



HAL
open science

Simulation et contrôle actif d'écoulements, Estimations d'erreurs a posteriori pour les méthodes d'éléments finis

Emmanuel Creusé

► **To cite this version:**

Emmanuel Creusé. Simulation et contrôle actif d'écoulements, Estimations d'erreurs a posteriori pour les méthodes d'éléments finis. Mathématiques [math]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2007. tel-04329044

HAL Id: tel-04329044

<https://uphf.hal.science/tel-04329044v1>

Submitted on 7 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire Scientifique

Présenté à

L'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

Par M. **Emmanuel CREUSÉ**

domaine : Mathématiques appliquées

En vue d'obtenir

L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Simulation et contrôle actif d'écoulements, Estimations d'erreurs a posteriori pour les méthodes d'éléments finis

Soutenue le 29 Novembre 2007

Après avis des rapporteurs :

Uwe EHRENSTEIN	Professeur,	Université de Provence, Marseille
Bertrand MAURY	Professeur,	Université Paris Sud
Joachim SCHÖBERL	Professeur,	Université de Aachen (Allemagne)
<u>Devant le jury composé de :</u>		
Charles-Henri BRUNEAU	Professeur,	Université Bordeaux 1
Uwe EHRENSTEIN	Professeur,	Université de Provence, Marseille
André GIOVANNINI	Professeur,	Université Paul Sabatier, Toulouse
Thierry GOUDON	Directeur de Recherche, Président du jury	INRIA Futurs Lille
Christian GOUT	Professeur,	Université de Valenciennes
Bertrand MAURY	Professeur,	Université Paris Sud
Serge NICAISE	Professeur,	Université de Valenciennes
Joachim SCHÖBERL	Professeur,	Université de Aachen (Allemagne)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier très vivement Uwe EHRENSTEIN, Bertrand MAURY et Joachim SCHÖBERL d'avoir accepté de rapporter sur mes travaux de recherche et d'y avoir consacré un temps précieux. Je suis très honoré qu'ils aient accepté de donner leurs avis sur l'ensemble de mes contributions scientifiques.

Merci à Charles-Henri BRUNEAU d'avoir accepté de faire partie du jury, sans qui toute cette aventure n'aurait jamais été celle là. Il a souvent changé de statut à mon égard, devenant successivement mon professeur, mon directeur de thèse puis mon collègue. J'ai toujours grand plaisir à venir travailler à Bordeaux avec lui. Aujourd'hui plus que jamais il est pour moi un mathématicien et un numéricien de grande expérience.

Merci à André GIOVANNINI d'avoir accepté la tâche d'examineur. Sa grande culture de mécanicien des fluides m'a été très précieuse, et son accueil sur le sol toulousain toujours exceptionnel.

Merci à Thierry GOUDON de m'avoir embarqué dans l'aventure INRIA Futurs-SIMPAF. Depuis la création du projet, j'ai eu plaisir à m'y investir de plus en plus, jusqu'à l'obtention de la délégation pour cette année. J'apprécie le travail en équipe que nous y effectuons ainsi que la grande richesse des échanges. J'en profite pour saluer tous les membres de l'équipe-projet, avec un remerciement particulier à Caterina CALGARO avec qui j'ai eu aussi beaucoup de plaisir à travailler cette dernière année.

Merci à Christian GOUT pour son rôle d'examineur. Nous avons en commun l'INRIA et la passion du numérique. Nos chemins se sont plusieurs fois croisés, et j'espère qu'ils le feront plus souvent dans les années à venir.

Merci à Serge NICAISE. Je me rappelle de notre première rencontre un jour d'hiver 1995 alors que j'étais à la recherche d'un stage pour mon magistère... Depuis, le temps a passé! J'ai pu grâce à lui découvrir la thématique des estimateurs d'erreur a posteriori. Il est pour moi un scientifique hors pair d'une disponibilité sans faille.

Merci à l'ensemble de mes co-auteurs non encore évoqués jusqu'ici : Mohamed FARHLOUL, Gerd KUNERT, Luc PAQUET. Une mention spéciale pour Iraj MORTAZAVI. Je ne compte plus les fois où nous nous sommes rencontrés dans des endroits assez curieux pour travailler, allant du bar TGV au café parisien en passant par des appartements à Lille ou ailleurs... J'ai toujours beaucoup apprécié ses qualités humaines et scientifiques, et j'espère que nos collaborations seront toujours aussi fructueuses.

Merci aux enseignants et enseignants-chercheurs du LAMAV et de l'ISTV avec qui je travaille sur les aspects recherche ou pédagogique. Je n'ose me lancer dans une liste qui forcément, et malgré mes efforts, ne pourrait être exhaustive. Je suis sûr qu'ils se reconnaîtront. Merci à Nabila DAIFI. C'est une grande chance pour le laboratoire que de pouvoir compter sur elle pour la gestion du secrétariat.

Pardon à ceux que j'ai peut-être oublié de citer...

Le plus grand des mercis est celui de la fin. Si je suis en mesure de présenter aujourd'hui ce rapport d'HDR, c'est avant tout grâce à mon épouse Florence et à mes enfants Eulalie, Céleste et Eve qui, chacune à leur manière, m'ont encouragé par la confiance et la joie qu'elles ne cessent de m'offrir. La patience dont elles ont su faire preuve à mon égard lorsque j'étais trop absorbé par le "truc qui manque dans la démonstration" ou le "bug que je vais forcément trouver dans le programme" est tout à fait remarquable. Je mesure la chance qui est la mienne d'avoir une famille exceptionnelle. Je leur dédie à toutes les quatre ce mémoire. De tout mon coeur de mari et de père.

Table des matières

Introduction	4
1 Simulation et contrôle actif d'écoulements	7
1.1 Condition aux limites artificielle en régime faiblement compressible	7
1.2 Dynamique tourbillonnaire au dessus d'un dièdre	10
1.3 Fluide à densité variable	13
1.4 Contrôle actif au dessus d'un dièdre	16
1.5 Contrôle au dessus de la marche descendante : Régime laminaire	19
1.6 Contrôle au dessus de la marche descendante : Régime transitoire	22
1.7 Contrôle sur le corps de Ahmed	27
1.8 Bibliographie	29
2 Estimateurs d'erreur a posteriori	34
2.1 Présentation des estimateurs	34
2.2 Formulation mixte de Stokes pour des discrétisations standards	42
2.3 Formulation mixte de Stokes pour des discrétisations Galerkin Discontinues	47
2.4 Equations de Maxwell hétérogènes	51
2.5 Méthode mixte pour des opérateurs du second ordre	54
2.6 Couplage d'une méthode mixte et standard pour les opérateurs du second ordre .	57
2.7 p -Laplacien	61
2.8 Bibliographie	65
3 Perspectives de recherche	69

Introduction

Aujourd'hui, l'approximation des équations aux dérivées partielles constitue une thématique de recherche de première importance. Grâce à la concomitance entre d'une part le développement de modèles toujours plus fiables associés à des méthodes numériques de résolution toujours plus performantes et, d'autre part, l'évolution constante des moyens de calcul à disposition des scientifiques, ce début de 21ème siècle voit progresser de façon considérable la compréhension de phénomènes complexes modélisés par des équations aux dérivées partielles. On peut citer par exemple les vastes champs d'application que constituent la météorologie, la dispersion de polluants, l'industrie aéronautique, automobile ou ferroviaire, les phénomènes de combustion, la propagation d'ondes électromagnétiques, la modélisation des marchés financiers ou des risques liés à certaines situations. Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire se partagent en deux parties. La première est consacrée à la simulation et au contrôle de divers écoulements modélisés par les équations de la mécanique des fluides visqueux. La seconde traite du contrôle a posteriori de l'erreur commise en approchant la solution d'un système d'équations par l'utilisation d'une méthode d'éléments finis.

Dans le chapitre 1, nous présentons tout d'abord une condition aux limites artificielle de sortie d'écoulement pour les équations de Navier-Stokes modélisant l'écoulement d'un fluide compressible. Cette condition aux limites est utilisée lorsque, pour simuler un écoulement externe, il est nécessaire de tronquer le domaine de calcul. L'objectif est de réussir à faire passer de grosses structures tourbillonnaires à travers une frontière artificielle sans qu'elles ne perturbent la solution à l'intérieur du domaine de simulation. Une fois cet outil en main, nous nous sommes intéressés à la dynamique tourbillonnaire s'instaurant au dessus d'un dièdre en régime subsonique. Nous en avons donné quelques éléments de caractérisation, essentiellement en fonction du nombre de Reynolds. Cela nous a conduit à développer des outils de diagnostic. Nous avons mis en évidence l'existence de plusieurs zones distinctes, correspondant chacune à un comportement spécifique du fluide, et le procédé de formation et de détachement tourbillonnaire a été analysé avec attention. Considérant ensuite les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible à densité variable, nous avons proposé un nouveau schéma numérique de résolution, dans le cadre du projet SIMPAF de l'INRIA Futurs de Lille. L'originalité de notre apport se situe dans l'utilisation d'une technique hybride volumes finis/éléments finis basée sur un splitting en temps. Les intérêts essentiels résident dans le fait de pouvoir utiliser une large variété de schémas numériques dans ces deux classes de méthodes, et d'espérer pouvoir adapter facilement ce type de schéma à l'approximation de modèles plus complexes suivant une loi de type "faible Mach". Le point clé consiste à rendre chacune des deux méthodes choisies compatibles, en faisant en sorte que la contrainte de divergence nulle sur la vitesse soit consistante aussi bien du point de vue du schéma éléments finis que de celui du schéma volumes finis. Plusieurs travaux relatifs au contrôle actif des écoulements ont alors été l'objet de notre travail. Aujourd'hui plus que jamais, le contrôle des écoulements constitue un axe de recherche d'une importance capitale. Retarder le détachement d'une couche limite ou réduire le coefficient de traînée autour d'un profil constituent par exemple des objectifs économiques, industriels et environnementaux fondamentaux. Nous avons commencé par le contrôle de l'écoulement au dessus du dièdre, ayant pour objectif l'amélioration de l'effort de poussée exercé par le fluide sur le profil. Pour cela, nous avons eu recours à un ou plusieurs jets pulsés judicieusement positionnés sur la paroi permettant de mettre en oeuvre plusieurs stratégies de contrôle actif, soit en boucle ouverte, soit en boucle fermée. Quatre techniques ont été explorées et leurs résultats comparés. Nous avons poursuivi sur une série de travaux consistant à contrôler l'écoulement d'un fluide évoluant au dessus d'une marche descendante, dans une configuration faiblement compressible et laminaire, puis dans une configuration incompressible et transitoire simulée à l'aide d'une méthode vortex. Le procédé de contrôle consiste, dans les deux cas, en l'imposition d'une vitesse pulsée à l'entrée du domaine de

calcul. L'effet du contrôle est clairement mis en évidence qualitativement par l'analyse de la dynamique tourbillonnaire et quantitativement par celle de la longueur de la zone de recirculation ainsi que de différents coefficients caractéristiques. Dans le cas transitoire, un contrôle utilisant deux jets pulsés sur la paroi verticale de la marche a été également implémenté pour évaluer l'efficacité d'une action locale au voisinage de la zone de décollement. Pour terminer ce chapitre 1, un dernier objectif a été d'aborder un problème moins académique que les précédents en se penchant sur le contrôle d'un écoulement autour d'une géométrie baptisée "corps de Ahmed", considérée comme une première approximation du profil d'un véhicule automobile. Ce travail s'est inscrit dans un Groupe de Recherche CNRS impliquant des laboratoires universitaires et des partenaires industriels, et se poursuit actuellement par le programme de recherche et d'innovation dans les transports terrestres financé par l'ANR et l'ADEME et mené par Renault et PSA. Nous menons les investigations sur la localisation et l'utilisation d'un jet synthétique positionné sur le culot du profil, ayant pour objectif de réduire significativement le coefficient de traînée du corps de Ahmed, et de permettre au véhicule ainsi modélisé une économie substantielle de carburant.

Le chapitre 2 de ce mémoire traite des estimateurs d'erreur a posteriori pour les méthodes d'éléments finis. Si, comme nous l'avons déjà dit, les simulations numériques permettent une compréhension toujours plus précise des phénomènes physiques, la question de leur fiabilité reste plus que jamais d'actualité. Lors de la "Mathematics of Finite Elements and Applications Conférence (MAFELAP)" à Londres en juin 2006, Ivo Babuska a exposé plusieurs accidents survenus et causés par un manque de précision dans la prédiction numérique. Par exemple, comme il le rappelle dans son ouvrage avec Strouboulis¹, le cas d'une plate-forme off-shore d'extraction de gaz en mer du Nord, qui devait fournir 10% de la consommation d'Europe de l'ouest pendant 30 ans. En Août 1991, un effondrement eu lieu et l'enquête mis en évidence que les contraintes calculées servant à dimensionner les structures avaient été sous-évaluées de 47 %... Un meilleur contrôle de la précision de la solution approchée obtenue par éléments finis aurait certainement pu éviter le sinistre. Si le problème d'une majoration fiable de l'erreur sur la solution commise par l'utilisation d'une méthode d'éléments finis est donc un élément crucial, celui de sa minoration est également intéressant pour d'autres raisons, et mérite aussi d'être abordé avec attention pour rendre la méthode numérique efficace. Ce chapitre débute par le rappel du principe et de quelques outils relatifs aux estimateurs d'erreur a posteriori, afin de fixer le cadre dans lequel les travaux de ce chapitre s'inscrivent. Il expose ensuite l'ensemble des contributions que nous avons apportées sur les estimateurs d'erreur explicites résiduels. Un premier travail a été de développer ces estimateurs pour l'équation de Stokes résolue par la méthode mixte standard. L'originalité de notre contribution consiste en la généralisation de ce type d'estimateurs au cas 3D et à celui des maillages anisotropes. Notre philosophie fait intervenir dans la majoration de l'erreur une "mesure d'alignement", rendant compte de l'alignement de l'anisotropie de la solution avec celle du maillage. Dans la continuité, nous nous sommes intéressés au même problème, mais résolu cette fois par l'utilisation de discrétisations de type Galerkin Discontinues. Ces méthodes numériques permettent une plus grande souplesse dans la constitution du maillage grâce à la discontinuité totale de la solution approchée d'une maille à l'autre de la triangulation. Le point clé de notre contribution a été de définir une norme de l'énergie appropriée pour obtenir une propriété d'approximation anisotrope, afin de parvenir à des estimateurs fiables et efficaces. Les équations de Maxwell, régissant la circulation du courant électrique dans un matériau, ont ensuite été l'objet de nos investigations, avec des objectifs similaires. L'utilisation d'une décomposition de Helmholtz singulière, couvrant le cas des coefficients caractéristiques de l'équation constants par morceaux, nous a permis d'obtenir ces estimateurs grâce à une décomposition adéquate de l'erreur. Notre plus récente contribution concernant le

¹I. Babuska and T. Strouboulis : The finite element method and its reliability, Oxford science publications, 2001.

développement d'estimateurs sur maillages anisotropes a été consacrée à l'étude de la méthode mixte pour la résolution numérique de problèmes du second ordre, avec en même temps l'ambition de nous affranchir d'une hypothèse de régularité trop forte sur la solution, généralisant ainsi des travaux antérieurs disponibles dans la bibliographie. Sur maillages isotropes, deux problèmes de nature différente ont été abordés. D'une part, l'obtention d'estimateurs d'erreur a posteriori dans le cadre du couplage d'une méthode mixte et d'une méthode standard pour les opérateurs du second ordre, permettant de scinder le domaine de calcul en deux sous-domaines, et d'utiliser pour la résolution de la même équation sur le domaine entier une méthode numérique spécifique à chacun des sous domaines. D'autre part, le développement d'estimateurs d'erreur a posteriori pour la résolution par méthode mixte du problème du p -Laplacien, de nature non linéaire, intervenant dans la modélisation mathématique d'un grand nombre de phénomènes physiques. Ce problème est résolu par l'utilisation des éléments finis de Raviart-Thomas de degré 0 et par une technique d'hybridisation.

Nous avons enfin, en plus des travaux jusqu'ici présentés, établi une propriété de compacité discrète pour une approximation de Galerkin Discontinu du système de Maxwell sur des maillages tétraédriques. Cette contribution, en marge des travaux jusqu'ici évoqués, n'est pas présentée dans ce mémoire.

Tous les travaux que nous avons développés dans le chapitre 2 ont systématiquement été illustrés par l'utilisation du code de calcul Simula+² (ou de l'une de ses versions antérieures), développé en partenariat entre le Laboratoire de Mathématiques et Applications de Valenciennes (LAMAV) et le Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux (LPMM) de l'ENSAM de Metz. Nous avons eu comme objectif durant ces dernières années de mettre à disposition des doctorants et chercheurs de nos laboratoires des bibliothèques de calcul développées en C++, afin que chacun puisse se concentrer sur le développement spécifique de la partie de code qui lui est propre sans avoir à reprogrammer un code déjà existant, tout en faisant bénéficier les autres de son propre travail.

La présentation de ce mémoire est organisée comme suit. D'abord, le chapitre 1 expose l'ensemble des travaux que nous avons développés relatifs à la simulation et au contrôle d'écoulements. Puis, le chapitre 2 est consacré aux estimateurs d'erreurs a posteriori pour les méthodes d'éléments finis. Enfin, le chapitre 3 donne quelques pistes pour les travaux de recherche futurs qu'il me semble intéressant de mener dans la continuité de ce qui a déjà été accompli. Chacun de ces chapitres se termine par une bibliographie qui lui est spécifique.

Avertissement sur les notations

Compte tenu de la présentation synthétique des travaux, et afin de ne pas alourdir la rédaction de ce mémoire, la plupart des notations, relativement usuelles, n'ont pas été rappelées. Cependant, en cas de besoin, celles-ci pourront être retrouvées rapidement dans la publication correspondante mentionnée au tout début de chaque partie.

²Simula+, LAMAV Valenciennes/LPMM Metz, <http://www.univ-valenciennes.fr/lamav/Simula+>

1 Simulation et contrôle actif d'écoulements

1.1 Condition aux limites artificielle en régime faiblement compressible

Ces travaux ont donné lieu à la publication [12].

La simulation numérique d'écoulements externes nécessite de tronquer le domaine dans lequel le fluide évolue pour obtenir un domaine de calcul borné. Une frontière artificielle Γ est alors introduite, sur laquelle des conditions aux limites appropriées ont à être imposées. Si la solution obtenue sur le domaine tronqué Ω correspond exactement à la restriction de la solution qui aurait été calculée dans le domaine infini (à supposer que nous puissions l'obtenir), alors la condition aux limites artificielle est parfaite, et appelée condition aux limites transparente. Bien entendu, ceci n'est qu'un cas idéal, et une importante bibliographie s'est attachée, spécialement durant ces trente dernières années, à trouver les meilleures conditions aux limites artificielles possibles. Nous nous sommes ici attachés au cas particulier des écoulements compressibles, subsoniques et visqueux gouvernés par les équations de Navier-Stokes.

D'une part, on s'attend à ce qu'une bonne condition aux limites mène à un problème mathématiquement bien posé, générant par exemple une solution stable par rapport aux données initiales. Plusieurs papiers ont été consacrés à cet objectif pour les systèmes hyperboliques et paraboliques incomplets, et ont été recensés dans [27]. Si toutes ces conditions proposées ont en commun d'être mathématiquement pertinentes (chacune dans un sens à préciser), elles ne donnent pas toujours des résultats numériques à la hauteur des espérances qu'elles laissent présager. Par exemple, l'imposition forte de la pression en sortie de domaine pour une évolution subsonique mène à un problème mathématiquement bien posé au sens de Oliger et Sundström [71]. Malheureusement, une telle condition aux limites donne lieu à de fortes réflexions lorsque des perturbations hydrodynamiques traversent la frontière [79].

D'autre part, une autre approche pour définir des conditions aux limites artificielles consiste à utiliser la notion de conditions aux limites non réfléchissantes, qui inhibent ou contrôlent la réflexion des perturbations au niveau de la frontière. Elles sont déduites des équations d'Euler compressible, considérées comme une première approximation des équations de Navier-Stokes compressible, et on renvoie à [27] pour la bibliographie consacrée à ce sujet.

Dans le cas auquel nous nous sommes intéressés, qui correspond à la sortie d'écoulement faiblement compressible subsonique, nous avons remarqué que si certaines des conditions aux limites proposées dans la littérature réussissaient à faire sortir convenablement un champ de vorticité du domaine de calcul, elle généraient en retour d'importantes ondes acoustiques non physiques qui polluaient l'écoulement [25, 70] et qui, dans certains cas, menaient à une perturbation sensible de ce dernier [44], voire à l'obtention de solutions non physiques [49]. Pour éviter ces phénomènes, une possibilité est d'utiliser une "zone tampon", adjacente à la zone de l'écoulement à laquelle on s'intéresse, dans laquelle la solution et/ou les équations sont progressivement modifiées, afin d'annuler toute perturbation en sortie du domaine [8, 25, 50, 52, 64, 76, 88, 89, 94]. Mais là encore, cette technique ne convient pas dans tous les cas de figure [44]. De plus, elles génèrent un temps de calcul supplémentaire pouvant être significatif.

Notre objectif a donc été de rendre une telle frontière artificielle aussi transparente que possible, qui permette en particulier aux tourbillons de quitter le domaine de calcul sans générer de perturbation. Pour cela nous avons proposé une amélioration de la condition aux limites non réfléchissante proposée par Poinot et Lele [75]. Plutôt que d'annuler l'amplitude des ondes caractéristiques entrantes dans le domaine, nous proposons de spécifier une valeur qui soit aussi réaliste que possible, en utilisant d'une part un écoulement de référence et d'autre part une

vitesse de convection en sortie de domaine.

Les équations 2D de Navier-Stokes compressible sont données, en formulation adimensionnée dans un système orthogonal et avec les notations usuelles par :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x(U)}{\partial x} + \frac{\partial F_y(U)}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial G_x(U, \nabla U)}{\partial x} + \frac{\partial G_y(U, \nabla U)}{\partial y} \right) \\ U(t=0) = U_0 \end{cases}$$

où en particulier :

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F_x(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix}.$$

L'équation d'état, ainsi que celle reliant l'énergie, la pression et la norme de la vitesse sont ajoutées pour fermer le système. Sur chaque frontière, on impose des conditions aux limites particulières, et on se place ici dans le cas de la sortie d'écoulement. Pour cela, on considère un noeud A , localisé sur une frontière $x = \text{constante}$, pour laquelle le vecteur unitaire normal sortant au domaine de calcul est $\vec{n} = (1, 0)^T$. L'idée consiste tout d'abord à reformuler les équations au noeud A pour faire apparaître les amplitudes des ondes caractéristiques normales à la frontière. En particulier, en notant $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ la vitesse locale du son, on réécrit le terme $\partial F_x(U) / \partial x$ sous la forme :

$$\frac{\partial F_x(U)}{\partial x} = PSL,$$

avec $V = [\rho, u, v, p]^T$ le vecteur des variables primitives, $P = \partial U / \partial V$, $A_x = P^{-1}(\partial F_x(U) / \partial V)$, S la matrice de passage dont les colonnes sont les vecteurs propres de A_x , et :

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u - c) \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ u \left(c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ (u + c) \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \lambda_2 \left(c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ \lambda_3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \lambda_4 \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{bmatrix}.$$

L_k est appelée l'amplitude de la $k^{\text{ème}}$ onde caractéristique ($1 \leq k \leq 4$). Selon le signe de la valeur propre λ_k , l'information portée par l'onde provient de l'intérieur ou de l'extérieur du domaine.

Dans le cadre de la mise en oeuvre d'un schéma numérique, il est nécessaire de procéder à l'évaluation de la valeur des L_k . Si $\lambda_k > 0$, alors l'onde quitte le domaine de calcul, et la discrétisation s'effectue par un schéma décentré à l'intérieur du domaine. Si $\lambda_k < 0$, l'onde entre alors dans le domaine. Cette fois, une discrétisation décentrée à l'intérieur du domaine conduirait à de fortes instabilités, alors qu'une annulation pure et simple de la valeur de L_k poserait des problèmes de consistance avec la physique du problème. Nous avons dans ce travail proposé une méthode d'évaluation de l'amplitude des ondes caractéristiques entrantes, en écrivant pour la sortie subsonique au noeud frontière A que $L_1 = \overline{L}_1 + L'_1$ avec :

$$\overline{L}_1 \approx (u - c) \left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \rho c \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$L'_1 \approx -\frac{(u - c)}{u_{conv}} \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad (2)$$

Ici, les valeurs de $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ intervenant dans (1) correspondent respectivement aux gradients horizontaux de pression et de vitesse horizontale d'un écoulement de référence stationnaire défini au voisinage de la frontière, et fonction de l'écoulement considéré. Dans le même ordre d'idée, la valeur de u_{conv} intervenant dans (2) est une vitesse de convection de référence. Enfin, la discrétisation des dérivées en temps de (2) doit utiliser un intervalle de temps en amont suffisamment grand pour assurer la stabilité numérique du schéma, ce dernier étant défini grâce à la valeur de u_{conv} et du pas de discrétisation spatial du maillage.

Remarque 1.1 *Il est aussi possible d'ajouter à l'expression de $\overline{L_1}$ un terme de rappel de pression de type $K(p - p_\infty)$, où K est un paramètre local, afin de faire parvenir à l'écoulement l'information sur la pression statique p_∞ en aval de l'écoulement. On parle alors de condition aux limites partiellement réfléchissante [79].*

Une importante batterie de tests numériques a été effectuée de façon à valider cette condition aux limites pour plusieurs écoulements caractéristiques [12, 27]. Pour cela, un code de résolution a au préalable été développé en fortran 90, basé sur un schéma hybride volumes finis - éléments finis sur maillages triangulaires non structurés selon la technique développée par Fezoui *et al* [36]. Des évaluations quantitatives ont été menées pour mettre en évidence sa performance dans des configurations très variées. Qualitativement, le cas de l'écoulement subsonique au dessus d'un dièdre plan est significatif. La figure 1 présente, pour trois simulations différentes, les isovalues de pression obtenues en un instant final T_f , l'initialisation étant la même dans chacun des trois cas. A gauche, une simulation obtenue sur un domaine beaucoup plus grand que celui représenté sur la figure, pour lequel la condition aux limites de sortie a une influence négligeable sur cette partie du domaine en cet instant T_f . Au centre, la condition aux limites qui annule l'amplitude de l'onde entrante a été appliquée sur la frontière droite. A droite, la condition aux limites que nous avons proposée a été appliquée sur la même frontière. Il est tout à fait clair que notre condition aux limites donne des résultats beaucoup plus proches des résultats obtenus sur le domaine plus grand que la condition aux limites non réfléchissante. Cela est également confirmé par une analyse spectrale du signal en différents points caractéristiques qui met en évidence que, dans le cas d'une condition aux limites incorrecte, la fréquence fondamentale de l'écoulement est fonction de la distance entre le point de discontinuité du dièdre et la sortie du domaine de calcul.

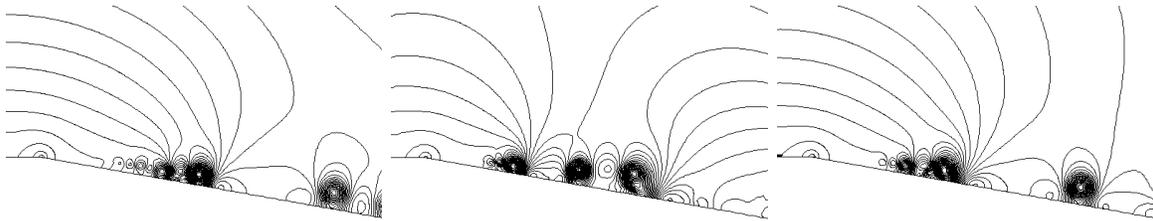


FIG. 1 – Ecoulement subsonique au dessus du dièdre plan : Champ de pression en l'instant T_f .
Utilisation d'un domaine plus grand (gauche),
condition aux limites non réfléchissante (centre), condition aux limites actuelle (droite).

1.2 Dynamique tourbillonnaire au dessus d’un dièdre

Ces travaux ont donné lieu à la publication [30].

Une fois le problème de la condition aux limites aval réglé, nous avons pu nous intéresser de plus près à l’écoulement au dessus du dièdre plan, avec comme premier objectif de comprendre l’influence de la couche limite sur le transport des structures tourbillonnaires. Pour cela, nous avons développé des outils de diagnostic permettant de rendre compte de l’écoulement en aval du point de discontinuité du dièdre pour une gamme de Reynolds correspondant à des régimes allant du laminaire au transitoire. Un point clé réside dans l’identification des ”structures cohérentes” évoluant dans l’écoulement, dont la définition la plus basique pourrait être celle proposée par Lugt [65] : ”Plusieurs particules tournant autour d’un centre commun”. De fait, ces structures, convectées par l’écoulement, demeurent quasiment intactes au cours du temps, et transportent une partie significative de l’ensrophie. Un premier critère permettant de les isoler est celui du seuil de vorticité ω . Il consiste à considérer comme structure tourbillonnaire toute partie de l’écoulement vérifiant $|\omega| = |\partial v/\partial x - \partial u/\partial y| > \varepsilon$, où ε est un paramètre qui doit être déterminé. Il est basé sur l’idée que l’intensité de la vorticité à l’intérieur des structures tourbillonnaires est plus élevée qu’à l’extérieur. Un second critère est celui de Weiss [5, 54, 96], exploitant l’équation vérifiée par le gradient de vorticité $\nabla \omega$ d’un fluide non visqueux incompressible, dans laquelle intervient le tenseur du gradient des vitesses. En notant σ la déformation locale de l’écoulement, on considère comme structure cohérente toute partie de l’écoulement qui vérifie $\sigma^2 - \omega^2 < 0$, dans laquelle la rotation domine la déformation. De façon équivalente, on regarde la nature des valeurs propres du tenseur des gradients de vitesse : Si elles sont complexes, le mouvement est localement elliptique et caractérise une structure cohérente ; si elles sont réelles, le mouvement est localement hyperbolique et caractérise une zone non cohérente. Nous avons tout d’abord justifié que ce critère, développé dans le cas du fluide incompressible, pouvait être appliqué avec succès au cas du fluide faiblement compressible, ce qui a de plus été vérifié numériquement. Dans le cas de l’écoulement au dessus du dièdre, nous avons pu remarquer que le critère de Weiss donnait les meilleurs résultats pour isoler les structures cohérentes du reste de l’écoulement, même si le critère ”seuil de vorticité” lui reste complémentaire. En effet, comme on le voit sur la figure 2, l’utilisation du critère seuil de vorticité avec un paramètre ε trop grand ne permet pas de repérer les tourbillons (FIG. 2 (c)), tandis que l’utilisation de ce même critère avec un paramètre ε trop petit ne permet pas d’extraire ces structures de la vorticité contenue dans la couche limite (FIG. 2 (d)). Le critère de Weiss, quant à lui, donne des résultats satisfaisants (FIG. 2 (b)).

