de l'Acad. royale de Belgique* (1913), 3–35.
- [5] E. Bombieri, J.C. Lagarias, *Complements to Li's criterion for the Riemann hypothesis*, *J. Number Theory* **77** (2) (1999) 274–287.
- [6] P. Borwein, S. Choi, B. Rooney, A. Weirathmueller, *The Riemann hypothesis*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York, 2008.
- [7] F. Brown, *Li's criterion and zero-free regions of L -functions*, *Journal of Number Theory* **111** (2005) 1–32.
- [8] A. Bucur, A.-M. Ernvall-Hytönen, A. Odžak, L. Smajlović, *On a Li-type criterion for zero-free regions of certain Dirichlet series with real coefficients*, *LMS J. Comput. Math.* **19** (1) (2016), 259–280.
- [9] D. Cardon, S. Roberts, *An equivalence for the Riemann Hypothesis in terms of orthogonal polynomials*, *Journal of Approximation Theory* **138** (1) (2006), 54–64.
- [10] S. D. Chowla, *Contributions to the analytic theory of numbers*, *Math. Z.* **35** (1932), 279–299.
- [11] M. Coffey, *Toward verification of the Riemann hypothesis : Application of the Li criterion*, *Math. Phys. Anal. Geom.* **8** (3) (2005), 211–255.
- [12] J. Cogdell and P. Michel, *On the complex moments of symmetric power L -functions at $s = 1$* , *Int. Math. Res. Not.* **31** (2004), 1562–1618.
- [13] J. B. Conrey, W. Duke, D. Farmer, *The distribution of the eigenvalues of Hecke operators*, *Acta Arith.* **LXXVIII** (1997), 405–409.
- [14] C. Deninger, *Local L -factors of motives and regularized determinants*, *Inv. Math.*, **107** (1992), 135–150.
- [15] P. Deligne, *La conjecture de Weil, I*, *Publ. Math. IHES* **48** (1974), 273–308.
- [16] P. Deligne, *La conjecture de Weil, II*, *Publ. Math. IHES* **52** (1981), 313–428.

- [17] A. D. Droll, *Variations of Li's criterion for an extension of the Selberg class*, PhD thesis, Queen's University Ontario, Canada, (2012).
- [18] P.D.T.A. Elliott, *The Riemann zeta function and coin tossing*, J. reine angew. Math. **254** (1972), 100–109.
- [19] L. Elaissaoui, Z. El-Abidine Guennoun, On logarithmic integrals of the Riemann zeta function and an approach to the Riemann Hypothesis by a geometric mean with respect to an ergodic transformation, *European J. Math* **1** (2015), 829 - 847.
- [20] A-M. Ernvall-Hytönen, A. Odžak, L. Smajlović and M. Sušić, On the modified Li criterion for a certain class of L -functions, *J. Number Theory* **156** (2015), 340–367.
- [21] P. Freitas, *A Li-type criterion for zero-free half-planes of Riemann's zeta function*, J. London Math. Soc. **73** (2006) 399–414.
- [22] A. Fujii, *On the Distribution of Values of Derivative of the Riemann Zeta Function at its Zeros. I*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol. **276** (2012), 51–76.
- [23] A. Fujii, *Some Observations concerning the Distribution of the Zeros of the Zeta Functions. II*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **40** (2) (1991), 125–231.
- [24] A. Fujii, *Uniform distribution of the zeros of the Riemann zeta function and the mean value theorems of Dirichlet L -functions*, Proc. Japan Acad. **63A** (1987), 370–373.
- [25] G. Gelbart, *Notes on Langlands pictures of Automorphic forms and L -functions*, Lecture X : Langlands program, (Mars 2009).
- [26] S. Gelbart and H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $GL(3)$* , Ann. Sci. École Norm. Sup. **11** (4) (1978), 471–542.
- [27] S. S. Gelbart and F. Shahidi, *Boundedness of automorphic L -functions in vertical strips*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 79–107.
- [28] R. Garunkštis, J. Steuding, *On the roots of the equation $\zeta(s) = a$* , Abh. Math. Semin. Univ. Hambg **84** (1) (2014), 1–15.