Pratiquement, la mise en oeuvre numérique du critère de Weiss exige cependant l’utilisation d’un seuil $\varepsilon_w > 0$ pour déterminer les zones dans lesquelles $\sigma^2 - \omega^2 < -\varepsilon_w$. En effet, un écoulement d’arrière plan de type Poiseuille conduit par exemple à une valeur théorique de $\sigma^2 - \omega^2$ identiquement nulle, et une légère perturbation numérique peut rendre cette valeur localement négative, conduisant à la conclusion de la présence d’une structure cohérente alors qu’il n’en est rien. Ce paramètre ε_w doit donc être choisi méticuleusement. Nous avons ainsi proposé une valeur optimale de ce dernier [30] par l’analyse de la courbe donnant le pourcentage d’ensrophie Z de l’écoulement présent dans les structures cohérentes d’un écoulement s’installant derrière une ligne de cylindres dans un canal en fonction du paramètre ε_w utilisé (FIG. 3). Cette valeur notée ε_w^{opt} est définie par l’abscisse du point d’intersection entre la tangente à l’origine de la courbe et sa direction asymptotique en l’infini. Elle est suffisamment grande pour ne pas prendre en considération l’écoulement de fond, et suffisamment petite pour distinguer l’ensemble des structures cohérentes.

Une fois cet outil d’extraction tourbillonnaire en main, il nous a été possible d’étudier précisément l’écoulement. Nous avons regardé pour plusieurs nombres de Reynolds la part d’ensrophie et d’énergie de l’écoulement présente dans les tourbillons, la surface de chacun des tour-

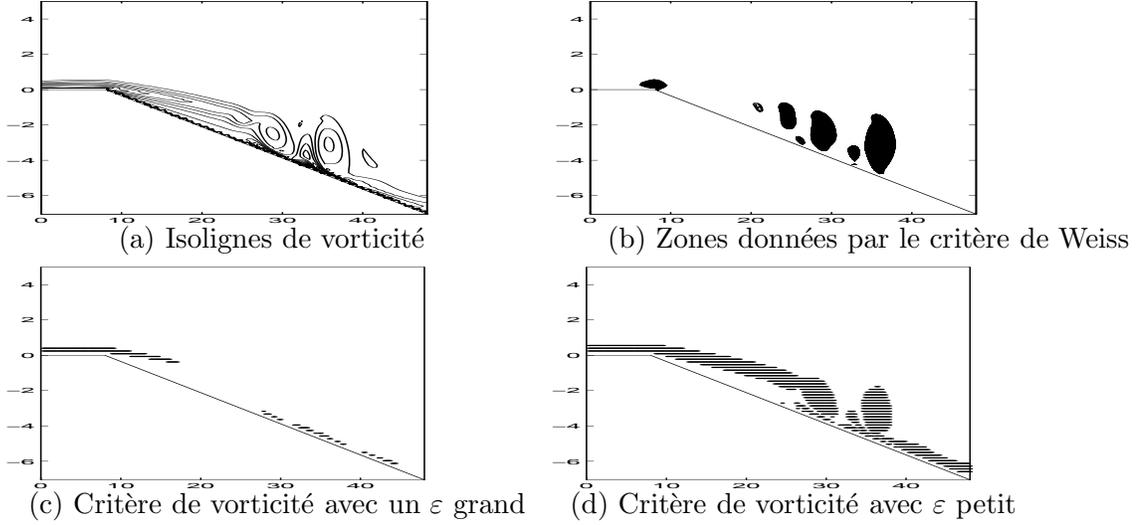
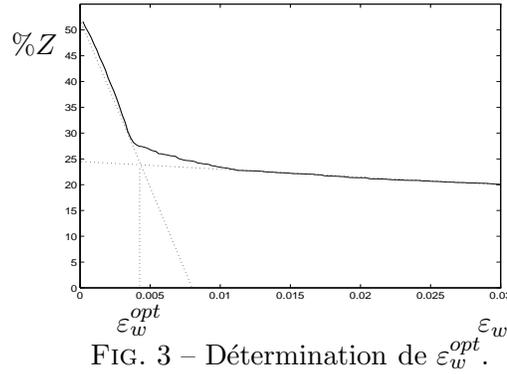


FIG. 2 – Comparaison des différents critères de détection des structures cohérentes sur le dièdre.



billons, la concentration d'enstrophie et d'énergie dans les tourbillons, le nombre de tourbillons dans le domaine. Nous avons ainsi montré qu'à mesure que le nombre de Reynolds augmente, l'enstrophie se concentre de plus en plus dans les structures tourbillonnaires qui deviennent plus petites et nombreuses, et qui sont convectées de plus en plus rapidement. De plus, les tourbillons se déforment de plus en plus, ceci étant dû à l'interaction toujours plus forte avec la couche limite. On assiste donc à une migration d'un régime appelé "homostrophique" vers un régime appelé "hétérostrophique" à mesure que le Reynolds augmente. Une étude de la zone de recirculation moyenne de l'écoulement a également montré qu'au fur et à mesure de l'augmentation du Reynolds, le point de détachement des structures hétérostrophiques se rapprochait du point de discontinuité du dièdre. Ceci a été confirmé par l'étude du diagramme de phase (u, v) établi pour plusieurs points de contrôle du signal convenablement placés dans l'écoulement et de la corrélation entre la fonction de courant Ψ et la vorticité ω . On définit finalement d'une part une région amont de l'écoulement, principalement dominée par des effets diffusifs dans laquelle les structures cohérentes naissent, et d'autre part une région aval de l'écoulement principalement dominée par des effets convectifs dans laquelle les structures cohérentes se détachent de la couche limite et évoluent jusque la sortie du domaine. Pour illustrer ces résultats, on a représenté sur la figure 4 l'écoulement en un instant donné de la simulation pour $Re_\delta = 400$ (régime laminaire) et pour $Re_\delta = 800$ (régime transitoire), chacun de ces Reynolds étant basé sur la hauteur de la couche limite δ en entrée de domaine.

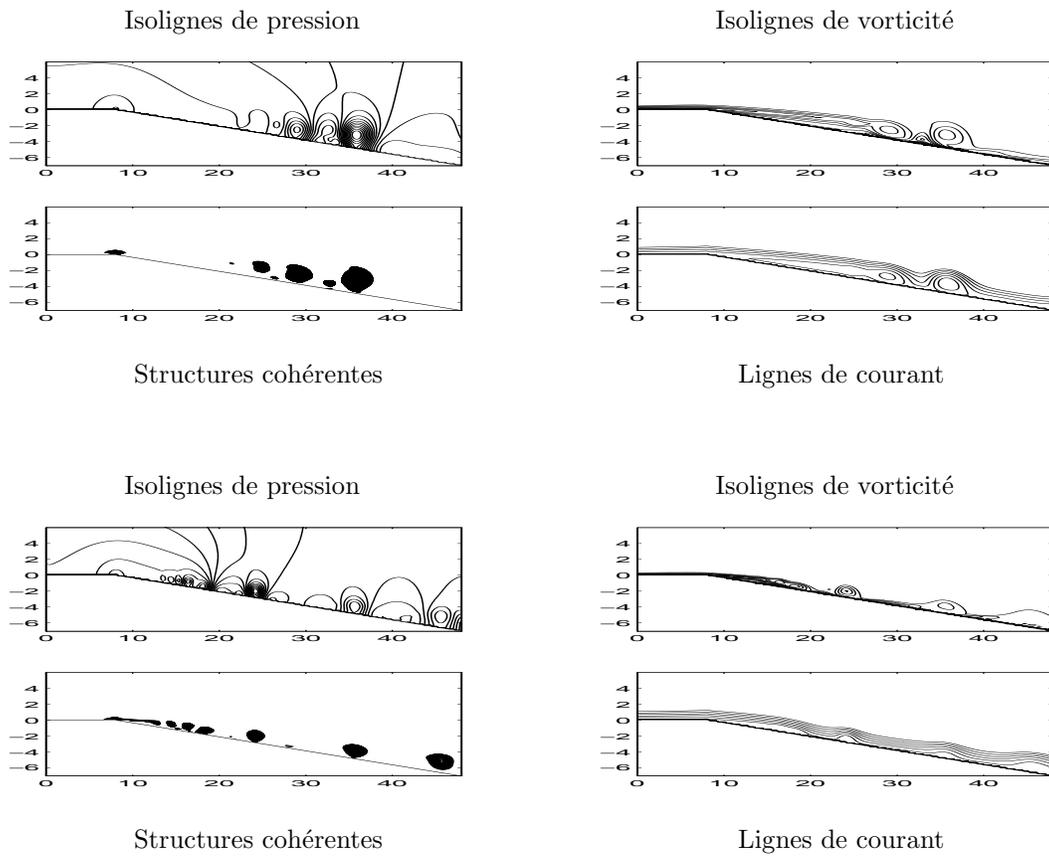


FIG. 4 – Ecoulement instantané, $Re_\delta = 400$ (haut) et $Re_\delta = 800$ (bas).

1.3 Fluide à densité variable

Ces travaux ont donné lieu à la publication [19].

1.3.1 Mise en place du schéma numérique de résolution

Ce travail a consisté en la détermination d'une nouvelle méthode numérique pour la résolution des équations de Navier-Stokes à densité variable sur un domaine $([0, T] \times \Omega) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, données par :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho \mathbf{u}) = 0 \text{ sur } \Omega, \quad (3)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{Div}_{\mathbf{x}}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} p - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ sur } \Omega, \quad (4)$$

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Omega, \quad (5)$$

où ρ , \mathbf{u} et p correspondent respectivement à la densité, la vitesse et la pression du fluide, où ν est la viscosité cinématique, \mathbf{f} la force externe et où les conditions aux limites et les conditions initiales ont à être précisées. La méthode numérique utilisée pour la résolution du système d'équations (3)-(5) doit pouvoir résoudre l'équation de transport (3) tout en garantissant la contrainte de divergence nulle (5) sur le champ de vitesse, ce qui constitue une difficulté particulière. Une première stratégie consiste à adopter le point de vue hyperbolique provenant des méthodes de résolution habituelles en mécanique des fluides compressibles : Le terme visqueux est considéré comme une simple correction et la méthode est basée sur le transport des caractéristiques pour les inconnues (ρ, \mathbf{u}) , qui sont convectées avec le même champ de vitesse \mathbf{u} . La contrainte de divergence est alors prise en compte en utilisant une étape de projection [3, 7] ou un temps fictif [43, 83, 84, 85, 87]. Une seconde stratégie est basée sur une philosophie incompressible, utilisant des méthodes d'éléments finis [34]. Ces méthodes utilisent un splitting en temps, résolvant séparément d'équation de transport (3) et l'équation de quantité de mouvement (4), la contrainte (5) étant traitée par une méthode de projection [46], selon la méthodologie suivie dans [37, 47]. La difficulté provient ici du fait que l'équation de transport (3), de nature hyperbolique, n'est pas adaptée pour un traitement par éléments finis classiques et nécessite une approche spécifique, par l'utilisation de méthodes de Galerkin Discontinues, de viscosité artificielle, d'une procédure de stabilisation utilisant des sous-grilles [45, 47], ou encore d'une méthode utilisant une technique de moindres carrés [77].

L'originalité de notre travail réside dans le choix d'utiliser des schémas numériques de natures différentes pour la résolution de (3) d'une part, et pour la résolution de (4)-(5) d'autre part. Plus précisément, grâce à un splitting de Strang en temps, on résout alternativement (3) par une méthode de volumes finis, bien adaptée à cette équation de convection [35, 60], et (4)-(5) par une méthode d'éléments finis [34, 42, 91]. Une attention particulière doit alors être portée à la compatibilité des deux méthodes, à l'instar de ce qui a été développé dans [39, 72] pour des objectifs toutefois différents. Ici, nous avons à préserver la contrainte de divergence nulle à chaque étape du splitting. Considérons un maillage \mathcal{T}_h du domaine Ω constitué de ns noeuds et de mailles triangulaires. En notant \mathbf{u}_h l'approximation de \mathbf{u} obtenu par utilisation du \mathbb{P}_2 -Lagrange sur \mathcal{T}_h et p_h l'approximation de p obtenue par utilisation du \mathbb{P}_1 -conforme sur \mathcal{T}_h , ($p = \sum_{i=1}^{ns} p_i \psi_i$), le champ de vitesse \mathbf{u}_h satisfait la contrainte de divergence nulle au sens des éléments finis qui s'écrit :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_h \psi_i \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall i, 1 \leq i \leq ns. \quad (6)$$

Afin de mettre en oeuvre la méthode de volumes finis, on définit pour tout noeud A_i de la triangulation un volume de contrôle \mathcal{C}_{A_i} , et sur la frontière de ce volume de contrôle une approximation de la vitesse \mathbf{u}_h^* qui doit vérifier la contrainte de divergence nulle au sens des

volumes finis, à savoir, en notant \mathbf{n} la normale unitaire sortante à \mathcal{C}_{A_i} :

$$\int_{\partial\mathcal{C}_{A_i}} \mathbf{u}_h^* \cdot \mathbf{n} d\gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall i, 1 \leq i \leq ns. \quad (7)$$

Un point clé de la méthode réside donc dans la manière de déterminer \mathbf{u}_h^* en fonction de \mathbf{u}_h afin que, sachant (6), la relation (7) soit vérifiée pour tout noeud A_i de \mathcal{T}_h ($1 \leq i \leq ns$). Une description précise du schéma numérique auquel nous avons abouti est donnée dans [19]. Un grand avantage de ce schéma est qu'il peut utiliser une multitude d'outils propres à chacune des méthodes (limiteurs de flux dans la méthode volumes finis pour capturer les discontinuités, choix des espaces d'approximation ou de la méthode de résolution pour la méthode éléments finis,...), tout en conservant la philosophie qui le caractérise. De plus, la méthode proposée est très souple et permet l'utilisation de maillages non structurés, d'où des techniques de raffinements adaptatifs possibles.

Plusieurs tests numériques nous ont permis de valider le schéma. D'abord quantitativement, en mesurant les ordres de convergence obtenus grâce à l'utilisation d'une solution analytique similairement aux résultats présentés dans [47]. Puis qualitativement, par la simulation et la comparaison à plusieurs références bibliographiques de divers phénomènes physiques. Par exemple, on a représenté sur la figure 5 l'évolution temporelle des isovaleurs de densité d'un fluide non homogène, soumis à un champ de gravité, qui développe une instabilité de type Rayleigh-Taylor [7, 37, 47, 93]. A l'instant initial le fluide est au repos, et une interface sépare son état le plus dense ρ_{max} (en haut) de son état le moins dense ρ_{min} (en bas), avec $\rho_{max}/\rho_{min} = 3$ et $Re = 1000$. On distingue très nettement l'évolution de cette interface en fonction du temps. Dans notre travail, nous avons étudié précisément plusieurs paramètres, comme les caractéristiques du maillage ou la manière d'évaluer le second membre dans l'équation de quantité de mouvement pour mettre en évidence leur influence sur le développement de ce type d'instabilités. Un autre test ca-

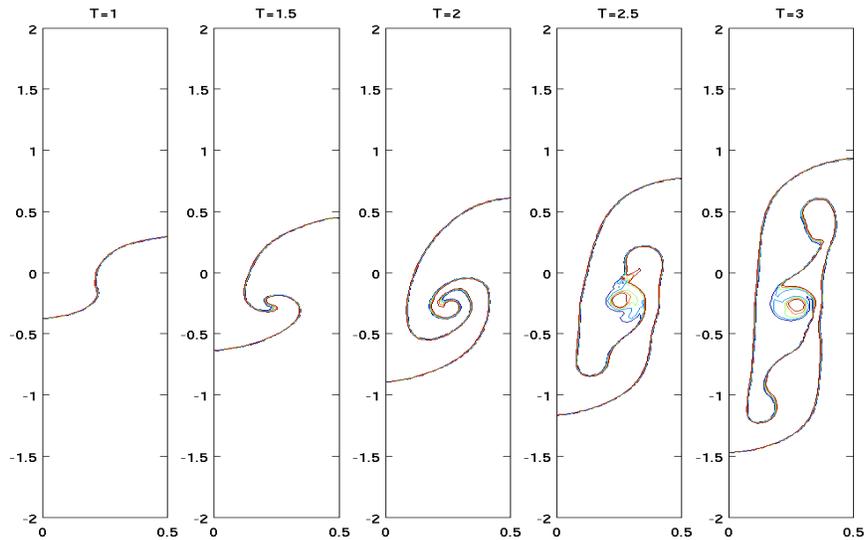


FIG. 5 – Evolution temporelle d'un fluide soumis à un champ de gravité : Isovaleurs de la densité.

caractéristique, inspiré de [81], est celui de la bulle plus dense que le fluide dans lequel elle est initialement, qui tombe dans un fluide de même densité qu'elle (voir figure 6). On a ici utilisé $\rho_{max}/\rho_{min} = 100$ et $Re = 3132$, et représenté l'évolution de la densité en fonction du temps.

On observe une déformation de la bulle due à la non prise en compte de la tension de surface. Les résultats sont en outre en très bon accord avec ceux de [81]. En particulier, on constate qu'après que la bulle a touché la paroi horizontale, une partie du fluide le plus léger se trouve "emprisonné" par le fluide le plus lourd.

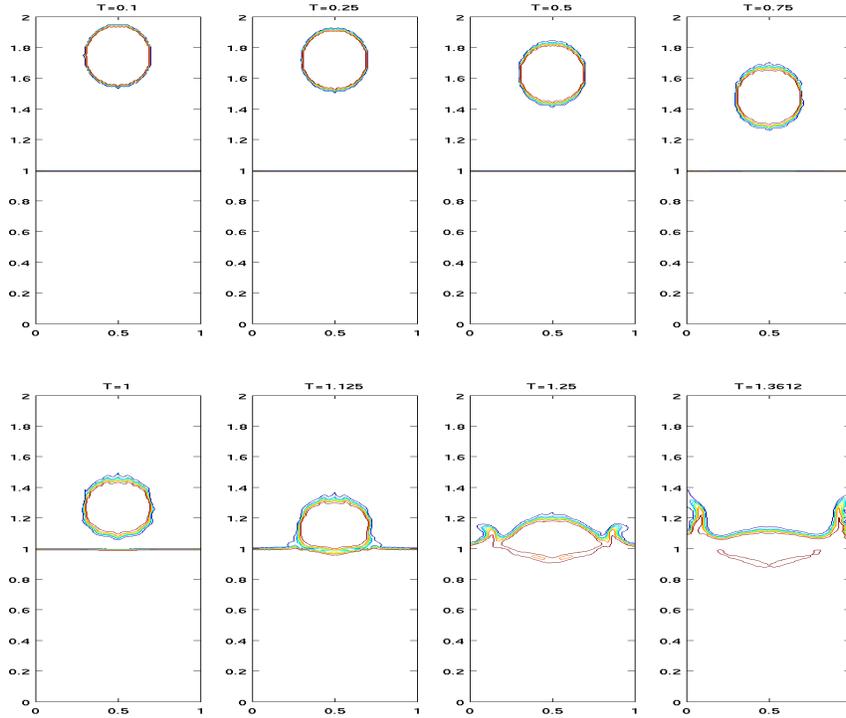


FIG. 6 – Test de la bulle qui tombe : Evolution de l'interface de la densité, $Re = 3132$. Maillage uniforme 80×160 , contours de densité $\rho = [20, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 80]$.

1.3.2 Application au modèle faible Mach

La validation de ce nouveau schéma numérique ayant été effectuée, nous nous intéressons maintenant à la résolution numérique du modèle à faible Mach, pour lequel la contrainte de divergence nulle (5) est remplacée par une relation entre $\text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$ et une dérivée d'une fonction non linéaire de la densité [38, 63, 90]. Cette classe de modèles est utilisée pour la simulation de phénomènes aussi variés que la combustion, la pollution, la propagation d'incendies dans les tunnels ou les avalanches. Les équations de l'hydrodynamique auxquelles on aboutit peuvent être obtenues soit par une analyse asymptotique à faible Mach des équations de Navier-Stokes compressibles, soit par la description cinétique du problème physique qui conduit alors à développer plusieurs modèles intermédiaires (modèle de mélange, modèle faible Mach, transfert radiatif,...). Le travail que nous effectuons actuellement consiste donc à adapter le schéma numérique hybride Eléments Finis/Volumes Finis de la partie 1.3.1 à cette nouvelle contrainte sur la divergence de la vitesse, en conservant la même philosophie pour sa mise en oeuvre.

1.4 Contrôle actif au dessus d'un dièdre

Ces travaux ont donné lieu à la publication [28].

Les techniques de contrôle d'écoulement se répartissent en deux grandes catégories. Il existe d'une part des procédés de contrôle *passifs*, pour lesquels les actions générées sur le système ne dépendent pas du temps. On peut ainsi chercher à optimiser la forme d'un profil ou la constitution d'un matériau, comme la mise en place de rainures pour réduire la traînée d'un écoulement turbulent [20, 33], l'utilisation de parois souples [99] ou l'adjonction d'une couche poreuse autour de l'objet [15, 16, 18]. Les techniques de contrôle passives sont en général simples à mettre en oeuvre et peu coûteuses. Cependant, elles sont déterminées une fois pour toutes et une altération dans la nature de l'écoulement peut les rendre inefficaces, voire même pénalisantes. D'autre part, les techniques de contrôle *actifs* concernent des procédés qui génèrent des actions dépendantes du temps. On distingue alors le *contrôle en boucle ouverte*, dont l'effet ne dépend pas de l'écoulement lui-même, du *contrôle en boucle fermée*, qui modifie son action en fonction de l'évolution de l'écoulement. Plusieurs de ces techniques ont été présentées par Moin et Bewley [66] et Hernandez [49].

L'objet de ce travail a été de comparer quatre techniques de contrôle actif sur la configuration du dièdre. Ces procédés ont volontairement été choisis provenant d'horizons bien différents, afin de mettre au maximum en évidence les points forts et les points faibles de chacun d'entre eux. L'objectif du contrôle est ici d'augmenter au maximum la poussée exercée par le fluide sur le profil, celle-ci étant principalement due à la force de pression pour le régime laminaire auquel nous nous sommes intéressés. Quantitativement, nous avons défini un coefficient de recouvrement de pression C_r , qui rend compte de la capacité de l'écoulement à transformer l'énergie cinétique perdue à cause de la décélération en une force de pression, en effectuant une comparaison avec le cas idéal du fluide incompressible non décollé.

La première technique a utilisé le fait que l'analyse du gradient tangent de pression sur la paroi du dièdre constituait une excellente indication de la localisation des structures cohérentes de l'écoulement [55, 67]. Une technique simple de contrôle actif est donc, à l'instar du travail d'Hernandez [49], d'impulser un jet vertical juste en amont du point de discontinuité du dièdre qui souffle et aspire du fluide en fonction d'un signal de gradient tangent de pression mesuré en aval de l'écoulement sur la paroi du dièdre. La fonction de transfert ainsi utilisée se résume en un amplificateur/déphaseur de signal. On constate alors que le jet devient parfaitement sinusoïdal. Lorsque son amplitude est réglée de façon à correspondre à au moins 4,5 % de la vitesse du fluide sur la frontière d'entrée du domaine, il induit d'importants changements dans la structure même de l'écoulement : Sa fréquence fondamentale est multipliée par 3, l'amplitude des fluctuations de l'écoulement se réduit et la zone de recirculation moyenne de l'écoulement se trouve très fortement réduite (FIG. 7). Les structures cohérentes sont plus petites, n'interagissent plus entre elles et sont rapidement convectées vers la sortie du domaine, renforçant ainsi le caractère hétérotophique de l'écoulement. Le coefficient C_r passe de 64.6% en simulation non contrôlée à 84.3% en simulation contrôlée, rendant compte d'une efficacité très significative sur le plan quantitatif.

La deuxième technique consiste à tenter d'améliorer la fonction de transfert par un algorithme mettant en évidence le lien entre le gradient tangent de pression à la paroi au niveau du capteur mesuré en un instant t et les actions exercées au niveau de l'actionneur en des instants précédents, basé sur une approche statistique de type traitement du signal [53]. Les arguments physiques ainsi que les équations gouvernant l'écoulement ne sont ici pas pris en compte. Le principe consiste simplement à trouver les np poids ω_k^i , $1 \leq i \leq np$, permettant de vérifier "au



FIG. 7 – Zones moyennes de recirculation.

mieux” la relation :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_S^k \approx \sum_{i=1}^{np} w_k^i q_V^{k-r-i}. \quad (8)$$

Dans la relation (8), q_V^{k-r-i} représente l’action à exercer au jet vertical en l’instant t^{k-r-i} , $\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_S^k$ le gradient de pression mesuré au capteur en l’instant t^k , et r un paramètre de retard. Au fur et à mesure de la simulation, les valeurs de w_k^i ($1 \leq i \leq np$) sont continuellement mises à jour par l’utilisation d’un algorithme de type moindres carrés [98]. Parallèlement à cela, la relation (8) est considérée en sens inverse pour calculer la valeur de q_V^k à imposer afin d’obtenir une valeur désirée de $\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_S^{k+r+1}$, en effectuant l’hypothèse selon laquelle $w_{k+r+1}^i \approx w_k^i$ ($1 \leq i \leq np$), c’est-à-dire que les poids varient lentement par rapport au temps. A l’issue d’une période transitoire ”d’apprentissage”, on a pu constater que les poids convergeaient vers des valeurs stationnaires et que les résultats du contrôle étaient tout à fait comparables, à la fois qualitativement et quantitativement, aux résultats obtenus par la première technique.

La troisième technique est basée sur une description physique locale de la génération de la vorticité à la paroi, qui a été inspirée par les travaux de Koumoutsakos [58], eux-même basés sur la théorie de Lighthill [61]. On utilise une rampe, constituée d’une alternance de capteurs et d’actionneurs. On montre que si l’on considère N actionneurs A'_j d’épaisseur d_j , de position x'_j , soufflant ou aspirant du fluide à une vitesse q_j ($1 \leq j \leq N$), N capteurs S_i de position x_i ($1 \leq i \leq N$), et que le fluide est incompressible de densité ρ , alors le gradient de pression tangent produit en S_i par l’ensemble des actionneurs durant un instant élémentaire Δt s’écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x_i) = -\frac{\rho}{2\pi \Delta t} \sum_{j=1}^N q_j \int_{-d_j/2}^{d_j/2} \frac{ds}{x_i - x'_j - s}. \quad (9)$$

La procédure de contrôle consiste donc à exploiter la relation (9) afin d’expliciter les amplitudes des actions à exercer aux actionneurs pour atteindre les valeurs désirées de gradients tangents de pression au niveau des capteurs. Il existe plusieurs variantes à ce procédé, comme par exemple la possibilité de considérer M capteurs et N actionneurs, $M < N$ et d’adjoindre $N - M$ contraintes supplémentaires. En prenant par exemple $M = N - 1$, on peut imposer un flux global de masse nul à travers les fentes des actionneurs. Les résultats obtenus ont mis en évidence que quel que soit l’actionneur considéré, la fréquence de l’action était la même, même si l’amplitude du signal est d’autant plus grande que l’actionneur est situé en amont de l’écoulement. De plus, en régime contrôlé, le coefficient C_r monte à 85.9%, ce qui constitue une amélioration relative de l’ordre de 2% par rapport aux deux techniques de contrôle précédentes.

Enfin, la quatrième et dernière technique explorée est celle du contrôle sous-optimal. Elle est basée sur une analyse mathématique des équations qui gouvernent l'écoulement. Cette technique a été introduite par Abergel et Temam pour les problèmes de mécanique des fluides [1], suivant les traces de Lions [62]. Elle a été ensuite développée par Choi *et al* pour l'équation de Burger stochastique [21], et plus récemment par Bewley *et al* [9, 10, 11, 92] ainsi que par Hernandez [49]. L'idée consiste tout d'abord à définir Γ_C comme étant la partie de la frontière sur laquelle le contrôle Φ aura à être mis en oeuvre (plus précisément, la partie de la frontière sur laquelle une vitesse normale Φ a priori non nulle à la paroi aura à être spécifiée). Γ_C peut être locale ou distribuée, et on note $\Gamma_P = [BC]$ (voir FIG. 8). L'objectif est alors de minimiser la fonctionnelle

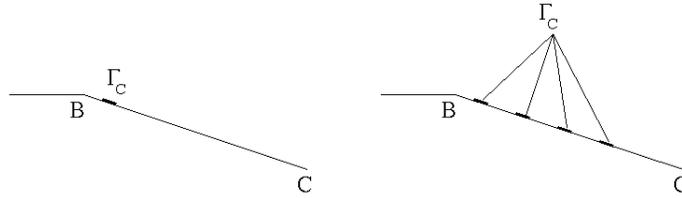


FIG. 8 – Contrôle sous-optimal : Définition de Γ_C locale (gauche) ou distribuée (droite).