- [29] R. Garunkštis, J. Grahl and J. Steuding, *Uniqueness Theorem for L -functions*, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli **60** (1-2) (2011), 15–35.
- [30] S. M. Gonek, *A note on simple a -points of L -functions*, Proceeding of the AMS **140** (12) (2012), 4097–4103.
- [31] S. M. Gonek, *Mean values of the Riemann zeta-function and its derivatives*, Invent. Math. **75** (1984), 123–141.
- [32] D.R. Heath-Brown, *Convexity bounds for L -functions*, Acta Arith. **136** (4) (2009), 391–395.
- [33] G. A. Hiary, A. M. Odlyzko, *Numerical Study of the Derivative of the Riemann Zeta Function at Zeros*, arXiv : 1105.4312 [math.NT].
- [34] E. Hlawka, *Theorie der Gleichverteilung*, BIB, Mannheim, 1979.
- [35] A. Ivić, *On the Laurent coefficients of certain Dirichlet series*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **53** (67) (1993), 23–36.
- [36] A. Ivić, *The Riemann zeta function*, John Wiley & Sons, New York (1985).
- [37] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 53, 2004.
- [38] W. Kohlen, J. Sengupta and H. Iwaniec, *The first negative Hecke eigenvalue*, Int. J. Number Theory **3** (2007), 355–363.
- [39] H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak, *Low lying zeros of families of L -functions*, Publ. Math. IHES **91** (2000), 55–131.
- [40] M-T, Jakhouliti, K. Mazhouda, *Distribution of the values of the derivative of the Riemann zeta function on its a -points*, Uniform Distribution Theory **9** (1) (2014), 115–125.
- [41] M-T, Jakhouliti, K. Mazhouda, *Distribution of the values of the derivative of the Dirichlet L -function on its a -points*, Bull. Korean Math. Soc. **54** (4) (2017), 1141–1158.
- [42] M-T, Jakhouliti, K. Mazhouda et J. Steuding, *On the distribution of the a -points of a Selberg class L -functions modulo one*, Archiv Der Mathematik, 104 (5) (2015), 419–429.
- [43] Y.-H. He, V. Jejjala and Dj. Minic, *From Veneziano to Riemann : A String Theory Statement of the Riemann Hypothesis*, Preprint, Arxiv : 1501.01975v2 (2015).
- [44] H. Jacquet and J. A. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic representations I*, Amer. J. Math. **103** (1981), 499–558.

- [45] H. Jacquet and J. A. Shalika, On Euler products and the classification of automorphic representations II, *Amer. J. Math.* **103** (1981), 777–815.
- [46] J. Kaczorowski, *Axiomatic theory of L-functions : the Selberg class*, Analytic number theory, Lecture Notes in Math. **1891** (2006) 133–209.
- [47] Y. Kamiya, M. Suzuki, *An asymptotic formula for a sum involving zeros of the Riemann zeta-function*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **76** (90) (2004), 81–88.
- [48] J. Kaczorowski, A. Perelli, *The Selberg class : a survey*, In Number Theory in progress, Proc. Conf. in Honor of A. Schinzel, ed. by K. Györy et al., de Gruyter (1999) 953–992.
- [49] J. Kaczorowski, A. Perelli, *A note on the degree conjecture for the Selberg class*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **57** (2008), 443–448.
- [50] J. Kaczorowski, *Axiomatic Theory of L-functions : the Selberg class*, Lecture Notes in Mathematics 1891, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg. (2006), 133–209.
- [51] Y. Karabulut and Y. Yildirim, *On some averages at the zeros of the derivatives of the Riemann zeta-function*, Journal of Number Theory **131** (2011), 1939–1961.
- [52] H.H. Kim and F. Shahidi, *Cuspidality of symmetric powers with applications*, Duke Math. J. **112** (1) (2002), 177–197.
- [53] W. Koepf and D. Schmersau, *Bounded nonvanishing functions and Bateman functions*, Complex Var. **25** (1994) 237–259.