$J_T(\Phi, p)$ donnée par :

$$J_T(\Phi, p) = \int_{[0, T]} \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_C} \Phi^2 dl + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_P} (p - p^{id})^2 dl dt.$$

Ici, p^{id} constitue un champ de pression "idéal" que l'on cherche à atteindre, et α un paramètre à choisir servant à pénaliser plus ou moins le coût du contrôle. Un tel objectif, qui est celui du contrôle *optimal*, est très difficile à atteindre, à cause de temps de calcul tout à fait prohibitifs. En conséquence, on préférera la technique du contrôle *sous-optimal*, qui consiste à minimiser la fonctionnelle uniquement entre deux pas de temps successifs et à réitérer le processus, en considérant à chaque itération temporelle la fonctionnelle :

$$J(\Phi, p) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_C} \Phi^2 dl + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_P} (p - p^{id})^2 dl = J_C(\Phi) + J_P(\Phi).$$

Pour faire cela, on exprime explicitement la dérivée de Frechet de $J(\Phi, p)$ par rapport à Φ , afin d'utiliser un simple algorithme de descente permettant de trouver le contrôle à exercer pour parvenir à la minimisation. Considérant une discrétisation implicite de la pression dans les équations de Navier-Stokes incompressibles, on montre que cette dérivée s'exprime à l'aide d'une pression adjointe π , dont l'obtention nécessite la résolution d'un problème adjoint. Ce type de contrôle est de très loin le plus coûteux, la résolution du problème adjoint nécessitant un temps de calcul du même ordre de grandeur que celui nécessaire à la simulation de l'écoulement non contrôlé. De plus, les résultats obtenus sont, de manière générale, décevants par rapport aux résultats obtenus par les trois contrôles précédents. Cela s'explique d'une part par les multiples approximations théoriques et pratiques qui ont dues être effectuées afin d'aboutir au problème adjoint et de le résoudre, mais aussi par le fait que l'utilisation de $\Gamma_P = [BC]$ ne permet plus de capter la fréquence de passage des tourbillons, à cause d'un effet de moyenne. Cette dernière hypothèse semble confirmée par l'utilisation d'un Γ_P plus local, mais à laquelle l'analyse théorique développée pour la mise en oeuvre du contrôle ne résiste pas.

1.5 Contrôle au dessus de la marche descendante : Régime laminaire

Ces travaux ont donné lieu à la publication [31].

L'écoulement au dessus d'une marche descendante est l'un des écoulements internes qui a été le plus étudié, et donne en conséquence lieu à une vaste bibliographie, source de résultats numériques et expérimentaux très nombreux. A titre d'exemple, on pourra se référer pour le régime laminaire aux travaux de Ghoniem et Cagnon [40], Armaly et al [4] et Denham et Patrick [32]. Un avantage de cette configuration réside dans sa géométrie simple, pouvant toutefois être utilisée pour étudier plusieurs phénomènes en ingénierie. Le domaine de calcul D est représenté sur la figure 9.

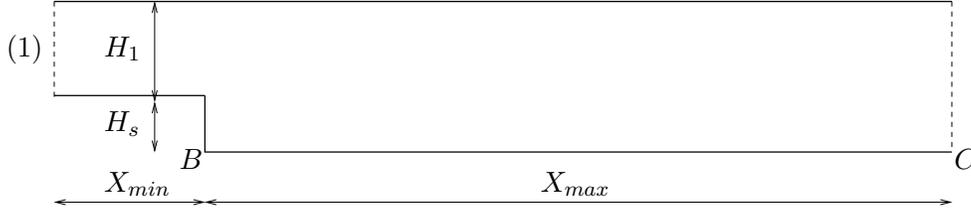


FIG. 9 – Domaine de calcul D .

En simulation non contrôlée et dans la configuration à laquelle nous nous intéressons (régime laminaire ($Re = 191$) et faible compressibilité ($M = 0.1$)), l'écoulement étudié est stationnaire, stable et bi-dimensionnel [4, 32]. Il est caractérisé par une unique zone de recirculation elliptique de longueur $L_r \approx 8.6H_s$ (FIG 10), et le comportement de cette zone permet d'obtenir de bonnes informations sur l'écoulement, et en particulier sur le transport des structures tourbillonnaires. Cet écoulement a été simulé avec le code que nous avons développé et utilisé pour les parties 1.1, 1.2 et 1.4. En outre, la comparaison des résultats avec ceux de la bibliographie a été rendue possible en utilisant le fait que ce régime faiblement compressible se comporte comme le régime incompressible pour ce Reynolds modéré [51].

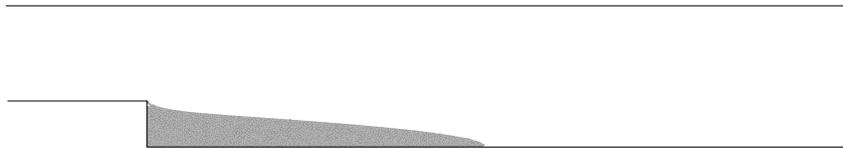


FIG. 10 – Zone de recirculation ($u < 0$) à $Re = 191$.

Nous avons tenté de contrôler cette zone de recirculation en implémentant une condition aux limites instationnaire en entrée du domaine de calcul (frontière (1), voir FIG. 9), à savoir :

$$\begin{cases} u(t) &= U_0 \left(1 + A \cos \left(\frac{2\pi U_0 f t}{H_s} \right) \right), \\ v &= 0, \\ T &= T_0, \end{cases}$$

où T est la température. Il s'agit donc d'un contrôle actif en boucle ouverte. Les deux paramètres A et f permettent de spécifier respectivement l'amplitude et la fréquence du signal, le cas $A = 0$ correspondant au régime non contrôlé, et la période de ce signal correspondant au

temps nécessaire au fluide pour parcourir la distance H_s/f à la vitesse U_0 . Afin de quantifier l'effet de ce contrôle sur l'écoulement, trois coefficients ont été définis sur le domaine de calcul D , caractérisant chacun une propriété de l'écoulement. On peut ainsi évaluer en tout instant t la proportion de la partie décollée de l'écoulement sur la paroi horizontale basse en aval de la marche ($r_{dw}(t)$), la proportion de la zone recirculée $u < 0$ localisée dans la partie inférieure du domaine $y < H_s$ ($r_{recbot}(t)$), et la proportion de la zone recirculée $u < 0$ dans tout le domaine de calcul qui permet de détecter l'apparition de structures cohérentes au niveau de la paroi horizontale haute ($r_{rec}(t)$). L'objectif du contrôle est de mettre en évidence l'influence des paramètres A et f sur les coefficients \bar{r}_{dw} , \bar{r}_{recbot} et \bar{r}_{rec} , respectivement définis comme la moyenne temporelle des trois précédents coefficients enregistrée sur un intervalle de temps significatif. Tous les résultats détaillés peuvent être trouvés dans [31]. En ce qui concerne par exemple l'influence du paramètre f , on a pu mettre en évidence trois types de comportement :

- Pour $f \geq 20$, zone des très hautes fréquences, les oscillations n'ont presque aucune influence sur les trois coefficients. La zone de recirculation reste quasiment stationnaire sans aucun transport de structures cohérentes dans le tunnel.
- Pour environ $f \leq 6$, \bar{r}_{dw} augmente rapidement en fonction de la fréquence alors que \bar{r}_{rec} décroît. Cela s'explique par la décomposition de la zone de recirculation en plusieurs grandes structures transportées jusque la sortie du tunnel, et qui n'interagissent pas entre elles. En augmentant la fréquence jusque $f \approx 6$, le nombre de ces structures augmente en même temps que leur taille diminue. Cette gamme de fréquences permet donc de contrôler la taille et le nombre des structures ainsi que la surface de la zone de recirculation.
- Enfin, pour la zone $6 \leq f \leq 20$, les structures interagissent entre elles pour générer une unique zone de recirculation, cette fois instationnaire et oscillante. Ce comportement est caractérisé par une forte réduction de \bar{r}_{dw} et de \bar{r}_{recbot} , permettant ainsi d'éviter la génération du transport de la vorticité, tout en destabilisant quand même la zone de recirculation. A noter que la zone $f \leq 12$ correspond à une valeur plus grande de \bar{r}_{rec} comparée au cas non contrôlé, expliquée par une génération de structures au voisinage de la paroi supérieure.

On visualise sur la figure 11 les isovaleurs de u et des zones recirculées dans le domaine en un instant de la simulation pour plusieurs fréquences, ce qui donne une bonne illustration de chacun des types de comportement.

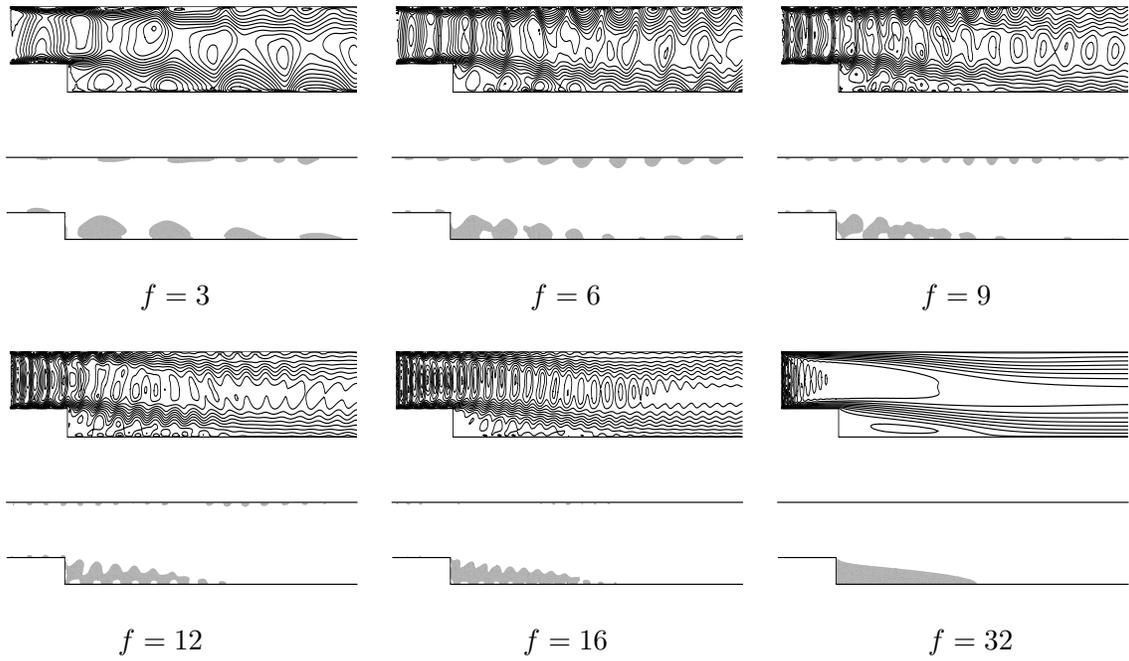


FIG. 11 – Isovaleurs instantanées de u (haut) et zones de recirculation (bas) pour $A = 0.5$ et différentes fréquences.

1.6 Contrôle au dessus de la marche descendante : Régime transitoire

Ces travaux ont donné lieu à la publication [29].

Le travail développé ici se situe dans la suite logique de la partie 1.5, à savoir le contrôle de l'écoulement au dessus de la marche descendante, mais cette fois pour un régime transitoire, qui n'est plus stationnaire dans sa configuration non contrôlée. Il est alors possible d'utiliser les caractéristiques propres de l'écoulement comme par exemple la fréquence du signal en un point pour évoluer progressivement vers des techniques de contrôle en boucle fermée.

Encore une fois, la base de données bibliographique relative à la simulation d'un tel écoulement est vaste, et on pourra juste citer quelques références permettant de se faire une idée suffisamment précise. Armaly *et al* [4] donnent une description détaillée de ce type d'écoulement allant du cadre laminaire au cadre turbulent ($70 < Re < 8000$), expérimentalement et numériquement. Le *et al* [59] se concentrent sur la description des fluctuations de pression et de la zone de recirculation obtenue par une simulation numérique directe en régime turbulent, et s'intéressent particulièrement au coefficient de frottement, tout comme Spazzini *et al* [86]. Plus récemment, Wee *et al* [95] et Yi *et al* [100] utilisent une simulation numérique directe 2D pour obtenir la fréquence fondamentale de l'écoulement et étudier le phénomène de génération et de transport des structures tourbillonnaires ainsi que les instabilités qui apparaissent.

De même, beaucoup de papiers sur le contrôle de ce type d'écoulement sont disponibles. Chun et Sung [24] proposent un procédé expérimental excitant l'écoulement par un jet sinusoïdal généré à travers une fente située à proximité immédiate du point de séparation. Les effets de l'amplitude et de la fréquence sur le point de ré-attachement sont alors étudiés. Plus récemment, Kaiktsis et Monkewitz [57] et Wengle *et al* [97] déstabilisent également l'écoulement par une excitation locale. Un contrôle de type boucle fermée par forçage local près du point de séparation est mis en place par Yi *et al* [101], basé sur l'utilisation d'une technique de Proper Orthogonal Decomposition et conduisant à une réduction significative de l'énergie cinétique de l'écoulement. Deux autres références sont également importantes à mentionner, même si elles ne concernent plus la configuration de la marche descendante. D'abord Hammond *et al* [48] qui, en soufflant et aspirant sur une paroi dans la direction opposée à la vitesse normale enregistrée juste au dessus de la paroi, parviennent à atténuer la turbulence et à réduire le coefficient de frottement. Puis Joshi *et al* [56], qui développent un contrôle rétroactif permettant de stabiliser un écoulement 2D de type Poiseuille en utilisant un procédé de soufflage/aspiration à la paroi dans la direction normale.

L'objectif et l'originalité de notre travail consiste à mettre en oeuvre et à comparer deux techniques de contrôle actif permettant de piloter les caractéristiques de l'écoulement au dessus de la marche descendante en régime transitoire. La première utilise une vitesse pulsée en entrée d'écoulement, à l'instar du procédé utilisé dans la partie 1.5, dans le cadre d'un contrôle en boucle ouverte mais aussi dans celui d'un contrôle en boucle fermée. La seconde consiste en l'utilisation de deux jets horizontaux sur la paroi verticale de la marche, considérant un contrôle en boucle ouverte et en boucle fermée.

Au niveau de la modélisation et de la simulation numérique, nous avons considéré des choix différents de ceux de la partie 1.5. D'une part, le fluide est incompressible, d'où l'utilisation des

équations de Navier-Stokes incompressible 2D :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega, \quad (11)$$

auxquelles adjoindre les conditions aux limites et les conditions initiales. D'autre part, la méthode de résolution numérique choisie a été la méthode "Vortex-In-Cell" (VIC), appartenant à la classe des méthodes "Vortex" [22, 23, 26]. Ces méthodes sont bien connues pour leur robustesse, leur capacité à simuler des écoulements recirculés à haut Reynolds [40, 82], et plus récemment pour leur utilisation pour le contrôle en mécanique des fluides [73]. Elles distinguent dans l'écoulement les zones rotationnelles des zones irrotationnelles, et permettent de concentrer le plus gros des calculs dans les premières. Elles sont donc particulièrement adaptées pour l'étude de la dynamique tourbillonnaire. De plus, la méthode VIC est une variante des méthodes vortex purement lagrangiennes. Elle utilise un solveur de poisson sur grille cartésienne et augmente ainsi la vitesse de calcul. En prenant le rotationnel de (11) et en utilisant (10), on aboutit à l'équation de Helmholtz suivante :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \Delta \omega \quad \text{dans } \Omega, \quad (12)$$

exprimant le transport de la vorticité $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ par convection/diffusion. La résolution de (12) sur l'intervalle de temps élémentaire δt s'effectue en deux étapes, en considérant successivement le terme de convection et celui de diffusion [6]. Dans la première étape, on s'intéresse au transport de la vorticité induit par la convection, que l'on regarde comme le déplacement lagrangien d'un ensemble de tourbillons de circulation élémentaire $+\gamma$ ou $-\gamma$, $\gamma > 0$. Connaissant le champ de vorticité à un instant donné, on en déduit la fonction de courant Ψ sur tout le domaine par résolution d'une équation de Laplace, puis le champ de vitesse \mathbf{u} par dérivation de Ψ . Cela permet, en utilisant une procédure d'interpolation linéaire, d'associer à chaque tourbillon dans le domaine une vitesse qui lui est propre et de calculer son déplacement convectif durant un instant élémentaire δt . Dans la seconde étape, le déplacement de chaque tourbillon induit par la diffusion est simulé stochastiquement par la méthode de la marche aléatoire, qui exprime le fait que le mouvement brownien d'un nombre très important de particules converge vers la solution de l'équation de la chaleur [22, 41]. En utilisant la fonction de Green de l'équation de la chaleur $Gr(x, y, t)$, on simule le déplacement causé par la diffusion durant l'instant δt par deux déplacements indépendants dans des directions orthogonales en utilisant deux variables aléatoires vérifiant une loi de Gauss d'espérance nulle et d'écart type $\sigma = \sqrt{2\delta t/Re}$. Le déplacement total de chaque tourbillon est ainsi déterminé. Il ne reste alors plus qu'à transformer la vitesse de glissement induite au mur, qui physiquement est nulle à cause de la condition aux limites de non glissement, en plusieurs tourbillons élémentaires injectés dans l'écoulement. On recouvre le champ de vorticité total dans le domaine par " clatement" des tourbillons sur la grille de calcul, et on réitère l'ensemble de l'algorithme pour le pas de temps suivant. Beaucoup de détails méritent d'être précisés pour la mise en oeuvre pratique de ce schéma de résolution numérique, comme les conditions aux limites sur Ψ à utiliser, les relations à vérifier entre δt , γ et le pas h de la grille utilisée, la façon d'injecter les nouveaux tourbillons dans le domaine ou de les réfléchir sur une paroi. Ils pourront être trouvés par exemple dans [29, 68, 69, 74]. Nous sommes partis du code de calcul initialement développé par Rodrigue Savoie [80], que nous avons complété par les fonctionnalités du contrôle. Après avoir effectué la phase de validation de la simulation à $Re = 2000$ en se basant sur plusieurs références bibliographiques [82, 95], deux types de contrôle ont été proposés (FIG. 12) : Le premier procédé (Contrôle 1) consiste, comme dans la partie 1.5, à imposer une vitesse pulsée en entrée d'écoulement $\mathbf{u}(t) = (u_{in}(t), 0)^T$,   la place de la vitesse uniforme $\mathbf{u}(t) = (1, 0)^T$ correspondant à l'écoulement non contrôlé. Le second procédé (Contrôle 2) consiste à mettre en oeuvre deux petits jets localisés respectivement en haut et en

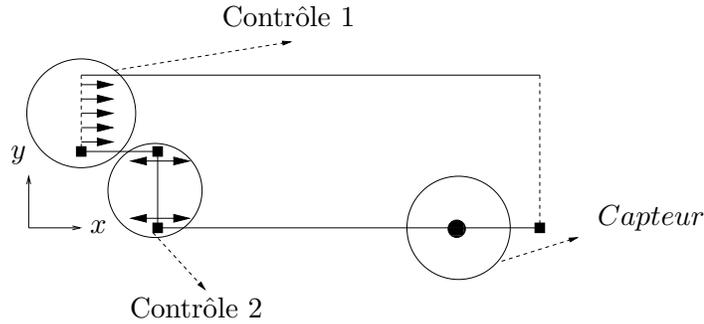


FIG. 12 – Les deux types de contrôle.

bas de la marche. L'objectif de ce dernier procédé est d'influencer directement le détachement tourbillonnaire et la zone de recirculation principale : le jet supérieur modifie la dynamique du détachement et le jet inférieur perturbe et déplace la zone de recirculation. Pour chacun des deux procédés, on compare les résultats obtenus en contrôle boucle ouverte et en contrôle boucle fermée. Dans ce dernier cas, l'action exercée dépend de l'analyse d'un signal mesuré au niveau d'un capteur localisé sur la paroi en aval de l'écoulement. L'effet du contrôle est quantifié par son influence sur cinq fonctionnelles, que sont respectivement la longueur de recirculation, l'enstrophie de l'écoulement, l'énergie cinétique de l'écoulement, l'intensité de la recirculation à proximité de la paroi inférieure et le coefficient de fluctuation [29]. Parmi tous les résultats obtenus, on notera ces trois éléments essentiels pour le premier type de contrôle :

- Concernant le contrôle en boucle ouverte, on met en évidence un nombre de Strouhal optimal ($St \approx 0.07$) pour laquelle la zone de recirculation, l'enstrophie, l'énergie cinétique et le coefficient de fluctuation atteignent leur valeur minimale, alors que l'intensité de la recirculation à proximité de la paroi inférieure est maximale. Ce Strouhal correspond en fait à la fréquence fondamentale de l'écoulement non contrôlé, ce qui en soi constitue déjà un résultat remarquable. En régime contrôlé, la zone de recirculation moyenne est détruite, et l'énergie et l'enstrophie de l'écoulement se trouvent concentrées dans de petites structures cohérentes situées à proximité immédiate de la paroi ;
- En exploitant le signal de la dérivée normale seconde de la vitesse horizontale (ou, de façon équivalente, celui du gradient tangent de pression) au niveau du capteur afin de spécifier, par déphasage/amplification la valeur de $u_{in}(t)$ par une procédure de contrôle en boucle fermée, on remarque que les résultats obtenus sont presque aussi bons que les meilleurs résultats obtenus par la boucle ouverte. Cela démontre la capacité de ce type de contrôle à déterminer "lui-même" la meilleure fréquence à utiliser. Les figures 13 et 14 montrent respectivement les lignes de courant de l'écoulement en régime non contrôlé et en régime contrôlé, sur une période fondamentale ;
- Enfin, les résultats sont encore meilleurs si l'on utilise un capteur intrusif, c'est-à-dire localisé en plein coeur de l'écoulement et non plus sur la paroi. Ce résultat s'explique par le fait que le signal enregistré au mur est davantage bruité que celui capté plus loin, et qui provoque en conséquence un signal $u_{in}(t)$ moins régulier en entrée de domaine.

Pour le second type de contrôle, plusieurs conclusions ont également été obtenues, et parmi elles les constatations suivantes :

- En ce qui concerne le contrôle avec des jets stationnaires, pour perturber efficacement

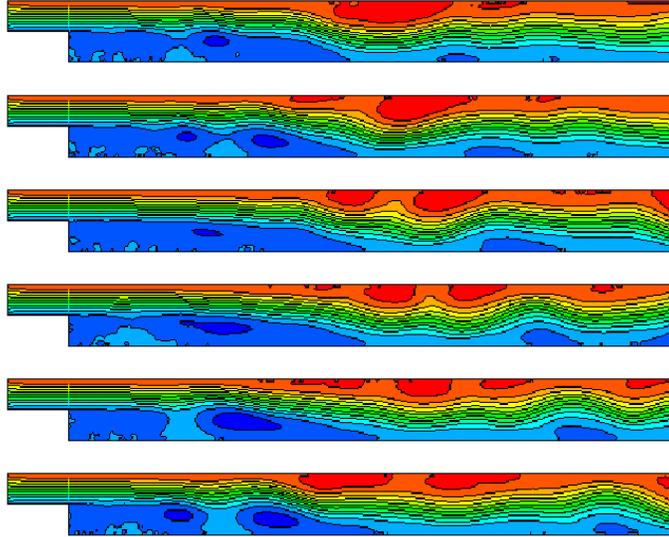


FIG. 13 – Lignes de courant sur une période fondamentale, régime non contrôlé.

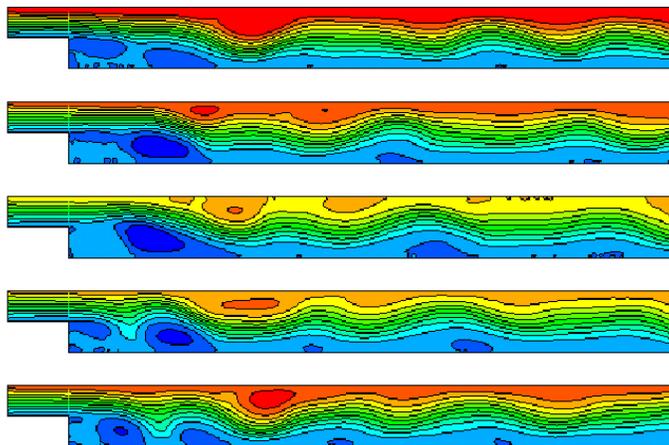


FIG. 14 – Lignes de courant sur une période fondamentale, régime contrôlé.

l'écoulement et réduire la taille de la zone de recirculation, il faut aspirer en haut et souffler en bas de manière à générer un moment capable de briser la zone et de la pousser en dehors de la zone de diffusion. De plus, les meilleurs résultats sont atteints lorsque l'on induit une dissymétrie en générant une plus forte aspiration en haut que le soufflage exercé en bas.

- Pour le contrôle utilisant des jets pulsés en boucle ouverte, la fréquence d'excitation a peu d'influence sur les résultats obtenus en comparaison avec les résultats donnés par le premier type de contrôle ;
- Enfin, le procédé de contrôle en boucle fermée parvient à recouvrir les meilleurs résultats obtenus en boucle ouverte.

La figure 15 montre l'effet de ce type de contrôle sur la zone de recirculation moyenne de l'écoulement : On constate bien une réduction drastique de cette dernière.

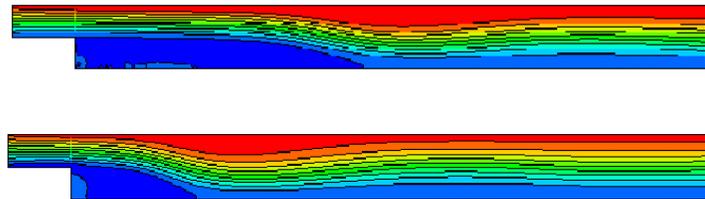


FIG. 15 – Lignes de courant moyennes correspondant respectivement au régime non contrôlé (haut), et au contrôle de type 2 en boucle fermée (bas).

1.7 Contrôle sur le corps de Ahmed

Ce travail a été initié avec Charles-Henri Bruneau (Université Bordeaux 1) et Gwendal Wilczyk [13, 14], en lien avec le GDR 2502 "Contrôle des Décollements" composé d'universitaires et d'industriels et dirigé par Azzedine Kourta de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse. Aujourd'hui, il se poursuit par le Programme de recherche et d'innovation dans les transports terrestres financé par l'ANR et l'ADEME, mené par Renault et PSA et piloté par Jean-Luc Aider de l'ESPCI Paris. Le corps de Ahmed [2] est une géométrie simplifiée pouvant être considérée comme une première approximation d'un profil automobile (FIG. 16). On simule l'écoulement d'un fluide incompressible autour de ce corps, supposé être localisé au dessus d'une route, par un code différences finies multigrilles avec une technique de pénalisation de l'obstacle. L'objectif essentiel poursuivi est alors celui de réduire le coefficient de traînée associé au corps de Ahmed, par différentes techniques de contrôle. Concernant l'approche 2D, Bruneau et Mortazavi ont proposé une technique de contrôle passif, en utilisant un matériau poreux localisé en des endroits judicieusement choisis de la surface du corps. Ainsi, ils aboutissent à une régularisation locale de l'écoulement et à une baisse significative du coefficient de traînée, comme dans leurs travaux antérieurs sur des géométries plus académiques [17]. Concernant l'approche 3D, des résultats ont été obtenus par Rouméas [78], en utilisant un jet stationnaire localisé sur la paroi horizontale haute juste en amont de la lunette arrière, aspirant du fluide et permettant ainsi de recoller le décollement, menant encore à une réduction de traînée significative.

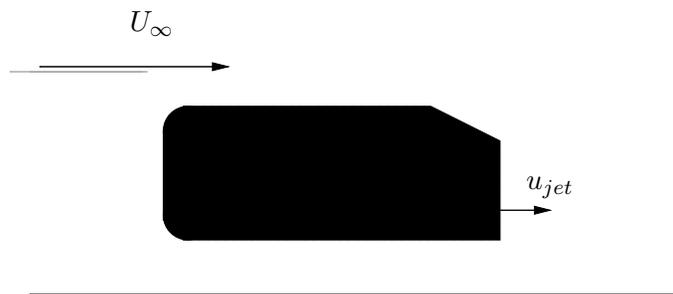


FIG. 16 – Géométrie du corps de Ahmed.

Nous essayons maintenant de comprendre les effets du contrôle induit par le soufflage à travers une fente localisée sur le culot du corps (cf. FIG. 16, vitesse u_{jet}), avec deux nouveautés. La première est celle d'un contrôle fréquentiel et non pas uniquement stationnaire, permettant ainsi de mesurer l'impact du choix de la fréquence d'excitation sur les résultats obtenus. La seconde est la mise en place d'un contrôle en boucle fermée à l'aide d'un capteur non intrusif de gradient de pression sur la paroi. De nombreux tests numériques sont actuellement en cours et les premiers résultats sont encourageants. Ainsi, par l'utilisation d'un contrôle en boucle fermée utilisant pour le moment un capteur intrusif en aval du corps dans l'écoulement lui-même, le coefficient de traînée moyen enregistre une réduction de l'ordre de 20 %. Sur la figure 17, on visualise les isovaleurs de la pression moyenne durant la simulation. En situation contrôlée, on voit que la grosse structure tourbillonnaire en aval du culot est légèrement déplacée et que son intensité est moindre comme en témoigne la distribution moins serrée des isolignes. Nous nous attelons actuellement à deux problèmes principaux. Le premier est celui de la modélisation du jet instationnaire, qui doit parvenir à rendre compte de la physique sans mettre en péril la stabilité de la simulation. Le second concerne la localisation du capteur non intrusif, dont le choix est loin d'être trivial.

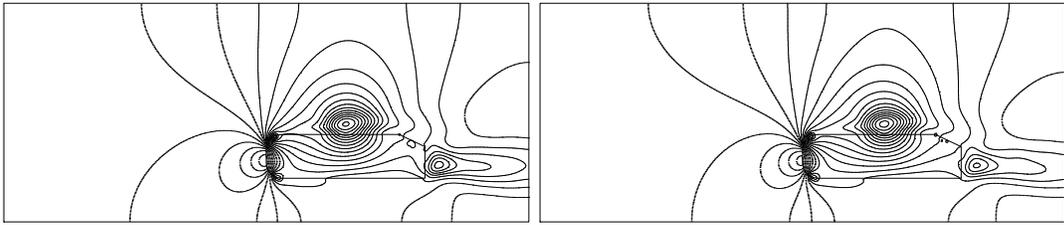


FIG. 17 – Isovaleurs du champ moyen de pression. Sans contrôle (gauche) et avec contrôle (droite).

1.8 Bibliographie

Références

- [1] F. Abergel and R. Temam. On some control problems in fluid mechanics. *Theor. and Comp. Fluid Dynamics*, 1 :303, 1990.
- [2] S.R. Ahmed, G. Ramm, and G. Falting. Some salient features of the time averaged ground vehicle wake. In *SAE Paper 840300*, 1984.
- [3] A.S. Almgren, J.B. Bell, P. Colella, L.H. Howell, and M.L. Welcome. A conservative adaptive projection method for the variable density incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.*, 142(1) :1–46, 1998.
- [4] B.F. Armaly, F. Durst, J.C.F. Pereira, and B. Schonung. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 127 :473–496, 1983.
- [5] C. Basdevant and T. Philipovitch. On the "Weiss criterion" in two-dimensional turbulence. *Physica D*, 73 :17–30, 1994.
- [6] T. Beale and A. Majda. Rates of convergence for viscous splitting of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 37 :243–259, 1981.
- [7] J. B. Bell and D. L. Marcus. A second-order projection method for variable density flows. *J. Comp. Phys.*, 101 :334–348, 1992.
- [8] J.P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comp. Phys.*, 114 :185–200, 1994.
- [9] T. Bewley, H. Choi, R. Temam, and P. Moin. Optimal feedback control of turbulent channel flow. Technical report, Center for turbulence research, 1993.
- [10] T. Bewley, P. Moin, and R. Temam. A method for optimizing feedback control rules for wall-bounded turbulent flows based on control theory. In *Forum on control of transitional and turbulent flows*. ASME fluid engineering conference, 1996.
- [11] T. Bewley, P. Moin, and R. Temam. 28th AIAA fluid dynamics conference, 4th AIAA shear flow control conference. *Optimal and robust approaches for linear and non linear regulation problems in fluid mechanics*, 1997.
- [12] C.H. Bruneau and E. Creusé. Towards a transparent boundary condition for compressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 36 :807–840, 2001.
- [13] C.H. Bruneau, E. Creusé, and G. Wilczyk. Contrôle actif par jet synthétique de l'écoulement autour du corps de Ahmed en 2d. Technical Report 2002/001, ADERA, 2002.
- [14] C.H. Bruneau, E. Creusé, and G. Wilczyk. Contrôle actif par jet synthétique de l'écoulement autour du corps de Ahmed en 2d. Technical Report 2003/001, ADERA, 2003.
- [15] C.H. Bruneau, P. Gilliéron, and I. Mortazavi. Passive control around the square back ahmed body using porous devices. *Journal of Fluid Engineering*, In Press.
- [16] C.H. Bruneau and I. Mortazavi. Passive control of the flow around a square cylinder using porous media. *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, 46(4) :415–433, 2004.
- [17] C.H. Bruneau and I. Mortazavi. Passive control of bluff body flows using porous media. *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, 46(4) :415–433, 2004.
- [18] C.H. Bruneau and I. Mortazavi. Control of vortex shedding around a pipe section using a porous sheath. *Int. J. Offshore Polar Engg.*, 16, 2006.
- [19] C. Calgaro, E. Creusé, and T. Goudon. An hybrid finite volume-finite elements method for variable density incompressible flows. *Submitted*, 2007.
- [20] H. Choi, P. Moin, and J. Kim. Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. *Journal of Fluid Mechanics*, 255 :503–539, 1993.
- [21] H. Choi, R. Temam, P. Moin, and J. Kim. Feedback control for unsteady flow and its application to the stockastic Burgers equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 253 :509–543, 1993.
- [22] A.J. Chorin. Numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 57 :785–796, 1973.
- [23] J.P. Christiansen. Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortices. *J. Comp. Phys.*, 13 :363–379, 1971.

- [24] K.B. Chun and H.J. Sung. Control of turbulent separated flow over a backward-facing step by local forcing. *Experiments in Fluids*, 21 :417–426, 1996.
- [25] T. Colonius, S.K. Lele, and M. Parviz. Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation. *AIAA Journal*, 31(9) :1574–1582, 1993.
- [26] G.H. Cottet and P. Koumoutsakos. *Vortex methods : Theory and Practise*. Cambridge University Press, 2000.
- [27] E. Creusé. *Simulation et contrôle actif d'écoulements compressibles*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2000.
- [28] E. Creusé. Comparison of active control techniques over a dihedral plane. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 6 :446–466, 2001.
- [29] E. Creusé, A. Giovannini, and I. Mortazavi. Vortex simulation of active control strategies for transitional backward-facing step flows. *submitted*.
- [30] E. Creusé and I. Mortazavi. Vortex dynamics over a dihedral plane in a transitional slightly compressible flow : A computational study. *Eur. J. Mech. B-Fluids*, 20 :603–626, 2001.
- [31] E. Creusé and I. Mortazavi. Simulation of low Reynolds number flow control over a backward-facing step using pulsed inlet velocities. *Applied Mathematics Research eXpress*, 4 :133–152, 2004.
- [32] M.K. Denham and M.A. Patrick. *Trans. Inst. Chem. Eng*, 52 :361, 1974.
- [33] U. Ehrenstein. On the linear stabilities of channel flow over riblets. *Physics of Fluids*, 8 (11), 3194–3196, 1996.
- [34] A. Ern and J.L. Guermond. *Theory and Practise of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New-York, 2004.
- [35] R. Eymard, T. Gallouet, and R. Herbin. *Finite volume methods*, volume 7 of *Handbook of numerical analysis*, pages 713–1020. North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [36] L. Fezoui, S. Lanteri, B. Larrouturou, and C. Olivier. Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible en maillage triangulaire. Technical Report 1033, INRIA Research Report, 1989.
- [37] Y. Fraigneau, J.L. Guermond, and L. Quartapelle. Approximation of variable density incompressible flows by means of finite elements and finite volumes. *Comm. Numer. Meth. Engrg*, 17 :893, 2001.
- [38] I. Gasser, J. Struckmeier, and I. Teleaga. Modelling and simulation of fires in vehicle tunnels. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 44(3) :277–296, 2004.
- [39] J.M. Ghidaglia and F. Pascal. Passerelles volumes finis - éléments finis. *C.R.A.S. Paris, série I Math.*, 328(8) :711–716, 1999.
- [40] A.F. Ghoniem and Y. Cagnon. Vortex simulation of laminar recirculating flow. *J. Comp. Phys.*, 68 :346–377, 1987.
- [41] A.F. Ghoniem and F.S. Sherman. Grid-free simulation of diffusion using random walk methods. *J. Comp. Phys.*, 61 :1–37, 1985.
- [42] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations, Theory and algorithms*, volume 5. Springer Series in Computational Mathematics, 1986.
- [43] J.W. Goodrich and W.Y. Soh. Time-dependant viscous incompressible Navier-Stokes equations : The finite difference Galerkin formulation and streamfunction algorithms. *J. Comp. Phys.*, 84(1) :207–241, 1989.
- [44] F.F. Grinstein. Open boundary conditions in the simulation of subsonic turbulent shear flows. *J. Comp. Phys.*, 115 :43–55, 1996.
- [45] J.L. Guermond. Stabilization of Galerkin approximations of transport equations by subgrid modeling. *M2AN*, 33(6) :1293–1316, 1999.
- [46] J.L. Guermond, P. Minev, and J. Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 195(44) :6011–6045, 2006.
- [47] J.L. Guermond and L. Quartapelle. A projection fem for variable density incompressible flows. *J. Comp. Phys.*, 165(1) :167–188, 2000.
- [48] E.P. Hammond, T.R. Bewley, and P. Moin. Observed mechanisms for turbulence attenuation and enhancement in opposition-controlled wall-bounded flows. *Physics of Fluids*, 10(9) :2421–2423, 1998.

- [49] G. Hernandez. *Contrôle actif des instabilités hydrodynamiques des écoulements subsoniques compressibles*. PhD thesis, CERFACS, 1996.
- [50] J.S. Hesthaven. On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized Euler equations. *J. Comp. Phys.*, 142 :129–147, 1998.
- [51] M. Himdi. Contribution à la simulation numérique des écoulements de fluides compressibles et peu compressibles par le code de calcul KIVA-II, 1993.
- [52] F.Q. Hu. On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer. *J. Comp. Phys.*, 129 :201–219, 1996.
- [53] R. Ingermann, K.H. Lachmann, and D. Matko. *Adaptive control system*. Prentice Hall, New-York, 1992.
- [54] J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 285 :69–94, 1995.
- [55] A.V. Johansson, P.H. Alfredsson, and J. Kim. Evolution and dynamics of shear-layer structures in near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 224 :579–599, 1991.
- [56] S.S. Joshi, J.L. Speyer, and J. Kim. A systems theory approach to the feedback stabilization of infinitesimal and finite-amplitude disturbances in plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 332 :157–184, 1997.
- [57] L. Kaiktsis and P. Monkewitz. Global destabilization of flow over a backward-facing step. *Physics of fluids*, 15(12) :3647–3658, 2003.
- [58] P. Koumoutsakos. Active control of vortex-wall interactions. *Physics of fluids*, 9(12) :3808–3816, 1997.
- [59] H. Le, P. Moin, and J. Kim. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.*, 330 :349–374, 1997.
- [60] R.J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2002.
- [61] M.J. Lighthill. *Boundary layer theory. Introduction*. J. Rosenhead, Oxford university press, New-York, 1963.
- [62] J.L. Lions. *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1969.
- [63] P.L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Compressible Models.*, volume 2 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New-York, 1998.
- [64] Z. Liu and Z. Liu. Fourth order finite difference and multigrid method for modeling instabilities in flat plate boundary layer - 2d and 3d approaches. *Computers and Fluids*, 23(7) :955–982, 1994.
- [65] H.G. Lugt. *Recent developments in theoretical and experimental fluid mechanics*. Springer, 1979.
- [66] P. Moin and T. Bewley. Feedback control of turbulence. *Appl. Mech. Rev.*, 47(6), 1994.
- [67] P. Moin and J. Kim. The structure of vorticity fields in turbulent channel flows. part 1 : Analysis of instantaneous field and statistical correlations. *Journal of Fluid Mechanics*, 155, 1985.
- [68] I. Mortazavi, P. Micheau, and A. Giovannini. Numerical convergence of the random vortex method for complex flows. In *ESAIM : Proceedings*, number 1, pages 521–538, 1997.
- [69] I. Mortazavi, P. Micheau, and A. Giovannini. Etude de la convergence numérique d’une méthode vortex pour un écoulement à grand nombre de Reynolds dans un mélangeur. *C.R. Mécanique*, 330 :409–416, 2002.
- [70] F. Nicoud. On the amplitude of waves in characteristic boundary conditions for Euler equations. Technical report, CERFACS, 1998.
- [71] J. Olinger and A. Sundström. Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 35(3) :419–446, 1978.
- [72] F. Pascal and J.M. Ghidaglia. Footbridge between finite volumes and finite elements with applications to cfd. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 37(8) :951–986, 2001.
- [73] M. Pastoor, R. King, B.R. Noack, A. Dillman, and G. Tadmor. Model-based coherent-structure control of turbulent shear flows using low-dimensional vortex models. In *33 AIAA Fluids Conference and Exhibit*, Orlando, Florida, June 23-26 2003.

- [74] S. Pellerin. *Interactions d'une structure tourbillonnaire avec une couche limite de plaque plane. Analyse et caractérisation des phénomènes aérodynamiques*. PhD thesis, Université Toulouse 3, France, 1997.
- [75] T. Poinso and S.K. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *J. Comp. Phys.*, 101 :104–129, 1992.
- [76] Pruet, Zang, Chang, and Carpenter. Spatial direct numerical simulation of high-speed boundary layers flows. part 1 : Algorithmic considerations and validation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 7 :49–76, 1995.
- [77] J. Pyo and J. Shen. Gauge-Uzawa methods for incompressible flows with variable density. *J. Comp. Phys.*, in Press.
- [78] M. Rouméas. *Contribution à l'analyse et au contrôle des sillages de corps épais par aspiration ou soufflage continu*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 2006.
- [79] D.H. Rudy and J.C. Strikwerda. A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations. *J. Comp. Phys.*, 36(55-70), 1980.
- [80] R. Savoie. Etude numérique d'écoulements de fluides par une méthode vortex : la marche descendante et les cavités sur les ailes de papillons, 1996.
- [81] T. Schneider and N. Botta and K.J. Geratz and R. Klein. Extension of finite volume compressible flow solvers to multidimensional variable density zero Mach number flows. *J. Comp. Phys.*, 155 :248–286, 1999.
- [82] J.A. Sethian and A.F. Ghoniem. Validation study of vortex methods. *J. Comp. Phys.*, 74(2) :283–317, 1988.
- [83] E. Shapiro and D. Drikakis. Artificial compressibility, characteristics-based schemes for variable density, incompressible, multi-species flow. i : Derivation of different formulations and constant density limit. *J. Comp. Phys.*, 210(2) :584–607, 2005.
- [84] E. Shapiro and D. Drikakis. Artificial compressibility, characteristics-based schemes for variable density, incompressible, multi-species flow. ii : Multigrid implementation and numerical tests. *J. Comp. Phys.*, 210(2) :608–631, 2005.
- [85] E. Shapiro and D. Drikakis. Non conservative and conservative formulations of characteristic-based numerical reconstructions for incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Engeneering*, 66(9) :1466–1482, 2006.
- [86] P.G. Spazzini, G. Iuso, M. Onorato, N. Zurlo, and G.M. Di Cicca. Unsteady behavior of back-facing step flow. *Experiments in Fluids*, 30 :551–561, 2001.
- [87] W.Y. Soh and J.W. Goodrich. Unsteady solution of incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.*, 79(1) :113–134, 1988.
- [88] C.L. Street and M.G. Macaraeg. Spectral multi-domain for large-scale fluid dynamics simulations. *Appl. Numer. Math.*, 5 :123–139, 1990.
- [89] C.K.W. Tam, L. Auriault, and F. Cambuli. Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains. *J. Comp. Phys.*, 144(213-234), 1998.
- [90] I. Teleaga, M. Seaid, I. Gasser, A. Klar, and J. Struckmeier. Radiation models for thermal flows at low Mach number. *J. Comp. Phys.*, 215(2) :506–525, 2006.
- [91] R. Temam. *Navier-Stokes equations*. Reprint of the 1984 edition. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001.
- [92] R. Temam, T. Bewley, and P. Moin. Control of turbulent flows. In *18th IFIP TC7 conferences on system modelling and optimisation, Detroit, Michigan*, 1997.
- [93] G. Tryggvason. Numerical simulations of the Rayleigh-Taylor instability. *J. Comp. Phys.*, 75 :235–282, 1988.
- [94] B. Wasistho, B.J. Geurts, and J.G.M. Kuerten. Simulation techniques for spatially evolving instabilities in compressible flows over a flat plate. *Computers and Fluids*, 26(7) :713–739, 1997.
- [95] D. Wee, T. Yi, A. Annaswamy, and A.F. Ghoniem. Self-sustained oscillations and vortex shedding in backward-facing step flows : Simulation and linear instability analysis. *Physics of fluids*, 16(9) :1–12, 2004.

- [96] J. Weiss. The dynamics of enstrophy transfert in two-dimensional hydrodynamics. *Physica D*, 48(2-3) :273–294, 1991.
- [97] H. Wengle, A. Huppertz, G. Barwolff, and G. Janke. The manipulated transitional backward-facing step flow : An experimental and direct numerical simulation investigation. *Eur. J. Mech. B-Fluids*, 20 :25–46, 2001.
- [98] B. Widrow and S.D. Stearns. *Adaptive signal processing*. Prentice Hall, 1985.
- [99] O. Wiplier and U. Ehrenstein. Numerical simulation of linear and nonlinear disturbance evolution in a boundary layer with compliant walls. *J. Fluids and Structures*, 14, 157–182, 2000.
- [100] T. Yi, D. Wee, A. Annaswamy, and A.F. Ghoniem. Self-sustained oscillations in separating flows. i : Simulation, stability and reduced-order modeling. Technical report, MIT, Cambridge, MA 02139, USA, 2004.
- [101] T. Yi, A. Annaswamy, and A.F. Ghoniem. Self-sustained oscillations in separating flows. ii : Reduced-order modeling and control. Technical Report MA 02139, MIT, Cambridge, USA, 2004.

2 Estimateurs d'erreur a posteriori pour les méthodes d'éléments finis

2.1 Présentation des estimateurs

2.1.1 Introduction

De façon générique, si on note u la solution d'une équation aux dérivées partielles donnée sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3), u_h son approximation au sens des éléments finis sur une triangulation \mathcal{T}_h de Ω (ou de Ω_h approximation de Ω), et $e(u_h)$ l'erreur commise entre u et u_h (au sens d'une norme à préciser), on appelle **estimateur d'erreur a posteriori** une quantité $\eta(u_h)$ telle qu'il existe deux constantes réelles positives C_1 et C_2 vérifiant :

$$C_1 \eta(u_h) \leq e(u_h) \leq C_2 \eta(u_h). \quad (13)$$

C_1 et C_2 dépendent des données du problème considéré, mais ne dépendent ni du paramètre h caractérisant la précision du maillage, ni de la solution exacte u (auquel cas on aurait à parler d'estimateurs *a priori*). On pourra utiliser la notation équivalente :

$$\eta(u_h) \lesssim e(u_h) \lesssim \eta(u_h).$$

La majoration de l'inégalité (13) confère à l'estimateur son caractère *fiable*, en ce sens que le contrôle de l'estimateur garantit le contrôle de l'erreur elle-même. La minoration de l'inégalité (13) confère à l'estimateur son caractère *efficace*, en ce sens que l'estimateur ne peut être démesurément grand alors que l'erreur ne l'est pas. Concrètement, cet estimateur d'erreur a posteriori est évalué par le calcul sur chaque élément T de la triangulation d'un indicateur d'erreur local $\eta_T(u_h)$:

$$\eta^2(u_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2(u_h).$$

Afin de pouvoir mettre en oeuvre des algorithmes de raffinement adaptatifs, en découpant par exemple les éléments de la triangulation pour lesquels $\eta_T(u_h)$ est considéré comme trop grand ou en regroupant les éléments adjacents pour lesquels les $\eta_T(u_h)$ sont suffisamment petits, on souhaite obtenir une équivalence entre une erreur locale et l'indicateur local. En règle générale, il est impossible d'aboutir à une majoration locale de l'erreur, et nous obtiendrons une majoration globale de la forme :

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} e_T^2(u_h) \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2(u_h) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

où $e_T(u_h)$ désigne l'erreur locale entre u et u_h sur l'élément T . En revanche, on pourra souvent parvenir à une minoration locale de l'erreur du type :

$$\eta_T(u_h) \lesssim \left(\sum_{T \in \omega_T} e_T(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + P(\mathcal{T}_h, \omega_T, f), \quad (15)$$

où ω_T est un *patch* d'éléments autour de l'élément T (encore appelé "macro-élément"), où f représente les données du problème, et où $P(\mathcal{T}_h, \omega_T, f)$ correspond à une perturbation au plus du même ordre que l'erreur $\sum_{T \in \omega_T} e_T(u_h)$. Grâce à cette minoration de l'erreur, il est possible de concevoir des procédés de raffinement adaptatifs du maillage (Voir par exemple [81] pour le cas stationnaire ou [67] pour le cas instationnaire).

2.1.2 Les différents types d'estimateurs

Il existe un large choix de méthodes permettant l'obtention d'estimateurs d'erreur a posteriori. C'est celui des estimateurs de type **explicite résiduel** que nous avons développé dans notre travail, qui a été introduit par Babuska et Rheinboldt [8, 9]. On suppose que l'on dispose de la formulation variationnelle du problème, de l'espace fonctionnel V dans lequel vit la solution exacte, de l'espace fonctionnel V_h dans lequel rechercher la solution approchée, et, dans un premier temps, que l'approximation est conforme ($V_h \subset V$). L'idée consiste à utiliser le fait que la norme de l'erreur $e = u - u_h$ dans V est équivalente à la norme du résidu dans l'espace dual de V . Considérons par exemple le problème de Laplace usuel :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (16)$$

En recherchant une solution approchée $u_h \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$ et en exploitant le fait que la forme bilinéaire définit un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur son espace dual $H^{-1}(\Omega)$, on obtient :

$$\frac{1}{1 + C_{\Omega}^2} \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \sup_{v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{1,\Omega}=1} \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \leq \|u - u_h\|_{1,\Omega},$$

où C_{Ω} est la constante de l'inégalité de Poincaré-Friedrichs. La norme de l'erreur dans $H_0^1(\Omega)$ est donc équivalente à la norme du résidu dans l'espace dual de $H^{-1}(\Omega)$ puisque :

$$\begin{aligned} \sup_{v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{1,\Omega}=1} \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} &= \sup_{v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{1,\Omega}=1} \langle \Delta(u_h - u), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= \|\Delta u_h + f\|_{-1,\Omega}. \end{aligned}$$

Moralement, il s'agit donc d'estimer cette norme du résidu par des quantités qui peuvent facilement être calculées à partir de f et de u_h , en utilisant une panoplie d'outils qui seront présentés dans ce mémoire dans le cadre de problèmes plus complexes. C'est là un principe général qui donne le nom aux estimateurs de type résiduel. Un exemple d'obtention d'un tel estimateur sur le problème de Laplace pourra être trouvé dans [4, 81].

Beaucoup d'autres types d'estimateurs a posteriori existent. Avant de nous concentrer exclusivement sur les estimateurs explicites résiduels, nous en évoquons quelques uns qui sont couramment utilisés afin de situer notre travail dans son contexte. Une brève description de ces estimateurs pourra être trouvée dans [36], et une introduction précise à chacun d'entre eux ainsi qu'une mine d'informations bibliographiques dans les ouvrages de référence [4, 81].

On distingue d'abord l'estimateur d'erreur explicite résiduel que nous venons de présenter, qui utilise le résidu de la solution numérique obtenue, de l'estimateur d'erreur **implicite** résiduel. Dans le cas explicite, le coût de calcul des estimateurs est a priori marginal par rapport à celui de la résolution de l'équation aux dérivées partielles, ce qui en fait son principal atout. Comme nous le verrons tout au long de ce chapitre, l'estimateur se décompose alors en plusieurs termes de différentes natures. D'abord, les résidus internes, qui reflètent la capacité de la solution numérique à satisfaire l'équation à l'intérieur de chaque maille. Puis, les résidus sur la frontière, qui mesurent la précision de l'approximation des conditions aux limites. Enfin, les résidus "inter-éléments", fonction des sauts de la solution approchée ou de ses gradients au niveau des frontières des éléments, et qui rendent compte de la régularité de l'approximation. Les constantes similaires à C_1 et C_2 intervenant dans (13) qui sont obtenues sont cependant souvent assez obscures. En effet, l'inégalité triangulaire ainsi que celle de Cauchy-Schwarz sont des outils très souvent utilisés pour l'obtention de ces estimateurs, interdisant par nature d'éventuelles compensations

entre les différentes composantes du résidu. Une majoration de la constante C_2 pourrait certes être proposée, mais elle mènerait inévitablement à un résultat très pessimiste, car à chaque fois dicté par le cas d'école le plus pathologique pour l'obtention de toutes les constantes incluses dans C_2 . Pour éviter l'inconvénient propre à l'estimateur explicite, l'idée générale de l'estimateur implicite consiste à conserver l'équation vérifiée par le résidu telle quelle aussi longtemps que possible afin de trouver une estimation de l'erreur locale (et pas uniquement de sa norme). Plusieurs problèmes aux limites locaux ont alors à être résolus dont les données sont constituées par des résidus locaux. Les problèmes sont posés soit sur un sous-domaine associé à chaque élément, soit sur chaque élément lui-même. L'estimateur global est obtenu par sommation des normes de chaque estimateur local. Une difficulté propre à cette dernière méthode réside dans la nécessité de déterminer convenablement les conditions aux limites pour la résolution du problème sur l'élément, qui puisse mener à une série de problèmes bien posés. On doit alors soit reformuler les problèmes locaux sur un sous-espace permettant d'assurer la coercivité de la forme bilinéaire, ou alors choisir les conditions aux limites sur chaque élément de manière soignée (on parle de la méthode des "résidus équilibrés", initiée par [11, 52, 58]). Dans ce second cas, on s'assure que les flux spécifiés à la frontière (servant de conditions aux limites) et les résidus internes sont à l'équilibre sur chaque élément, grâce à une **condition d'équilibre** qui doit être vérifiée. Mieux que cela, on cherche à obtenir les flux les meilleurs possibles (c'est-à-dire menant à une majoration de l'erreur la plus précise possible) grâce aux **conditions d'optimalité**.

Une toute autre philosophie est celle des estimateurs obtenus par un **post-traitement** de la solution numérique, introduite dans [83]. Si on prend l'exemple d'une approximation u_h affine par maille, l'idée consiste à introduire un opérateur de reconstruction G_h qui, connaissant ∇u_h (qui est donc constant par maille), en déduit une reconstruction notée $G_h(\nabla u_h)$ comme une fonction continue sur le domaine et dont la restriction à chaque maille est affine. Modulo quelques propriétés sur cet opérateur (condition de consistance, condition de localisation et caractère linéaire borné) et une régularité suffisante sur la solution u , on peut en déduire que le gradient reconstruit $G_h(\nabla u_h)$ est une approximation de ∇u à un ordre suffisamment élevé pour qu'il puisse être utilisé à la place de ∇u dans l'évaluation de l'erreur, fournissant ainsi un estimateur d'erreur performant. Cette méthode, se basant sur des propriétés de superconvergence établies pour des solutions régulières et certaines classes de maillages [72], est très utilisée dans la communauté des ingénieurs. D'un point de vue pratique, elle mène en général à de très bons résultats (Par exemple, par l'utilisation de la technique SPR, "Superconvergent Patch Recovery", de Zienkiewicz-Zhu), même si une telle performance sur des maillages quelconques reste encore d'un point de vue théorique assez énigmatique. Son point faible, qui est aussi l'un de ses avantages, est qu'elle n'utilise aucune information sur la nature de l'équation aux dérivées partielles ayant servi à l'obtention de la solution.

Une autre technique est celle des estimateurs utilisant des **bases hiérarchiques** initiés dans [11]. En analyse numérique, une méthode souvent employée pour obtenir une estimation d'erreur consiste à résoudre le même problème en utilisant deux schémas de discrétisation de précision différente, puis d'utiliser la différence entre les deux approximations comme estimateur d'erreur. S'inspirant de ce procédé, une fois le problème approché résolu et la solution $u_h \in V_h$ obtenue, on résout à nouveau le problème pour un espace d'approximation plus grand, menant à une solution $u_h^* \in V_h^*$, l'idée étant d'estimer l'erreur par la norme de $u_h - u_h^*$. L'efficacité de cette stratégie repose sur une hypothèse dite de "saturation", qui suppose que u_h^* est, au sens de la norme de l'énergie, une meilleure approximation (au sens strict) de u que ne l'est u_h . Dans les cas pratiques, cette hypothèse est vérifiée, même s'il existe des cas pathologiques lorsque la donnée f est orthogonale à la fois à V_h et à V_h^* . Toute la question revient alors à trouver une façon de procéder pour ne pas avoir à résoudre de fait le problème initial sur V_h^* , ce qui impliquerait un coût numérique supérieur à celui nécessaire pour le calcul de u_h . On utilise pour cela la classe

des solveurs inexacts, qui sont définis soit par un solveur itératif stoppé avant qu'il n'arrive à convergence, soit par l'utilisation d'une forme bilinéaire plus simple que celle du problème d'origine, dont le spectre soit toutefois suffisamment proche.

Enfin, une dernière méthode que nous souhaitons ici évoquer est celle des **estimateurs par dualité**, qui a été introduite dans [49], et récemment analysée dans [14]. Ceux-ci sont indiqués lorsque l'on souhaite obtenir une information non pas sur l'erreur $u - u_h$ au sens de la norme de l'énergie, mais simplement sur l'erreur commise entre $Q(u)$ et $Q(u_h)$, où Q est une fonctionnelle suffisamment régulière permettant d'extraire une information précise de la solution. Dans ce cas, l'idée est de chercher à montrer que la quantité $|Q(u) - Q(u_h)|$ est majorée par un estimateur dont la contribution propre à la maille T dépend en particulier de $\|z\|_{Z,\omega_T}$, où z est la solution exacte d'un problème adjoint à résoudre, appartenant à un espace W jouissant d'une propriété d'interpolation locale suffisamment forte³. Afin de pouvoir obtenir une approximation satisfaisante de $\|z\|_{Z,\omega_T}$, plusieurs stratégies sont possibles. Par exemple, celle de chercher z_h approximation de z dans un espace de dimension finie pour ensuite reconstruire localement une approximation de $\|z\|_{Z,\omega_T}$.

Ayant ainsi donné les quelques principes fondateurs de plusieurs types d'estimateurs, **nous nous restreignons dans tout ce chapitre au cas des estimateurs d'erreur a posteriori explicites résiduels pour différentes équations aux dérivées partielles et plusieurs types de méthodes d'éléments finis.**

2.1.3 Les outils usuels pour le cas isotrope

Quelques outils classiques sont nécessaires à l'établissement des estimateurs d'erreur a posteriori résiduels. Nous en donnons ici les principaux et expliquons en quoi ils sont utiles pour l'analyse, en renvoyant à la bibliographie pour tous les détails. Dans un premier temps, on considère une discrétisation **isotrope**, c'est-à-dire telle que, pour tout élément, le ratio r du rayon du cercle (resp. de la sphère) circonscrit(e) à l'élément sur le rayon du cercle (resp. de la sphère) inscrit(e) dans tout élément $T \in \mathcal{T}_h$ soit uniformément borné. Le paramètre h suffit donc à caractériser la précision du maillage.