- [54] E. Kowalski, Y.-K. Lau, K. Soundararajan and J. Wu, *On modular signs*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **149** (2010), 389–411.
- [55] J. C. Lagarias, *An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), 534–543.
- [56] J.C. Lagarias, *Li Coefficients for automorphic L-functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **57** (2007) 1689–1740.
- [57] S. Lang, *On the zeta function of number fields*, Invent. Math. **12** (1971), 337–345.
- [58] E. Landau, *Über die Nullstellen der Zetafunktion*, Math. Ann. **71** (1912), 548–564
- [59] E. Landau, *Über den Wertevorrat von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$* , Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **36** (1933), 81–91
- [60] N. Levinson, *Almost all roots of $\zeta(s) = a$ are arbitrarily close to $\sigma = 1/2$* , Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **72** (1975), 1322–1324.
- [61] X.-J. Li, *The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis*, J. Number theory **65** (2) (1997) 325–333.
- [62] X.-J. Li, *Explicit formulas for Dirichlet and Hecke L-functions*, Illinois J. Math. **48** (2) (2004), 491–503.
- [63] Y.-K. Lau, J.-Y. Liu et J. Wu, *The first negative coefficient of symmetric square L-functions*, Ramanujan J. **27** (2012), 419–441.
- [64] J.-Y. Liu, Y. Qu et J. Wu, *Two Linnik-type problems for automorphic L-functions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **151** (2011), 219–227.
- [65] K. Maślanka, *Li's criterion for the Riemann hypothesis-numerical approach*. Opuscula Math. **24** (1) (2004), 103–114.
- [66] K. Matomäki, *On signs of Fourier coefficients of cusp forms*, Math. Proc. Cambridge. Philos. Soc. **152** (2012), 207–222.
- [67] K. Matsumoto, *Recent developments in the mean square theory of the Riemann zeta and other zeta-functions*, in : "Number Theory", P. Bambah et al.(eds.), Hindustan Book Agency and Indian National Science Academy, distributed by Birkhauser (2000), 241–286.
- [68] K. Mazhouda, *Critère de positivité de Li et l'hypothèse de Riemann*, Note de lecture à LIPN (Université Paris 13), 17 décembre 2009.
- [69] K. Mazhouda, *Introduction à la classe de Selberg*, Cours master, A. U 2011-2012.
- [70] K. Mazhouda, *On the τ -Li coefficients for automorphic L-functions*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, volume 4 (6) (2017), 1987–2011.
- [71] K. Mazhouda, *On the Li coefficients for the Dirichlet L-functions*, Monatshefte Fur Mathematik, **170** (3-4) (2013), 405–423.

- [72] K. Mazhouda, *Regularised product for the zeroes of L -functions for the Selberg Class*, The Journal of the Ramanujan Mathematical Society (JRMS) **27** (4) (2012), 397–410.
- [73] K. Mazhouda, *The saddle-point method and the Li coefficients*, Canad. Math. Bull. **54** (2011), 316–329.
- [74] K. Mazhouda, K. Bllaca, *Explicit formula on function fields and application : Li coefficients*, Soumis (2019).
- [75] K. Mazhouda, Kh. Mbarki, J. Wu, *Le premier coefficient négatif des fonctions L de puissances symétriques*, Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici **56** (2) (2017), 239–258.
- [76] K. Mazhouda, S. Omar, *Le critère de Li et l'hypothèse de Riemann pour la classe de Selberg*, Journal of Number Theory **125** (1) (2007), 50–58.
- [77] K. Mazhouda, S. Omar, *Corrigendum et addendum à " Le critère de Li et l'hypothèse de Riemann pour la classe de Selberg " [J. Number Theory 125 (1) (2007) 50-58]*, Journal of Number Theory **130** (4) (2010), 1108–1114.
- [78] K. Mazhouda, S. Omar, *Le critère de positivité de Li pour la classe de Selberg*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série 345, issue 5, 1 septembre (2007), 245–248.