Un premier outil est constitué par les **fonctions bulles** b_T , polynômiales, définies sur tout élément T de la triangulation et vérifiant $b_T = 0$ sur ∂T et $\|b_T\|_{\infty,T} = 1$. Le fait que ces fonctions ne s'annulent pas à l'intérieur de l'élément permet de les utiliser pour définir des normes sur des espaces de dimensions finies. Elles sont utilisées pour obtenir des **inégalités inverses**, constituées d'inégalités ou d'équivalences pour des fonctions polynômiales \mathbf{v}_T définies sur T , comme par exemple :

$$\|\mathbf{v}_T b_T^{1/2}\|_T \sim \|\mathbf{v}_T\|_T, \quad (17)$$

$$\|\nabla(\mathbf{v}_T b_T)\|_T \lesssim h^{-1} \|\mathbf{v}_T\|_T. \quad (18)$$

Les constantes intervenant dans ces équivalences ou inégalités ne sont fonction que du degré de l'espace des polynômes auquel appartient \mathbf{v}_T . De façon similaire, pour toute face E (en 3D) ou arête E (en 2D) de la triangulation, on définit une fonction bulle b_E , polynômiale, vérifiant $b_E = 0$ sur $\partial\omega_E$ et $\|b_E\|_{\infty,\omega_E} = 1$ (ici, ω_E est constitué de l'ensemble des éléments de la triangulation contenant E). On introduit de plus un **opérateur d'extension** $F_{\text{ext}} : C(\bar{E}) \rightarrow C(\bar{T})$, prolongeant une fonction définie et continue sur \bar{E} en une fonction définie et continue sur \bar{T} . Pour une fonction polynômiale \mathbf{v}_E définie sur E , on obtient alors d'autres inégalités inverses

³ Z est ici un sous espace dense de W et ω_T un patch d'éléments autour de T , voir [38] pour plus de précisions.

comme par exemple :

$$\|\mathbf{v}_E b_E^{1/2}\|_E \sim \|\mathbf{v}_E\|_E, \quad (19)$$

$$\|\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{v}_E) b_E\|_T \lesssim h^{1/2} \|\mathbf{v}_E\|_E. \quad (20)$$

Les inégalités inverses sont systématiquement utilisées pour établir la minoration de l'erreur, c'est-à-dire une estimation locale du type (15). L'idée principale consiste à majorer successivement chacun des termes intervenant dans la définition de η_T . Le fait que les fonctions bulles soient nulles sur ∂T (ou sur $\partial\omega_E$) permet, en effectuant des intégrations par parties adéquates, de faire apparaître la norme de l'erreur locale en annulant les termes de bord qui interviennent dans les calculs. On trouvera dans [4] ou [81] une telle démonstration pour l'approximation \mathbb{P}_1 -conforme du problème modèle (16). A noter que l'approximation non conforme (par les éléments finis de Crouzeix-Raviart usuels) utiliserait la même démonstration.

On a aussi besoin d'un **opérateur d'interpolation**, qui constitue un outil primordial. Plusieurs choix sont possibles en fonction de la nature de l'approximation. Ainsi on peut n'avoir besoin dans certains cas que d'une interpolation constante par morceaux (voir par exemple la partie 2.3). Pour des interpolations de degré 1, l'**interpolé de Clément** est par exemple très souvent utilisé. Il s'agit d'un opérateur d'approximation régularisé, qui envoie une fonction de $H_0^1(\Omega)$ vers une fonction continue et affine par morceaux qui s'annule sur la frontière de Ω . L'interpolé classique de Lagrange est souvent inadapté, car hormis le cas particulier de la dimension 1, $H^1(\Omega)$ ne s'injecte pas dans $C(\Omega)$. Pour toute fonction $\mathbf{v}^0 \in [H_0^1(\Omega)]^d$, en notant $\mathbf{I}_{\text{Cl}}^0 \mathbf{v}^0$ son interpolé de Clément, on a alors les majorations suivantes⁴ :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h^{-2} \|\mathbf{v}^0 - \mathbf{I}_{\text{Cl}}^0 \mathbf{v}^0\|_T^2 \lesssim \|\nabla \mathbf{v}^0\|_\Omega^2, \quad (21)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h^{-1} \|\mathbf{v}^0 - \mathbf{I}_{\text{Cl}}^0 \mathbf{v}^0\|_E^2 \lesssim \|\nabla \mathbf{v}^0\|_\Omega^2. \quad (22)$$

On trouvera une définition détaillée de l'interpolé de Clément, une variante notée \mathbf{I}_{Cl} pour les fonctions de $H^1(\Omega)$ et les majorations correspondantes dans [30]. D'autres interpolés du même type peuvent aussi être utilisés, comme celui de Scott-Zhang [6, 77]. L'opérateur d'interpolation est un outil utilisé pour démontrer la majoration de l'erreur, c'est-à-dire une estimation globale du type (14). Si l'espace d'approximation de la solution est choisi suffisamment grand pour contenir l'espace d'interpolation, alors il est possible, en utilisant les **relations d'orthogonalité de Galerkin** (encore appelées propriétés de consistance), de majorer l'erreur globale par l'estimateur global en utilisant essentiellement l'intégration par parties et les inégalités de Cauchy-Schwarz. Ces relations sont à chaque fois définies en fonction du problème considéré, et nous y reviendrons fréquemment. Pour fixer les idées, reprenons le cas simple du problème (16) résolu par l'utilisation de l'élément fini usuel \mathbb{P}_1 -conforme. On cherche $u_h^c \in V_{0,h}^c \subset H_0^1(\Omega)$, et dans ce cas la relation d'orthogonalité de Galerkin s'écrit :

$$\int_\Omega \nabla(u - u_h^c) \nabla v_h^c = 0, \quad \forall v_h^c \in V_{0,h}^c, \quad (23)$$

avec :

$$V_h^c = \left\{ v_h \in H^1(\Omega); v_{h|_T} \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}, \quad V_{0,h}^c = V_h^c \cap H_0^1(\Omega).$$

On peut alors utiliser la relation (23) dans le cas particulier $v_h^c = \mathbf{I}_{\text{Cl}}^0(u - u_h^c)$. Dans le cas de discrétisations non conformes, il n'est pas possible d'aboutir directement à une telle relation.

⁴Dans la relation (22), \mathcal{E}_h désigne l'ensemble de toutes les faces (3D) ou arêtes (2D) du maillage.

C'est pourquoi nous avons besoin de la **décomposition de Helmholtz**, qui permet de scinder l'erreur en plusieurs contributions [34]. Sur l'exemple (16) dont la solution est cette fois approchée par l'utilisation des éléments finis \mathbb{P}_1 -non conformes, on remplace respectivement V_h^c et $V_{0,h}^c$ par V_h^{nc} et $V_{0,h}^{nc}$ définis par :

$$V_h^{nc} = \left\{ v_h \in L^2(\Omega); v_{h|_T} \in \mathbb{P}_1(T) \text{ et } v_h \text{ continu au milieu de chaque face interne } E \right\},$$

$$V_{0,h}^{nc} = \left\{ v_h \in V_h^{nc}; \int_E u_h ds = 0 \text{ pour toute face } E \in \partial\Omega \right\},$$

et on cherche maintenant $u_h^{nc} \in V_{0,h}^{nc} \notin H_0^1(\Omega)$. En notant $\nabla_h(u - u_h^{nc})$ le gradient défini morceau par morceau de l'erreur, on peut ainsi montrer qu'il existe $w \in H_0^1(\Omega)$ et $\Psi \in H^1(\Omega)$ tels que :

$$\nabla_h(u - u_h^{nc}) = \nabla w + \text{curl } \Psi, \quad (24)$$

avec :

$$|w|_{1,\Omega} \leq \|\nabla_h(u - u_h^{nc})\|_{\Omega} \text{ et } |\Psi|_{1,\Omega} \lesssim \|\nabla_h(u - u_h^{nc})\|_{\Omega}.$$

On aboutit alors à deux relations d'orthogonalité :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla_h(u - u_h^{nc}) \cdot \nabla v_h^c = 0, \quad \forall v_h^c \in V_{0,h}^c,$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla_h(u - u_h^{nc}) \cdot \text{curl } \phi_h^c = 0, \quad \forall \phi_h^c \in V_h^c.$$

En définissant convenablement les interpolés respectifs $I_h w = I_{C1}^0 w \in V_{0,h}^c$ et $I_h \Psi = I_{C1} \Psi \in V_h^c$, on peut effectuer la démonstration de la borne supérieure en utilisant pour chacune des deux contributions de l'erreur définies par (24) la relation d'orthogonalité qui lui est spécifique. On renvoie à [34] tous les détails.

2.1.4 Généralisation des outils au cas anisotrope

Lors de la résolution d'une équation aux dérivées partielles, dans certaines situations, la solution possède un comportement radicalement différent selon la direction d'espace considérée. Par exemple, une couche limite qui se développe à proximité d'une paroi en mécanique des fluides visqueux : La composante de la vitesse dans la direction de la paroi possède un très fort gradient perpendiculairement à la paroi, mais un très faible gradient parallèlement à celle-ci. Dans le cadre de tels problèmes, les méthodes isotropes de discrétisation peuvent devenir inappropriées. En effet, elles nécessitent un nombre très important d'éléments dans les régions où la solution est anisotrope, d'où un sur-raffinement dans la direction pour laquelle la solution n'évolue pas beaucoup, comme le long de la couche limite pour reprendre l'exemple précédent. Pour éviter cet inconvénient, l'idée est d'autoriser la discrétisation à rendre compte de l'anisotropie de la solution, en admettant que certaines mailles puissent violer la contrainte de l'angle minimum. On entre alors dans la classe des maillages **anisotropes**. L'utilisation de telles discrétisations permet d'atteindre la même précision de calcul qu'avec une discrétisation isotrope, mais avec beaucoup moins de degrés de liberté, d'où un gain en tout à fait considérable en mémoire et temps CPU nécessaire au calcul (voir par exemple [23] pour l'application au calcul d'écoulements, ou BAMG [1] ainsi que BL2D-V2 [2, 17] pour des exemples de maillages anisotropes). Contrairement au cas isotrope, la seule donnée du paramètre h ne suffit plus à caractériser le maillage.

Pour chaque élément de la discrétisation, l'idée consiste à définir 2 (en 2D) ou 3 (en 3D) vecteurs anisotropes qui rendent compte des directions principales d'anisotropie de l'élément. Par exemple, dans le cas d'un triangle, on note $\mathbf{p}_{1,T}$ le vecteur correspondant au plus long

côté du triangle, et $\mathbf{p}_{2,T}$ celui correspondant à la hauteur associée à ce côté (cf. FIG. 18). La définition de ces vecteurs anisotropes dans le cas d'autres éléments usuels, comme le rectangle, le tétraèdre, l'hexaèdre et le pentaèdre (prisme à base triangulaire) pourra être trouvée dans [30]. Un élément T étant donné, on notera par $h_{i,T}$ la norme de $\mathbf{p}_{i,T}$ ($1 \leq i \leq d$), ces longueurs

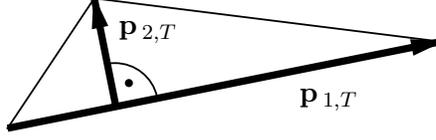


FIG. 18 – Directions d'anisotropies pour le triangle.

étant classées par ordre décroissant, et $h_{min,T}$ étant la plus petite de ces longueurs. La matrice $\underline{\underline{C}}_T$ est définie en disposant en colonne ces vecteurs anisotropes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{C}}_T = [\mathbf{p}_{1,T}, \mathbf{p}_{2,T}] \in \mathbb{R}^{2 \times 2} & \text{en 2D} \\ \underline{\underline{C}}_T = [\mathbf{p}_{1,T}, \mathbf{p}_{2,T}, \mathbf{p}_{3,T}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3} & \text{en 3D.} \end{cases} \quad (25)$$

Enfin on introduit la hauteur $h_{E,T}$ au dessus d'une arête E (en 2D) ou d'une face E (en 3D) d'un élément T par

$$h_{E,T} = \frac{|T|}{|E|} \cdot \begin{cases} 1 & \text{si } T \text{ est un rectangle ou un hexaèdre,} \\ d & \text{si } T \text{ est un triangle ou un tétraèdre,} \\ 1 & \text{pour la face triangulaire } E \text{ d'un pentaèdre } T, \\ 2 & \text{pour la face rectangulaire } E \text{ d'un pentaèdre } T, \end{cases}$$

et, pour une face intérieure au maillage $E = T_1 \cap T_2$, les hauteurs $h_{min,E}$ et h_E par :

$$h_{min,E} = \frac{h_{min,T_1} + h_{min,T_2}}{2} \quad \text{et} \quad h_E = \frac{h_{E,T_1} + h_{E,T_2}}{2}.$$

La **mesure d'alignement** est un dernier outil que nous souhaitons présenter, qui permet de caractériser l'alignement d'une solution avec une discrétisation donnée. Si l'on considère \mathcal{T}_h une triangulation et $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d$ une fonction vectorielle, la mesure d'alignement m_1 appliquée à \mathbf{v} et \mathcal{T}_h est définie par :

$$m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h) = \frac{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_{min,T}^{-2} \|\nabla \mathbf{v} \cdot \underline{\underline{C}}_T\|_T^2 \right)^{1/2}}{\|\nabla \mathbf{v}\|_\Omega}. \quad (26)$$

La structure de la matrice $\underline{\underline{C}}_T$ définie en (25) implique trivialement que

$$1 \leq m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h) \leq \max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_{max,T}}{h_{min,T}},$$

où $h_{max,T}$ est égal au plus grand $h_{1,T}$ de la triangulation. Cette double inégalité permet de conclure que dans le cas particulier d'un maillage isotrope, $m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h) \sim 1$. Pour un maillage anisotrope, le terme $\nabla \mathbf{v} \cdot \underline{\underline{C}}_T$ de (26) contient des dérivées selon les directions d'anisotropie $\mathbf{p}_{i,T}$ de l'élément T (puisque $\underline{\underline{C}}_T = [\mathbf{p}_{1,T}, \mathbf{p}_{2,T}, \mathbf{p}_{3,T}]$, voir (25)). Si les éléments anisotropes sont alignés avec une fonction anisotrope \mathbf{v} , la direction d'anisotropie la plus longue $\mathbf{p}_{1,T}$ est associée avec une faible dérivée dans cette direction $\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{1,T}$. Inversement, la direction d'anisotropie la plus courte $\mathbf{p}_{3,T}$ est associée avec une forte dérivée dans cette direction $\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{3,T}$. En conséquence, le numérateur et le dénominateur de $m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h)$ se compensent, et $m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h) \sim 1$. Des détails supplémentaires peuvent être trouvés dans [57]. Si en revanche le maillage anisotrope

n'est pas aligné avec la fonction anisotrope \mathbf{v} , alors des considérations similaires impliquent que $m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h) \gg 1$. En conclusion, mieux le maillage \mathcal{T}_h est aligné avec la fonction anisotrope \mathbf{v} , plus $m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h)$ sera petit. Ce qui aura pour conséquence, comme nous le verrons, l'obtention d'estimations d'erreurs d'interpolation plus fines.

Pour un maillage anisotrope, certaines inégalités inverses comme (17) - (20) ont besoin d'être reprécisées. En effet, les constantes intervenant dans ces relations dépendent de la qualité du maillage, et en particulier de son degré d'anisotropie. Elles sont donc susceptibles d'exploser si l'angle minimum d'un triangle tend vers zéro, ce qui rend les inégalités inverses totalement inexploitable. On montre alors que si par exemple des inégalités comme (17) et (19) restent valables dans le cadre anisotrope, (18) et (20) se généralisent respectivement en [53, 78] :

$$\|\nabla(\mathbf{v}_T b_T)\|_T \lesssim h_{min,T}^{-1} \|\mathbf{v}_T\|_T, \quad (27)$$

$$\|\mathbf{F}_{ext}(\mathbf{v}_E) b_E\|_T \lesssim h_{E,T}^{1/2} \|\mathbf{v}_E\|_E. \quad (28)$$

De même, les estimations d'interpolation de Clément (21)-(22) reposent elles aussi sur la propriété d'isotropie du maillage. Elles sont alors généralisées pour le cas anisotrope grâce à l'utilisation de la mesure d'alignement :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_{min,T}^{-2} \|\mathbf{v}^0 - \mathbf{I}_{Cl}^0 \mathbf{v}^0\|_T^2 \lesssim m_1^2(\mathbf{v}^0, \mathcal{T}_h) \|\nabla \mathbf{v}^0\|_\Omega^2, \quad (29)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{h_E}{h_{min,E}^2} \|\mathbf{v}^0 - \mathbf{I}_{Cl}^0 \mathbf{v}^0\|_E^2 \lesssim m_1^2(\mathbf{v}^0, \mathcal{T}_h) \|\nabla \mathbf{v}^0\|_\Omega^2. \quad (30)$$

Ayant ainsi présenté brièvement l'ensemble des outils principaux à notre disposition pour l'analyse d'erreur a posteriori, nous évoquons dans la suite de ce chapitre les travaux de recherche spécifiques que nous avons développés. Pour chacun d'entre eux, nous exposons le problème abordé, son contexte bibliographique, et expliquons en quoi réside le coeur de notre contribution en présentant les principaux résultats. Pour tous les détails, on renvoie aux publications correspondantes.

2.2 Formulation mixte de Stokes pour des discrétisations standards

Ces travaux ont donné lieu à la publication [30].

Ce travail a consisté en l'obtention d'estimateurs d'erreur a posteriori pour le problème de Stokes stationnaire avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes : Etant donné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) et \mathbf{f} , trouver \mathbf{u} et p satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (31)$$

Concernant les estimateurs a posteriori consacrés à ce problème sur des discrétisations isotropes, plusieurs approches ont été proposées, principalement en 2D. Nous avons recensé plusieurs d'entre elles dans [30]. Sur les maillages anisotropes, cependant, ces estimateurs ne sont pas satisfaisants car la minoration et la majoration de l'erreur diffèrent d'un facteur qui est (au plus) proportionnel à l'aspect ratio des éléments anisotropes. Ce facteur potentiellement non borné rend les estimateurs conventionnels isotropiques inadaptés à notre problème. Dans les années 1990, la recherche s'est donc progressivement intéressée à la mise en place d'estimateurs adaptés aux discrétisations anisotropes [13, 35, 43, 44, 53, 54, 55, 66, 69, 78]. La borne supérieure apparaît alors être le point crucial, qui nécessite un alignement correct du maillage anisotrope avec la solution.

Notre objectif a donc été de généraliser les estimateurs d'erreur a posteriori de type résiduels pour le système de Stokes résolu par la méthode mixte standard au cas des maillages anisotropes, aussi bien en 2D qu'en 3D. Pour cela, un point de départ a été le travail de Dari, Duran et Padra [33]. En outre, nous avons voulu traiter une large variété d'éléments finis (en particulier conformes et non conformes), en utilisant des hypothèses minimales sur les éléments permettant d'assurer l'équivalence entre la norme de l'erreur et l'estimateur résiduel. Parallèlement à ce travail, L. Formaggia, S. Micheletti et S. Perotto [42] ainsi que M. Picasso [68] ont également développé des estimateurs d'erreur anisotropiques pour le système de Stokes 2D, basés sur des arguments de dualité dans l'esprit des travaux de Rannacher [70]. La technique consiste à déterminer une borne supérieure pour une certaine fonctionnelle linéaire de l'erreur de discrétisation grâce au calcul de la solution z d'un problème dual approprié. On doit alors effectuer l'hypothèse selon laquelle on dispose d'une approximation z_h^* de z (non nécessairement évaluée sur le même maillage), afin de pouvoir mettre en oeuvre une stratégie de raffinement. Dans ces papiers, la minoration de l'erreur est obtenue avec les mêmes hypothèses sur le maillage que celles que nous avons effectuées. Cependant, et contrairement à la philosophie de notre travail, en ce qui concerne la majoration de l'erreur, la mesure d'alignement est incorporée dans l'indicateur d'erreur. Les propriétés spectrales de l'application affine envoyant l'élément de référence vers un élément donné de la triangulation sont exploitées pour donner des indications sur la dimension, l'orientation et l'aspect ratio propres à ce dernier. Cela permet le contrôle de l'erreur dans chaque direction intrinsèque à l'élément et l'optimisation de l'orientation de ce dernier dans le cadre de procédures de raffinements adaptatifs basés sur le concept de métriques [45]. Il est alors nécessaire d'estimer cette mesure d'alignement, ce qui est effectué par l'utilisation d'un gradient reconstruit de type Zienkiewicz-Zhu pour l'erreur sur la vitesse et d'une procédure de régularisation pour la pression [65].

On introduit les espaces $V = [H_0^1(\Omega)]^d$ et $Q = L_0^2(\Omega)$, et les formes bilinéaires a et b par :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, \quad b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

La formulation faible du problème (31) est bien connue et prend la forme : Trouver $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ solution de

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q. \end{cases} \quad (32)$$

Pour $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$, le théorème I.5.1 de [46] assure existence et unicité de la solution au problème (32). On suppose donné un espace d'approximation de la vitesse V_h (respectivement de la pression Q_{pre}), constitué de fonctions polynômiales sur chaque élément T de la triangulation \mathcal{T}_h , et tels que $Q_{\text{pre}} \subset Q$, mais sans qu'il soit nécessaire que $V_h \subset V$. On calcule la solution approchée en utilisant les formes bilinéaires plus faibles $a_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$ définies par :

$$a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_h, \quad (33)$$

$$b_h(\mathbf{u}, q) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in V_h, \forall q \in Q_{\text{pre}}. \quad (34)$$

La formulation mixte discrète s'écrit : Trouver $\mathbf{u}_h \in V_h, p_h \in Q_{\text{pre}}$, tels que

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in Q_{\text{pre}}. \end{cases} \quad (35)$$

L'espace V_h est équipé de la semi-norme $\|\nabla_h \mathbf{v}\|_\Omega = a_h^{1/2}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, où par définition, pour $\mathbf{v} \in [H^1(T)]^d$, le gradient $\nabla_h v$ est défini sur Ω par :

$$(\nabla_h v)|_T = \nabla v|_T, \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Pour $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d \cap V_h$, on peut soustraire les premières équations de (32) et (35) pour obtenir la relation d'orthogonalité de Galerkin :

$$\int_\Omega \nabla_h \mathbf{e} : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d \cap V_h, \quad (36)$$

où les erreurs en vitesse et pression sont respectivement notées $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ et $\varepsilon = p - p_h$. Pour établir nos estimateurs, plusieurs hypothèses standards doivent être effectuées sur le maillage, et principalement celle selon laquelle même si un maillage anisotrope est autorisé, le degré d'anisotropie entre deux éléments voisins ne peut changer rapidement, c'est-à-dire que

$$h_{i, T_1} \sim h_{i, T_2} \quad \forall i = 1 \dots d, \forall T_1 \cap T_2 \neq \emptyset.$$

Plusieurs hypothèses doivent être également effectuées sur les espaces d'éléments finis. En notant $V_{\text{Cl}}^0 = [\operatorname{Im}(\mathbf{I}_{\text{Cl}}^0)]^d$, avec \mathbf{I}_{Cl}^0 l'opérateur d'interpolation de Clément, il faut assurer que l'espace des vitesses V_h est suffisamment grand pour contenir l'espace d'interpolation de Clément ($V_{\text{Cl}}^0 \subset [H_0^1(\Omega)]^d \cap V_h$), et que pour les discrétisations non conformes, la propriété dite de "Crouzeix-Raviart" soit vérifiée :

$$\int_E [[\mathbf{u}_h]]_E = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u}_h \in V_h, \forall E \in \mathcal{E}_h, \text{ où } [[\mathbf{u}_h]]_E \text{ est le saut de } \mathbf{u}_h \text{ à travers } E. \quad (37)$$

Enfin, pour obtenir des solutions discrètes robustes, les paires d'éléments doivent bien sûr être stables (la condition inf/sup discrète doit être vérifiée), mais cette condition n'est pas nécessaire pour prouver les estimateurs d'erreur eux-mêmes. La partie 5 de [30] donne une liste de plusieurs paires d'éléments finis satisfaisant les hypothèses nécessaires. Certains d'entre eux sont déjà bien connus de la littérature, d'autres sont nouveaux.

On définit le résidu exact sur l'élément T par $\mathbf{R}_T = \mathbf{f} - (-\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h)$, et son approximation $\mathbf{r}_T \in (\mathbb{P}^k(T))^d$ similairement à [81]. En notant respectivement \mathbf{n}_E (en 2D et 3D) et \mathbf{t}_E (en 2D uniquement) les vecteurs unitaires normaux et tangents à E , on introduit alors le saut du gradient dans les directions normales et tangentielles par :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{E,n} &= \begin{cases} [(\nabla \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{I}) \mathbf{n}_E]_E & \text{pour les arêtes/faces intérieures,} \\ \mathbf{0} & \text{pour les arêtes/faces frontalières,} \end{cases} \\ \mathbf{J}_{E,t} &= [(\nabla \mathbf{u}_h \mathbf{t}_E)]_E & \text{pour le cas 2D non conforme (vecteur),} \\ \mathbf{J}_{E,t} &= [(\nabla \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}_E)]_E & \text{pour le cas 3D non conforme (matrice).} \end{aligned}$$

Définition 2.1 (Estimateur d'erreur résiduel) *L' estimateur d'erreur résiduel local est défini par :*

$$\begin{aligned} \eta_T^2 &= h_{\min,T}^2 \|\mathbf{r}_T\|_T^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_T^2 + \sum_{E \subset \partial T} \frac{h_{\min,T}^2}{h_E} (\|\mathbf{J}_{E,n}\|_E^2 + \|\mathbf{J}_{E,t}\|_E^2) \\ &+ \sum_{E \subset \partial T, E \in \mathcal{E}_\square} \frac{h_{\min,T}^2}{h_E \varrho(E)^2} \|[\mathbf{u}_h]_E\|_E^2. \end{aligned}$$

l' estimateur d'erreur résiduel global est donné par :

$$\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2.$$

De plus, on définit les termes d'approximation locaux et globaux par :

$$\zeta_T^2 = \sum_{T' \subset \omega_T} h_{\min,T'}^2 \|\mathbf{r}_{T'} - \mathbf{R}_{T'}\|_{T'}^2, \quad \zeta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \zeta_T^2.$$

On rappelle que ω_T représente le *patch* associé à T , défini ici comme l'ensemble des éléments ayant une arête (2D) ou une face (3D) commune avec T .

Remarque 2.2 *Dans la définition 2.1, le dernier terme du second membre de l'expression donnant η_T^2 n'est à considérer que dans le cas 3D pour lequel \mathcal{E}_\square constitue l'ensemble des faces rectangulaires de la triangulation et $\varrho(E)$ la plus petite des longueurs des arêtes de E . Dans le cas des discrétisations conformes, il s'annule car on a toujours $\|[\mathbf{u}_h]_E\|_E = 0$. Dans le cas d'une discrétisation non conforme mais isotrope, il peut être omis car il est équivalent à $h_{\min,T}^2 h_E^{-1} \|\mathbf{J}_{E,t}\|_E^2$. Toujours dans le cas d'une discrétisation conforme (qu'elle soit 2D ou 3D), on a de plus $\|\mathbf{J}_{E,t}\|_E = 0 \forall E \in \mathcal{E}_h$.*

Théorème 2.3 (Minoration de l'erreur locale) *Supposons que la discrétisation soit 2D, ou 3D conforme, ou 3D non conforme et uniquement composée de tétraèdres. Alors pour tout élément T , on a :*

$$\eta_T \lesssim \|\nabla_h \mathbf{e}\|_{\omega_T} + \|\varepsilon\|_{\omega_T} + \zeta_T. \quad (38)$$

Eléments de la preuve : La technique de démonstration de ce théorème est assez standard [81]. Nous avons donc repris le même cheminement en l'adaptant au cadre anisotrope et éventuellement 3D, chaque terme du résidu est borné séparément par l'utilisation des fonctions bulles, opérateurs d'extension et inégalités inverses. Dans le cas des discrétisations 3D non conformes, il n'a pas été possible d'estimer la contribution locale des faces rectangulaires. Une minoration globale de l'erreur est toutefois possible, qui fait alors intervenir la mesure d'alignement (corollaire 6.1 de [30]). ■

Théorème 2.4 (Majoration d'erreur - Cas conforme) *Supposons la discrétisation conforme. Alors on a :*

$$\|\varepsilon\| + \|\nabla_h \mathbf{e}\| \lesssim \left(m_1(\mathbf{e}, \mathcal{T}_h) + m_1(\mathbf{v}_\varepsilon, \mathcal{T}_h) \right) (\eta + \zeta). \quad (39)$$

Théorème 2.5 (Majoration d'erreur - Cas non conforme) *Supposons la discrétisation non conforme. Alors on a*

$$\|\varepsilon\| + \|\nabla_h \mathbf{e}\| \lesssim \left(m_1(\mathbf{r}, \mathcal{T}_h) + m_1(\mathbf{s}, \mathcal{T}_h) + m_1(\mathbf{v}_\varepsilon, \mathcal{T}_h) \right) (\eta + \zeta). \quad (40)$$

Remarque 2.6 *Il est à noter que les fonctions \mathbf{e} , \mathbf{v}_ε , \mathbf{r} et \mathbf{s} intervenant dans les mesures d'alignement des relations (39) et (40) sont des fonctions qui dépendent de la solution exacte (voir [30]). D'ailleurs, dans le cas 3D, \mathbf{s} est une fonction matricielle, et la mesure d'alignement doit être comprise pour une telle fonction en procédant composante par composante. Ces mesures d'alignement ne peuvent donc pas être évaluées explicitement. Cependant, cela ne constitue pas un inconvénient majeur. Par exemple, la mesure d'alignement $m_1(\mathbf{e}, \mathcal{T}_h)$ pour l'erreur $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ est de taille $\mathcal{O}(1)$ pour des maillages suffisamment satisfaisants [54, 55, 57]. On attend un comportement similaire des autres mesures d'alignement, ce qui est confirmé par les expériences numériques que nous avons développées. Pratiquement, pour les calculs, on utilise les estimateurs sans considérer les mesures d'alignement. Ce choix est parfaitement justifié dans le cadre de la mise en oeuvre de stratégies de raffinement adaptatifs, puisque, à l'exception des triangulations 3D non conformes constituées de pentaèdres ou d'hexaèdres, la minoration de l'erreur locale est obtenue indépendamment du caractère anisotrope du maillage (théorème 2.3).*

Eléments de la preuve : Encore une fois, l'originalité de ces résultats tient au caractère anisotrope de la discrétisation ainsi qu'au traitement du cas 3D. On reprend le cheminement proposé dans [33]. On majore tout d'abord l'erreur en pression $\|\varepsilon\|$ grâce à la condition inf/sup continue appliquée à ε , ce majorant étant en particulier fonction de $\|\nabla_h \mathbf{e}\|$. L'erreur en vitesse est alors à son tour majorée en fonction de l'estimateur, en utilisant la relation d'orthogonalité de Galerkin (36) dans le cas conforme, et en faisant de plus appel à une décomposition de Helmholtz de l'erreur dans le cas non conforme [33]. La propriété de Crouzeix-Raviart sur l'espace des éléments finis (37) est fondamentale pour assurer certaines propriétés d'orthogonalité de l'erreur. ■

Des tests numériques ont ensuite été menés pour mettre en évidence sur un exemple que les majorations des théorèmes 2.3 et 2.5 étaient vérifiées numériquement. Pour cela, nous avons considéré le problème de Stokes 2D sur le carré unité, résolu en utilisant un élément fini de type Crouzeix-Raviart menant à une discrétisation non conforme, sur un maillage de Shishkin anisotrope composé de rectangles (cf FIG. 19).