- [79] Mazhouda Kamel, Omar Sami, *Distribution of zeros of L -functions on the critical line*, Unif. Distrib. Theory **8** (2013), no. 2, 39–47.
- [80] K. Mazhouda, S. Omar, *Équirépartition des coefficients de Fourier des fonctions L de carrés et de cubes symétriques*, Ramanujan Journal **20** (1) (2009), 81–89.
- [81] K. Mazhouda, S. Omar, *Mean-square of L -functions in the Selberg class*, Steuding, Rasa (ed.) et al., New directions in value-distribution theory of zeta and L -functions. Proceedings of the conference, Würzburg, Germany, October 6-10, 2008. Aachen : Shaker Verlag. (2009), 249–263.
- [82] K. Mazhouda, S. Omar, *Li's criterion and the Riemann hypothesis II*, Journal of Number Theory **130** (4) (2010), 1098–1108.
- [83] K. Mazhouda, S. Omar, *The Cardon and Robert criterion for the Riemann hypothesis*, Analysis (Berlin) **33** (4) (2013), 309–318.
- [84] Mazhouda Kamel, Omar Sami, *The Euler ϕ -function associated to automorphic L -functions*, Analysis (Berlin) **34** (2014), no. 1, 67–80.
- [85] K. Mazhouda, S. Omar, R. Ouni, *On the Li Coefficients for the Hecke L -functions*, Mathematical Physics, Analysis and Geometry **17** (1-2) (2014), 67–81.
- [86] K. Mazhouda, T. Onozuka, *On some sums at the a -points of derivatives of the Riemann zeta-function*, à paraître dans AGNT Analysis, Geometry and Number Theory (2020).
- [87] K. Mazhouda, B. Sodaïgui, *The Li-Sekatskii coefficients for the Selberg class, Part I*, prépublication (2019).
- [88] K. Mazhouda, B. Sodaïgui, *The Li-Sekatskii coefficients for the Selberg class, Part II*, prépublication (2019).
- [89] K. Mazhouda, L. Smajlovic, *On relations equivalent to the generalized Riemann hypothesis for the Selberg class*, Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici **56** (1) (2017), 67–93.
- [90] K. Mazhouda, L. Smajlovic, *Evaluation of the Li coefficients on function fields and applications*, Eur. J. Math. **5** (2) (2019), 540-550.
- [91] M. Mekkaoui, A Derbal et K. Mazhouda, *Note on the values distribution of the derivative of the Dirichlet L -functions at its a -points*, soumis (2019).
- [92] M. Mekkaoui, A Derbal et K. Mazhouda, *On some sums at the a -points of the k -th derivatives of the Dirichlet L -functions*, soumis (2020).
- [93] C. Moreno, Algebraic Curves over Finite Fields, Cambridge University Press (1991).
- [94] J.F. Mestre, *Formules explicites et minorations de conducteurs de variétés algébriques*, Compositio Math. **58** (2) (1986), 209–232.
- [95] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *Hilbert's inequality*, J. London. Math. Soc. **8** (2) (1974), 73–82.
- [96] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I, Classical Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **97**. Cambridge University Press, Cambridge, (2007) xviii+552pp.
- [97] Murty, R., *Oscillations of Fourier coefficients of modular forms*, Math. Ann. **262** (1983), 431–446.
- [98] M.R. Murty, *Problems in Analytic Number Theory*, Readings in Mathematics, Grad. Texts in Math., Springer-Verlag, (2001).

- [99] K. Murty and R. Murty, *Strong multiplicity one for Selberg's class*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **319** Series I (1994), 315–320.
- [100] R. Murty and A. Perelli, *The pair correlation of zeros of functions in the Selberg class*, Int. Math. Res. Not. **10** (1999), 531–545.
- [101] R. Murty and A. Zaharescu, *Explicit formulas for the pair correlation of zeros of functions in the Selberg class*, Forum Math. **14** (1) (2002), 65–83.
- [102] S. Omar, S. Bouanani, *Li's criterion and the Riemann hypothesis for function fields*, Finite Fields and Their Applications **16** (6) (2010) 477–485.