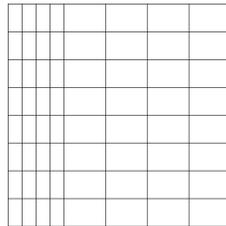


FIG. 19 – Maillage de Shishkin du carré unité avec $n = 8$.

Les tests ont eu pour objectif d'approcher numériquement la solution exacte (\mathbf{u}, p) donnée par :

$$\begin{cases} \Phi &= x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{curl} \Phi, \\ p &= e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}, \end{cases}$$

qui présente une couche limite d'épaisseur $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$ le long de l'axe $x = 0$. Les ordres de convergence de \mathbf{u}_h vers \mathbf{u} et de p_h vers p ayant été vérifiés conformes à ceux attendus par la théorie, nous avons défini les indices q_{up} et q_{low} dénommés respectivement **indice de fiabilité** et **indice d'efficacité** par :

$$q_{\text{up}} = \frac{\|\nabla_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\Omega} + \|p - p_h\|_{\Omega}}{\eta + \zeta} \quad ; \quad q_{\text{low}} = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\eta_T}{\|\nabla_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\omega_T} + \|p - p_h\|_{\omega_T} + \zeta_T}.$$

La figure 20 présente l'évolution de ces ratios en fonction du nombre de degrés de liberté DoF associés au maillage utilisé. On constate que dès que la précision du maillage permet une résolution suffisante de la couche limite, q_{up} est indépendant de h et de ϵ , ce qui prouve que l'estimateur utilisé est **fiable**. Le même comportement est obtenu pour q_{low} , ce qui prouve que l'estimateur est **efficace**.

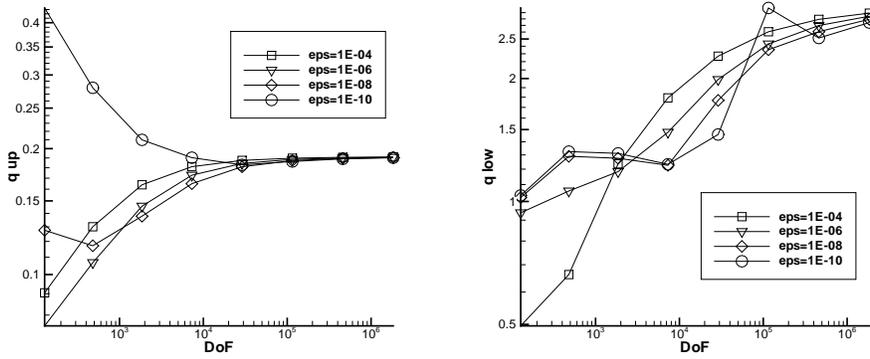


FIG. 20 – q_{up} (à gauche) et q_{low} (à droite) en fonction de DoF .

2.3 Formulation mixte de Stokes pour des discrétisations Galerkin Discontinues

Ces travaux ont donné lieu à la publication [31].

On considère toujours le problème variationnel continu (32) introduit dans la partie 2.2, exhibant une solution anisotrope, et donc nécessitant l'utilisation de maillages anisotropes⁵. L'originalité de cette contribution réside dans le choix de l'approximation numérique, effectuée par une méthode de type Galerkin Discontinue (GD), plus précisément par la méthode de pénalisation interne (IP method) [48, 80]. En comparaison avec les méthodes plus classiques utilisées dans la partie 2.2, elles possèdent des avantages intéressants comme une robustesse et une stabilité accrue pour l'approximation des phénomènes de transport, et surtout pour ce qui nous concerne une flexibilité beaucoup plus grande pour la constitution du maillage qui n'a plus à être conforme, en autorisant cette fois l'existence de "hanging nodes". Ainsi l'intersection de deux mailles voisines peut être soit un noeud, soit un segment (en 2D) ou une face (en 3D) appartenant à au moins l'une des deux mailles (mais pas forcément aux deux). Les méthodes GD ont été développées pour différents problèmes aux limites, comme les problèmes de diffusion [7, 27], ou les problèmes de Stokes et de Navier-Stokes [10, 26, 50, 76, 80]. L'analyse a posteriori appliquée à ces méthodes a commencé plutôt récemment. Pour les problèmes de diffusion, des estimateurs de type résiduels ont été par exemple développés par Becker *et al* [15, 16] et Karakashian et Pascal [51]. Pour le problème de Stokes 2D, des estimateurs de même type ont été développés par Houston *et al* [48]. Dans tous ces papiers, les auteurs considèrent des maillages isotropes, et la norme de l'énergie ainsi que les estimateurs sont définis en utilisant des quantités isotropes telles le diamètre des éléments.

Le but de notre travail a donc été d'étendre ces estimateurs d'erreur résiduels au cas des maillages anisotropes pour des domaines 2D ($d = 2$) et 3D ($d = 3$). Le point clé a été de définir une norme de l'énergie appropriée pour obtenir une propriété d'approximation anisotrope déjà prouvée dans [51] dans le cas isotrope. Si, comme déjà annoncé, le maillage ne doit plus ici satisfaire de propriété de conformité, il doit vérifier deux hypothèses supplémentaires liées à la présence de hanging nodes. En particulier, on suppose que pour tous éléments voisins T et T' tels que $T \cap T'$ soit une arête (en 2D) ou une face (en 3D) E' de T' mais pas de T , alors l'arête/face E de T telle que $E' \subset E$ satisfait $|E| \lesssim |E'|$.

Etant donné un entier naturel $k \geq 1$, on introduit les espaces d'approximation

$$\begin{aligned} V_h &= \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d : \mathbf{v}|_T \in (P_T^k)^d, \forall T \in \mathcal{T}_h \}, \\ Q_h &= \{ q \in L_0^2(\Omega) : q|_T \in (P_T^{k-1}), \forall T \in \mathcal{T}_h \}, \end{aligned}$$

où l'espace P_T^k est défini par :

$$\begin{aligned} P_T^k &= \mathbb{P}^k(T) & \text{si } T & \text{ est un triangle ou un tétraèdre,} \\ P_T^k &= \mathbb{Q}^k(T) & \text{si } T & \text{ est un rectangle ou un hexaèdre.} \end{aligned}$$

A noter donc que les éléments de V_h ne vérifient donc aucune contrainte de continuité d'un

⁵Le problème continu ici étudié est en fait un peu plus général que (32), le coefficient de viscosité cinématique devant le terme $-\Delta \mathbf{u}$ de (31) pouvant être différent de 1, on le notera ν .

élément à l'autre. L'espace V_h est muni de la norme⁶

$$\|\mathbf{v}\|_{1,h} = \left(\|\nabla_h \mathbf{v}\|_{\Omega}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_E^2 \right)^{1/2},$$

et Q_h est muni de la norme usuelle $L^2(\Omega)$. On définit alors les formes bilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$ par :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \nu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\{\{\nu \nabla_h \mathbf{v}\}\} : \llbracket \mathbf{u} \rrbracket + \{\{\nu \nabla_h \mathbf{u}\}\} : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket) \\ &\quad + \nu \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \int_E \llbracket \mathbf{u} \rrbracket : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_h, \\ b_h(\mathbf{u}, q) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q \operatorname{div} \mathbf{u} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \{\{q\}\} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \quad \forall \mathbf{u} \in V_h, q \in Q_h, \end{aligned}$$

où le paramètre $\gamma > 0$ doit être choisi suffisamment grand pour assurer la coercivité de a_h . L'approximation GD du problème de Stokes prend alors la forme : Trouver $\mathbf{u}_h \in V_h$, $p_h \in Q_h$, tels que

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (41)$$

Dans le cas particulier des maillages isotropes constitués de rectangles ou d'hexaèdres, le problème mixte (41) a déjà été prouvé comme étant bien posé car satisfaisant une condition inf/sup uniforme discrète [47, 80]. Notre travail a donc d'abord consisté à vérifier ce caractère bien posé pour le reste des familles de maillages ici considérées, grâce aux hypothèses effectuées sur le maillage. Quelques outils spécifiques aux méthodes GD ont alors dû être introduits. Par exemple, similairement à [7, 48, 64], on a utilisé une reformulation "perturbée" du problème (41) en introduisant des opérateurs de "lifting" vérifiant certaines propriétés de stabilité (lemme 4.1 de [31]). La spécificité de notre approche porte sur le traitement de l'anisotropie, et nous conduit à définir sur V_h la norme

$$\|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{1,h}^2 = \|\nabla_h \mathbf{v}\|^2 + |\mathbf{v}|_{1,h}^2,$$

où la semi norme $|\cdot|_{1,h}$ est définie par :

$$|\mathbf{v}|_{1,h} = \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E h_E h_{\min,E}^{-2} |\llbracket \mathbf{v} \rrbracket|^2 ds \right)^{1/2}. \quad (42)$$

Les propriétés effectuées sur le maillage impliquent que

$$\|\mathbf{v}\|_{1,h} \lesssim \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{1,h}, \forall \mathbf{v} \in V_h. \quad (43)$$

On définit alors $V_h^c = V_h \cap H_0^1(\Omega)^d$, l'espace des éléments continus de V_h et on pose V_h^\perp le complément orthogonal de V_h^c dans V_h par rapport au produit interne associé à la norme $\|\llbracket \cdot \rrbracket\|_{1,h}$. Un résultat fondamental, qui provient de l'adaptation de la section 2.1 de [51] au cas anisotrope, est que la semi-norme $|\cdot|_{1,h}$ est une norme sur V_h^\perp équivalente à la nouvelle norme $\|\llbracket \cdot \rrbracket\|_{1,h}$

⁶Par souci de concision, les notations usuelles (moyennes, sauts) propres aux méthodes GD ne sont pas introduites. On consultera [31] pour tous les détails. A noter par exemple que dans cette partie 2.3, $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket$ est le saut du vecteur \mathbf{v} dans la direction normale (qui est un scalaire), $\llbracket \underline{A} \rrbracket$ est le saut de la matrice \underline{A} dans la direction normale (qui est un vecteur), tandis que $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket$ est le saut total du vecteur \mathbf{v} (qui est une matrice).

(théorème 4.4 de [31]). La minoration de cette équivalence est directement déduite de la propriété suivante que nous avons prouvée :

$$\forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad \inf_{\mathbf{w}_h \in V_h^c} \|\nabla_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h)\| \lesssim |\mathbf{v}_h|_{1,h}. \quad (44)$$

Nous avons de plus mis en évidence que l'estimation (44) était optimale, c'est-à-dire telle qu'il soit possible de trouver un cas particulier pour lequel l'estimation inverse ait lieu. En conséquence, le facteur $h_E h_{min,E}^{-2}$ intervenant dans la définition de $|\mathbf{v}_h|_{1,h}$ (cf (42)) ne peut pas être choisi plus petit (par exemple, le choix de h_E^{-1} , comme dans le cas isotrope, ne serait pas correct). Enfin, les fonctions bulles, opérateurs d'extension et inégalités inverses ont été généralisées au cas des maillages non conformes pour pouvoir établir l'efficacité de l'estimateur. Similairement à la partie 2.2, le résidu exact sur la maille T est donné par $\mathbf{R}_T = \mathbf{f} - (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h)$, et on définit le saut du gradient dans la direction normale par :

$$\mathbf{J}_{E,n} = \begin{cases} \llbracket \nu \nabla_h \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{I} \rrbracket & \text{pour } E \in \mathcal{E}_h \text{ tel que } E \subset \Omega, \\ 0 & \text{pour } E \text{ arête (2D) ou face (3D) frontalière.} \end{cases}$$

Définition 2.7 (Estimateur d'erreur résiduel) *Les estimateurs locaux et globaux sont définis par*

$$\begin{aligned} \eta_T^2 &= h_{min,T}^2 \nu^{-1} \|\mathbf{R}_T\|_T^2 + \nu \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_T^2 \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_h : E \subset \partial T} \left(h_{min,T}^2 h_E^{-1} \nu^{-1} \|\mathbf{J}_{E,n}\|_E^2 + \nu h_E h_{min,E}^{-2} \|\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket\|_E^2 \right), \\ \eta^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2. \end{aligned}$$

Soit $V(h) = H_0^1(\Omega)^d + V_h$. On introduit la norme de Galerkin Discontinu naturelle sur $V(h) \times L^2(\Omega)$ par :

$$\|(\mathbf{v}, q)\|_{DG}^2 = \nu \|\mathbf{v}\|_{1,h}^2 + \nu^{-1} \|q\|^2, \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V(h) \times L^2(\Omega),$$

et on définit sa norme anisotrope par :

$$\|(\mathbf{v}, q)\|_{DGM}^2 = \nu \|\mathbf{v}\|_{1,h}^2 + \nu^{-1} \|q\|^2 = \nu \|\nabla_h \mathbf{v}\|^2 + \nu \|\mathbf{v}\|_{1,h}^2 + \nu^{-1} \|q\|^2.$$

Il est clair que

$$\|(\mathbf{v}, q)\|_{DG} \lesssim \|(\mathbf{v}, q)\|_{DGM}, \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V(h) \times L^2(\Omega),$$

et que

$$\|(\mathbf{v}, q)\|_{DG} = \|(\mathbf{v}, q)\|_{DGM}, \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Théorème 2.8 (Majoration de l'erreur) *Soit $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ l'unique solution de (32)⁷ et $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ l'unique solution de (41). Alors on a :*

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_{DG} \lesssim \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_{DGM} \lesssim m_1(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h) \eta. \quad (45)$$

Eléments de la preuve : On procède à l'instar de [48], avec les adaptations nécessaires dues à l'anisotropie du maillage. L'idée consiste à décomposer la solution en $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h^c + \mathbf{u}_h^\perp$ avec $\mathbf{u}_h^c \in V_h^c$ et $\mathbf{u}_h^\perp \in V_h^\perp$. Ceci permet de se ramener à la majoration de $\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^c, p - p_h)\|_{DGM}^2$ puis à celle de $\|\mathbf{u}_h^\perp\|_{1,h}^2$. Pour la première majoration, on utilise le fait que $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^c \in H_0^1(\Omega)^d$. Pour la seconde, l'équivalence de norme que nous avons démontrée conduit directement à $\|\mathbf{u}_h^\perp\|_{1,h}^2 \sim \|\mathbf{u}_h^\perp\|_{1,h}^2 \lesssim \eta^2$. A noter que dans l'expression (45), la fonction \mathbf{v} intervenant dans la mesure d'alignement m_1 est fonction de $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^c$ et $p - p_h$. Pour plus de détails sur cette dépendance, on renvoie au théorème 5.2 de [31]. ■

⁷Avec $\nu \neq 1$.

Théorème 2.9 (Minoration de l'erreur) *Pour tout élément T , on a :*

$$\eta_T^2 \lesssim \nu \|\nabla_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\omega_T}^2 + \nu^{-1} \|p - p_h\|_{\omega_T}^2 + \nu \sum_{E \in \mathcal{E}_h: E \subset \partial T} h_E h_{min,E}^{-2} \|\llbracket \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \rrbracket\|_E^2. \quad (46)$$

Eléments de la preuve : L'estimée

$$\begin{aligned} h_{min,T}^2 \nu^{-1} \|\mathbf{R}_T\|_T^2 + \nu \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_T^2 &+ \nu^{-1} \sum_{E \in \mathcal{E}_h: E \subset \partial T} \frac{h_{min,T}^2}{h_E} \|\mathbf{J}_{E,n}\|_E^2 \\ &\lesssim \nu \|\nabla_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\omega_T}^2 + \nu^{-1} \|p - p_h\|_{\omega_T}^2 \end{aligned} \quad (47)$$

est prouvée dans le théorème 6.2 de [30] pour $\nu = 1$ et un maillage conforme en utilisant les fonctions bulles, l'intégration par parties et les inégalités inverses. La preuve est tout à fait similaire lorsque $\nu \neq 1$ et dans le cas du maillage non conforme en utilisant les nouvelles fonctions bulles et inégalités inverses propres aux discrétisations non conformes. Ensuite il suffit juste de remarquer que $\llbracket \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \rrbracket = -\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket$ pour aboutir à (46). ■

Des tests numériques ont été menés pour mettre en évidence sur un exemple que les majorations des théorèmes 2.8 et 2.9 étaient bien vérifiées numériquement. Les valeurs des indices de fiabilité et d'efficacité, asymptotiquement indépendantes du degré de raffinement du maillage, sont quasiment égales à celles obtenues dans la partie 2.2, et très similaires avec celles obtenues par d'autres auteurs sur d'autres classes de problèmes [15, 54, 55, 67, 65, 66].

2.4 Equations de Maxwell hétérogènes

Ces travaux ont donné lieu à la publication [62].

Dans ce travail, on considère les équations qui régissent la circulation du courant électrique dans un domaine connexe polyédrique borné $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Après une semi-discrétisation en temps, on aboutit à chaque pas de temps à la résolution de l'équation de Maxwell [12] :

$$\begin{cases} \mathbf{curl}(\chi \mathbf{curl} \mathbf{u}) + \beta \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (48)$$

Dans le système (48), \mathbf{u} est l'approximation à un instant donné du champ électrique \mathbf{E} , $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^3$ est une donnée à divergence nulle dans Ω et \mathbf{n} est la normale unitaire sortante à Ω le long de Γ . Les fonctions χ et β sont constantes par morceaux et telles qu'il existe une partition \mathcal{P} de Ω constituée d'un ensemble fini de polyèdres lipschitziens $\Omega_1, \dots, \Omega_J$ telle que sur chaque Ω_j ($1 \leq j \leq J$), on ait $\chi = \chi_j$ et $\beta = \beta_j$, où χ_j et β_j sont des constantes strictement positives. On introduit alors l'espace

$$H_0(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3 : \mathbf{curl} \mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \text{ et } \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

muni de sa norme usuelle $\|\cdot\|_{H(\mathbf{curl}, D)}^2 = \|\cdot\|_D^2 + \|\mathbf{curl} \cdot\|_D^2$, et la forme bilinéaire

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \chi \mathbf{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v} + \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

La formulation faible de (48) consiste à trouver $\mathbf{u} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ tel que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega). \quad (49)$$

Puisque a est une forme sesquilinéaire coercive sur $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$, le problème (49) possède une unique solution par application du lemme de Lax-Milgram. Ce problème est approché dans un espace d'éléments finis conforme $V_h \subset H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ basé sur une triangulation \mathcal{T}_h du domaine constituée de tétraèdres isotropes ou anisotropes pour fournir une solution approchée \mathbf{u}_h . L'espace V_h est également supposé contenir l'espace des éléments d'arête de Nédélec de plus bas degré [61] noté ici $V_{h,1}$ et défini par :

$$V_{h,1} = \{\mathbf{v}_h \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega); v_{h|_T} \in ND_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad ND_1(T) = \{\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\}$$

En définissant l'erreur par $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$, on obtient classiquement l'équation résiduelle :

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = r(\mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega), \quad (50)$$

avec

$$r(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega),$$

et la relation d'orthogonalité de Galerkin associée :

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v}_h) = 0, \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (51)$$

L'analyse des estimateurs d'erreur a posteriori isotropes pour les éléments d'arêtes a été initiée par Monk [60] et Beck *et al* [12] dans le contexte d'une décomposition de Helmholtz régulière nécessitant en plus des hypothèses que nous avons effectuées que les fonctions β et χ soient continuellement différentiables sur Ω , domaine plus régulier que simplement lipschitzien (hypothèse 3.1 de [12]).

Le but de notre travail a donc été de déterminer un estimateur d'erreur résiduel a posteriori pour la norme $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ de l'erreur \mathbf{e} , en combinant les méthodes de [12] et [53] pour traiter le cas de maillages anisotropes et d'une décomposition de Helmholtz singulière. On couvre ainsi le cas général des fonctions χ et β constantes par morceaux, dans le cadre de problèmes 3D et de triangulations composées de tétraèdres. Cependant, notre contribution se généralise également au cas des problèmes 2D ainsi que des triangulations 3D constituées de parallélépipèdes ou de pentaèdres rectangulaires (cf. les idées de [30] pour une telle généralisation). Depuis ces travaux, d'autres papiers ont également traité ce problème (par exemple [25, 74]).

Certains outils spécifiques ont dû être développés pour l'obtention de la majoration de l'erreur. Tout d'abord, l'introduction d'un interpolé de type Clément qui envoie une fonction vectorielle de $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ sur $V_{h,1}$, introduit dans [12], et défini à l'aide des fonctions de base éléments de $V_{h,1}$ associées aux arêtes de la triangulation. Il nous a fallu revisiter les estimations d'erreurs d'interpolation pour établir des résultats similaires dans le cas anisotrope. Puis, en toute logique, nous avons établi une nouvelle mesure d'alignement $m_2(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h)$ permettant de caractériser l'alignement d'une fonction vectorielle \mathbf{v} de $H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap [PH^1(\Omega)]^3$ avec un maillage donné \mathcal{T}_h , mesure qui intervient dans les erreurs d'interpolation pour les maillages anisotropes. Ici, $[PH^1(\Omega)]^3$ est l'ensemble des fonctions de $(L^2(\Omega))^3$ dont la restriction à chaque Ω_j est dans $H^1(\Omega_j)^3$, $1 \leq j \leq J$. A noter que, suite à cette définition, nous avons également introduit les mesures d'approximation $a_1(v, \mathcal{T}_h)$ et $a_2(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h)$, respectivement majorées par $m_1(v, \mathcal{T}_h)$ et $m_2(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h)$. Ce sont des mesures qui permettent de donner la distance de la fonction à l'espace d'approximation au sens d'une norme discrète utilisant des descripteurs anisotropes, ce qui en fait des quantités naturelles intervenant dans la majoration de l'erreur par l'estimateur global. Enfin, nous avons également eu besoin d'une décomposition de Helmholtz de l'espace $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ relatif au poids β (pour $\beta = 1$, le résultat se réduit à la décomposition de Helmholtz standard), permettant de traiter le cas d'une fonction β constante par morceaux sur le domaine, ce qui constitue une généralisation du résultat de [12]. On utilise comme produit interne permettant de définir la décomposition orthogonale de $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ le produit relatif à β défini par $(\mathbf{v}, \mathbf{w})_\beta = (\beta \mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{w})$. On aboutit ainsi à la décomposition $H_0(\mathbf{curl}, \Omega) = H_0^0(\mathbf{curl}, \Omega) \oplus W_\beta$, avec $H_0^0(\mathbf{curl}, \Omega) = \nabla H_0^1(\Omega)$ et $W_\beta = \{\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega); \text{div}(\beta \mathbf{v}) = 0 \text{ dans } \Omega\}$. On va ensuite plus loin en décomposant tout élément de W_β grâce à un résultat de [28]. Il est alors possible pour obtenir l'estimateur de traiter indépendamment la partie irrotationnelle \mathbf{e}_0 de la partie " β -solénoïdale" \mathbf{e}_\perp de l'erreur en écrivant $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_\perp$, et en obtenant une équation résiduelle spécifique à chacune de ces deux contributions de l'erreur qui remplacent (51) :

$$(\beta \mathbf{e}_0, \nabla \Psi) = r(\nabla \Psi) \quad \forall \Psi \in H_0^1(\Omega), \quad (52)$$

$$a(\mathbf{e}_\perp, \mathbf{w}) = r(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W_\beta. \quad (53)$$

Le résidu exact sur T est ici défini par $\mathbf{R}_T = \mathbf{f} - (\mathbf{curl}(\chi \mathbf{curl} \mathbf{u}_h) + \beta \mathbf{u}_h)$, et son approximation est notée \mathbf{r}_T . On définit le saut de \mathbf{u}_h dans la direction normale $J_{E,n}$ et le saut de $\mathbf{curl} \mathbf{u}_h$ dans la direction tangente $\mathbf{J}_{E,t}$ par⁸

$$\begin{aligned} J_{E,n} &= \begin{cases} \llbracket \beta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_E \rrbracket_E & \text{pour une face intérieure,} \\ \mathbf{0} & \text{pour une face frontalière,} \end{cases} \\ \mathbf{J}_{E,t} &= \begin{cases} \llbracket \chi \mathbf{curl} \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}_E \rrbracket_E & \text{pour une face intérieure,} \\ \mathbf{0} & \text{pour une face frontalière.} \end{cases} \end{aligned}$$

⁸Dans ce mémoire, par souci d'homogénéisation, nous avons utilisé la notation E pour une face de la triangulation. Dans le papier correspondant, les faces sont notées F , le symbole E étant réservé aux arêtes.

Définition 2.10 (Estimateur d'erreur résiduel) *Les estimateurs d'erreur résiduels locaux et globaux sont définis par*

$$\begin{aligned}
\eta_{T,0}^2 &= h_{min,T}^2 \|\operatorname{div}(\beta \mathbf{u}_h)\|_T^2 + \sum_{E \subset \partial T} \frac{h_{min,T}^2}{h_E} \|J_{E,n}\|_E^2 \\
\eta_{T,\perp}^2 &= h_{min,T}^2 \|\mathbf{r}_T\|_T^2 + \sum_{E \subset \partial T} \frac{h_{min,T}^2}{h_E} \|\mathbf{J}_{E,t}\|_E^2 \\
\eta_0^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{T,0}^2, \quad \eta_\perp^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{T,\perp}^2 \\
\eta^2 = \eta_0^2 + \eta_\perp^2, \quad \zeta_T^2 &= h_{min,T}^2 \|\mathbf{r}_T - \mathbf{R}_T\|_T^2, \quad \zeta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \zeta_T^2.
\end{aligned}$$

Théorème 2.11 (Minoration de l'erreur) *Pour tout élément T , on a la minoration d'erreur locale suivante :*

$$\eta_{T,0} + \eta_{T,\perp} \lesssim \|\mathbf{e}\|_{H(\mathbf{curl}, \omega_T)} + \sum_{T' \subset \omega_T} \zeta_{T'}. \quad (54)$$

Eléments de la preuve : La preuve de ce corollaire s'inspire de [12], avec les nécessaires adaptations dues à l'anisotropie du maillage. On majore $\eta_{T,0}$ (théorème 4.2 de [62]) puis $\eta_{T,\perp}$ (théorème 4.3 de [62]), en considérant successivement chacun des termes les constituant. On utilise les ingrédients de base habituels que sont les fonctions bulles, les inégalités inverses, l'intégration par parties et l'inégalité de Cauchy-Schwartz. ■

Théorème 2.12 (Majoration de l'erreur) *L'erreur \mathbf{e} vérifie la majoration suivante :*

$$\|\mathbf{e}\|_{H(\mathbf{curl}, \Omega)} \lesssim (a_1(\phi + \phi_0, \mathcal{T}_h) + a_2(\mathbf{w}, \mathcal{T}_h)) (\eta + \zeta). \quad (55)$$

Eléments de la preuve : Il s'agit tout d'abord de majorer la partie irrotationnelle de l'erreur $\|\mathbf{e}_0\|$. En écrivant que $\mathbf{e}_0 = \nabla \Phi$ avec $\Phi \in H_0^1(\Omega)$, on utilise l'équation résiduelle (52) relative à cette partie de l'erreur ainsi que la relation d'orthogonalité de Galerkin (51) associée grâce au fait que $V_{h,1} \subset V_h$. Puis on majore la partie " β solénoïale" de l'erreur $\|\mathbf{e}_\perp\|_{H(\mathbf{curl}, \Omega)}$ selon un principe similaire en utilisant l'équation résiduelle (53). Il est à noter que les fonctions ϕ , ϕ_0 et \mathbf{w} intervenant dans le théorème 2.12 proviennent de la décomposition de l'erreur du corollaire 3.11 de [62], et dépendent donc de la solution exacte. Cependant, comme nous l'avons déjà vu (voir remarque 2.6), cela ne constitue pas un obstacle majeur dans la mise en oeuvre pratique des estimateurs. ■

Une validation numérique a ensuite été effectuée en résolvant l'équation de Maxwell (48) sur le carré unité $\Omega = (0, 1)^2$, avec $\chi = \beta = 1$, en utilisant une solution exacte anisotrope, un maillage de type Shishkin composé de triangles et l'élément fini de plus bas degré de Nédelec, pour une solution exhibant une couche limite. Les ordres de convergences obtenus ont été conformes à la théorie, et les index de fiabilité et d'efficacité asymptotiquement constants et similaires à ceux obtenus dans d'autres travaux relatifs à Laplace ou Stokes [30, 54].

2.5 Méthode mixte pour des opérateurs du second ordre

Ces travaux ont donné lieu à la publication [63].

Soit un domaine borné Ω de \mathbb{R}^d , de frontière polygonale ($d = 2$) ou polyédrale ($d = 3$). Dans ce travail, on considère le problème générique suivant du second ordre : Pour $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution de

$$\operatorname{div}(A\nabla u) = -f \text{ dans } \Omega, \quad (56)$$

où la matrice $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{d \times d})$ est symétrique définie positive. La formulation mixte de ce problème est bien connue [19, 20], et consiste à trouver (\mathbf{p}, u) dans $X \times M$ solution de

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (A^{-1}\mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} \, dx + \int_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx = 0, \forall \mathbf{q} \in X, \\ \int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{p} \, dx = - \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in M, \end{cases} \quad (57)$$

où

$$X = H(\operatorname{div}, \Omega) = \{\mathbf{q} \in [L^2(\Omega)]^d : \operatorname{div} \mathbf{q} \in L^2(\Omega)\},$$

muni de sa norme naturelle

$$\|\mathbf{q}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{q}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et $M = L^2(\Omega)$. Puisque le problème a au plus une solution [79, p.16], l'unique solution (\mathbf{p}, u) est donnée par $\mathbf{p} = A\nabla u$, où u est l'unique solution de (56). Le problème (57) est approché par l'utilisation d'un espace d'éléments finis conforme $X_h \times M_h \subset X \times M$ basé sur une triangulation \mathcal{T}_h du domaine, constituée d'éléments isotropes ou anisotropes. L'analyse des estimateurs d'erreur a posteriori pour les méthodes d'éléments finis mixtes sur maillages isotropes a déjà donné lieu à plusieurs études. Dans les travaux de Braess et Verfürth [18] et de Alonso [5], l'estimateur est fiable et efficace mais pour une norme qui dépend du maillage, n'étant donc pas une norme naturelle de l'erreur. Dans ceux de Carstensen [20], il possède les mêmes propriétés, mais sous l'hypothèse de régularité $H^2(\Omega)$ de la solution de (56), ce qui n'est pas souvent le cas (voir par exemple [21] pour le système de l'élasticité).

Notre objectif a donc été d'étendre la méthode proposée dans [20] au cas des discrétisations anisotropes 2D et 3D, sans hypothèse de régularité sur la solution de (56). On cherche à obtenir un estimateur d'erreur résiduel anisotrope fiable et efficace pour l'estimation de $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_h$ pour la norme $H(\operatorname{div}, \Omega)$ et de $e = u - u_h$ pour la norme $L^2(\Omega)$.

Le problème discret associé à (57) consiste à trouver $(\mathbf{p}_h, u_h) \in X_h \times M_h$ tel que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (A^{-1}\mathbf{p}_h) \cdot \mathbf{q}_h \, dx + \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \mathbf{q}_h \, dx = 0, \forall \mathbf{q}_h \in X_h, \\ \int_{\Omega} v_h \operatorname{div} \mathbf{p}_h \, dx = - \int_{\Omega} f v_h \, dx, \quad \forall v_h \in M_h, \end{cases} \quad (58)$$

où X_h (resp. M_h) est un sous-espace de dimension finie de X (resp. M). La conformité de l'approximation nous permet d'en déduire facilement deux relations d'orthogonalité de Galerkin. On suppose de plus que les espaces X_h et M_h satisfont :

$$\{\mathbf{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega) : \mathbf{q}|_T \in [\mathbb{P}_0(T)]^d, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset X_h, \quad (59)$$

$$X_h \subset \{\mathbf{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega) : \mathbf{q}|_T \in [H^1(T)]^d, \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad (60)$$

$$\operatorname{div} X_h = M_h. \quad (61)$$

La propriété dite du "diagramme commutatif" doit aussi être ajoutée [19, 20], entraînant entre autre l'existence d'un opérateur d'interpolation $\Pi_h : W = H(\text{div}, \Omega) \cap L^s(\Omega) \rightarrow X_h$ avec $s > 2$ tel que :

$$\text{div}(Id - \Pi_h)W \perp M_h, \quad (62)$$

l'orthogonalité ayant lieu au sens du produit scalaire $L^2(\Omega)$ et Id signifiant l'opérateur identité. On suppose aussi que cet interpolant satisfait la relation de continuité

$$\|\Pi_h \mathbf{q}\| \lesssim \|\mathbf{q}\|_{1,\Omega}, \forall \mathbf{q} \in [H^1(\Omega)]^d. \quad (63)$$

Cette dernière hypothèse, associée à (61) et (62) permet en particulier d'obtenir la condition uniforme inf/sup discrète grâce à la surjectivité de l'opérateur divergence de $[H^1(\Omega)]^d$ dans $L^2(\Omega)$ (Lemme 3.4 de [63]). Finalement on suppose que Π_h satisfait la propriété d'approximation

$$\int_E v_h(\mathbf{q} - \Pi_h \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}_E = 0, \forall \mathbf{q} \in W, v_h \in M_h, E \in \mathcal{E}_h. \quad (64)$$

Plusieurs paires d'éléments finis ont alors été présentées : éléments de Raviart-Thomas, de Brezzi-Douglas-Marini, de Brezzi-Douglas-Fortin-Marini (section 4 de [63]). Pour le cas du maillage anisotrope, nous avons donné des conditions suffisantes sur la géométrie des mailles pour que la propriété (63) soit vérifiée, plus ou moins restrictives selon l'élément fini utilisé. Les autres propriétés ont été démontrées dans [19].

Pour $\mathbf{p}_h \in X_h$ on définit le saut de $A^{-1}\mathbf{p}_h$ dans la direction tangentielle à travers une face E par⁹

$$\mathbf{J}_{E,t}(\mathbf{p}_h) = \begin{cases} \llbracket [A^{-1}\mathbf{p}_h \cdot \mathbf{t}_E] \rrbracket_E & \text{en 2D,} \\ \llbracket [A^{-1}\mathbf{p}_h \times \mathbf{n}_E] \rrbracket_E & \text{en 3D.} \end{cases}$$

Définition 2.13 (Estimateur d'erreur résiduel) *Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, l'estimateur d'erreur résiduel local est défini par :*

$$\begin{aligned} \eta_T^2 &= \|f + \text{div} \mathbf{p}_h\|_T^2 + h_{min,T}^2 \|\text{curl}(A^{-1}\mathbf{p}_h)\|_T^2 \\ &+ h_{min,T}^2 \min_{v_h \in M_h} \|A^{-1}\mathbf{p}_h - \nabla v_h\|_T^2 + \sum_{E \subset \partial T} \frac{h_{min,T}^2}{h_E} \|\mathbf{J}_{E,t}(\mathbf{p}_h)\|_E^2. \end{aligned}$$

L'estimateur d'erreur résiduel global est alors :

$$\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2.$$

Théorème 2.14 (Minoration de l'erreur) *Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(A^{-1}\mathbf{p}_h)|_T$ appartienne à \mathbb{P}^k , pour tout $T \in \mathcal{T}_h$. Alors pour tout élément T , on a :*

$$\eta_T \lesssim \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{H(\text{div}, \omega_T)} + \|e\|_T. \quad (65)$$

Eléments de la preuve : La preuve consiste à majorer chaque contribution de l'estimateur local séparément, par utilisation des inégalités inverses. On procède comme dans [20] avec les nécessaires adaptations dues à l'anisotropie du maillage. Il est à noter que l'hypothèse de ce théorème n'est pas toujours vérifiée, même si \mathbf{p}_h est polynômial par élément, puisque A^{-1} n'est pas nécessairement polynômial par élément. Cependant, elle est vérifiée si A est constant par morceau. ■

⁹En 2D, $\mathbf{J}_{E,t}(\mathbf{p}_h)$ est une quantité scalaire, mais on l'écrit ici comme un vecteur pour pouvoir homogénéiser les notations qui servent à la fois pour le 2D et pour le 3D.

Théorème 2.15 (Majoration de l'erreur) *L'erreur globale satisfait la majoration :*

$$\|e\| + \|\varepsilon\|_{H(\text{div}, \Omega)} \lesssim (1 + a(\mathbf{v}, \mathcal{T}_h) + m_1(\beta, \mathcal{T}_h))\eta, \quad (66)$$

où a et m_1 sont des mesures d'alignement qui permettent de caractériser l'alignement d'une fonction avec le maillage à l'instar de ce que nous avons présenté dans la partie 2.1.4, et qui sont précisées dans [63].

Eléments de la preuve : Deux remarques importantes ont à être formulées concernant l'obtention de ce résultat. D'abord, il faut majorer $\|e\|$. On utilise encore une fois la surjectivité de l'opérateur divergence de $[H^1(\Omega)]^d$ dans $L^2(\Omega)$, la fonction \mathbf{v} intervenant dans (66) étant l'antécédent de e . Les propriétés (62) et (64) sont utilisées dans la démonstration. Par comparaison avec le lemme 5.2 de [20], c'est bien cette propriété de surjectivité qui nous permet de nous affranchir de l'hypothèse de régularité $H^2(\Omega)$ de la solution de (56)¹⁰. Ensuite, on majore $\|\varepsilon\|_{H(\text{div}, \Omega)}$, ce qui est effectué en adaptant le lemme 5.1 de [20] à notre cadre. On utilise en particulier une décomposition de Helmholtz de cette erreur de type $\varepsilon = A\nabla z + \mathbf{curl} \beta$, avec $z \in H_0^1(\Omega)$ et $\beta \in H^1(\Omega)(2D)$ ou $\beta \in (H^1(\Omega))^3(3D)$. ■

Nous avons terminé ce travail par une validation numérique en 3D, pour deux tests exhibant des caractéristiques différentes. Les maillages ont été générés avec le logiciel Netgen [75], le reste du code étant développé avec le logiciel Simula+ [3]. Le premier test a consisté à résoudre le problème mixte discret (58) avec $A = Id$ sur le cube unité $\Omega = (0, 1)^3$, en utilisant pour cela les éléments de Raviart-Thomas RT_0 sur des maillages de Shishkin anisotropes composés de tétraèdres et un algorithme de type Uzawa. La solution choisie possède une couche limite le long d'un axe, de façon à motiver un raffinement anisotrope. Le second a consisté à résoudre le même problème, mais cette fois sur un cylindre tronqué de façon à ce que la solution n'appartienne plus à $H^2(\Omega)$, à cause de la singularité d'arête à proximité de $r = 0$. Le maillage est alors raffiné dans la direction radiale près de l'axe du cylindre, devenant ainsi anisotrope (cf. FIG. 21). Pour chacun de ces deux tests, les résultats numériques ont confirmé, par l'analyse de l'évolution des indices de fiabilité et d'efficacité, le caractère fiable et efficace des estimateurs.

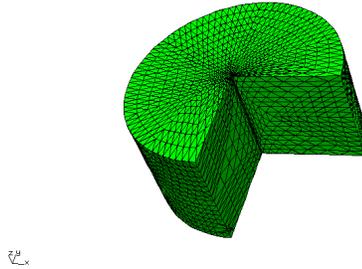


FIG. 21 – Maillage du cylindre tronqué raffiné à proximité de l'axe.

¹⁰Carstensen utilise l'inversibilité de l'application $-\text{div}(A\nabla) : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ en ayant à supposer Ω convexe et $A \in C^{1,0}(\Omega)$, ce qui constitue une condition suffisante (mais non nécessaire, voir exemple 1 dans [20]) pour obtenir une estimation de type $\|v\|_{2,2,\cup_{T \in \mathcal{T}_h} T} \lesssim \|\text{div}(A\nabla v)\|_{2,\Omega}$.

2.6 Couplage d'une méthode mixte et standard pour les opérateurs du second ordre

Ces travaux ont donné lieu à la publication [32].

Dans ce travail, on considère un domaine Ω de \mathbb{R}^2 , connexe, et de frontière polygonale¹¹. On considère encore le problème (56) consistant à trouver $\theta \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant :

$$\operatorname{div}(A\nabla\theta) = -f \text{ dans } \Omega. \quad (67)$$

Ici, le domaine Ω est décomposé en deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 , ne se recouvrant pas, tels que $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$. On suppose de plus que $\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega$ est de mesure strictement positive, et on note Γ l'intérieur de $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, autrement dit l'interface entre Ω_1 et Ω_2 (voir FIG. 22). L'originalité

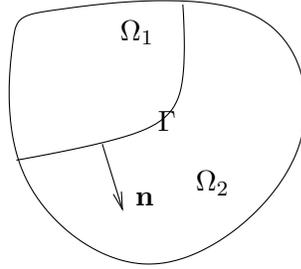


FIG. 22 – Domaine de calcul

consiste ici, tout comme dans les travaux de Wieners et Wohlmuth [82] ou ceux de Lazarov *et al* [59], à considérer sur Ω_1 une formulation mixte du problème (67), à l'instar de ce qui a été effectué dans la partie 2.5, et sur Ω_2 une méthode de type Galerkin standard. Cela signifie que l'on introduit de nouvelles inconnues $\boldsymbol{\xi} = (A\nabla\theta)|_{\Omega_1}$, $\theta_1 = \theta|_{\Omega_1}$ et $\theta_2 = \theta|_{\Omega_2}$. Ces inconnues sont couplées les unes aux autres à l'interface par les conditions

$$\theta_1 = \theta_2, \quad \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = A\nabla\theta_2 \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma,$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire le long de Γ orienté de Ω_1 vers Ω_2 . Ce couplage peut avoir plusieurs intérêts. D'une part il peut être pertinent pour l'existence sur un même domaine de calcul de plusieurs modèles et/ou matériaux, permettant de construire un maillage indépendamment sur chaque sous domaine. D'autre part, la connaissance de la quantité physique $A\nabla\theta$ peut ne s'avérer nécessaire que sur une partie du domaine (la méthode mixte permet d'atteindre cette quantité directement sans aucun post-traitement). Dans cette partie 2.6, on notera $(\cdot, \cdot)_i$, $i = 1, 2$, le produit interne $L^2(\Omega_i)$, et similairement $(\cdot, \cdot)_\Gamma$, le produit interne $L^2(\Gamma)$. Le couplage entre les formulations mixte et standard mène au problème de point-selle suivant [59, 82] : Trouver $u = (\boldsymbol{\xi}, \theta_2)$ dans X et $p = \theta_1$ dans M solutions de

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = (f, \chi)_2, \forall v = (\boldsymbol{\eta}, \chi) \in X, \\ b(u, q) = -(f, q)_1, \forall q \in M, \end{cases} \quad (68)$$

où

$$\begin{aligned} X &= H(\operatorname{div}, \Omega_1) \times H_D^1(\Omega_2) \quad , \quad M = L^2(\Omega_1), \\ H(\operatorname{div}, \Omega_1) &= \{\boldsymbol{\eta} \in [L^2(\Omega_1)]^2 : \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} \in L^2(\Omega_1)\}, \\ H_D^1(\Omega_2) &= \{\chi \in H^1(\Omega_2) : \chi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2\}. \end{aligned}$$

¹¹Le cas $\Omega \in \mathbb{R}^3$ ainsi que sa généralisation au cas des maillages anisotropes pourront être facilement déduits du cas Ω de \mathbb{R}^2 en utilisant les résultats de [30, 31, 63].

L'espace X est muni de sa norme naturelle

$$\|(\boldsymbol{\eta}, \chi)\|_X^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\eta}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\nabla \chi\|_{L^2(\Omega_2)}^2,$$

et les formes bilinéaires a et b sont définies par

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (A^{-1}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})_1 + (A\nabla\theta_2, \nabla\chi)_2 \\ &\quad - (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n}, \theta_2)_\Gamma + (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}, \chi)_\Gamma, \forall u = (\boldsymbol{\xi}, \theta_2), v = (\boldsymbol{\eta}, \chi) \in X, \\ b(u, q) &= (\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}, q)_1, \forall u = (\boldsymbol{\xi}, \theta_2) \in X, q \in M. \end{aligned}$$

Puisque la forme bilinéaire a est coercive sur X et que la condition inf/sup est satisfaite (voir partie 2.1 de [59] ou [82]), le problème (68) a une unique solution, clairement donnée par $\boldsymbol{\xi} = (A\nabla\theta)|_{\Omega_1}$, $\theta_1 = \theta|_{\Omega_1}$ et $\theta_2 = \theta|_{\Omega_2}$, où θ est l'unique solution de (67). La solution est approchée en utilisant un espace d'éléments finis $X_h \times M_h$ (non nécessairement conforme) de $X \times M$ basé sur des triangulations \mathcal{T}_1 and \mathcal{T}_2 des sous domaines Ω_1 et Ω_2 composées d'éléments isotropes. Sous certaines propriétés, le problème discret a une unique solution $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$ avec $u_h = (\boldsymbol{\xi}_h, \theta_{2h})$ et $p_h = \theta_{1h}$, et une analyse a priori de l'erreur a été proposée [59].

L'objectif de notre travail a donc été d'établir un estimateur d'erreur résiduel a posteriori pour les erreurs $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_h$ pour la norme $L^2(\Omega_1)$, $e = \theta_1 - \theta_{1h}$ pour la norme $L^2(\Omega_1)$, et $\mathbf{e}_2 = \nabla\theta_2 - \nabla_h\theta_{2h}$ pour la norme $L^2(\Omega_2)$. Désirant pouvoir traiter le cas pour lequel les maillages ne sont pas alignés à l'interface, le choix des espaces d'approximation non conformes s'est imposé naturellement. Dans ce travail, notre idée a donc été de combiner les idées de Dari *et al* [33] développées pour l'analyse d'erreur a posteriori pour les méthodes non conformes de type Galerkin avec les techniques vues dans la partie 2.5 de ce rapport traitant des méthodes mixtes.

L'espace $H_D^1(\Omega_2)$ est approché par un espace d'éléments finis V_h qui doit satisfaire certaines hypothèses faibles et usuelles évoquées dans la partie 2.2 (voir aussi [30] pour le détail), permettant d'utiliser en particulier les éléments finis usuels conformes \mathbb{P}_k (ou \mathbb{Q}_k), $k \geq 1$, ou les éléments finis standards non conformes (comme par exemple les éléments de Crouzeix-Raviart [30, 33]). De même, le couple $(H(\operatorname{div}, \Omega_1), M)$ est approché par le couple (X_{1h}, M_h) qui doit satisfaire certaines hypothèses similaires à celles décrites dans la partie 2.5. Finalement, l'espace d'approximation X_h de X est défini par :

$$X_h = X_{1h} \times V_h.$$

On ajoute à ces hypothèses sur les espaces approchés une propriété d'orthogonalité spécifique pour les arêtes de \mathcal{E}_Γ où Π_h est l'opérateur d'interpolation mentionné dans la partie 2.5 :

$$\int_E \theta_h(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_E = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in (H^1(\Omega_1))^2, \theta_h \in V_h, E \in \mathcal{E}_\Gamma.$$

Le problème discret associé à (68) est donc de trouver $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$ tel que

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = (f, \chi_h)_2, \forall v_h \in X_h, \\ b(u_h, q_h) = -(f, q_h)_1, \forall q_h \in M_h, \end{cases} \quad (69)$$

avec

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= (A^{-1}\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h)_1 + (A\nabla_h\theta_{2h}, \nabla_h\chi_h)_2 \\ &\quad - (\boldsymbol{\eta}_h \cdot \mathbf{n}, \theta_{2h})_\Gamma + (\boldsymbol{\xi}_h \cdot \mathbf{n}, \chi_h)_\Gamma, \forall u_h = (\boldsymbol{\xi}_h, \theta_{2h}), v_h = (\boldsymbol{\eta}_h, \chi_h) \in X_h. \end{aligned}$$

Puisque a_h est coercive sur X_h et que la condition inf/sup discrète est satisfaite, ce problème possède une unique solution. On définit l'erreur ε sur le gradient de la solution par :

$$\varepsilon = \begin{cases} \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_h & \text{dans } \Omega_1, \\ A(\nabla\theta_2 - \nabla_h\theta_{2h}) & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

Le résidu exact par élément R_T est défini naturellement par :

$$\begin{aligned} R_T &= (f + \operatorname{div}\boldsymbol{\xi}_h)|_T = (f - \rho_h f)|_T \text{ si } T \in \mathcal{T}_1, \\ R_T &= (f + \operatorname{div}\nabla_h\theta_{2h})|_T \text{ si } T \in \mathcal{T}_2. \end{aligned}$$

On note \mathcal{E}_1 l'ensemble des arêtes de la triangulation contenues dans $\overline{\Omega}_1 \setminus \Gamma$, \mathcal{E}_2 l'ensemble des arêtes de la triangulation contenues dans $\overline{\Omega}_2 \setminus \Gamma$, et \mathcal{E}_Γ l'ensemble des arêtes de la triangulation contenues dans Γ (définies comme l'intersection d'une arête de $\overline{\Omega}_1$ avec celle d'une arête de $\overline{\Omega}_2$). Pour $\boldsymbol{\xi}_h \in X_{1,h}$ et $\theta_{2h} \in V_h$ on définit le saut tangent et le saut normal à travers E respectivement par

$$\begin{aligned} J_{E,t} &= \begin{cases} \llbracket A^{-1}\boldsymbol{\xi}_h \cdot \mathbf{t}_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_1, \\ \llbracket \nabla_h\theta_{2h} \cdot \mathbf{t}_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_2, \\ (\nabla_h\theta_{2h} - A^{-1}\boldsymbol{\xi}_h) \cdot \mathbf{t}_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_\Gamma, \end{cases} \\ J_{E,n} &= \begin{cases} 0 & \text{si } E \in \mathcal{E}_2 \cap \partial\Omega, \\ \llbracket A\nabla_h\theta_{2h} \cdot \mathbf{n}_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_2 \setminus \partial\Omega, \\ (A\nabla_h\theta_{2h} - \boldsymbol{\xi}_h) \cdot \mathbf{n}_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_\Gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 2.16 (Estimateur d'erreur résiduel) *Pour tout $T \in \mathcal{T}_1$, l'estimateur d'erreur résiduel local est défini par*

$$\begin{aligned} \eta_T^2 &= h_T^2 \|\operatorname{curl}(A^{-1}\boldsymbol{\xi}_h)\|_T^2 \\ &+ h_T^2 \min_{q_h \in M_h} \|A^{-1}\boldsymbol{\xi}_h - \nabla q_h\|_T^2 + \sum_{E \subset \partial T} h_E \|J_{E,t}\|_E^2. \end{aligned}$$

D'autre part pour tout $T \in \mathcal{T}_2$, l'estimateur d'erreur résiduel local est défini par

$$\eta_T^2 = h_T^2 \|R_T\|_T^2 + \sum_{E \subset \partial T} h_E (\|J_{E,t}\|_E^2 + \|J_{E,n}\|_E^2).$$

L'estimateur d'erreur résiduel global est alors

$$\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2.$$

De plus, on définit le terme d'approximation local et le terme d'approximation global par

$$\zeta_T = h_T \|f - \rho_h f\|_T, \forall T \in \mathcal{T}_1, \quad \zeta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_1} \zeta_T^2.$$

Ici, ρ_h est l'opérateur de L^2 projection sur M_h . Si pour tout $T \in \mathcal{T}_2$ un résidu approché r_T est utilisé, alors

$$\zeta_T = h_T \|r_T - R_T\|_T, \forall T \in \mathcal{T}_2,$$

et le terme d'approximation global est défini par $\zeta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} \zeta_T^2$.

Théorème 2.17 (Majoration de l'erreur) *L'erreur vérifie la majoration suivante :*

$$\|\theta_1 - \theta_{1h}\|_{\Omega_1} + \|A\nabla\theta_1 - \boldsymbol{\xi}_h\|_{\Omega_1} + \|\nabla\theta_2 - \nabla_h\theta_{2h}\|_{\Omega_2} \lesssim \eta + \zeta. \quad (70)$$

Eléments de la preuve : On montre d'abord que

$$\|\theta_1 - \theta_{1h}\|_{\Omega_1} \lesssim \|A^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_h)\|_{\Omega_1} + \|\nabla\theta_2 - \nabla_h\theta_{2h}\|_{\Omega_2} + \eta, \quad (71)$$

en utilisant la surjectivité de l'opérateur de divergence de $[H^1(\Omega)]^2$ dans $L^2(\Omega_1)$ appliqué à e (lemme 3.5 de [32]), les propriétés relatives à l'opérateur d'interpolation utilisé (de même type que (62) et (64)) et aux espaces d'éléments finis utilisés (propriété de Crouzeix-Raviart (37)). Il reste alors à majorer les normes de $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ et e_2 , ce qui est effectué par utilisation d'une décomposition de Helmholtz de l'erreur $\boldsymbol{\varepsilon}$ identique à celle de la partie 2.5, et qui nous permet de montrer que $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \lesssim \eta + \zeta$. ■

Théorème 2.18 (Minoration de l'erreur) *Sous une certaine hypothèse à vérifier concernant les mailles touchant Γ , et en supposant qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(A^{-1}\boldsymbol{\xi}_h)|_T$ appartienne à \mathbb{P}_k , pour tout $T \in \mathcal{T}_1$. Alors pour tout élément T , on a :*

$$\eta_T \lesssim \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_h\|_{\omega_T} + \|\theta_1 - \theta_{1h}\|_T + \|\nabla\theta_2 - \nabla_h\theta_{2h}\|_{\omega_T} + \sum_{T' \in \mathcal{T}_1, T' \subset \omega_T} \zeta_{T'}. \quad (72)$$

Eléments de la preuve : La preuve combine des arguments de [33] et de [20]. ■

Les tests numériques ont consisté à résoudre la formulation discrète (69) avec $A = Id$, en cherchant $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$, avec V_h constitué d'éléments \mathbb{P}_1 conformes, X_{1h} constitué d'éléments de Raviart-Thomas RT_0 , et M_h constitué d'éléments \mathbb{P}_0 . On a considéré deux cas. D'une part le cas régulier pour lequel Ω est le domaine en L défini par $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, avec $\Omega_1 = (0, 2)^2$ et $\Omega_2 = (2, 3) \times (0, 1)$, avec une solution polynomiale s'annulant sur le bord. D'autre part, le cas singulier, pour lequel le domaine de calcul est constitué d'un $3/4$ de disque et qui de part sa non convexité implique $\theta \notin H^2(\Omega)$. Pour chacun de ces deux tests, les ordres de convergence obtenus ont bien été ceux attendus par la théorie, et les estimateurs calculés ont confirmé leur caractère fiable et efficace.

2.7 p -Laplacien

Ces travaux ont donné lieu à la publication [29].

Considérons un domaine plan borné Ω de frontière Γ polygonale. L'équation du p -Laplacien est donnée par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (73)$$

où $1 < p < \infty$, et où f est une fonction donnée de $L^q(\Omega)$ (q étant le conjugué de p). On trouve cette équation dans la modélisation mathématique d'un grand nombre de phénomènes physiques comme la diffusion et la filtration non linéaires ou les matériaux visco-élastiques. Dans le travail de Farhloul et Manouzi [40], une formulation mixte du problème (73) a été proposée, basée sur l'introduction de $\boldsymbol{\sigma} = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$ comme nouvelle inconnue, et sur son approximation par l'élément fini de Raviart-Thomas de plus bas degré [71, 79]. L'inconnue initiale u est approchée par une fonction constante par morceaux sur la triangulation de Ω . Ces auteurs ont obtenu une estimation d'erreur a priori sans aucune restriction sur p . Dans ce travail, on construit un estimateur d'erreur *a posteriori* pour $\boldsymbol{\sigma}_h$ l'approximation de $\boldsymbol{\sigma}$ et pour u_h l'approximation de u . A noter que la détermination d'un estimateur d'erreur a posteriori pour le même problème, mais résolu par une méthode standard et uniquement pour le cas $p > 2$ a été traitée par Carstensen et Klose [22].

On rappelle tout d'abord ici la formulation mixte du problème du p -Laplacien [40]. Soit $M = L^p(\Omega)$ ($1 < p < +\infty$) et X l'espace de Banach défini par :

$$X = \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^q(\Omega)]^2; \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \in L^q(\Omega) \}, \quad (74)$$

où q est le conjugué harmonique de p , muni de la norme :

$$\| \boldsymbol{\tau} \|_X = \left(\| \boldsymbol{\tau} \|_{0,q,\Omega}^q + \| \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \|_{0,q,\Omega}^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pour tout $\boldsymbol{\tau} \in [L^q(\Omega)]^2$, posons $A(\boldsymbol{\tau}) = |\boldsymbol{\tau}|^{q-2} \boldsymbol{\tau}$. Il est clair que lorsque $\boldsymbol{\tau} \in [L^q(\Omega)]^2$, $A(\boldsymbol{\tau}) \in [L^p(\Omega)]^2$. De plus on vérifie aisément que $A(\boldsymbol{\sigma}) = \nabla u$. La formulation faible du problème mixte associé à (73) est alors : Trouver $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in X \times M$ tels que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} A(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx + \int_{\Omega} u \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \, dx = 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in X, & (i) \\ \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) v \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx = 0 & \forall v \in M. & (ii) \end{cases} \quad (75)$$

Il est prouvé dans [39] (théorème 2.1) que (75) possède une et une seule solution $(\boldsymbol{\sigma}, u)$, que u est la solution faible de (73) et que $\boldsymbol{\sigma} = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$. On considère alors une famille régulière de triangulations \mathcal{T}_h sur $\bar{\Omega}$ [24]. Les espaces d'éléments finis utilisés sont définis par [40] :

$$X_h = \{ \boldsymbol{\tau}_h \in X; \boldsymbol{\tau}_h|_K \in RT_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \}, \quad (76)$$

$$M_h = \{ v_h \in M; v_h|_K \in P_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \}, \quad (77)$$

avec $P_0(K)$ l'espace des fonctions constantes sur tout triangle K et [79] :

$$RT_0(K) = \mathbb{P}^0(K)^2 \oplus \mathbb{P}^0(K) \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T. \quad (78)$$

La formulation discrète de (75) est donnée par : Trouver $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in X_h \times M_h$ satisfaisant

$$\begin{cases} \int_{\Omega} A(\boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \boldsymbol{\tau}_h dx + \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h dx = 0, & \forall \boldsymbol{\tau}_h \in X_h \\ \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h) v_h dx + \int_{\Omega} f v_h dx = 0, & \forall v_h \in M_h. \end{cases} \quad (79)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème (79) sont des conséquences de la condition inf/sup uniforme [40]. Afin de majorer l'erreur, on définit les résidus R sur X et r sur M par :

$$\langle R, \boldsymbol{\tau} \rangle = (A(\boldsymbol{\sigma}_h), \boldsymbol{\tau}) + (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, u_h), \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in X, \quad (80)$$

$$\langle r, v \rangle = (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h, v) + (f, v), \quad \forall v \in M. \quad (81)$$

R est une forme linéaire continue sur X et r est une forme linéaire continue sur M . $\|R\|$ (respectivement $\|r\|$), aura donc pour signification la norme de R (respectivement de r) comme forme linéaire continue sur X (respectivement sur M). Une première étape du travail, objet des deux théorèmes suivants, consiste à majorer les erreurs par les norme des résidus. Pour ce faire, on distingue le cas $p \geq 2$ (Théorème 2.19) du cas $1 < p < 2$ (Théorème 2.20).