- [103] S. Omar, R. Ouni, *A note on Li's coefficients for Hecke L -functions*, Int. J. Number Theory **13** (2017), no. 7, 1747–1753.
- [104] A. Odžak and L. Smajlović, *On asymptotic behavior of generalized Li coefficients in the Selberg class*, J. Number Theory **131** (2011), 519–535.
- [105] A. Odžak and L. Smajlović, *Euler-Stieltjes constants for the Rankin-Selberg L -function and weighted Selberg orthogonality*, to appear in *Glasnik Mat.*
- [106] A. Perelli, *A survey of the Selberg class of L -functions, Part I*, Milan J. Math **73** (2005) 19–52.
- [107] Y. Qu, *Linnik-type problems for automorphic L -functions*, J. Number Theory **130** (3) (2010), 786–802.
- [108] H.A. Rademacher, *Fourier Analysis in Number Theory*, Symposium on Harmonic Analysis and Related Integral Transforms (Cornell Univ., Ithaca, N.Y., 1956) in : *Collected Papers of Hans Rademacher*, Vol. II, pp. 434–458, Massachusetts Inst. Tech., Cambridge, Mass., (1974).
- [109] G. Robin, *Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann*, J. Math. Pures Appl. **63** (1984), 187–213.
- [110] A. de Roton, *On the mean square of the error term for an extended Selberg's class*, Acta Arith. **126** (1) (2007), 27–55.
- [111] M. Rosen, *A generalization of Mertens's theorem*, J. Ramanujan Math. Soc. **14** (1) (1999), 1–19.
- [112] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers*, Illinois. J. Math. **6** (1962), 64–94.
- [113] E. Royer, J. Wu, *Taille des valeurs de fonctions L de carrés symétriques au bord de la bande critique*, Rev. Mat. Iberoam. **21** (1) (2005), 263–312.
- [114] E. Royer and J. Wu, *Special values of symmetric power L -functions and Hecke eigenvalues*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **19** (2007), 703–753.
- [115] Z. Rudnick and P. Sarnak, *Zeros of principal L -functions and random matrix theory*, Duke Math. J. **81** (1996), 269–322.
- [116] G.D.V. Salvador, *Topics in the theory of algebraic function fields*, in : Nolan Wallach (Ed.), *Mathematics : Theory and Applications*, Birkhäuser (2006).
- [117] P. Sarnak, *Statistical properties of eigenvalues of the Hecke operators*, In : *Analytic Number Theory and Diophantine Problems*, Stillwater, OK, 1984, Birkhäuser, Boston (1987), 321–331.
- [118] S. K. Sekatskii, *An arithmetic interpretation of generalized Li's criterion*, To appear in *Ukrainian Mathematical Journal* (voir, arXiv :1305.1421 (2013)).
- [119] S. K. Sekatskii, *Generalized Bombieri Lagarias' theorem and generalized Li's criterion*, Ukrainian Mathematical J. **66** (2014), 371–383.
- [120] S. K. Sekatskii, S. Beltraminelli and D. Merlini, *On equalities involving integrals of the logarithm of the Riemann ζ -function and equivalent to the Riemann hypothesis*, *Ukr. math. J.* **64** (2012), 247–261.
- [121] S. K. Sekatskii, S. Beltraminelli and D. Merlini, *On equalities involving integrals of the logarithm of the Riemann ζ -function and equivalent to the Riemann hypothesis II*, *Preprint, Arxiv : 0904.1277* (2009).
- [122] A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*, presented at the Amelfi conference on number theory, September 1989, in : *Collected Papers*, vol. **II**, Springer-Verlag, 1991.
- [123] J-P. Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p* , J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 75–102.
- [124] F. Shahidi, *On certain L -functions*, *Amer. J. Math.* **103** (1981), 297–255.

- [125] F. Shahidi, Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for $GL(n)$, *Amer. J. Math.* **106** (1984), 67–111.
- [126] F. Shahidi, Local coefficients as Artin factors for real groups, *Duke Math. J.* **52** (1985), 973–1007.