Théorème 2.19 *Soit $p \geq 2$, on a :*

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{0,q,\Omega}^2 \lesssim \|R\|^2 + \|r\|^q + \|r\| \|R\|, \quad (82)$$

$$\int_{\Omega} |A(\boldsymbol{\sigma}_h) - A(\boldsymbol{\sigma})| |\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}| dx \lesssim \|R\|^2 + \|r\|^q + \|r\| \|R\|, \quad (83)$$

$$\|u_h - u\|_{0,p,\Omega} \lesssim \|R\| + (\|R\|^2 + \|r\|^q + \|r\| \|R\|)^{1/p}. \quad (84)$$

Théorème 2.20 *Soit $1 < p < 2$, on a :*

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{0,q,\Omega} \lesssim \|R\|^{p/q} + \|r\|^{2/q} + (\|r\| \|R\|)^{1/q}, \quad (85)$$

$$\|u - u_h\|_{0,p,\Omega} \lesssim \|R\| + \|r\| + \|R\|^{p/2}. \quad (86)$$

Eléments de la preuve : Ces démonstrations sont très techniques et nécessitent l'introduction de quelques lemmes et inégalités provenant pour certaines de [40]. Elles reposent en particulier sur une inégalité due à Sandri [73] et sur le fait que $\|\boldsymbol{\sigma}\|_X \leq \|f\|_{0,q,\Omega}$ et que $\|\boldsymbol{\sigma}_h\|_X \leq \|f\|_{0,q,\Omega}$. On utilise également les outils usuels tels que la condition inf/sup et l'inégalité de Young. ■

Une seconde étape du travail consiste alors à majorer les normes des résidus en fonctions d'estimateurs d'erreur, c'est-à-dire de quantités connues ou calculées.

Théorème 2.21 $\|r\| = \eta_2$ où $\eta_2 = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_2(K)^q \right)^{1/q}$ et $\eta_2(K) = \|f - P_h^0 f\|_{0,q,K}$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$,

où P_h^0 est l'opérateur de projection de $L^q(\Omega)$ dans M_h , $P_h^0 f$ étant la fonction constante sur chaque triangle K dont la valeur est égale à la valeur moyenne de f sur K .

Eléments de la preuve : La démonstration est ici très simple et repose sur le fait que la divergence de $\boldsymbol{\sigma}_h$ sur une maille de la triangulation est égale à la valeur moyenne de f sur la maille en question. ■

Définition 2.22 Pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, on définit $\eta_1(K)$ par :

$$\begin{aligned} \eta_1(K)^p &= h^p \|A(\boldsymbol{\sigma}_h)\|_{0,p,K}^p + h^p \|\operatorname{curl}(A(\boldsymbol{\sigma}_h))\|_{0,p,K}^p \\ &+ \sum_{E \subset \partial K} h_E \|[[A(\boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{t}]]_E\|_{0,p,E}^p \end{aligned}$$

et on définit η_1 par

$$\eta_1 = \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_1(K)^p \right]^{1/p}.$$

Théorème 2.23

$$\|R\| \lesssim \eta_1. \quad (87)$$

Eléments de la preuve : La démonstration utilise en particulier une décomposition de Helmholtz pour $\boldsymbol{\tau} \in X$ sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla z + \operatorname{curl} \Phi, \quad (88)$$

pour tout $\boldsymbol{\tau} \in (L^q(\Omega))^2$ tel que $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \in L^q(\Omega)$, avec $z \in W^{2,q}(\Omega)$, $\Phi \in W^{1,q}(\Omega)$, qui vérifie la majoration :

$$\|z\|_{W^{2,q}(\Omega)} + \|\Phi\|_{W^{1,q}(\Omega)} \lesssim \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,q,\Omega} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\|_{0,q,\Omega}. \quad (89)$$

Une fois cette décomposition établie, on peut montrer la borne supérieure en utilisant les méthodes habituelles. ■

Pour résoudre numériquement le problème, nous avons eu à introduire une formulation hybride de (79). Le principe d'une telle formulation consiste à élargir l'espace X_h dans lequel on recherche $\boldsymbol{\sigma}_h$ en un espace \tilde{X}_h avec

$$\tilde{X}_h = \{ \boldsymbol{\tau}_h \in [L^q(\Omega)]^2; \boldsymbol{\tau}_{h|K} \in RT_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \}.$$

Ainsi, les composantes normales des fonctions de \tilde{X}_h n'ont pas à être continues à chaque interface entre deux triangles adjacents, ce qui simplifie grandement la construction d'une base de l'espace. Il est alors nécessaire d'introduire un multiplicateur de Lagrange λ comme inconnue supplémentaire qui vit sur le "squelette" de la triangulation, c'est-à-dire sur la réunion de toutes ses arêtes. On montre que cette formulation hybride non linéaire possède une et une seule solution, qui coïncide avec la solution de (79). La résolution numérique de ce problème numérique s'effectue enfin à l'aide d'un procédé itératif appelé schéma de Picard ou méthode des substitutions successives, dont la description précise est donnée dans [29]. On montre en particulier que le système linéaire obtenu à chaque itération n possède bien une unique solution. La méthode de résolution consiste à résoudre un système linéaire pour obtenir λ^n , ce qui permet d'en déduire explicitement $\boldsymbol{\sigma}_{|K}^n$ et u_K^n en fonction de $\lambda_{|\partial K}^n$ pour tout K de la triangulation.

Des tests numériques ont été menés pour prouver la fiabilité des estimateurs développés et consistent à calculer une approximation de u donnée par :

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4} - r^2(\mathbf{x}) \right)^2 e^{-r^2(\mathbf{x})/\varepsilon} & \text{si } r(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } r(\mathbf{x}) > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (90)$$

avec $\varepsilon = 0.05$, $\Omega =]-1/2, 1/2[^2$ et r la distance à l'origine. Pour ce faire, on calcule $f = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ que l'on utilise comme donnée du problème. On vérifie que pour $p > \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$, on a bien $f \in L^q(\Omega)$. Les tests sont menés pour $p = 1.8$. On vérifie que les taux de

convergence obtenus sont bien ceux attendus par la théorie [40]. Suivant le théorème 2.20, on trace sur la figure 23 le ratio r_1 (resp. r_2) défini pour $p = 1.8$ par :

$$r_1 = \frac{\|\sigma_h - \sigma\|_{0,q,\Omega}}{\eta_1^{p/q} + \eta_2^{2/q} + (\eta_2\eta_1)^{1/q}}, \quad r_2 = \frac{\|u - u_h\|_{0,p,\Omega}}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_1^{p/2}}.$$

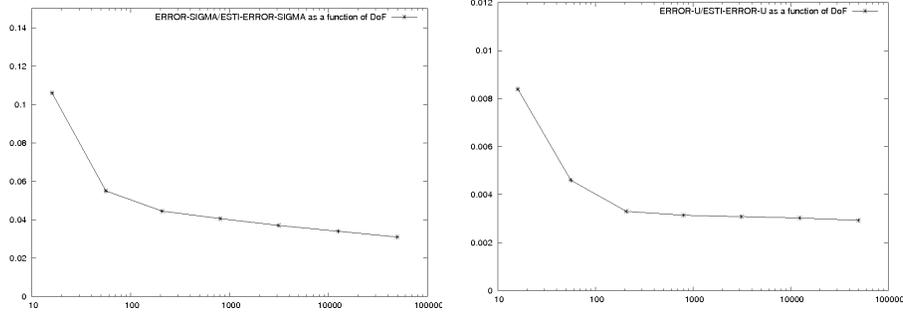


FIG. 23 – r_1 (gauche) et r_2 (droite) en fonction de DoF pour $p = 1.8$.

On voit que quel que soit le ratio r_i choisi ($1 \leq i \leq 2$), il est asymptotiquement constant lorsque le nombre de degrés de liberté associé au maillage augmente. Cela prouve donc la fiabilité de l'estimateur. Pour $p = 3.0$, un test similaire est mené en définissant les ratios selon le théorème 2.19, et la conclusion est tout à fait similaire au cas $p = 1.8$.

2.8 Bibliographie

Références

- [1] <http://www-rocq1.inria.fr/gamma/cdrom/www/bamg/fra.htm>. 1997.
- [2] <http://www-rocq1.inria.fr/gamma/cdrom/www/bl2d-v2/index.html>. 2007.
- [3] Simula+. LAMAV Valenciennes / LPMM Metz. <http://www.univ-valenciennes.fr/lamav/Simula+/>.
- [4] M. Ainsworth and J.T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Wiley Inter-Science, 2000.
- [5] A. Alonso. Error estimators for mixed methods. *Numer. Math.*, 74 :385–395, 1996.
- [6] T. Apel. Interpolation of non smooth functions on anisotropic finite element meshes. *Modél. Math. Anal. Numér.*, 33(6) :1149–1185, 1999.
- [7] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L.D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5) :1749–1779, 2002.
- [8] I. Babuska and W.C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15(4) :736–754, 1978.
- [9] I. Babuska and W.C. Rheinboldt. A posteriori error estimates for the finite element method. *Int. J. Num. Meth. Engrg*, 12 :1597–1615, 1978.
- [10] G.A. Baker, W.N. Jureidini, and O.A. Karakashian. Piecewise solenoidal vector fields and the Stokes problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27 :1466–1485, 1990.
- [11] R. Bank and A. Weizer. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Math. Comp.*, 44 :283–301, 1985.
- [12] R. Beck, R. Hiptmair, R.H.W. Hoppe, and B. Wohlmuth. Residual based a posteriori error estimators for eddy current computation. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 34 :159–182, 2000.
- [13] R. Becker and R. Rannacher. Finite element solution of the incompressible Navier-Stokes equations on anisotropically refined meshes. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 49 :52–62, 1995.
- [14] R. Becker and R. Rannacher. An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numerica*, 10 :1–102, 2001.
- [15] R. Becker, P. Hansbo, and M.G. Larson. Energy norm a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192(5-6) :723–733, 2003.
- [16] R. Becker, P. Hansbo, and R. Stenberg. A finite element method for domain decomposition with non-matching grids. *Modél. Math. Anal. Numér.*, 37 :209–225, 2003.
- [17] H. Borouchaki and P. Laug. The BL2D mesh generator : Beginner’s guide, user’s and programmer’s manual. Technical Report RT-0194, INRIA Rocquencourt - 78153 Le Chesnay, France, 1996.
- [18] D. Braess and R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Raviart-Thomas element. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(6) :2431–2444, 1996.
- [19] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [20] C. Carstensen. A posteriori error estimate for the mixed finite element method. *Math. Comp.*, 66 :465–476, 1997.
- [21] C. Carstensen and G. Dolzmann. A posteriori error estimates for mixed fem in elasticity. *Numer. Math.*, 81(2) :187–209, 1998.
- [22] C. Carstensen and R. Klose. A posteriori finite element error control for the p-Laplace problem *SIAM J. Sci. Comput.*, 25 (3) :792–814, 2003.
- [23] M.J. Castro-Diaz, F. Hecht, B. Mohammadi, and O. Pironneau. Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25(4) :475–491, 1997.
- [24] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1978.
- [25] S. Cochez-Dhont and S. Nicaise. Robust a posteriori error estimations for the Maxwell equations. *Comp. Meth. Applied Mechanics Eng.*, 196 :2583–2595, 2007.

- [26] B. Cockburn, G. Kanschat, D. Schötzau, and C. Schwab. Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40 :319–343, 2002.
- [27] B. Cockburn, G.E. Karniadakis, and C.-W. Shu. The development of discontinuous Galerkin methods. *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, 11, Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [28] M. Costabel and M. Dauge and S. Nicaise. Singularities of Maxwell interfaces problems. *Math. Models. Numer. Anal.*, 33 :627-649, 1999.
- [29] E. Creusé, M. Farhloul, and L. Paquet. A posteriori error estimation for the dual mixed element method for the p -Laplacian in a polygonal domain. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 196 :2570–2582, 2007.
- [30] E. Creusé, G. Kunert, and S. Nicaise. A posteriori error estimation for the Stokes problem : Anisotropic and isotropic discretizations. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 14(9) :1297–1341, 2004.
- [31] E. Creusé and S. Nicaise. Anisotropic a posteriori error estimation for the mixed discontinuous Galerkin approximation of the Stokes problem. *Numerical Methods in Partial Differential Equations*, 22(2) :449–483, 2006.
- [32] E. Creusé and S. Nicaise. A posteriori error estimations of a coupled mixed and standard Galerkin method for second order operators. *J. Comput. Appl. Math.*, In Press, 2007.
- [33] E. Dari, R. Duran, and C. Padra. Error estimators for nonconforming finite element approximations of the Stokes problem. *Math. Comp.*, 64(211) :1017–1033, 1995.
- [34] E. Dari, R. Duran, C. Padra, and V. Vampa. A posteriori error estimators for nonconforming finite element methods. *ESAIM : Math. Mod. and Num. Anal.*, 30(4) :385–400, 1996.
- [35] M. Dobrowolski, S. Gräf, and C. Pflaum. On a posteriori error estimators in the finite element method on anisotropic meshes. *Electronic Transactions Num. Anal.*, 8 :36–45, 1999.
- [36] L. El-Alaoui-Lakhnati. *Analyse d’erreur a priori et a posteriori pour des méthodes d’éléments finis mixtes non conformes*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2005.
- [37] H. El Sossa and L. Paquet. Refined mixed finite element method for the Poisson problem on a polygonal domain with a reentrant corner. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 12(607-645), 2002.
- [38] A. Ern. *Aide mémoire : Éléments finis*. L’usine nouvelle, Dunod, 2005.
- [39] M. Farhloul. A mixed finite element method for a nonlinear Dirichlet problem *IMA J. Numer. Anal.*, 18 :121–132, 1998.
- [40] M. Farhloul and H. Manouzi. On a mixed finite element method for the p -Laplacian. *Canadian applied mathematics quarterly*, 8(1) :67–78, 2000.
- [41] M. Farhloul, S. Nicaise, and L. Paquet. A posteriori error estimation for the dual mixed finite element method of the Stokes problem. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 7-8 :831–846, 2006.
- [42] L. Formaggia, S. Micheletti, and S. Perotto. Anisotropic mesh adaptation in computational fluid dynamics : Application to the advection-diffusion-reaction and the Stokes problems. *Appl. Numer. Math.*, 51(4) :511–533, 2004.
- [43] L. Formaggia and S. Perotto. New anisotropic a priori error estimates. *Numer. Math.*, 89 :641–667, 2001.
- [44] L. Formaggia, S. Perotto, and P. Zunino. An anisotropic a-posteriori error estimate for a convection-diffusion problem. *Comput. Vis. Sci.*, 4(2) :99–104, 2001.
- [45] P.L. Georges and H. Borouchaki. *Delaunay triangulation and meshing - Application to finite element*. Hermes, Paris, 1998.
- [46] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations, Theory and algorithms*, volume 5. Springer Series in Computational Mathematics, 1986.
- [47] P. Hansbo and M.G. Larson. Discontinuous finite element methods for incompressible and nearly incompressible elasticity by use of Nitsche’s method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 191 :1895–1908, 2002.
- [48] P. Houston, D. Schötzau, and T.P. Wihler. Energy norm a posteriori error estimation for mixed discontinuous Galerkin approximations of the Stokes problem. *J. Sci. Comput.*, 22(23) :315–346, 2005.
- [49] C. Johnson. *Numerical solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge, Royaume-Uni, 1987.

- [50] O.A. Karakashian and W.N. Jureidini. A nonconforming finite element method for the stationary Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35 :93–120, 1998.
- [51] O.A. Karakashian and F. Pascal. A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin approximation of second-order elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(6) :2374–2399, 2003.
- [52] D.W. Kelly. The self-equilibration of residuals and complementary a posteriori error estimates in the finite element method. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 20 :1491–1506, 1984.
- [53] G. Kunert. *A posteriori error estimation for anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes*. PhD thesis, Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz, 1998.
- [54] G. Kunert. An a posteriori residual error estimator for the finite element method on anisotropic tetrahedral meshes. *Numer. Math.*, 86(3) :471–490, 2000.
- [55] G. Kunert. Robust a posteriori error estimation for a singularly perturbed reaction–diffusion equation on anisotropic tetrahedral meshes. *Adv. Comp. Math.*, 15(1–4) :237–259, 2001.
- [56] G. Kunert. Robust a posteriori error estimation for a singularly perturbed reaction–diffusion equation on anisotropic tetrahedral meshes. *Adv. Comp. Math.*, 15(1–4) :237–259, 2001.
- [57] G. Kunert. Towards anisotropic mesh construction and error estimation in the finite element method. *Numer. Meth. PDE*, 18 :625–648, 2002.
- [58] P. Ladevèze and D. Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20 :485–509, 1983.
- [59] R.D. Lazarov, J. Pasciak, and P.S. Vassilevski. Iterative solution of a coupled mixed and standard Galerkin discretization method for elliptic problems. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 8 :13–31, 2001.
- [60] P. Monk. A posteriori error indicators for Maxwell’s equations. *J. Comp. Appl. Math.*, 100 :173–190, 1998.
- [61] J.C. Nédélec. Mixed finite element in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 35 :315–341, 1980.
- [62] S. Nicaise and E. Creusé. A posteriori error estimation for the heterogeneous Maxwell equations on isotropic and anisotropic meshes. *Calcolo*, 40 :249–271, 2003.
- [63] S. Nicaise and E. Creusé. Isotropic and anisotropic error estimation of the mixed finite element method for second order operators in divergence form. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 23 :38–62, 2006.
- [64] I. Perugia and D. Schötzau. An hp-analysis of the local discontinuous Galerkin method for diffusion problems. *J. Sci. Comp.*, 17 :561–571, 2002.
- [65] M. Picasso. Anisotropic, adaptive, stabilized finite elements for Stokes problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2003.
- [66] M. Picasso. Numerical study of the effectivity index for an anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator. *Commun. Numer. Meth. Engrg*, 19(1) :13–23, 2003.
- [67] M. Picasso. An anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator : Application to elliptic and parabolic problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(4) :1328–1355, 2003.
- [68] M. Picasso. An adaptive algorithm for the stokes problem using continuous, piecewise linear stabilized finite elements and meshes with high aspect ratio. *Appl. Numer. Math.*, 54 :470–490, 2005.
- [69] M. Randrianarivony. Strengthened Cauchy inequality in anisotropic meshes and application to an a-posteriori error estimator for the Stokes problem. *Preprint SFB393/01–23*, TU Chemnitz, 2001.
- [70] R. Rannacher. A posteriori error estimation in least-squares stabilized finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 166 :99–114, 1998.
- [71] P.A Raviart and J.M Thomas. A mixed finite element method for second order elliptic problems. *Lecture Notes in Mathematics*, 606 :292–315, 1977.
- [72] R. Rodriguez. Some remarks on Zienkiewicz-Zhu estimators. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 10(5) :625–635, 1994.
- [73] D. Sandri. Sur l’approximation numérique des écoulements quasi-Newtoniens dont la viscosité suit la loi puissance ou la loi de Carreau. *Modél. Math. Anal. Numér.*, 27 :131–155, 1993.
- [74] J. Schöberl. A posteriori error estimates for Maxwell equations. Preprint RICAM 2005-10, J. Kepler University, Linz, 2005.

- [75] J. Schöberl, H. Gerstmayr, and R. Gaisbauer. Netgen : automatic mesh generator. <http://www.hpfem.jku.at/netgen/>.
- [76] D. Schötzau, C. Schwab, and A. Toselli. Mixed hp -DGFEM for incompressible flows. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40 :2171–2194, 2003.
- [77] L.R. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of non smooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, 54 :483–493, 1990.
- [78] K.G. Siebert. An a posteriori error estimator for anisotropic refinement. *Numer. Math.*, 73 :373–398, 1996.
- [79] J.M. Thomas. Sur l’analyse numérique des méthodes d’éléments finis mixtes et hybrides. *PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1977*.
- [80] A. Toselli. hp -Discontinuous Galerkin approximations for the Stokes problem. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 12 :1565–1616, 2002.
- [81] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley Teubner, 1996.
- [82] C. Wieners and B. Wohlmuth. The coupling of mixed and conforming finite element discretizations. *Contemp. Math., American Mathematical Society*, 218 :547–554, 1998.
- [83] O. Zienkiewicz and J. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedures for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 24 :337-357, 1987.

3 Perspectives de recherche

Dans ce mémoire ont été abordés quelques problèmes relatifs à la simulation et au contrôle d'écoulements, ainsi qu'à la détermination d'estimateurs d'erreur a posteriori pour les méthodes d'éléments finis. A l'issue de ces travaux de recherche, plusieurs perspectives s'ouvrent. J'en donne ici quatre sur lesquelles j'ai commencé à travailler ou que j'aimerais aborder prochainement.

Concernant la simulation en mécanique des fluides, les écoulements de la famille "modèles faible Mach" dont j'ai brièvement parlé dans la partie 1.3.2 méritent beaucoup d'attention. Les phénomènes physiques en jeu sont nombreux et intéressants, notamment d'un point de vue de la sécurité et de l'environnement (pollution, avalanches, incendies confinés,...voir par exemple [6, 7, 11, 14]). De plus, beaucoup de choses restent à faire, aussi bien du point de vue analytique que numérique. Depuis septembre 2007, je travaille donc activement dans le cadre de ma délégation au sein de l'équipe SIMPAF de l'INRIA Futurs Lille à la mise au point d'une méthode numérique performante pour l'approximation des solutions de ces équations, généralisant le schéma de résolution décrit dans la partie 1.3.1. Nous avons la chance d'être aidés pour le développement du code par un ingénieur informaticien recruté pour un an, et espérons ainsi une progression rapide des résultats. Nous désirons en particulier exploiter l'aspect non structuré du schéma numérique en utilisant des techniques de maillage adaptatif permettant une résolution suffisante au niveau des interfaces comme celles présentées sur les figures 5 et 6 de ce mémoire. Une autre généralisation possible du modèle consiste à introduire une tension de surface dans les équations de quantité de mouvement. La question des conditions aux limites à imposer au niveau d'une paroi qui touche une interface me paraît encore être un problème ouvert. Enfin, il serait intéressant de comparer les résultats obtenus à ceux provenant de la description des phénomènes à l'échelle microscopique. En effet, lorsque le libre parcours moyen des particules tend vers zéro, certains modèles cinétiques convergent vers un modèle macroscopique de même type que ceux que nous étudions. Ce dernier point pourra être initié dans l'équipe SIMPAF compte-tenu des compétences locales existantes.

Le contrôle actif en mécanique des fluides entre clairement dans une phase de transfert de nos laboratoires vers le monde industriel. En écrivant cela, je pense particulièrement à l'industrie automobile, pour laquelle les procédés de contrôle actifs sont les prolongements naturels des procédés passifs. Je crois qu'il y a fort à espérer dans des techniques de contrôle alliant un dispositif le plus simple possible à un coût de production très faible, permettant une économie d'énergie qui, même très modeste, intéressera au plus haut point constructeurs et automobilistes. Pour ce faire, les recherches que nous avons entreprises sur le corps de Ahmed (partie 1.7) se poursuivent dans le cadre du programme de recherche et d'innovation dans les transports terrestres. Nous passons d'abord aux simulations 3D. La thèse de Delphine Depeyras actuellement en cours à l'Université Bordeaux 1 sous la direction de Charles-Henri Bruneau constitue une première contribution en ce sens, le code étant déjà quasiment opérationnel. Puis en continuant à travailler sur la modélisation numérique d'un jet pulsé, qui doit en particulier permettre une simulation stable au sein du schéma numérique de résolution. Enfin, en affinant la localisation du capteur et la fonction de transfert à utiliser entre le signal mesuré au capteur et celui exercé au niveau de l'actionneur. Le tout en utilisant des profils plus réalistes et des nombres de Reynolds plus élevés.

Le thème de recherche des estimateurs d'erreur a posteriori a encore de beaux jours devant lui. Les travaux que nous avons menés ont porté sur les estimateurs explicites résiduels. Ceux-ci sont tout à fait indiqués pour l'utilisation d'algorithmes de raffinement adaptatifs, car ils permettent de raffiner les mailles dans lesquelles l'erreur est la plus importante. Ils ne sont pas

chers à mettre en oeuvre et leur exploitation dans les cas pratiques assurent une décroissance de l'erreur. Néanmoins, comme nous avons déjà eu l'occasion de le dire, leur principal point faible réside dans les constantes d'encadrement dont la dépendance par rapport à la régularité du maillage et/ou aux coefficients de l'équation aux dérivées partielles n'est pas explicite. Il peut donc en résulter un estimateur insuffisamment robuste, empêchant un réel contrôle de l'erreur globale. Pour remédier à cela, il faut privilégier des outils plus performants de ce point de vue. On pense alors aux estimateurs résiduels implicites comme les estimateurs basés sur l'utilisation de flux équilibrés, éventuellement associés à des techniques de post-processing et de reconstruction [1, 3, 4, 5, 9, 12]. On peut ainsi espérer parvenir à des estimateurs asymptotiquement exacts, c'est-à-dire tels que le ratio de l'erreur par l'estimateur tende vers un à mesure que le maillage se raffine. Ceci permettrait en outre de traiter le cas des maillages anisotropes, la constante ne dépendant en particulier plus de la régularité du maillage. Dans ce dernier cas, une autre priorité est d'utiliser l'information non seulement sur l'erreur, mais aussi sur la direction d'espace dans laquelle cette erreur est prédominante. Ainsi il est possible d'envisager des raffinements anisotropes soit cartésiens comme dans les travaux de Georgoulis *et al* [10], soit non structurés comme dans ceux de Picasso [13]. Cette dernière technique utilise les résultats sur les estimations d'erreur a priori anisotropes obtenues par Formaggia et Perotto [8] faisant intervenir la matrice hessienne des dérivées secondes. C'est à ce prix que les maillages anisotropes disponibles sur le marché (voir par exemple [2]) pourront donner le meilleur d'eux même en mettant en oeuvre des techniques performantes de raffinement adaptatif.

Enfin, je crois crucial pour les équipes de nos laboratoires de recherche de fédérer nos savoir faire dans le domaine du développement des codes de calcul. C'est ce que nous avons commencé à faire au niveau du LAMAV, mais il faut aller plus loin. Les tests numériques qui illustrent quasi systématiquement la fin de nos publications (et ce mémoire d'ailleurs!) représentent un investissement considérable au regard du nombre de pages qu'ils représentent, qui pourrait sans doute être significativement réduit. En ce qui concerne les éléments finis, beaucoup de travail a déjà été réalisé par de nombreuses équipes qui ont donné naissance à une multitude de codes mis gratuitement à la disponibilité de tous (par exemple FreeFem++, GetFem++, Melina, Ofeli, OpenFEM, NGSolve, Rheolef, Simula+,...). Des journées de présentation de ces différents outils sont d'ailleurs régulièrement organisées par la SMAI. Je pense important de promouvoir des coopérations entre les différents laboratoires concernés par ces développements numériques, pour une plus grande efficacité dans les développements futurs. Parallèlement à cela, et sans contradiction aucune, il est nécessaire de développer des codes numériques spécifiques pour atteindre des capacités de simulation optimisant les temps d'exécution en fonction de la nature de certains problèmes précis à résoudre. A ce titre, la collaboration entre mathématiciens appliqués et ingénieurs informaticiens m'apparaît être une piste prometteuse.

Références

- [1] M. Ainsworth. A posteriori error estimation for discontinuous Galerkin finite element approximation. *SIAM J. Numer. Anal.* 45(4), 1777-1798, 2007.
- [2] BAMG, BL2D-V2. <http://www-c.inria.fr/gamma/cdrom/projs/gamma/logiciel-fra.php>
- [3] D. Braess and J. Shöberl. Equilibrated residual error estimator for Maxwell's equations. *Preprint RICAM 2006-19*, Austrian Acad. Sciences, July 2006.
- [4] S. Cochez-Dhondt and S. Nicaise. Equilibrated error estimators for discontinuous Galerkin methods *soumis*.
- [5] S. Cochez-Dhondt and S. Nicaise. A posteriori error estimators based on equilibrated fluxes *soumis*.
- [6] J. Etienne and E.J. Hopfinger and P. Saramito. Numerical simulations of high density ratio lock-exchange flows. *Phys. Fluids* 17(3), 2005.

- [7] J. Etienne and P. Saramito and E.J. Hopfinger. Numerical simulation of dense clouds on steep slopes : Application to the powder-snow avalanches. *Annals of Glaciology* 38(1) :379–392, 2004.
- [8] L. Formaggia and S. Perotto. New anisotropic a priori error estimates. *Numer. Math.*, 89, 641–667, 2001.
- [9] F. Fierro and A. Veerer. A posteriori error estimators, gradient recovery by averaging, and super-convergence. *Numer. Math.*, 103, 267–298, 2006.
- [10] E.H. Georgoulis and E. Hall and P. Houston. Discontinuous Galerkin Methods on *hp*-Anisotropic Meshes II : A posteriori error analysis and adaptivity. *preprint*.
- [11] I. Gasser, J. Struckmeier, and I. Teleaga. Modelling and simulation of fires in vehicle tunnels. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 44(3) :277–296, 2004.
- [12] R. Luce and B. Wohlmuth. A local a posteriori error estimator based on equilibrated fluxes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42, 1394–1414, 2004.
- [13] M. Picasso. An anisotropic a priori error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator : Application to elliptic and parabolic problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(4), 1328–1355, 2003.
- [14] I. Teleaga, M. Seaid, I. Gasser, A. Klar, and J. Struckmeier. Radiation models for thermal flows at low Mach number. *J. Comp. Phys.*, 215(2) :506–525, 2006.