- [127] F. Shahidi, A proof of Langlands’ conjecture on Plancherel measures ; complementary series for p -adic groups, *Ann. Math.* **132** (1990), 273–330.
- [128] R. Slezeviciene, J. Steuding, *Short series over simple zeros of the Riemann zeta-function*, Indag. Math. (N.S.) **15** (1) (2004), 129–132.
- [129] L. Smajlovic, *On Li’s criterion for the Riemann hypothesis for the Selberg class*, J. Number Theory **130** (2010), 828–851.
- [130] J. Steuding, *The roots of the equation $\zeta(s) = a$ are uniformly distributed modulo one*, in : ‘Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory’, Proceedings of the Fifth International Conference in Honour of J. Kubilius, Palanga 2011, A. Laurinčikas et al. (Eds.), TEV, Vilnius 2012, 243-249.
- [131] J. Steuding, *Value-distribution of L-functions*, Lecture Notes in Mathematics 1877, Springer (2007), 126-127.
- [132] J. Steuding, *The roots of the equation $\zeta(s) = a$ are uniformly distributed modulo one*, in : Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proceedings of the Fifth International Conference in Honour of J. Kubilius, Palanga 2011, A. Laurinčikas et al. (Eds.), TEV, Vilnius (2012), 243–249.
- [133] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Société mathématique de France 1995.
- [134] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, revised by D.R. Heath-Brown second ed., Oxford University Press, Oxford, (1986).
- [135] M. A. Tsfasman, S. G. Vlăduț, *Infinite global fields and the generalized Brauer-Siegel theorem*, Moscow Mathematical Journal, **2** (2) (2002), 329–402.
- [136] V. V. Volchkov, *On an equality equivalent to the Riemann hypothesis*, Ukr. math. J. **47** (1995), 491–493.
- [137] A. Voros, *A sharpening of Li’s criterion for the Riemann hypothesis*, Math. Phys. Anal. Geom. **9** (1) (2005), 53–63.
- [138] A. Voros, *Zeta functions over zeros of zeta functions*, Lecture Notes of UMI 8, Springer (2010).
- [139] A. Walfisz, *Teilerprobleme. Zweite Abhandlung*, Math. Z., **34** (1931), 448–472.
- [140] A. Weil, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s’en déduisent*, Hermann (1948).
- [141] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Ann. **77** (1916), 313-352.

Titre : Quelques aspects analytiques des zéros des fonctions L .

Résumé : Le mémoire de l'HDR présente une sélection de mes activités de recherche ayant consisté à étudier théoriquement et numériquement les zéros non-triviaux des fonctions L sur la ligne critique $Re(s) = 1/2$, où s est un nombre complexe. Les travaux variés présentés sont groupés en quatre parties. Les trois premières parties portent sur l'étude de quelques relations équivalentes à l'hypothèse de Riemann (HR) pour les fonctions L de la classe de Selberg, les fonctions L automorphes et les fonctions zêta associées aux corps de fonctions. Dans la première partie on étend le critère de positivité de Li à ces fonctions L . Dans la deuxième on présente le critère de Cardon et Robert et on reformule HR pour une large classe de séries de Dirichlet (classe de fonctions L automorphes) en utilisant la théorie des polynômes orthogonaux. Dans la troisième on donne une autre approche de HR pour les fonctions L de la classe (ou sous-classe) de Selberg en utilisant les fonctions super-zêta construites par les zéros d'une fonction de la classe de Selberg. La quatrième partie est consacrée à des travaux sur la distribution des zéros nontriviaux des fonctions L sur la ligne critique $Re(s) = 1/2$, ainsi que l'équirépartition et le signe des coefficients de Fourier des fonctions L de puissances symétriques. Des sommes sur les a -points de quelques fonctions L (i.e., les racines de l'équation $L(s) - a = 0$, où a est un nombre complexe) ainsi que leurs dérivées k -ièmes sont aussi étudiées.

Mots-clés : La classe de Selberg, l'hypothèse de Riemann, le critère de Li, répartition des zéros, formes modulaires et fonctions L associées, a -points de fonctions L .